ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, ТОМ 64, № 3, с. 514–525

УДК 517.956.4

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

 А. Н. Конёнков[1,*]

[1]390000 Рязань, ул. Свободы, 46,
Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина, Россия
*e-mail: an.konenkov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.
Переработанный вариант 15. 07.2023 г.
Принята к публикации 20.10.2023 г.

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности с нулевой правой частью. Начальная функция предполагается принадлежащей пространству обобщенных функций медленного роста. Исследуется задача об определении носителя начальной функции по значениям решения в некоторый фиксированный момент времени $T > 0$. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы носитель лежал в заданном выпуклом компакте. Эти условия формулируются в терминах скорости убывания решения на бесконечности. Найдена точная константа в экспоненте для гипотезы Ландиса–Олейник о несуществовании сверхбыстро убывающих решений. Библ. 19.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, обратная задача, финальное наблюдение, метод теплового ядра, выпуклые множества, опорная функция.

DOI: 10.31857/S0044466924030112, **EDN:** XFZFZD

В слое $D_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается задача Коши

$$u_t - \Delta u = 0,\ 0 < t \le T,\ u\,|_{t=0} = \psi \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right), \tag{1}$$

где $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство обобщенных функций медленного роста в $\mathbb{R}^n$. Начальное условие понимается как

$$\lim_{t\to 0+}\left(u(\cdot,t),\varphi\right) = \left(\psi,\varphi\right)$$

для всех φ из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Решения предполагаются принадлежащими классу функций, допускающему не более чем полиномиальный рост при $x \to \infty$ и $t \to 0$. В этом классе решение задачи Коши существует и единственно для любой начальной функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, см. ниже в разд. 2 теорему Мацузавы.

В работе изучается следующая обратная задача. По значениям температуры в момент времени $T > 0$ требуется определить, была ли температура в начальный момент времени отлична от нуля лишь на некотором ограниченном множестве. И если да, то что можно сказать о форме нагретой области? Эту задачу можно рассматривать как вопрос об определении мгновенного источника тепла, сосредоточенного на плоскости $t = 0$. Постановки задач о нахождении источника для различных типов уравнений в ограниченных и неограниченных областях приведены в [1-3]. В частности, рассматриваемый в настоящей работе вопрос аналогичен обратной задаче для уравнения Лапласа о нахождении распределения притягивающих масс по их внешнему потенциалу, исследовавшейся многими авторами, см. [1, 2]. С той, однако, разницей, что в рассматриваемой нами постановке требуется найти только часть информации об источнике.

Для заданного выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ мы устанавливаем необходимое и достаточное условие на значения решения u задачи (1) в момент времени $T > 0$ для того, чтобы носитель начальной функции ψ лежал в K. Это условие заключается в достаточно быстром убывании решения $u(x,T)$ при $x \to \infty$. Приведены две формы соответствующей оценки. В первой скорость убывания описывается с помощью функции расстояния до K, во второй – с помощью опорной функции множества K.

Е.М. Ландис и О.А. Олейник [4] для параболических уравнений второго порядка выдвинули гипотезу о несуществовании сверхбыстро убывающих решений. А именно, если u – ограниченное решение однородного параболического уравнения в $\bar{D}_T$ и существуют положительные постоянные C, ε такие, что $|u(x,T)| \le Ce^{-|x|^{2+\varepsilon}}$, то $u \equiv 0$ в $\bar{D}_T$. При этом указывалось, что для справедливости гипотезы на коэффициенты уравнения должны быть наложены подходящие условия на бесконечности. Эта гипотеза усиливает свойство единственности решения задачи Коши для параболических уравнений с обратным направлением времени: если $u(x,T) = 0$, то $u \equiv 0$ в $\bar{D}_T$, см., например, [5] и цитированную там литературу.

Для уравнения теплопроводности гипотеза Ландиса–Олейник была доказана в [6], а для параболических уравнений с переменными коэффициентами в [7, 8]. Во всех этих статьях тривиальность решения была установлена при условии $|u(x,T)| \le C_k e^{-k|x|^2}$ для всех $k \ge 1$. В настоящей работе из результатов о локализации начального условия мы получаем, что достаточным условием тривиальности ограниченного решения уравнения теплопроводности в слое D_T является выполнение неравенства $|u(x,T)| \le C(1+|x|)^N e^{-|x|^2/(4T)}$, причем постоянная в экспоненте является точной.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОЦЕНКИ

Для $z \in \mathbb{C}^n$ и $t > 0$ обозначим

$$\Gamma(z,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\langle z,z\rangle}{4t}}.$$

Здесь и далее для $z = (z_1,\ldots,z_n), w = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $w = z_1w_1 + \ldots + z_nw_n$. При фиксированном $t > 0$ решение u задачи Коши (1), представимое в виде свертки фундаментального решения с начальной функцией $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, может быть продолжено до целой функции $u(z,t) = (\Gamma(z-\cdot,t),\psi)$. В этом разделе мы устанавливаем некоторые оценки функций комплексного переменного, которые нам понадобятся далее при исследовании решения $u(z,t)$ и преобразования Фурье—Лапласа от него.

Лемма 1. *Справедливы оценки*

$$\left|\partial_z^k \Gamma(z,t)\right| \le C_{n,k}\left(|z| + t^{1/2}\right)^{|k|} t^{-|k|-n/2} e^{-\frac{\operatorname{Re}\langle z,z\rangle}{4t}},$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\xi^N \partial_z^k \Gamma(z-\xi,t)\right| \le C_{k,n,N}\left(|z| + t^{1/2}\right)^{N+|k|} t^{-|k|-n/2} e^{\frac{|\operatorname{Im} z|^2}{4t}},$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$, $t > 0$, $N \ge 0$. *Здесь* $k = (k_1,\ldots,k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ *и* $\partial_z^k = \partial_{z_1}^{k_1}\ldots\partial_{z_n}^{k_n}$, $|z| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2}$, $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1,\ldots,\operatorname{Re} z_n)$, $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1,\ldots,\operatorname{Im} z_n)$.

Доказательство. Из равенства

$$\partial_z^k \Gamma(z,t) = (-1)^{|k|}(4\pi t)^{-n/2}\left(2t^{1/2}\right)^{-|k|} H_{k_1}\left(\frac{z_1}{2t^{1/2}}\right)\ldots H_{k_n}\left(\frac{z_n}{2t^{1/2}}\right) e^{-\frac{\langle z,z\rangle}{4t}},$$

где $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}\dfrac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}$ – полиномы Эрмита, получаем

$$\left|\partial_z^k \Gamma(z,t)\right| \le Ct^{-|k|-n/2}\left(|z_1| + t^{1/2}\right)^{k_1}\ldots\left(|z_n| + t^{1/2}\right)^{k_n} e^{-\frac{\operatorname{Re}\langle z,z\rangle}{4t}} \le$$

$$\le C\left(|z| + t^{1/2}\right)^{|k|} t^{-|k|-n/2} e^{-\frac{\operatorname{Re}\langle z,z\rangle}{4t}}.$$

Для $z = x + iy$, используя равенство $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\xi|^m e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} = C_{m,n}t^{m/2}, m \ge 0,$ заключаем, что

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\xi\right|^N\left|\partial_z^k\Gamma\left(z-\xi,t\right)\right| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|x-\xi\right|^N\left|\partial_x^k\Gamma\left(\xi+iy,t\right)\right| \le$$

$$\le C\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left(\left|x\right|^N+\left|\xi\right|^N\right)t^{-|k|-n/2}\left(\left|z\right|+t^{1/2}\right)^{|k|}e^{\frac{|y|^2-|\xi|^2}{4t}} \le$$

$$\le C\left(\left|z\right|+t^{1/2}\right)^{N+|k|}t^{-|k|-n/2}e^{\frac{|y|^2}{4t}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* f *одного комплексного переменного является аналитической в угле* $A=\{0<\arg z<\pi/2\}$ *и непрерывна в* $\overline{A}$. *Если для некоторых постоянных* $M, C, a>0$ *справедливы оценки*

$$\left|f(z)\right|\le Ce^{a\mathrm{Re}^2 z},\quad z\in A, \tag{2}$$

$$\left|f(z)\right|\le M,\quad z\in\partial A, \tag{3}$$

то

$$\left|f(z)\right|\le M,\quad z\in\overline{A}. \tag{4}$$

Доказательство. Для малого $\alpha>0$ в угле $A_\alpha=\{0<\arg z<\pi/2-\alpha\}$ рассмотрим функцию $g(z)=f(z)e^{iabz^2}$, где $b=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$. Для $z=x+iy$

$$\left|g(z)\right|=\left|f(z)\right|e^{-2abxy},$$

откуда имеем

$$\left|g(z)\right|\le\left|f(z)\right|\le Ce^{a|z|^2}\quad\text{в } A_\alpha.$$

На верхней стороне угла A_α имеем

$$\left|g\left(re^{i(\pi/2-\alpha)}\right)\right|\le\left|f\left(re^{i(\pi/2-\alpha)}\right)\right|e^{-abr^2\sin 2\alpha}\le Ce^{ar^2(\sin^2\alpha-b\sin 2\alpha)}=C.$$

По теореме Фрагмена–Линделефа [9, гл. 8, § 6] получим

$$\left|g(z)\right|=\left|f(z)\right|e^{-axy\mathrm{tg}\alpha}\le\max\{C,M\},\quad z\in\overline{A}_\alpha.$$

Зафиксировав $z\in A$ и переходя к пределу $\alpha\to 0+$ заключаем, что $|f(z)|\le\max\{C,M\}$ в A. Применяя теорему Фрагмена–Линделефа еще раз, получим (4).

Лемма доказана.

Для множества $K\subset\mathbb{R}^n$ обозначим через $d_K(x)=\mathrm{dist}(x,K)$ функцию расстояния до K.

Теорема 1. *Пусть целая функция* n *комплексных переменных* f *для некоторого непустого выпуклого компакта* $K\subset\mathbb{R}^n$ *и постоянных* $N\ge 0$, C, $a>0$, *удовлетворяет оценкам*

$$\left|f(x)\right|\le C\left(1+\left|x\right|\right)^N e^{-ad_K^2(x)},\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\left|f(z)\right|\le C\left(1+\left|z\right|\right)^N e^{a|\mathrm{Im}\, z|^2},\quad z\in\mathbb{C}^n. \tag{6}$$

Тогда

$$\left|f(z)\right| \le C_1\left(1+|z|\right)^{2N} e^{a\left(|\operatorname{Im} z|^2 - d_K^2(\operatorname{Re} z)\right)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{7}$$

где C_1 *зависит от* C , n , N *и компакта* K .

Доказательство. Если $x \in K$, то (7) для точки $z = x + iy$ вытекает из (6). Пусть $x \notin K$ и O — ближайшая к x точка K .

Обозначим через γ гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящую через O и ортогональную отрезку Ox . Выберем декартову систему координат $(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ с центром в точке O такую, что точка x лежит на луче $O\tilde{x}_n$. В ней точка x имеет координаты $\tilde{x} = (0,\ldots,0,\tilde{x}_n)$, где $\tilde{x}_n = d_K(x)$.

Плоскость γ является опорной для K . В самом деле, если бы существовала точка $P \in K$, принадлежащая полупространству $\tilde{x}_n > 0$, то, в силу выпуклости K , весь отрезок OP принадлежал бы K . Это противоречит предположению, что точка O является ближайшей к x точкой K . Следовательно, обозначая функцию расстояния до K в новых координатах той же буквой, для всех точек $\tilde{s} = (0,\ldots,0,\tilde{s}_n)$ на положительном луче $O\tilde{x}_n$, имеем $d_K(\tilde{s}) = \tilde{s}_n$.

В $\mathbb{C}^n$ выберем координаты

$$\tilde{z}_j = \tilde{x}_j + iy_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Положим $\tilde{z}' = (\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n-1})$ и обозначим через $\tilde{f}_n$ ограничение f на плоскость $\tilde{z}_1 = iy_1,\ldots,\tilde{z}_{n-1} = iy_{n-1}$. Так как точка $x \notin K$ выбирается произвольно, достаточно доказать (7) для $\tilde{f}_n$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\tilde{z}_n \ge 0$ при любых значениях $y_1,\ldots,y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Если K лежит в открытом шаре $B_R(0)$ радиуса R с центром в нуле, то для точки $z = x + iy$ ее координаты $\tilde{z}$ удовлетворяют неравенствам

$$C_1\left(1+|\tilde{z}|\right)^N \le \left(1+|z|\right)^N \le C_2\left(1+|\tilde{z}|\right)^N,$$

где $C_i = C_i(n,N,R)$ и, по условию,

$$\left|\tilde{f}_n(\tilde{z}_n)\right| \le C\left(1+|\tilde{z}_n|\right)^N \left(1+|\tilde{z}'|\right)^N e^{a\sum_{j=1}^n y_j^2}, \quad \tilde{z}_n \in \mathbb{C},$$

$$\left|\tilde{f}_n(\tilde{x}_n)\right| \le C\left(1+|\tilde{x}_n|\right)^N e^{-a\tilde{x}_n^2}, \quad \tilde{x}_n \ge 0.$$

Функция $g(\tilde{z}_n) = (1+\tilde{z}_n)^{-N}\tilde{f}(\tilde{z}_n)e^{a\tilde{z}_n^2}$ удовлетворяет в угле $A_1 = \{0 < \arg\tilde{z}_n < \pi/2\}$ условию леммы 2 с постоянной

$$M = C\left(1+|\tilde{z}'|\right)^N e^{a\sum_{j=1}^n y_j^2},$$

что проверяется с использованием неравенства $1+|\tilde{z}_n| \le 2|1+\tilde{z}_n|$, справедливого при $\operatorname{Re}\tilde{z}_n \ge 0$. Следовательно,

$$\left|\tilde{f}_n(\tilde{x}_n + iy_n)\right| \le C\left(1+|\tilde{z}'|\right)^N \left(1+|\tilde{z}_n|\right)^N e^{a\sum_{j=1}^n y_j^2} \left|e^{-a\tilde{z}_n^2}\right| \le$$

$$\le C\left(1+|z|\right)^{2N} e^{a\sum_{j=1}^n y_j^2 - a(\tilde{x}_n^2 - y_n^2)} = C\left(1+|z|\right)^{2N} e^{a|y|^2 - ad_K^2(x)}.$$

Случай угла $A_2 = \{-\pi/2 < \arg\tilde{z}_n < 0\}$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

В работах [10-12] Т. Мацузава охарактеризовал некоторые классы обобщенных функций и гиперфункций в терминах возможного роста решений задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией из данного класса. Этот подход, получивший название метода теплового ядра, использовался затем многими авторами для описания различных пространств обобщенных функций, см. [13] и цитированную там литературу. Мы будем использовать следующую характеризацию функций из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [14].

Теорема (Мацузава). *Пусть* $\psi \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ *и* $u(x,t) = (\Gamma(x - \cdot,t),\psi)$. *Тогда функция* $u(x,t) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\right)$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\left(\partial_t - \Delta\right)u(x,t) = 0$ *при* $t > 0$;
2) $u(\cdot,t) \to \psi$ *в* $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $t \to 0+$;
3) *существуют положительные константы* L, N *и* C *такие, что*

$$\left|u(x,t)\right| \le Ct^{-L}\left(1+|x|\right)^N, \quad (x,t) \in D_1. \tag{8}$$

Обратно, для функции $u(x,t) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\right)$, *удовлетворяющей* 1) *и* 3), *существует единственное распределение* ψ *из* $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ *такое, что* $(\Gamma(x - \cdot,t),\psi) = u(x,t)$.

Очевидно, в формулировке теоремы можно заменить D_1 на произвольный слой D_T.

Обобщенные функции с компактным носителем были охарактеризованы подобным образом в [15]. Следующее утверждение является уточнением результата из этой работы. А именно, в оценке улучшается показатель экспоненты с $-d_K^2(x)/8t$ до $-d_K^2(x)/4t$.

Теорема 2. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^n$ *— непустой выпуклый компакт и* $\operatorname{supp}\psi \subset K$. *Тогда для решения* $u(x,t) = (\Gamma(x - \cdot,t),\psi)$ *задачи Коши* (1) *справедлива оценка*

$$\left|u(x,t)\right| \le Ct^{-L}\left(1+|x|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \le T. \tag{9}$$

Доказательство. При $d_K(x) \le t^{1/2}$ из (8) получаем

$$\left|u(x,t)\right| \le Ct^{-L}\left(1+|x|\right)^N \le C_1 t^{-L}\left(1+|x|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}.$$

Существует семейство функций $\mu_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, каждая из которых равна единице в некоторой окрестности K, и такова, что $\mu_\varepsilon(x) = 0$ при $d_K(x) \ge \varepsilon$, причем [16, гл. 1, § 4]

$$\left|\partial_x^k \mu_\varepsilon(x)\right| \le C_k \varepsilon^{-|k|},$$

где постоянные C_k не зависят от ε.

Пусть $d_K(x) > t^{1/2} > \varepsilon > 0$ и $K \subset B_R(0)$. Положим $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | d_K(x) \le \varepsilon\} \subset B_{R+t^{1/2}}(0)$. По теореме Л. Шварца [17, гл. 2, § 8] любая обобщенная функция $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет конечный порядок и существуют числа $N \ge 0$, $C > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}
\left|u(x,t)\right| &= \left|\left(\Gamma(x - \cdot,t)\mu_\varepsilon,\psi\right)\right| \le \\
&\le C \sup_{|k|\le N,\, y\in\mathbb{R}^n} \left(1+|y|\right)^N \left|\partial_y^k\left[\Gamma(x-y,t)\mu_\varepsilon(y)\right]\right| = \\
&= C \sup_{|k|\le N,\, y\in K_\varepsilon} \left(1+|y|\right)^N \left|\partial_y^k\left[\Gamma(x-y,t)\mu_\varepsilon(y)\right]\right| \le \\
&\le Ct^{-L}\left(1+R+t^{1/2}\right)^N e^{-\frac{(d_K(x)-\varepsilon)^2}{4t}} \times \\
&\times \sum_{|k|\le N} \varepsilon^{-|k|}\left(R+|x|+t^{1/2}\right)^{N-|k|}.
\end{aligned}$$

Нужная оценка получается, если положить $\varepsilon = t/(d_K(x)+t^{1/2})$ и использовать неравенство $d_K(x) \le |x| + R$:

$$\left|u(x,t)\right| \le Ct^{-L_1}\left(1+|x|\right)^{N_1} e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}+\frac{d_K(x)}{2(d_K(x)+t^{1/2})}-\frac{t}{4(d_K(x)+t^{1/2})^2}} \le$$

$$\le Ct^{-L_1}\left(1+|x|\right)^{N_1} e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}.$$

Теорема доказана.

Получим теперь необходимое и достаточное условие принадлежности носителя начальной функции заданному выпуклому компакту K. Отметим, что в методе теплового ядра [15] для описания обобщенных функций с компактным носителем используются значения решения $u = (\Gamma(x-\cdot,t),\psi)$ во всем слое D_T. Здесь же требуется знание решения лишь в один момент времени.

Обозначим через $h_K(x) = \sup_{y\in K}(x,y)$ опорную функцию выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть* u *— решение задачи Коши* (1)*, удовлетворяющее для некоторых постоянных* $C>0, N, L \ge 0$ *оценке*

$$\left|u(x,t)\right| \le C\left(1+|x|\right)^N t^{-L}, \quad (x,t)\in D_T, \tag{10}$$

и $K\subset\mathbb{R}^n$ *— непустой выпуклый компакт. Тогда* $\operatorname{supp}\psi\subset K$*, если и только если существуют константы* $C_1>0,\, N_1\ge 0$ *такие, что*

$$\left|u(x,T)\right| \le C_1\left(1+|x|\right)^{N_1} e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}}, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2. Установим достаточность. Пусть выполнено условие (11). По теореме Мацузавы при выполнении (10) решение u может быть представлено в виде потенциала Пуассона $(\Gamma(x-\cdot,T),\psi)$ для некоторой функции $\psi\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. По теореме Л. Шварца

$$\left|u(x+iy,T)\right| = \left|\left(\Gamma(x+iy-\cdot,T),\psi\right)\right| \le$$

$$\le C \sup_{|k|\le N,\,\xi\in\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|\right)^N\left|\partial_x^k\Gamma(x+iy-\xi,T)\right| \le$$

$$\le CT^{-L}\left(|x+iy|+T^{1/2}\right)^{N_1} e^{\frac{|y|^2}{4T}} \le$$

$$\le C\left(|x+iy|+1\right)^{N_1} e^{\frac{|y|^2}{4T}}.$$

Учитывая (11), заключаем, что функция $u(z,T)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно,

$$\left|u(z,T)\right| \le C\left(|z|+1\right)^N e^{\frac{|y|^2-d_K^2(x)}{4T}}, \quad z\in\mathbb{C}^n.$$

Рассмотрим преобразование Фурье–Лапласа от решения $u(z,T)$:

$$\tilde u(\xi+i\eta,T) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,T)e^{-i\langle\xi+i\eta,x\rangle}dx.$$

Так как функция $u(x+iy,T)$ быстро убывает при $x\to\infty$, то можно сдвинуть плоскость интегрирования:

$$\tilde u(\xi+i\eta,T) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+iy,T)e^{-i\langle\xi+i\eta,x+iy\rangle}dx.$$

Поскольку $\left|e^{-i\langle\xi+i\eta,x+iy\rangle}\right| = e^{(x,\eta)+(y,\xi)}$, то получим

$$\left|\tilde u(\xi+i\eta,T)\right| \le Ce^{(y,\xi)}\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x+iy,T)\right|e^{(x,\eta)}dx \le$$

$$\le Ce^{(y,\xi)+\frac{|y|^2}{4T}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x+iy|\right)^N e^{(x,\eta)-\frac{d_K^2(x)}{4T}}dx.$$

Минимизируя выражение $(y,\xi)+\dfrac{|y|^2}{4T}$ по y, получим $y^*=-2T\xi$, $e^{(y^*,\xi)+\frac{|y^*|^2}{4T}}=e^{-T|\xi|^2}$ и

$$\left|\tilde{u}(\xi+i\eta,T)\right|\le Ce^{-T|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT\xi|\right)^N e^{(x,\eta)-\frac{d_K^2(x)}{4T}}dx=$$

$$=Ce^{-T|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT\xi+2T\eta|\right)^N e^{(x+2T\eta,\eta)-\frac{d_K^2(x+2T\eta)}{4T}}dx=$$

$$=Ce^{-T|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N \sup_{a\in K}e^{(x-a,\eta)+(a,\eta)-\frac{|x+2T\eta-a|^2}{4T}+2T|\eta|^2}dx\le$$

$$\le Ce^{-T|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N \sup_{a\in K}e^{(a,\eta)}\times$$

$$\times\sup_{a\in K}e^{(x-a,\eta)-\frac{|x-a|^2}{4T}-(x-a,\eta)-T|\eta|^2+2T|\eta|^2}dx=$$

$$=Ce^{T|\eta|^2-T|\xi|^2+h_K(\eta)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N \sup_{a\in K}e^{-\frac{|x-a|^2}{4T}}dx=$$

$$=Ce^{T|\eta|^2-T|\xi|^2+h_K(\eta)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}}dx\le$$

$$\le Ce^{-T|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N \sup_{a\in K}e^{(a,\eta)}\times$$

$$\times\sup_{a\in K}e^{(x-a,\eta)-\frac{|x-a|^2}{4T}-(x-a,\eta)-T|\eta|^2+2T|\eta|^2}dx=$$

$$=Ce^{T|\eta|^2-T|\xi|^2+h_K(\eta)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N \sup_{a\in K}e^{-\frac{|x-a|^2}{4T}}dx=$$

$$=Ce^{T|\eta|^2-T|\xi|^2+h_K(\eta)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}}dx.$$

Пусть $K\subset B_R(0)$. Разделим получившийся интеграл на две части и оценим их по отдельности:

$$\int_{B_{2R}(0)}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}}dx\le$$

$$\le C\int_{B_{2R}(0)}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N dx\le$$

$$\le CR^n\left(1+|R|+2T|\xi+i\eta|\right)^N\le C\left(1+|\xi+i\eta|\right)^N,$$

а для точек вне шара $B_{2R}(0)$ расстояние $d_K(x)\ge|x|/2$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}(0)}\left(1+|x-2iT(\xi+i\eta)|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}}dx\le$$

$$\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^N+2T|\xi+i\eta|^N\right)e^{-\frac{|x|^2}{16T}}dx\le C\left(1+|\xi+i\eta|\right)^N.$$

Окончательно получаем

$$\left|\tilde{u}(\xi+i\eta,T)\right| \le C\left(1+|\xi+i\eta|\right)^N e^{h_K(\eta)+T(|\eta|^2-|\xi|^2)}.$$

С другой стороны, из равенства $u(x,T)=(\Gamma(x-\cdot,T),\psi)$ следует, что

$$\tilde{u}(\xi,T)=\tilde{\Gamma}(\xi,T)\tilde{\psi}(\xi)=e^{-T|\xi|^2}\tilde{\psi}(\xi).$$

В левой части стоит целая функция. Поэтому $\tilde{\psi}$ также можно продолжить до целой функции по формуле

$$\tilde{\psi}(\xi+i\eta)=e^{T\langle\xi+i\eta,\xi+i\eta\rangle}\tilde{u}(\xi+i\eta,T),$$

причем

$$\left|\tilde{\psi}(\xi+i\eta)\right| = e^{T(|\xi|^2-|\eta|^2)}\left|\tilde{u}(\xi+i\eta,T)\right| \le$$

$$\le C\left(1+|\xi+i\eta|\right)^N e^{T(|\xi|^2-|\eta|^2)}e^{h_K(\eta)+T(|\eta|^2-|\xi|^2)} \le$$

$$\le C\left(1+|\xi+i\eta|\right)^N e^{h_K(\eta)}.$$

По теореме Пэли–Винера–Шварца [16, гл. 7, § 3] полученная оценка на $\tilde{\psi}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы $\operatorname{supp}\psi\subset K$.

Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что если для решения задачи Коши (1) выполнено (10) и для некоторого момента времени $t\in(0,T]$ справедлива оценка

$$\left|u(x,t)\right| \le C\left(1+|x|\right)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

то решение удовлетворяет (возможно, с другими константами) неравенству вида (9) .

Сформулируем полученное условие на скорость убывания решения в терминах опорной функции h_K . Она более удобна для практического определения формы выпуклого компакта K , чем расстояние d_K . Во-первых, поскольку функция h_K однородна степени один, достаточно найти ее значения на единичной сфере S^{n-1} . Во-вторых, ее значение в точке $\zeta\in S^{n-1}$ задает опорное полупространство $(x,\zeta)\le h_K(\zeta)$, которому принадлежит искомое множество K , причем пересечение всех опорных полупространств равно K .

При $x\to\infty$ расстояние $d_K(x)$ растет примерно как $|x|$. Установим более точную асимптотику.

Теорема 4. *Пусть $K\subset\mathbb{R}^n$ – непустой выпуклый компакт. Тогда*

$$d_K(x)=|x|-h_K\left(\frac{x}{|x|}\right)+O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x\to\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Выберем R таким, чтобы $K\subset B_R(0)$ и пусть $x\notin B_R(0)$. Воспользуемся известной формулой [18, B.3], связывающей расстояние до выпуклого замкнутого множества и его опорную функцию: если $x\notin K$, то

$$d_K(x)=\sup_{\zeta\in S^{n-1}}\left[(x,\zeta)-h_K(\zeta)\right].$$

Обозначим через $\zeta_x\in S^{n-1}$ и $p_x\in K$ точки, для которых $d_K(x)=(x,\zeta_x)-h_K(\zeta_x)$ и $h_K(\zeta_x)=\sup_{y\in K}(y,\zeta_x)=(p_x,\zeta_x)$. Тогда

$$d_K(x)=(x-p_x,\zeta_x)\le|x-p_x|.$$

С другой стороны, $d_K(x) \le |x-y|$ для всех $y \in K$. Следовательно, p_x является ближайшей к x точкой K, т.е. $d_K(x) = |x - p_x|$ и $\zeta_x = \dfrac{x - x_p}{|x - x_p|}$. Для $\nu_x = \dfrac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ имеем

$$(x,\nu_x) - h_K(\nu_x) \le d_K(x) = (x,\zeta_x) - h_K(\zeta_x),$$
$$0 \le |x| - (x,\zeta_x) = (x,\nu_x - \zeta_x) \le h_K(\nu_x) - h_K(\zeta_x).$$

Единичные векторы $-\nu_x$, $-\zeta_x$ указывают направления из точки x на начало координат и точку p_x соответственно. Обе эти точки лежат в $B_R(0)$. Поэтому $|\nu_x - \zeta_x|$ не превосходит величины плоского угла, под которым шар $B_R(0)$ виден из точки x, откуда

$$\nu_x - \zeta_x = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \to \infty.$$

Опорная функция h_K выпукла на $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, липшицева на S^{n-1} [19, § 5]. Поэтому

$$0 \le (x,\nu_x - \zeta_x) \le h_K(\nu_x) - h_K(\zeta_x) \le$$
$$\le C|\nu_x - \zeta_x| = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \to \infty.$$

Отсюда заключаем, что

$$d_K(x) = (x,\zeta_x) - h_K(\zeta_x) = (x,\nu_x) - h_K(\nu_x) -$$
$$-(x,\nu_x - \zeta_x) + \big(h_K(\nu_x) - h_K(\zeta_x)\big) =$$
$$= |x| - h_K\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть u — решение задачи Коши* (1)*, удовлетворяющее для некоторых постоянных $C > 0, N, L \ge 0$ оценке*

$$|u(x,t)| \le C\left(t^{1/2} + |x|\right)^N t^{-L}, \quad (x,t) \in D_T,$$

и $K \subset \mathbb{R}^n$ — непустой выпуклый компакт. Тогда $\operatorname{supp}\psi \subset K$ *, если и только если существуют постоянные $C_1 > 0$, $N_1 \ge 0$ такие, что*

$$|u(x,T)| \le C_1\left(1 + |x|\right)^{N_1} e^{\frac{2h_K(x) - |x|^2}{4T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Доказательство. Возводя равенство (12) в квадрат, получаем

$$d_K^2(x) = |x|^2 - 2|x|h_K\left(\frac{x}{|x|}\right) + h_K^2\left(\frac{x}{|x|}\right) + O(1) =$$
$$= |x|^2 - 2h_K(x) + O(1), \quad x \to \infty.$$

Следовательно, существуют константы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$|x|^2 - 2h_K(x) + C_1 \le d_K^2(x) \le$$
$$\le |x|^2 - 2h_K(x) + C_2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

и требуемое утверждение вытекает из теоремы 3.

Из (13) можно получить оценку на скорость убывания решения при $x \to \infty$ по направлениям:

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \ln \frac{\left|u(r\zeta,T)\right|}{\Gamma(r\zeta,T)} \le \frac{h_K(\zeta)}{2T}, \quad \zeta \in S^{n-1}.$$

Пусть в условиях теоремы 5 начальное распределение температуры $\psi \not\equiv 0$ неотрицательно, т.е. $(\varphi,\psi) \ge 0$ для всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение u будет положительным при всех $t > 0$. Поставим следующий вопрос. Пусть K – выпуклая оболочка $\operatorname{supp}\psi$. Верно ли, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \ln \frac{u(r\zeta,T)}{\Gamma(r\zeta,T)} = \frac{h_K(\zeta)}{2T}$$

для всех $\zeta \in S^{n-1}$? В этом случае формулу

$$h_K(\zeta) \approx \frac{2T}{r} \ln \frac{u(r\zeta,T)}{\Gamma(r\zeta,T)}$$

можно было бы использовать как отправную точку для численного нахождения множества K по значениям температуры вне некоторого шара в момент времени T.

Получим теперь условие на скорость убывания решения в гипотезе Ландиса–Олейник.

Теорема 6. *Пусть функция u является решением уравнения теплопроводности $u_t - \Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ и для некоторых постоянных $C > 0$, $N \ge 0$,*

$$\left|u(x,t)\right| \le C\left(1+|x|\right)^N, \quad (x,t) \in D_T.$$

Если

$$\left|u(x,T)\right| \le C_1\left(1+|x|\right)^{N_1} e^{-\frac{|x|^2}{4T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

то $u \equiv 0$ в D_T.

Доказательство. По теореме Мацузавы решение u представляется в виде

$$u(x,t) = (\Gamma(x-\cdot,t),\psi)$$

для некоторой функции $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Так как $|x|$ является функцией расстояния для компакта из одной точки $K = \{0\}$, то, по теореме 3, $\operatorname{supp}\psi \subset \{0\}$. Как известно, обобщенная функция с точечным носителем является конечной линейной комбинацией дельта-функции и ее производных:

$$\psi(x) = \sum_{|k|\le m} c_k \delta^{(k)}(x).$$

Следовательно, решение задачи (1) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{|k|\le m} c_k \partial_x^k \Gamma(x,t).$$

Но единственная такая функция, ограниченная в некоторой окрестности начала координат, это $u \equiv 0$. Действительно, для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ должно быть выполнено равенство

$$\lim_{t\to 0+} \left(u(\cdot,t),\varphi\right) = \sum_{|k|\le m} (-1)^{|k|} c_k \partial_x^k \varphi(0),$$

что для ограниченной функции u возможно только если все коэффициенты c_k равны нулю.

Теорема доказана.

Константа $\frac{1}{4T}$ в (14) является точной, как показывает следующий пример. Для любого $\varepsilon > 0$ функция $u(x,t) = \Gamma(x,t+\varepsilon)$ является решением уравнения теплопроводности в слое D_T и удовлетворяет оценке $|u(x,T)| \le Ce^{-\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon)}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнения переноса) // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
2. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker, N.Y., 2000. 750 p.
3. *Прилепко А.И., Костин А.Б., Соловьёв В.В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева // Сиб. журнал чистой. и прикл. матем. 2017. Т. 17. № 3. С. 67–85.
4. *Ландис Е.М., Олейник О.А.* Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. Вып. 2. С. 190–206.
5. *Wang W., Zhang L.* Backward uniqueness of Kolmogorov operators // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20. No. 1. P. 79–88.
6. *Escauriaza L., Kenig C.E., Ponce G., Vega L.* Decay at infinity of caloric functions within characteristic hyperplanes // Math. Res. Lett. 2006. V. 13. No. 2–3. C. 441–453.
7. *Nguyen T.* On a question of Landis and Oleinik // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. V. 362. P. 2875–2899.
8. *Wu J., Zhang L.* The Landis-Oleinik conjecture in the exterior domain // Adv. Math. 2016. V. 302. P. 190–230.
9. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991. 447 с.
10. *Matsuzawa T.* A calculus approach to hyperfunctions I // Nagoya Math. J. 1987. V. 108. P. 53–66.
11. *Matsuzawa T.* A calculus approach to hyperfunctions II // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313. No. 2. P. 619–655.
12. *Matsuzawa T.* A calculus approach to the hyperfunctions III // Nagoya Math. J. 1990. V.118. P. 133–153.
13. *Suwa M.* A characterization of distributions of exponential growth with support in a regular closed set // Complex Var. Elliptic Equ. 2014. V. 59. No 10. P. 1418–1435.
14. *Suwa M., Yoshino K.* A Characterization of Tempered Distributions with Support in a Cone by the Heat Kernel Method and its Applications // J. Math. Sci. UniV. Tokyo. 2004. V.11. P. 75–90.
15. *Chung S.-Y., Lee S.-M.* The Paley-Wiener theorem by the heat kernel method // Bull. Korean Math. Soc. 1998. V. 35. No. 3. P. 441–453.
16. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis. Springer Verlag, 1990. 440 p.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
18. *Andrews B., Hopper C.* The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 2011. Springer, Heidelberg, 2010. 266 p.
19. *Schneider R.* Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013. 752 p.

LOCALIZING THE INITIAL CONDITION FOR SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

A. N. Konenkov[a,*]

[a]*Yesenin Ryazan State University, ul. Svobody, 46, Ryazan, 390000 Russia*

**e-mail: an.konenkov@gmail.com*

Received 15 July, 2023

Revised 15 July, 2023

Accepted 20 October, 2023

Abstract. The Cauchy problem for the heat equation with zero right-hand side is considered. The initial function is assumed to belong to the space of tempered distributions. The problem of determining the support of the initial function from solution values at some fixed time $T > 0$ is studied. Necessary and sufficient conditions for the support to lie in a given convex compact set are obtained. These conditions are formulated in terms of the solution's decay rate at infinity. A sharp constant in the exponential for the Landis–Oleinik conjecture on the nonexistence of fast decaying solutions.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, inverse problem, final observation, heat kernel method, convex sets, reference function.