

УДК 519.63

РАСЧЕТ ВОЗМУЩЕНИЯ СЛОЯ ПЛАЗМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

© 2024 г. Н. М. Гордеева^{1,2,*}¹119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия²107005 Москва, ул. Бауманская, 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

*e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

Поступила в редакцию 11.07.2023 г.

Переработанный вариант 15.08.2023 г.

Принята к публикации 06.09.2023 г.

Представлены результаты решения краевой задачи для системы двух интегродифференциальных уравнений, моделирующей воздействие внешнего электрического поля на слой плазмы. Такая система является следствием уравнений Больцмана–Максвелла, а искомые функции имеют физический смысл напряженности самосогласованного электрического поля и возмущения плотности распределения электронов. При построении решения задачи использованы теория преобразования Фурье обобщенных функций и теория сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Исследована зависимость полученного решения от частоты внешнего поля. Библ. 20. Фиг. 17.

Ключевые слова: уравнения Больцмана–Максвелла, возмущение плазмы, системы интегродифференциальных уравнений, сингулярные интегралы с ядром Коши.

DOI: 10.31857/S0044466924030102, EDN: XFZQQV

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение аналитических решений для задач плазмодинамики вызывает существенный интерес у специалистов, см., например, [1]–[3]. Настоящая работа посвящена численной реализации аналитического решения [4], [5] задачи об отклике слоя плазмы на возмущение внешним электрическим полем; о таких задачах см. [6]–[10].

Предполагается, что на слой плазмы действует электрическое поле постоянной частоты и малой амплитуды. Вектор электрической напряженности этого поля направлен перпендикулярно границе слоя. В результате в плазме возникают колебания заряженных частиц. Движением ионов будем пренебрегать (см. [8]), рассматривая только электроны. Состояние плазмы будет характеризоваться плотностью электронов и напряженностью самосогласованного поля. Приведем подробный вывод поставленной задачи, заимствуя общую схему рассуждений из работ [4] и [10].

Рассматривается бесконечный слой плазмы ширины $2L$, занимающий область $\{(x, y, z) : x \in (-L, L), y, z \in \mathbb{R}\}$. В невозмущенном состоянии распределение электронов описывается функцией Максвелла:

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2}, \quad \beta = \frac{m}{2k_B T}, \quad (1)$$

в которой $n_0 = \text{const}$ — концентрация заряженных частиц при отсутствии внешнего электрического поля, m — масса электрона, k_B — постоянная Больцмана, T — температура плазмы, которая считается постоянной в данной задаче.

В результате внешнего воздействия в слое плазмы возникает самосогласованное поле, описываемое векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а распределение электронов — функцией $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Состояние плазмы характеризуется системой Больцмана–Максвелла

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{st}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = e \int_{\mathbb{R}^3} (f - f_0) d^3v, \quad (3)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = m\mathbf{H}, \quad (5)$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — искомая функция распределения электронов, ρ — плотность заряда, e — заряд электрона, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ — скорость и импульс электрона, m — магнитная проницаемость.

В случае слабого воздействия интеграл столкновений в правой части уравнения (2) можно записать в приближении Бхатнагара—Гросса—Крука [11], [12]:

$$I_{st} = \nu(f_{eq} - f), \quad (6)$$

где параметр ν — частота столкновений электронов в плазме (эффективная частота рассеяния электронов), $f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — локально равновесная функция распределения, определяемая формулой

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_{eq}(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2}, \quad \beta = \frac{m}{2k_B T}, \quad (7)$$

в которой $n_{eq}(\mathbf{r}, t)$ — концентрация заряженных частиц:

$$n_{eq}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (8)$$

Учитывая условия задачи, вектор напряженности внешнего поля имеет только одну ненулевую координату:

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E_{\text{ext}}, 0, 0),$$

тогда согласно [13], функция распределения будет зависеть только от одной пространственной переменной и будет иметь вид $f(x, \mathbf{v}, t)$. Согласно [6], [8], электрическая и магнитная напряженности самосогласованного поля в плазме допускают представления:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E(x), 0, 0), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (H_x, H_y, H_z),$$

которые после подстановки в уравнения (4), (5) дают результат

$$\mathbf{H} = -\frac{ic}{\omega m} \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Таким образом, магнитное поле не присутствует в уравнении (2), и система (2), (3) содержит только две неизвестных функции: функцию распределения $f(x, \mathbf{v}, t)$ и электрическую напряженность самосогласованного поля $E(x, t) = E(x)e^{-i\omega t}$.

Учитывая (6)–(9), уравнения (2), (3) преобразуются к виду (см. [10], [13]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + v_x \frac{\partial f(x, \mathbf{v}, t)}{\partial x} + eE(x, t) \frac{\partial f(x, \mathbf{v}, t)}{\partial p_x} = \\ = \nu(f_{eq}(x, \mathbf{v}, t) - f(x, \mathbf{v}, t)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{dE(x, t)}{dx} = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} (f(x, \mathbf{v}, t) - f_0(v)) d^3v. \quad (11)$$

Здесь v — модуль скорости, т.е. $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Таким образом, в результате сделанных предположений поставленная задача свелась к одномерной. Пользуясь условием малости амплитуды внешнего поля, будем решать ее в линейном приближении. Ниже продемонстрируем вывод линеаризованной системы.

При воздействии слабого электрического поля на среду заряженных частиц концентрация электронов перестает быть константой и меняется с изменением координаты. Будем считать, что справедливо следующее представление:

$$n_{eq}(\mathbf{r}, t) = n_{eq}(x, t) = n_0 + n_1(x)e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

где ω — частота внешнего поля, а возмущение концентрации $n_1(x)e^{-i\omega t}$ мало по сравнению с величиной n_0 , т.е.

$$\max_{x \in (-L, L)} |n_1(x)| \ll n_0.$$

Локально-равновесная функция распределения запишется в виде

$$\begin{aligned} f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= f_{eq}(x, v, t) = n_{eq}(x, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2} = \\ &= (n_0 + n_1(x) e^{-i\omega t}) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2} = f_0(v) + f_1(x, v, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$f_1(x, v, t) = n_1(x) e^{-i\omega t} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2}. \quad (14)$$

Функцию распределения электронов $f(x, v, t)$ будем искать в виде:

$$f(x, v, t) = f_0(v)(1 + h(x, v_x) e^{-i\omega t}), \quad (15)$$

предполагая, что $h(x, v_x)$ — неизвестная функция, причем достаточно малая, т.е. $|h(x, v_x)| \ll 1$. Заметим, что в линейном приближении

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = \\ &= \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{m \partial v_x} = -\epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{v_x f_0}{k_B T}. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая эти равенства и подставив в уравнения (10) и (11) выражения (13)–(16) для $f(x, v, t)$ и $f_{eq}(x, v, t)$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (v - i\omega) h(x, v_x) &= \\ &= \frac{\epsilon v_x}{k_B T} E(x) + v \frac{n_1(x)}{n_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4\pi\epsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x. \quad (18)$$

Используя представления (8) и (12) для $n_{eq}(x, t)$ и учитывая закон сохранения числа частиц, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_{eq} d^3v &= \int_{\mathbb{R}} f d^3v \Rightarrow \\ \Rightarrow n_{eq}(x, t) &= n_0 + e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x \Rightarrow \\ \Rightarrow n_1(x) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим результаты (19) в (17) и получим два уравнения относительно двух неизвестных функций $E(x)$ и $h(x, v_x)$:

$$v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (v - i\omega) h(x, v_x) = \frac{\epsilon v_x}{k_B T} E(x) + v \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x, \quad (20)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4\pi\epsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x. \quad (21)$$

Используя формулу для плазменной частоты

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\epsilon^2 n_0}{m},$$

можно преобразовать коэффициент перед интегралом в уравнении (21):

$$4\pi e = \frac{4\pi e^2 n_0 m}{m e n_0} = \frac{\omega_p^2 m}{e n_0}.$$

Далее перейдем к безразмерным переменным v' и x' , используя скорость теплового движения частиц v_T и длину свободного пробега частиц между столкновениями x_0 :

$$x_0 = \frac{v_T}{v}, \quad v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad v' = \frac{v_x}{v_T}, \quad x' = \frac{x}{x_0}.$$

Напряженность внешнего электрического поля на границе слоя равна E_{ext} . Введем следующие безразмерные функции:

$$G(x) = \frac{E(x)}{E_{\text{ext}}}, \quad H(x', v') = \frac{kT v}{e E_{\text{ext}} v_T} h(x', v').$$

Подставив новые переменные и новые функции в уравнения (20), (21) и отказавшись от индексов у переменных, получаем систему уравнений:

$$v H_x(x, v) + (1 - \frac{i\omega}{v}) H(x, v) = v G(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi) H(x, \xi) d\xi, \quad (22)$$

$$G'(x) = \frac{2\omega_p^2}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi) H(x, \xi) d\xi. \quad (23)$$

Функция

$$k(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (24)$$

обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi) d\xi = 1$, а коэффициенты в уравнениях (22) и (23) соответственно $1 - i\omega / v$ и $2\omega_p^2 / v^2$ зависят от свойств плазмы и частоты внешнего поля.

В случае зеркального отражения электронов от границы плазмы для функции распределения электронов имеем следующие граничные условия на границе слоя размера $2L$:

$$f(\pm L, v, t) = f(\pm L, -v, t),$$

что равносильно условию:

$$h(\pm L, v_x) = h(\pm L, -v_x), \quad -\infty < v_x < +\infty.$$

Для электрического поля граничное условие имеет вид:

$$E(L) = E_{\text{ext}}, \quad E(-L) = E_{\text{ext}}.$$

Отсюда для функций $H(x, v)$ и $G(x)$ получаем следующие граничные условия:

$$H(l, v) = H(l, -v), \quad H(-l, v) = H(-l, -v), \quad (25)$$

$$G(l) = 1, \quad G(-l) = 1. \quad (26)$$

Здесь $l = L / x_0$ — величина слоя в единицах свободного пробега электронов. Таким образом, задача об отклике плазмы на внешнее воздействие состоит в нахождении такого решения уравнений (22), (23), которое удовлетворяет краевым условиям (25), (26).

Статья организована следующим образом: в разд. 2 представлено аналитическое решение поставленной задачи, полученное на основе утверждений из [4] и [5]. В разд. 3 представлено численное исследование решения, полученного в разд. 2.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Мы получили систему интегродифференциальных уравнений для функций $H(x, v)$ и $G(x)$:

$$vH_x(x, v) + AH(x, v) = vG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)H(x, \xi)d\xi, \quad (27)$$

$$G'(x) = B \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)H(x, \xi)d\xi. \quad (28)$$

Функции $H(x, v)$ и $G(x)$ заданы в полосе

$$\Pi = \{x \in (-l, l), v \in \mathbb{R}\} \quad (29)$$

и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$H(l, v) = H(l, -v), H(-l, v) = H(-l, -v), \quad (30)$$

$$G(l) = 1, G(-l) = 1. \quad (31)$$

Функция $k(\xi)$ определяется формулой (24), а коэффициенты A и B зависят от свойств плазмы и выражаются формулами

$$A = 1 - i \frac{\omega}{v}, B = \frac{2\omega_p^2}{v^2}. \quad (32)$$

Решение задачи (27)–(31) ищется в следующем классе функций:

$$H \in C(\bar{\Pi} \setminus \{v = \pm\infty\}), H_x \in C(\Pi), G \in C[-l, +l] \cap C^1(-l, +l). \quad (33)$$

В работах [4], [5] был предложен метод и построено аналитическое решение задачи (27)–(31) для случая, когда $k(\xi)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с асимптотикой $k(\xi) = \mathcal{O}(e^{-\xi^2})$, $\xi \rightarrow \pm\infty$ и нормированная на единицу, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)d\xi = 1$, а величины A и B являются комплексной и вещественной константами соответственно. Частным случаем такой функции является $k(\xi)$, определенная по формуле (24). Указанное решение задачи было построено с помощью новых результатов, развивающих подход [14], [15] в теории преобразования Фурье обобщенных функций, а также методов [16], [17] для решения сингулярных интегральных уравнений.

Для того чтобы выписать результат решения, введем функцию:

$$\Lambda(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2} \lambda^2 - \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \quad (34)$$

от структуры множества нулей которой зависит общий вид решения задачи. Заметим, что вид функции $\Lambda(\lambda)$ общий для любого решения системы (27), (28), а ее свойства определяются набором параметров $k(\xi)$, A и B , которые зависят от свойств плазмы.

Аналитические и численные оценки показали, что и для модели, рассматриваемой в [4], и для модели, рассматриваемой в настоящей работе, для физически значимых параметров функция $\Lambda(\lambda)$ имеет два простых корня, которые являются комплексными и противоположными по знаку $\pm\lambda_0 \notin \mathbb{R}$, что позволяет нам использовать результаты работы [4].

Следуя [4], введем также функции

$$\varkappa(\lambda, v) := \frac{1}{A} \left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda \right), \quad (35)$$

$$\Lambda_0(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2} \lambda^2 - \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty), \quad (36)$$

где символ *v.p.* означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. Введем еще одну величину, которая потребуется далее — значение дисперсионной функции $\Lambda(\lambda)$ на бесконечности:

$$\Lambda_\infty := \Lambda(\infty). \quad (37)$$

В дальнейшем также потребуются функции $S(v)$, удовлетворяющие требованиям приведенного замечания.

Замечание 1. Будем предполагать, что функция $S(v)$ непрерывна при $v \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию $S(v) = o(e^{C_1|v|})$, $v \rightarrow \pm\infty$, $C_1 > 0$, а кроме того, при малых v для нее справедлива асимптотика $|S(v)| = O(v^2 e^{-C_2/|v|})$, $v \rightarrow 0$, $C_2 > 0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение, см. [5].

Теорема 1. Пусть функция $k(\xi)$, фигурирующая в (27), (28), определена формулой (24), $A \in \mathbb{C}$ и $B \in \mathbb{R}$ соответственно комплексная и вещественная величины, определяемые формулами (32), функция $\Lambda(\lambda)$, определенная из (34), имеет два комплексных корня λ_0 и $-\lambda_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{H}^+$. Тогда решение краевой задачи (27)–(31) единственно и имеет вид:

$$H(x, v) = \frac{S_0 v}{A \Lambda_\infty} - \frac{B}{A} \cdot S_1 \lambda_0 \varkappa(\lambda_0, v) e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot S_2 \lambda_0 \varkappa(-\lambda_0, v) e^{Ax/\lambda_0} + \\ + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\lambda) k(\lambda)}{\Lambda_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{S(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \quad (38)$$

$$G(x) = \frac{S_0}{\Lambda_\infty} - \frac{B}{A} \cdot S_1 \lambda_0 e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot S_2 \lambda_0 e^{Ax/\lambda_0} + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\lambda) k(\lambda)}{\Lambda_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \quad (39)$$

где постоянные величины S_j , $j = 0, 1, 2$, даются равенствами

$$S_0 = \left(\frac{1}{\Lambda_\infty} - \frac{2\lambda_0}{\Lambda'(\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) d\lambda}{\Lambda^+(\lambda) \Lambda^-(\lambda)} \right)^{-1}, \quad (40)$$

$$S_1 = \frac{AS_0}{B\Lambda'(\lambda_0) \cosh(A/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)}, \quad (41)$$

$$S_2 = -S_1 = -\frac{AS_0}{B\Lambda'(\lambda_0) \cosh(A/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)}, \quad (42)$$

а функция $S(v)$ определяется формулой

$$S(v) = \frac{iS_0 v^2 \Lambda_0(v)}{A \cosh(A/v) \Lambda^+(v) \Lambda^-(v)}, \quad (43)$$

величина Λ_∞ дается равенством (37), функции $\varkappa(\lambda, v)$ и $\Lambda_0(\lambda)$ определены соответственно формулами (35) и (36).

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

3.1. Алгоритм вычисления

Для вычисления решения краевой задачи (27)–(31) по формулам (38)–(43) выполняются следующие действия: сначала для заданных параметров плазмы ω и v вычисляются значения констант A и B , затем находится значение корня λ_0 — решение уравнения $\Lambda(\lambda, A, B) = 0$ в нижней полуплоскости ($\text{Im } \lambda_0 < 0$). Для решения этого уравнения применяется итерационная процедура Ньютона [18], которая заключается в использовании уравнения, связывающего значение функции и ее производной:

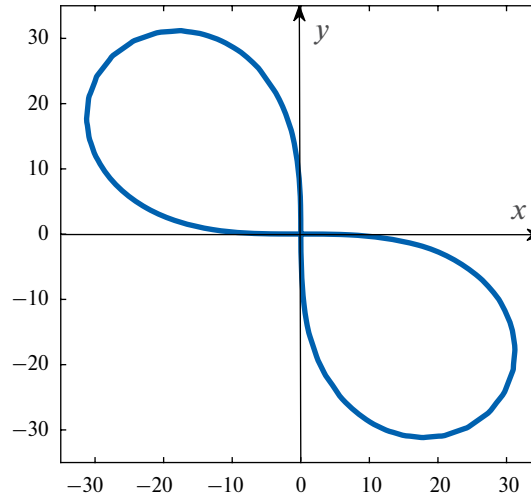
$$\lambda_0^{(n+1)} = \lambda_0^{(n)} - \frac{\Lambda(\lambda_0^{(n)}, A, B)}{\Lambda'(\lambda_0^{(n)}, A, B)}.$$

Значение производной вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Lambda'(\lambda, A, B) = & -\frac{2B}{A^2}\lambda + \frac{1}{A\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{3B}{A}\lambda^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \lambda} dt + \\ & + \frac{1}{A\sqrt{\pi}}\left(\lambda - \frac{B}{A}\lambda^3\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(t - \lambda)^2} dt, \quad \text{Im } \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Для вычисления интегралов в функциях $\Lambda(\lambda_0^{(n)}, A, B)$ и $\Lambda'(\lambda_0^{(n)}, A, B)$ применяются квадратурные формулы Гаусса 10-го порядка [18].

На фиг. 1 приведены графики зависимости значений λ_0 от частоты внешнего поля ω . В 4-й четверти изображены λ_0 такие, что $\text{Im } \lambda_0 < 0$, во 2-й четверти λ_0 такие, что $\text{Im } \lambda_0 > 0$.



Фиг. 1. Значения корней дисперсионной функции при $\nu / \omega_p = 0.001$ и разных ω .

Отметим, что метод Ньютона применим, если начальное приближение $\lambda_0^{(1)}$ попадает в достаточно малую окрестность предполагаемого корня, поэтому начальное приближение находится с помощью асимптотических оценок.

После нахождения значения λ_0 можно вычислить значения констант S_0 , S_1 , S_2 по формулам (40)–(42) и приступить к вычислению решения задачи (27)–(31).

При вычислении константы S_0 , как и при вычислении $G(x)$, $H(x, \nu)$, необходимо найти значения функций $\Lambda^\pm(\lambda)$ на вещественной оси. Эти значения вычисляются с помощью выражения для $\Lambda_0(\lambda)$, которое дается формулой (36), и формул Сохоцкого [19]:

$$\Lambda^\pm(\lambda) = \Lambda_0(\lambda) \mp \pi i \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) k(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

Выражение для функции $\Lambda_0(\lambda)$, как и представление для $H(x, \nu)$, содержит интеграл в смысле главного значения

$$I(\lambda) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi,$$

к вычислению которого мы переходим в следующем пункте.

3.2. Представление для сингулярного интеграла $I(\lambda)$

В случае, когда равновесное состояние описывается распределением Максвелла, ядро $k(\xi)$ в уравнениях (38), (39) принимает вид (24):

$$k(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Интеграл $I(\lambda)$ в таком случае принимает вид:

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{\xi - \lambda}. \quad (46)$$

Вводя функцию

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\xi^2} d\xi}{\xi - \lambda}, \quad (47)$$

убеждаемся, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению, в котором λ присутствует как параметр:

$$f'_u(u, \lambda) + \lambda^2 f(u, \lambda) = -\frac{\lambda}{\sqrt{u}}, \quad f(0, \lambda) = 0. \quad (48)$$

Тогда, как нетрудно показать,

$$f(u, \lambda) = -2\lambda e^{-\lambda^2 u} \int_0^{u^2} e^{\lambda^2 t^2} dt. \quad (49)$$

Отсюда, учитывая, что $f(1, \lambda) = I(\lambda)$, находим

$$I(\lambda) = -2\lambda \int_0^1 e^{\lambda^2(t^2-1)} dt. \quad (50)$$

Отметим, что этот интеграл может быть также выражен через функцию ошибок [20]. Для вычисления будем использовать формулу (50), к которой применяем квадратурные формулы Гаусса.

3.3. Результаты расчетов

Построены графики напряженности самосогласованного электрического поля в слое. Вместо обозначения функции $G(x)$ на рисунках будем использовать традиционное для напряженности обозначение $E(x)$. Как видно из формулы (39), напряженность можно представить в виде суммы

$$E(x) = E_a(x) + E_b(x) + E_c(x).$$

Величина E_a — это та составляющая самосогласованного поля, которая не зависит от координаты, являясь константой. Она показывает, какая часть внешнего поля проникает в плазменный слой. Второе слагаемое $E_b(x)$ представляет собой гиперболический косинус, значение которого резко уменьшается при удалении от границы слоя. Это можно трактовать, как экранирование плазмой внешнего поля. Третье слагаемое $E_c(x)$ имеет сложный характер, при малых частотах его вклад составляет доли процента, с ростом частоты внешнего поля его вклад растет. Но во всех случаях величина $E_c(x)$ уменьшается при удалении от границы слоя.

Заметим, что при частоте внешнего поля, близкой к плазменной частоте, в слое начинают наблюдаться осцилляции по координате.

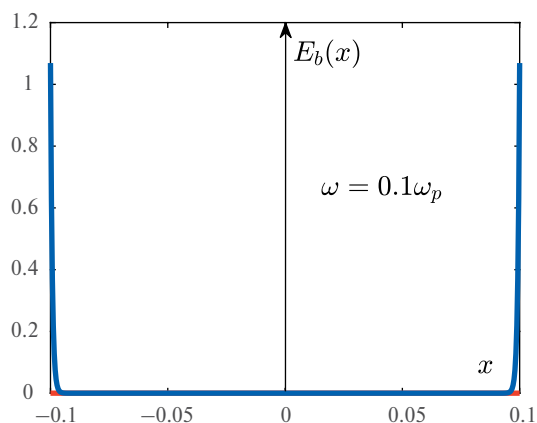
На графиках представлены зависимости от координаты как отдельных мод $E_b(x)$ и $E_c(x)$, так и суммарно всей напряженности $E(x)$, значения частоты внешнего поля варьируются от 0.1 до 1.5 плазменной частоты ω_p [8].

На фиг. 2–11 изображены отдельно моды $E_b(x)$ и $E_c(x)$ при разных значениях частоты внешнего поля. На фиг. 12–17 изображены графики напряженности $E(x)$, т.е. сумма всех слагаемых $E_a(x) + E_b(x) + E_c(x)$.

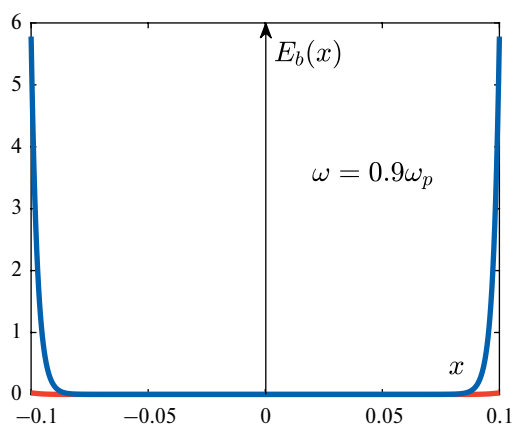
Численное моделирование показывает, что при малых значениях частоты внешнего поля оно почти полностью экранируется и не проникает в плазму. Явно выражен приграничный слой, имеющий размер порядка дебаевского радиуса r_D [1].

При увеличении частоты внешнего поля растет модуль постоянной составляющей E_a , увеличивается вклад слагаемого $E_c(x)$, а также сильнее выражен эффект экранирования. При частоте внешнего поля, равной плазменной частоте ω_p , возникает резонанс, который приводит к тому, что при частоте, немного превышающей плазменную, возникают осцилляции по координате.

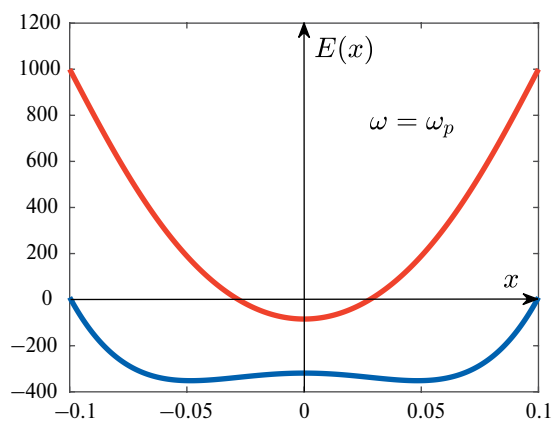
При частоте внешнего поля, равной 1.3 и 1.5 от плазменной частоты, внешнее электрическое поле «проходит» через плазменный слой, что соответствует теоретическим данным [6].



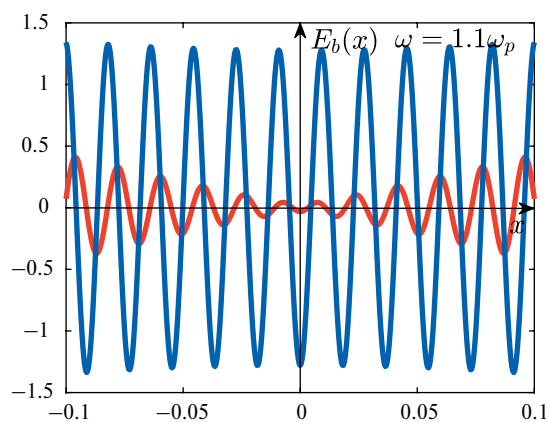
Фиг. 2. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



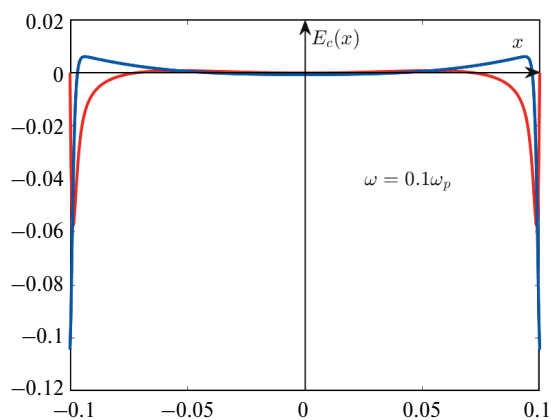
Фиг. 3. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.9\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



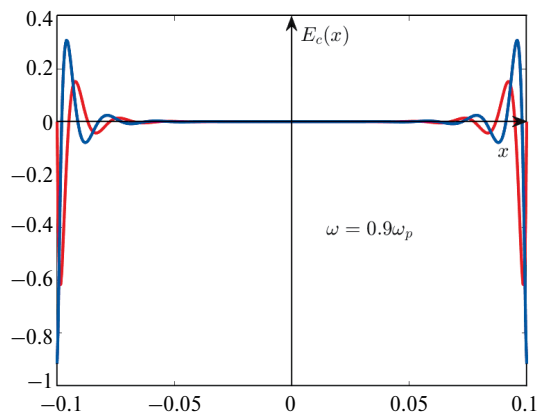
Фиг. 4. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = \omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



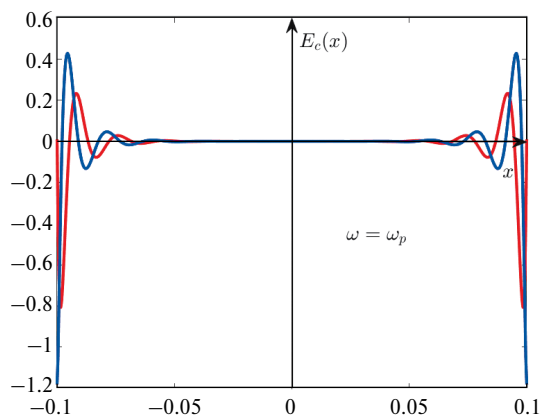
Фиг. 5. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



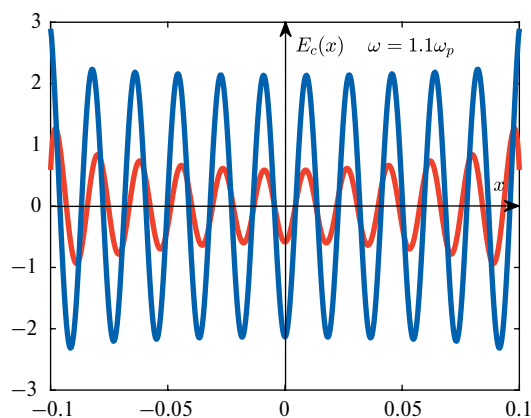
Фиг. 6. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



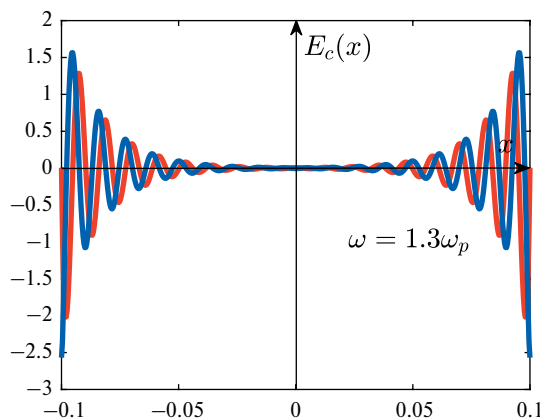
Фиг. 7. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.9\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



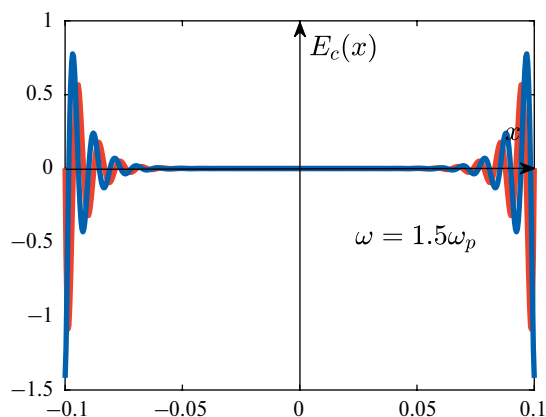
Фиг. 8. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = \omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



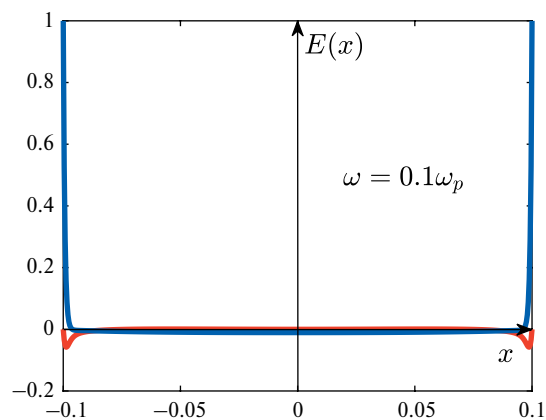
Фиг. 9. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



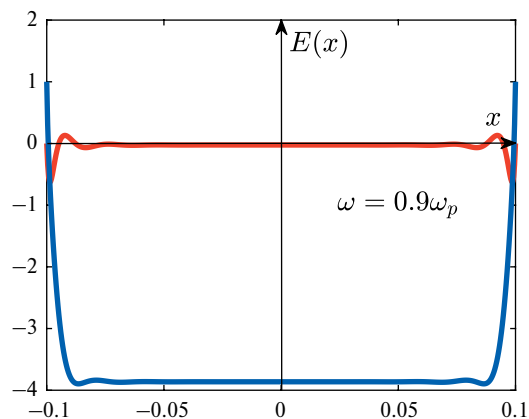
Фиг. 10. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.3\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



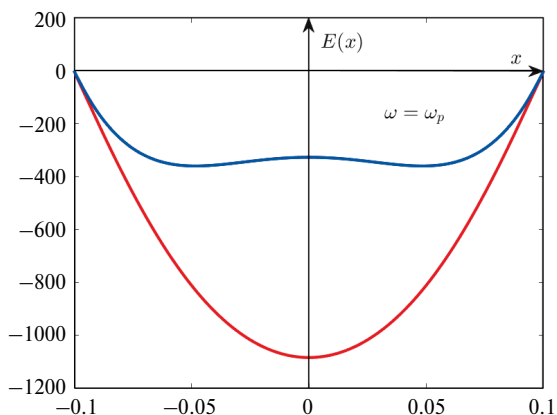
Фиг. 11. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.5\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



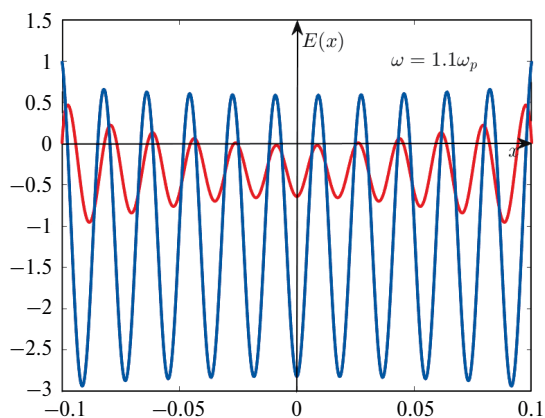
Фиг. 12. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



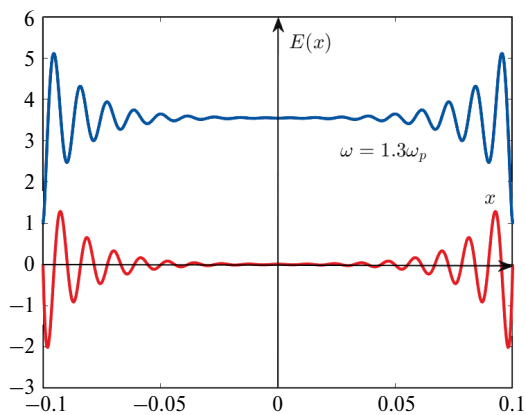
Фиг. 13. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.9\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



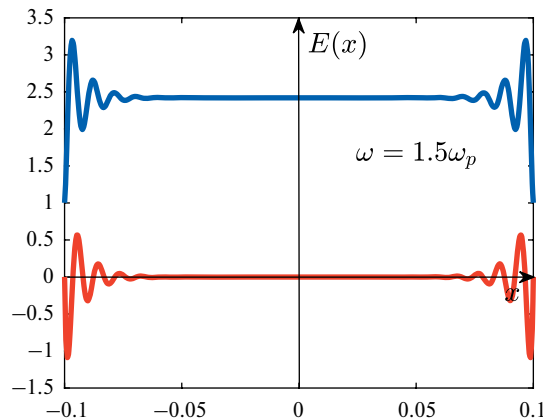
Фиг. 14. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.0\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



Фиг. 15. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



Фиг. 16. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.3\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.



Фиг. 17. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.5\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим — вещественная часть, красным — мнимая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
2. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 20. 20 с.
3. Грицык П.А., Сомов Б.В. Современные аналитические модели ускорения и распространения электронов в солнечных вспышках // Успехи физ. наук. 2023. Т. 193. № 5. С. 465–490.
4. Bezrodnykh S. I., Gordeeva N. M. Analytical Solution of a System of Integro-differential Equations for a Plasma Model in an External Field // Russian Journal of Mathematical Physics, 2023, 30:4, p. 23–36.
5. Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M. Solution of a Boundary Value Problem for a System of Integro-Differential Equations Arising in a Modal of Plasma Physics // Math. Notes. 2023. V. 114. No 5. P. 704–715.
6. Абрикосов А.А. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.
7. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
8. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // Собрание трудов. М.: Наука, 1969. Т. 2. С. 7–25.
9. Латышев А.В., Юшканов А.А. Электронная плазма в полупространстве металла в переменном электрическом поле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 8. С. 1229–1241.
10. Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Невырожденная электронная плазма в слое во внешнем электрическом поле с зеркальным условием на границе // Теплофиз. высоких температур. 2018. Т. 56. № 5. С. 687–695.
11. Компанец А.С. Курс теоретической физики. Т. 2. Статистические законы. М.: Просвещение, 1975. 480 с.
12. Bhatnagar P.L., Gross E.M., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511–525.
13. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971. 936 с.
14. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. 470 с.
15. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука. 1965. 328 с.
16. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
17. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 513 с.
18. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
19. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
20. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

CALCULATING A PERTURBATION OF A PLASMA LAYER BY AN ELECTRIC FIELD

N.M. Gordeeva^{a,*}

^aFederal Research Center “Computer Science and Control”, Russian Academy of Sciences, Bauman Moscow State Technical University

**e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru*

Received 11 July, 2023

Revised 15 August, 2023

Accepted 06 September, 2023

Abstract. The paper presents the results of solving a boundary value problem for a system of two integro-differential equations that simulate the action of an external electric field on a plasma layer. This system is an implication of the Boltzmann–Maxwell equations, and the physical meaning of the sought functions is the strength of a self-consistent electric field and perturbation of the electron distribution density. The solution of the problem is constructed using the theories of Fourier transform of generalized functions and singular integral equations with the Cauchy kernel. The dependence of the solution on the frequency of the external field is studied.

Keywords: Boltzmann–Maxwell equations, plasma perturbation, systems of integro-differential equations, singular integral equations with the Cauchy kernel.