

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.935

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾© 2024 г. М. М. Кокурин^{1,*}, В. В. Ключев¹, А. В. Гаврилова¹¹424001 Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1,

Марийский государственный университет, Россия

*e-mail: kokurin@nextmail.ru

Поступила в редакцию 02.10.2023 г.

Переработанный вариант 02.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Изучается многомерный аналог интегрального уравнения М.М. Лаврентьева, к которому приводится обратная задача акустического зондирования. Устанавливаются условия единственности решения изучаемого уравнения. Также приводятся результаты численных экспериментов по решению обратной задачи акустики с различными расположениями отрезка источников и прямоугольника детекторов акустических волн. Библ. 27. Фиг. 4. Табл. 2.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, обратная задача акустики, линейное интегральное уравнение, уравнение Лаврентьева, единственность решения, гармонические функции, полная система функций, множество единственности.

DOI: 10.31857/S0044466924030062, EDN: XHGGDX

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие нелинейные коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть сведены к линейным интегральным уравнениям. Общий подход к такой редукции с использованием преобразования Лапласа предложил М.М. Лаврентьев в работах [1], [2]. Ниже рассмотрим обратную задачу волнового зондирования в следующей постановке. Акустическая неоднородность, локализованная в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, зондируется волновыми полями, порожденными точечными источниками, расположенными в точках множества $Y \subset \mathbb{R}^3$, где $Y \cap D = \emptyset$ (см. [3]). Акустическое поле $u(x, t) = u^{(y)}(x, t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке $y \in Y$, определяется решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_t^{(y)}(x, t) &= \Delta u^{(y)}(x, t) - \delta(x - y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u^{(y)}(x, 0) &= 0, \quad u_t^{(y)}(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Величина $c(x) > 0$ есть скорость распространения сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Предполагается, что функция $c(x)$ кусочно-непрерывна, и что вне области D она тождественно равна известной константе c_0 . Предположим, кроме того, что функция g имеет ненулевое среднее значение на $[0, \infty)$ и $|g(t)| \leq C_0 e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, при некотором $\beta > 0$.

Для получения информации о функции $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u = u^{(y)}(x, t)$, $y \in Y$, измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ — множество координат детекторов, причем $Z \cap D = \emptyset$.

Определим для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geq 0$, преобразование Лапласа $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$. Будем считать, что все функции $u^{(y)}(x, t)$, $y \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-10070).

экспоненциально убывают при $t \rightarrow \infty$, когда $x \in Z$, и, кроме того, $u^{(y)}(x, t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $y \in Y$ и $t > 0$. В [4], [5] обсуждаются условия на функцию $c(x)$, обеспечивающие эти требования. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

и перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u^{(y)} - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}^{(y)}(x, t) = \xi(x) u_{tt}^{(y)}(x, t) - \delta(x - y) g(t).$$

Очевидно, что для нахождения $c(x)$ достаточно ограничиться отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$, по которой $c(x)$ определяется однозначно.

Известно, что поставленная задача приводится к следующему интегральному уравнению относительно искомой функции ξ с известной правой частью $f(y, z)$, называемому уравнением М.М. Лаврентьева (см. [6]–[8]):

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x - y||x - z|} = f(y, z), \quad (y, z) \in Y \times Z. \quad (1.2)$$

Итак, данные наблюдения $\{u^{(y)}(z, t) \mid t > 0, y \in Y, z \in Z\}$ позволяют однозначно найти $\xi(x), x \in D$, если оператор интегрального уравнения (1.2) инъективен.

Кроме рассматриваемой задачи (1.1) к уравнению (1.2) сводятся также обратные задачи акустического зондирования гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [9, § 3.1], [10, с. 223], [11]). К аналогичному уравнению приводится также коэффициентная обратная задача для уравнения акустики в ограниченной области с условием Дирихле на границе (см. [12]).

Условиям единственности решения уравнения (1.2) посвящено значительное число работ, начиная с [2] и далее [3], [7], [10], [11], [13]–[16]. Например, если Y и Z есть открытые области на плоскости, не пересекающей D , либо на аналитической поверхности, содержащей множество D внутри, то оператор уравнения (1.2) инъективен, и тем самым рассматриваемая обратная задача имеет единственное решение. При этом совокупная размерность 4 пространственного носителя данных $Y \times Z$ в (1.2) больше количества 3 независимых переменных искомой функции ξ . Позднее в работах [14], [16], [17] показано, что инъективность оператора в (1.2) имеет место и в случае, когда одно из многообразий Y, Z есть плоскость, а второе – прямая. В этом случае уже совокупная размерность носителя данных $Y \times Z$ и размерность носителя D искомой функции совпадают и обе равны трем. Вопросы численного решения уравнения М.М. Лаврентьева (1.2) изучены значительно меньше, трудности при этом являются общими для всех многомерных обратных задач рассеяния. Суть их в том, что для реконструкции локальных неоднородностей малых размеров требуется использовать достаточно густые дискретные сетки, что, в свою очередь, приводит к результирующим линейным системам сверхвысокой размерности. Хранение и обработка этих систем требует применения распределенных вычислений и часто распределенного хранения данных (см. [17]). Альтернативным подходам к численному решению рассматриваемой задачи посвящены, в частности, работы [7], [18], [19].

В настоящей статье рассматривается вопрос единственности решения многомерного уравнения М.М. Лаврентьева

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x - y|^{n-2} |x - z|^{n-2}} = f(y, z), \quad (y, z) \in Y \times Z, \quad (1.3)$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – открытый интервал или отрезок на произвольной прямой $L \subset \mathbb{R}^n$, $Y \cap \bar{D} = \emptyset$, а Z – область в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, не пересекающей $\bar{D}$. Ядро интегрального оператора в левой части (1.3) с точностью до константы является произведением фундаментальных решений уравнения Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Тем самым, (1.3) служит обобщением уравнения (1.2) и совпадает с ним в случае $n=3$.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 доказывается единственность решения уравнения (1.3). При $n=3$ аналогичное утверждение доказано в [15]–[17], причем в [15], [16] используется дополнительное условие, что прямая L , содержащая промежуток Y , не пересекает $\bar{D}$. В настоящей работе это условие не накладывается, а, кроме того, данный результат обобщается на произвольные размерности $n \geq 3$. Доказанная теорема позволяет утверждать единственность решения описанной выше трехмерной обратной задачи акустики в случае, когда продолжение отрезка Y пересекает $\bar{D}$. В разд. 3 приводятся результаты

численных экспериментов, в которых решается эта задача с различными расположениями множеств X и Y .

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

Предлагаемое доказательство единственности решения уравнения (1.3) основано на следующей теореме.

Теорема 2.1. *Линейные комбинации функций семейства*

$$\left\{ \frac{u(x)}{|x-y|^{n-2}} \mid y \in Y, u \in \mathcal{H}(D) \right\}$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

Здесь

$$\mathcal{H}(D) = \{u \in L_2(D) \mid \Delta u(x) = 0, x \in D\}$$

есть множество всех гармонических функций в D , принадлежащих $L_2(D)$. Для доказательства теоремы 2.1 достаточно убедиться, что соотношение

$$\int_D \frac{h(x)u(x)dx}{|x-y|^{n-2}} = 0 \quad \forall y \in Y, u \in \mathcal{H}(D) \quad (2.1)$$

с $h \in L_2(D)$ влечет $h(x)=0$ п.в. в D . Приступая к доказательству, заметим, что функция $f(y)$, определенная выражением в левой части равенства (2.1), гармонична по $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$ и тем самым вещественно аналитична вне $\bar{D}$. Отсюда следует, что сужение f на $L \setminus \bar{D}$ также вещественно аналитично. Нетрудно видеть, что множество $L \setminus \bar{D}$ либо совпадает с L , либо содержит две неограниченные компоненты. В обоих случаях равенство $f(y) = 0$, $y \in Y$ продолжается по аналитичности на всю неограниченную компоненту множества $L \setminus \bar{D}$, содержащую Y . Выберем на прямой L произвольно точку и рассмотрим шар с центром в этой точке, содержащий $\bar{D}$ внутри. Без ограничения общности можем считать, что выбранная точка совпадает с началом координат, а шар, содержащий $\bar{D}$, имеет радиус $1 - \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Таким образом, $|x| \leq 1 - \varepsilon$ для всех $x \in \bar{D}$. Пусть для определенности $L = \{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ и $f(y) = 0$ для точек y , принадлежащих неограниченной компоненте $\{x \in L \mid x_n \geq 0\} \setminus \bar{D}$. Указанная компонента содержит луч $L^+ = \{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n \geq 1 - \varepsilon\}$. Поэтому на основании (2.1) имеем

$$\int_D \frac{h(x)u(x)dx}{|x-y|^{n-2}} = 0 \quad \forall y \in L^+, u \in \mathcal{H}(D). \quad (2.2)$$

Переходим к доказательству сформулированной теоремы с учетом сделанного уточнения. Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $S_r = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| = r\}$.

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Для $a > 0$ и b таких, что $a^2 + b^2 \leq 1 - \varepsilon$, имеет место равенство*

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(a^2 + (b - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} = \\ & = C(n) e^{-i\mu b} e^{-\mu\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} V(\mu a), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $V(s)$ — функция, аналитическая при $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяющая условию $|r^{(n-3)/2} V(re^{i\psi})| = O(1)$, $r \rightarrow 0+$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Интеграл сходится равномерно относительно параметров a, b , удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 \leq 1 - \varepsilon$, $a > 0$.

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части (2.3) через $\mathcal{I}(\mu; a, b)$. Для обоснования равномерной сходимости этого интеграла запишем вещественную и мнимую части подынтегрального выражения как сумму произведений $f(x, t)g(x, t)$, где $f(x, t) = \cos \mu t$ или $\sin \mu t$, $g(x, t)$ есть вещественная или мнимая часть функции $(a^2 + (b - a\sqrt{2}i - t)^2)^{-(n-2)/2}$, $x = (\mu, a, b)$. Непосредственно устанавливаем, что функция $g(x, t)$ монотонно стремится к нулю по $|t| \geq t_0$ равномерно относительно параметров a, b , удовлетворяющих условию леммы 2.1. Поэтому равномерная сходимость $\mathcal{I}$ следует из теоремы 3 в [20, с. 674].

Замена переменных $\tau = t - b$ приводит интересующий нас интеграл к виду

$$\mathcal{I}(\mu; a, b) = e^{-i\mu b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2\right)^{(n-2)/2}}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим на плоскости переменной $\zeta = v + iw$ положительно ориентированный контур

$$\Gamma_R = \Gamma_{R1} \cup \Gamma_{R2} \cup \Gamma_{R3} \cup \Gamma_{R4} \cup \Gamma_{R5} \cup \Gamma_{R6}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{R1} &= \{v + 0i \mid v \in [0, R]\}, \quad \Gamma_{R2} = \{R + iw \mid w \in [0, \sqrt{2}]\}, \\ \Gamma_{R3} &= \{v + i\sqrt{2} \mid v \in [R, -R]\}, \quad \Gamma_{R4} = \{-R + iw \mid w \in [\sqrt{2}, 0]\}, \\ \Gamma_{R5} &= \{v + 0i \mid v \in [-R, 0]\}, \\ \Gamma_{R6} &= \left\{v + iw = \frac{a\sqrt{2}\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} + i \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2 t} \mid t \in [-\pi/2, \pi/2]\right\}. \end{aligned}$$

Здесь в обозначениях участков контура порядок перечисления концов для отрезка значений параметра на кривой соответствует нужному направлению обхода участка. Участок Γ_{R6} представляет собой половину лемнискаты Бернулли. Контур (2.5) обходит разрез плоскости $\mathbb{C}$, выполненный вдоль отрезка $[-ia, ia]$. Вне этого разреза функция $(a^2 + \zeta^2)^{(n-2)/2}$ допускает выделение однозначной аналитической ветви. Указанная ветвь определяется равенством

$$(a^2 + \zeta^2)^{(n-2)/2} = \left(\sqrt{\zeta + ia}\right)^{n-2} \left(\sqrt{\zeta - ia}\right)^{n-2},$$

$$\zeta = ia + re^{i\phi}, \quad \phi \in (-\pi/2, 3\pi/2),$$

с выбором для корней главных значений, определяемых условием $\sqrt{1} = 1$. Тем самым

$$F(\zeta) = \frac{e^{-i\mu\zeta}}{\left(\sqrt{\zeta - ia}\right)^{n-2} \left(\sqrt{\zeta + ia}\right)^{n-2}} \quad (2.6)$$

также является однозначной аналитической функцией вне $[-ia, ia]$ и, в частности, в области, ограниченной контуром Γ_R . Следовательно,

$$\int_{\Gamma_R} F(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что интегралы от функции (2.6) по участкам Γ_{R2} и Γ_{R4} имеют порядки $O(R^{2-n})$, $R \rightarrow \infty$. Поэтому из (2.7) следует, что при $R \rightarrow \infty$ имеет место

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{R1}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} + \int_{\Gamma_{R5}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} + \\ & + \int_{\Gamma_{R6}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} + \int_R^{-R} \frac{e^{-i\mu(i\sqrt{2}+\tau)} d\tau}{\left(\sqrt{a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2}\right)^{n-2}} = O(R^{2-n}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Непосредственный анализ показывает, что при вещественных $\zeta = v$ и $\zeta = -v$, $v \geq 0$, функция $\sqrt{a^2 + \zeta^2} = \sqrt{\zeta - ia} \sqrt{\zeta + ia}$ принимает значения противоположных знаков. Поэтому замена переменной $v = -\tilde{v}$ дает

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R5}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} &= \int_{-R}^0 \frac{e^{-i\mu v} dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} = \int_R^0 \frac{e^{i\mu\tilde{v}} (-d\tilde{v})}{\left(\sqrt{a^2 + (-\tilde{v})^2}\right)^{n-2}} = \\ &= \int_R^0 \frac{e^{i\mu\tilde{v}} (-d\tilde{v})}{\left(-\sqrt{a^2 + \tilde{v}^2}\right)^{n-2}} = (-1)^{n-2} \int_0^R \frac{e^{i\mu v} dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{R1}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} + \int_{\Gamma_{R5}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} = \\ &= \int_0^R \frac{e^{-i\mu v} dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} + (-1)^{n-2} \int_0^R \frac{e^{i\mu v} dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} = \\ &= \int_0^R \frac{\left(e^{-i\mu v} + (-1)^n e^{i\mu v}\right) dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} = \\ &= \left((-1)^n + 1\right) \int_0^R \frac{\cos \mu v dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} + i \left((-1)^n - 1\right) \int_0^R \frac{\sin \mu v dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обратимся к интегралу по участку лемнискаты Γ_{R6} . Обозначим $r_1 = |\zeta - ia|$, $r_2 = |\zeta + ia|$ и $\phi_1 = \arg(\zeta - ia)$, $\phi_2 = \arg(\zeta + ia)$. Поскольку при $\zeta \in \Gamma_{R6}$ будет

$$\zeta = a\sqrt{2} \left(\frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} + i \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \right),$$

величины ϕ_1 , ϕ_2 , а вместе с ними и $e^{i(n-2)(\phi_1 + \phi_2)/2}$, не зависят ни от a , ни от μ . При этом $|e^{i(n-2)(\phi_1 + \phi_2)/2}| = 1$.

Кроме того, по известному свойству лемнискаты справедливо $\sqrt{r_1} \sqrt{r_2} = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{a^2} = a$ при $a > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{R6}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{\left(\sqrt{a^2 + \zeta^2}\right)^{n-2}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-i\mu a\sqrt{2}\left(\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} + i\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)} a\sqrt{2} \frac{1-3\sin^2 t + i(\sin^3 t - 3\sin t)}{(1+\sin^2 t)^2} dt}{a^{n-2} e^{i(n-2)(\phi_1+\phi_2)/2}} = \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-i\mu a\sqrt{2}\left(\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} + i\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)} \frac{1-3\sin^2 t + i(\sin^3 t - 3\sin t)}{(1+\sin^2 t)^2} dt}{(\mu a)^{(n-3)/2} e^{i(n-2)(\phi_1+\phi_2)/2}} = \\
&= -\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} \mathcal{I}_{\Gamma 6}(\mu a),
\end{aligned}$$

где обозначено

$$\mathcal{I}_{\Gamma 6}(s) = \frac{1}{s^{(n-3)/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-is\sqrt{2}\left(\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} + i\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)} \frac{1-3\sin^2 t + i(\sin^3 t - 3\sin t)}{(1+\sin^2 t)^2} dt}{e^{i(n-2)(\phi_1+\phi_2)/2}}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Заметим, что интеграл в правой части последнего равенства есть функция, аналитическая при всех $s \in \mathbb{C}$, включая точку $s = 0$. Поэтому $|r^{(n-3)/2} \mathcal{I}_{\Gamma 6}(re^{i\psi})| = O(1)$, $r \rightarrow 0+, \psi \in [0, 2\pi)$.

Перейдем в (2.8) к пределу при $R \rightarrow \infty$. С учетом (2.9) мы получим

$$\begin{aligned}
&\left((-1)^n + 1\right) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \mu v dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} + i\left((-1)^n - 1\right) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \mu v dv}{\left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^{n-2}} - \\
&-\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} \mathcal{I}_{\Gamma 6}(\mu a) - e^{\mu\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(\sqrt{a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2}\right)^{n-2}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Первый из интегралов в (2.10) равен

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{\mu}{2a}\right)^{(n-3)/2} \left[\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\right]^{-1} K_{(n-3)/2}(\mu a),$$

второй равен

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\mu}{2a}\right)^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) \left(I_{(n-3)/2}(\mu a) - \mathbf{L}_{(3-n)/2}(\mu a)\right)$$

(см. [21, с. 167, 262]). Здесь $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$ – модифицированные функции Бесселя, $\mathbf{L}_\nu(s)$ – модифицированная функция Струве. Заметим, что функции $K_{(n-3)/2}(s)$ и $I_{(n-3)/2}(s) - \mathbf{L}_{(3-n)/2}(s)$ обе аналитические при $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяют условиям

$$|r^{(n-3)/2} K_{(n-3)/2}(re^{i\psi})| = O(1),$$

$$\left|r^{(n-3)/2} \left(I_{(n-3)/2}(re^{i\psi}) - \mathbf{L}_{(3-n)/2}(re^{i\psi})\right)\right| = O(1)$$

при $r \rightarrow 0+, \psi \in [0, 2\pi)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(\sqrt{a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2}\right)^{n-2}} = C(n) e^{-\mu\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} V(\mu a),$$

где $V(s)$ — функция аналитическая при $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяющая условию $|r^{(n-3)/2} V(re^{i\psi})| = O(1), r \rightarrow 0+, \psi \in [0, 2\pi)$. Окончательно с учетом (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mu; a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{(a^2 + (b - i\sqrt{2} - t)^2)^{(n-2)/2}} = \\ &= C(n) e^{-\mu\sqrt{2}} e^{-i\mu b} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} V(\mu a), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Лемма 2.1 доказана.

Заметим, что функция V многозначна, но имеет однозначную ветвь на комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $i + \dots$.

Доказательство теоремы 2.1. Обозначим

$$g(v) = f(0, \dots, 0, v) = \int_D \frac{h(x)u(x)dx}{\left(|x'|^2 + (v - x_n)^2\right)^{(n-2)/2}}, |v| > 1 - \varepsilon. \quad (2.11)$$

Ввиду вещественной аналитичности функции g при $v > 1 - \varepsilon$, указанная функция допускает однозначное аналитическое продолжение в окрестность луча $\{\zeta = v + iw \in \mathbb{C} \mid v > 1 - \varepsilon, w = 0\}$. Это продолжение соответствует выбору ветви квадратного корня, для которой $\sqrt{1} = 1$. Функцию g далее можем с сохранением однозначности аналитически продолжить вдоль дуг $\{ve^{it} \mid t \in (0, \pi)\}$, $v > 1 - \varepsilon$, в область

$$Q = \{\zeta = v + iw \in \mathbb{C} \mid w > 0\} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq 1 - \varepsilon\}.$$

Однозначность такого продолжения определяется тем, что для точек ζ этих дуг при всех $x = (x', x_n) \in \bar{D}$ выполняется $|x'|^2 + (\zeta - x_n)^2 \neq 0$, $0 < \arg(|x'|^2 + (\zeta - x_n)^2) < 2\pi$.

В силу (2.2), $g(v) = 0$ при $v > 1 - \varepsilon$. Пользуясь теоремой единственности для аналитических функций (см. [22, с. 73]), заключаем, что $g(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in Q$. Для дальнейших построений существенно, что прямая $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta = t + i\sqrt{2}, t \in \mathbb{R}\}$ принадлежит Q , поэтому согласно (2.11) имеем

$$\begin{aligned} g(t + i\sqrt{2}) &= \int_D \frac{h(x)u(x)dx}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} = 0 \\ &\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}(D). \end{aligned} \quad (2.12)$$

При фиксированных $u \in \mathcal{H}(D)$, $A > 0$ на основании (2.12) и теоремы Фубини запишем

$$\begin{aligned} &\int_{-A}^A e^{-i\mu t} \left(\int_D \frac{h(x)u(x)dx}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} \right) dt = \\ &= \int_D h(x)u(x) \left(\int_{-A}^A \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку множество $\{x \in D \mid x' = 0\}$ имеет в $\mathbb{R}^n$ меру нуль, можем считать, что в правом интеграле по $[-A, A]$ выполняется $|x'| > 0$. Заметим, что величины $a = |x'|$, $b = x_n$ удовлетворяют условию леммы 2.1. Согласно этой лемме, функция

$$\eta_A(x, \mu) = \int_{-A}^A \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}}$$

при $A \rightarrow +\infty$ сходится к $\mathcal{I}(\mu; |x'|, x_n)$ равномерно по $x \in D$. В частности, для всех $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняется $\sup_{x \in D} |\eta_A(x, \mu)| < \infty$. Предельный переход в (2.13) при $A \rightarrow +\infty$ с использованием теоремы

Лебега о мажорируемой сходимости дает

$$\int_D h(x) u(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} \right) dx = 0.$$

Поэтому из (2.3) следует равенство

$$\int_D h(x) u(x) e^{-i\mu x_n} \frac{V(\mu |x'|)}{|x'|^{(n-3)/2}} dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.14)$$

Непосредственно проверяется, что для любого $\lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $u_{\lambda'}(x) = e^{-i(\lambda', x') + |\lambda'| x_n}$ принадлежит $\mathcal{H}(D)$. Полагая $u = u_{\lambda'}$ в (2.14), получаем

$$\int_D h(x) e^{-i(\lambda', x') + (|\lambda'| - i\mu)x_n} \frac{V(\mu |x'|)}{|x'|^{(n-3)/2}} dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (2.15)$$

При каждом $\lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция в левой части (2.15) аналитична по $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поэтому равенство (2.15) по аналитичности продолжается на комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $i\mathbb{R}_+$. Полагая $\mu = p - |\lambda'|i$, $p \neq 0$ в (2.14), получаем

$$\int_D h(x', x_n) e^{-ipx_n} e^{-i(\lambda', x')} \frac{V((p - |\lambda'|i)|x'|)}{|x'|^{(n-3)/2}} dx' dx_n = 0 \quad \forall \lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.16)$$

Зафиксируем финитную на $\mathbb{R}_+$ функцию $\eta = \eta(r)$, $r \geq 0$, и функцию $Y_{k,l}$ тригонометрического базиса для некоторых $k \geq 0$ и $1 \leq l \leq d_k$. Умножим обе части равенства (2.16) на $\eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta)$, где $\theta = \lambda' / |\lambda'|$, и проинтегрируем результат по $\mathbb{R}^{n-1} = \{\lambda'\}$, считая функцию h продолженной нулем вне D . Мы будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{h(x', x_n)}{|x'|^{(n-3)/2}} e^{-ipx_n} \times \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\lambda', x')} V((p - |\lambda'|i)|x'|) \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' \right) dx' dx_n = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Согласно формуле (2.6.5) из [23] (см. также теорему 3.10 из [24]), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\lambda', x')} V((p - |\lambda'|i)|x'|) \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' = \\ & = (-i)^k (2\pi)^{(n-1)/2} \rho^{(3-n)/2} Y_{k,l}(\varphi) \times \\ & \times \int_0^{\infty} J_{(n-1)/2+k-1}(r\rho) V((p - ir)\rho) \eta(r) r^{(n-1)/2} dr, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\varphi = x' / |x'|$, $\rho = |x'|$, $J_{(n-1)/2+k-1}(\zeta)$ — функция Бесселя.

Выбирая в (2.17) в качестве η элемент последовательности финитных на $\mathbb{R}_+$ функций $\{\eta_m(r)\}$, сходящихся в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к $\delta(r-t)$, $t > 0$, и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, из (2.17), (2.18) получаем

$$\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \left(\int_{S^{n-2}} \rho^{n-2} \frac{h(x'(\rho, \varphi), x_n)}{\rho^{(n-3)/2}} \rho^{(3-n)/2} Y_{k,l}(\varphi) d\varphi \right) e^{-ipx_n} dx_n \right) \times$$

$$\times J_{(n-1)/2+k-1}(tp) V((p-it)\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.19)$$

Здесь $x'(\rho, \varphi) = \rho\varphi$, $\rho = |x'|$. При выводе (2.19) использовалась формула

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x') dx' = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-2}} f(x') d\varphi \right) d\rho = \int_0^\infty \rho^{n-2} \left(\int_{S^{n-2}} f(x'(\rho, \varphi)) d\varphi \right) d\rho,$$

в которой $S_\rho^{n-2} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| = \rho\}$ и f — произвольная интегрируемая на $\mathbb{R}^{n-1}$ функция.

Завершение доказательства проводится по схеме из [17]. Обозначим

$$G_{k,l}(\rho, x_n) = \int_{S^{n-2}} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi,$$

$$f_{p,k,l}(\rho) = \int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) e^{-ipx_n} dx_n. \quad (2.20)$$

Из (2.19) следует равенство

$$\int_0^\infty J_{(n-1)/2+k-1}(tp) V((p-it)\rho) f_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0$$

$$\forall t \geq 0, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.21)$$

Имеет место представление

$$f_{p,k,l}(\rho) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-ip)^j}{j!} \int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j dx_n.$$

Поскольку $|x| \leq 1 - \varepsilon$ для $x \in D$, функция $G_{k,l} \equiv 0$ вне прямоугольника $[0, 1 - \varepsilon] \times [-(1 - \varepsilon), 1 - \varepsilon]$, и соответственно $f_{p,k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[0, 1 - \varepsilon]$.

Зафиксируем номера $k = k_0$, $l = l_0$. Возможны два случая:

1) для всех $j = 0, 1, \dots$ справедливо $\int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geq 0$; таким образом, в этом случае $f_{p,k,l} = 0$ п.в. для всех $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) найдется номер $m \geq 0$ такой, что $\int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geq 0$ и всех $0 \leq j < m$, но функция $\int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n$ отлична от нуля на множестве положительной меры в $[0, 1 - \varepsilon]$.

В случае 1) по теореме Мюнца (см. [25, с. 54]) для п.в. $\rho \geq 0$, $x_n \in \mathbb{R}$ имеем $G_{k,l}(\rho, x_n) = 0$. Поэтому ввиду (2.20)

$$\int_{S^{n-2}} h(x(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.22)$$

для п.в. $\rho \geq 0$, $x_n \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим подробнее случай 2). В этом случае при $p \rightarrow 0+$ справедливо равенство

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!} \int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n + O(p^{m+1}). \quad (2.23)$$

Поэтому при малых $p > 0$ имеет место

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_n) x_n^m dx_n \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что для достаточно малого $\delta > 0$ при $0 < p \leq \delta$ выполняется $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$. Введем обозначение

$$\tilde{f}_{p,k,l}(\rho) = f_{p,k,l}(\rho) / \|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < p \leq \delta.$$

Используя (2.23) и (2.24), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) &= \left(\left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_n) x_n^m dx_n \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p) \right)^{-1} \times \\ &\times \left((-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n + O(p) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|\tilde{f}_{p,k,l} - \tilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \quad (2.25)$$

где

$$\tilde{g}_{k,l}(\rho) = (-i)^m \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_n) x_n^m dx_n \right\|_{L_2(0,\infty)}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n. \quad (2.26)$$

Согласно (2.26), имеем

$$\|\tilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 1 \quad (2.27)$$

и $\tilde{g}_{k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[0, 1 - \varepsilon]$. Из (2.21) следует, что для выбранных номеров $k = k_0$, $l = l_0$ выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V((p-it)\rho) \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.28)$$

Заметим, что в (2.28) интегрирование фактически ведется по отрезку $[0, 1 - \varepsilon]$. Поэтому, в частности,

$$\int_0^1 J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V((p-it)\rho) \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.29)$$

Переходя в (2.29) к пределу при $p \rightarrow 0+$, с учетом (2.25) получаем

$$\int_0^1 J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V(-it\rho) \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t > 0. \quad (2.30)$$

Отсюда обычным образом следует, что $\tilde{g}_{k,l}(\rho) = 0$ п.в. на $(0, 1)$ (а при $\rho \geq 1$ равенство $\tilde{g}_{k,l}(\rho) = 0$ уже установлено). Действительно, умножая обе части (2.30) на t^{-s} , $s \in (0, 1)$, и интегрируя на отрезке $t \in [0, 1]$, находим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \tilde{g}_{k,l}(\rho) \left(\int_0^1 t^{-s} J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V(-it\rho) dt \right) d\rho = \\ &= \int_0^1 \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho \int_0^1 \tau^{-s} J_{(n-1)/2+k-1}(\tau) V(-i\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Функция Бесселя $J_{(n-1)/2+k-1}(\tau)$ в точке $\tau = 0$ имеет нуль порядка $(n-1)/2+k-1 \geq (n-3)/2$. Поскольку в силу леммы 2.1 справедливо $|\tau^{(n-3)/2}V(-i\tau)| = O(1), \tau \rightarrow 0+$ при $n > 3$ (или эта функция имеет логарифмическую особенность при $n = 3$), последний написанный интеграл сходится и представляет собой аналитическую функцию $\Psi(s)$.

Если бы при всех $s \in (0,1)$ было $\Psi(s) = 0$, то по теореме Мюнца мы имели бы $J_{(n-1)/2+k-1}(\tau)V(-i\tau) \equiv 0$. В силу аналитичности V , это значит, что $V(s) = 0$ при всех $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а ввиду (2.3) и (2.4) отсюда следует, что

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2\right)^{(n-2)/2}} = 0. \quad (2.31)$$

Покажем, что утверждение (2.31) на самом деле несправедливо. Обозначим $f(\tau) = (a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2)^{-(n-2)/2}$. При $n \geq 4$ имеем $f \in L_1(\mathbb{R})$ и соотношение (2.31) означает, что преобразование Фурье функции f почти всюду равно нулю на $\mathbb{R}$. Но тогда и функция f почти всюду равна нулю на $\mathbb{R}$ (см. следствие 9.1.11 в [26]), а это не так. При $n = 3$ имеем $f \in L_2(\mathbb{R})$, и тогда в силу замечания к теореме 9.2.3 в [26] преобразование Фурье $\hat{f}(\mu)$ функции f почти всюду на $\mathbb{R}$ равно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\mu\tau} d\tau.$$

Комбинируя это утверждение с (2.31), приходим к выводу, что $\hat{f} = 0$ в $L_2(\mathbb{R})$. Но тогда и $f = 0$ в $L_2(\mathbb{R})$, а это не так.

Поэтому найдется такой отрезок $[\alpha, \beta]$, что $\Psi(s) \neq 0$ при $s \in [\alpha, \beta]$ и, значит,

$$\int_0^1 \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = \int_0^\infty \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall s \in [\alpha, \beta]. \quad (2.32)$$

Из (2.32) и теоремы об обращении преобразования Меллина (см. [21, с. 73]) следует $\tilde{g}_{k,l} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$. Полученное равенство противоречит (2.27). Тем самым показано, что случай 2) невозможен ни при каких k, l .

Таким образом, реализуется случай 1), поэтому в силу (2.22) имеем

$$\int_{S^{n-2}} h(x'(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0$$

для всех $k = 0, 1, \dots; l = 1, \dots, d_k$ и для п.в. $\rho \geq 0, x_n \in \mathbb{R}$. Поскольку система сферических функций $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(S^{n-2})$, отсюда следует, что

$$h(x'(\rho, \varphi), x_n) = 0$$

для п.в. $\rho \geq 0, x_n \in \mathbb{R}, \varphi \in S^{n-2}$. Поэтому $h(x) = 0$ для п.в. $x \in D$. Теорема доказана.

Покажем, как из доказанной теоремы следует единственность решения многомерного уравнения М.М. Лаврентьева (1.3) в пространстве произвольной размерности $n \geq 3$. Справедливо следующее утверждение (см. теорему 4 в [27]).

Лемма 2.2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $n \geq 3$. Тогда справедливо ортогональное разложение

$$L_2(D) = \mathcal{H}(D) \oplus \mathcal{O}(D),$$

где $\mathcal{H}(D)$ – множество гармонических функций, принадлежащих $L_2(D)$,

$$\mathcal{O}(D) = \left\{ w \in L_2(D) \mid \forall r \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}, \int_D \frac{w(x)dx}{|r-x|^{n-2}} = 0 \right\}.$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 2.2 в [13], приходим к следствию леммы 2.2.

Лемма 2.3. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$, $n \geq 3$, есть множество единственности. Тогда множество линейных комбинаций функций $|r-x|^{-(n-2)}$, $r \in S$, плотно в $\mathcal{H}(D)$ в смысле метрики пространства $L_2(D)$.

Здесь под множеством единственности понимается такое множество $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$, что любая гармоническая в $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$ функция u , равная нулю во всех точках множества S и стремящаяся к нулю на бесконечности, тождественно равна нулю на всем множестве $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$. Очевидным примером множества единственности служит любая гиперплоскость Π размерности $n-1$, не пересекающая $\bar{D}$, что следует из принципа максимума для гармонических функций.

Рассмотрим теперь уравнение (1.3) с нулевой правой частью:

$$\int_D \frac{\xi(x)dx}{|x-y|^{n-2}|x-z|^{n-2}} = 0, \quad (y, z) \in Y \times Z. \quad (2.33)$$

Интеграл в левой части (2.33) представляет собой аналитическую функцию $y \in Y$ и $z \in Z$, и аналитическое продолжение позволяет установить это равенство для всех $(y, z) \in Y \times \Pi$. Семейство $\{|x-z|^{-(n-2)}, z \in \Pi\}$ обладает свойством полноты в множестве $\mathcal{H}(D)$, поэтому в силу (2.33) справедливо соотношение

$$\int_D u(x) \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \xi(x) dx = 0 \quad \forall y \in Y, u \in \mathcal{H}(D).$$

Из теоремы 2.1 тогда получаем, что $\xi(x) = 0$ почти всюду в D и тем самым оператор интегрального уравнения (1.2) инъективен. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть $n \geq 3$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – открытый интервал или отрезок на произвольной прямой $L \subset \mathbb{R}^n$, $Y \cap \bar{D} = \emptyset$, а Z – область в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, не пересекающей $\bar{D}$. Тогда многомерное уравнение М.М. Лаврентьева (1.3) имеет не более одного решения при любой правой части f .

В качестве непосредственного применения доказанной теоремы укажем вывод о единственности решения обратной коэффициентной задачи для волнового уравнения (1.1) в трехмерном пространстве в случае, когда множество источников Y и множество детекторов Z имеют вид, указанный в теореме 2.2. При этом мы допускаем, что прямая, на которой лежит промежуток Y , может пересекать зондируемую область D .

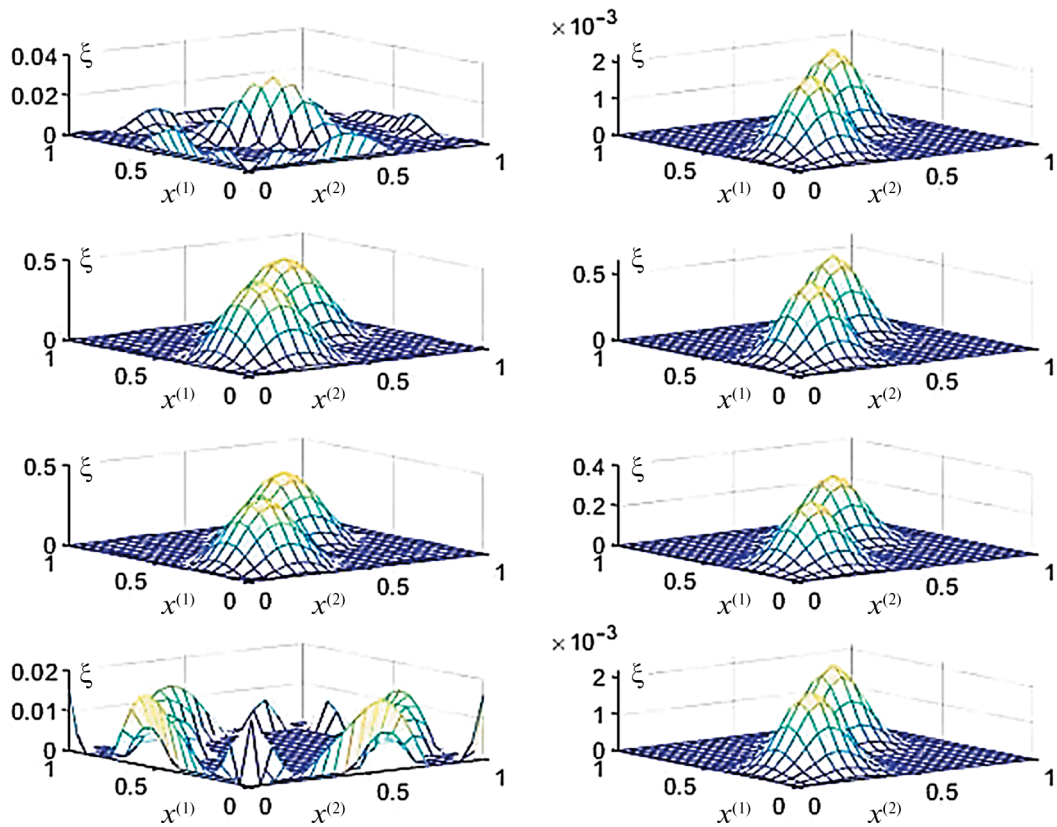
Таблица 1. Продолжение отрезка источников Y пересекает область D и прямоугольник Z . Указаны относительные погрешности аппроксимации функций ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^*

N	Множества Y и Z	ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*
1	Y — отрезок с концами $(0.5, 0.5, 1.1)$ и $(0.5, 1.5, 2.1)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.6678	0.4598	0.5096
2	Y — отрезок с концами $(0.5, 0.5, 1.1)$ и $(0.5, 1.5, 2.1)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.6877	0.4917	0.5472
3	Y — отрезок с концами $(0.5, 0.5, 1.1)$ и $(0.5, 0.5, 2.1)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.6826	0.5261	0.5530
4	Y — отрезок с концами $(0.1, 0.1, 1.1)$ и $(0.1, 0.1, 2.1)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.7756	0.6652	0.6247
5	Y — отрезок с концами $(0.5, 0.5, 1.1)$ и $(0.5, 0.5, 2.1)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.7840	0.6107	0.6420

Таблица 2. Отрезок Y и прямоугольник Z параллельны. Указаны относительные погрешности аппроксимации функций ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^*

N	Множества Y и Z	ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*
6	Y — отрезок с концами $(0, 0, 1.001)$ и $(1, 1, 1.001)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.5576	0.3417	0.3745
7	Y — отрезок с концами $(-1, -1, 1.001)$ и $(2, 2, 1.001)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 1 < x^{(1)}, x^{(2)} < 2\}$	0.5264	0.3217	0.3300
8	Y — отрезок с концами $(0.5, 0, 1.001)$ и $(0.5, 1, 1.001)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ - 0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.6080	0.3362	0.4082

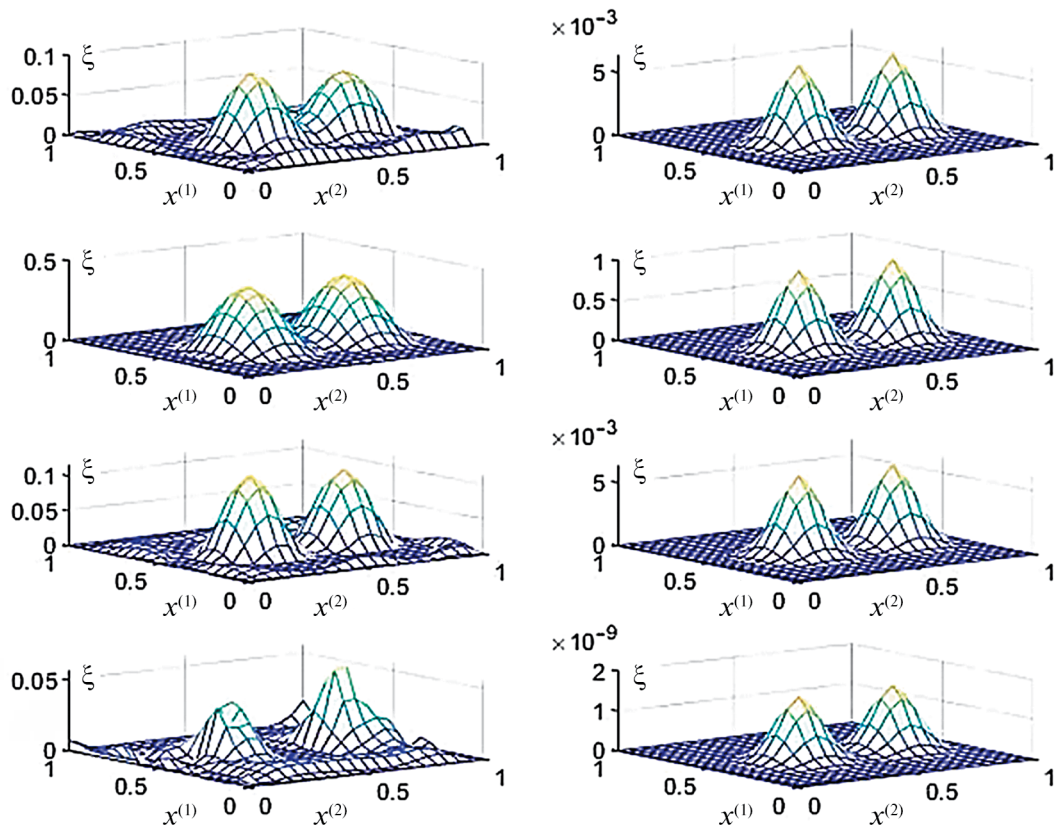
9	Y — отрезок с концами $(0.5, -0.5, 1.001), (0.5, 1.5, 1.001)$ $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ -0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.5173	0.2848	0.3399
10	Y — отрезок с концами $(0.5, -0.5, -0.001), (0.5, 1.5, -0.001),$ $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) $ $ -0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.5707	0.4631	0.4845
11	Y — отрезок с концами $(0.5, -0.5, -0.4), (0.5, 1.5, -0.4)$ $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.5) $ $ -0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.7966	0.6726	0.7488



Фиг. 1. Пример 7 из табл. 2. Графики функции $\xi_3^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Далее приводятся результаты численных экспериментов по решению уравнения М.М. Лаврентьева (1.2) в пространстве $\mathbb{R}^3$ с различными расположениями множеств источников Y и детекторов Z относительно друг друга и множества D . Как показано выше, к этому уравнению приводится коэффициентная обратная задача для уравнения акустики (1.1). В отличие от предыдущих исследований, таких как в [6], мы допускаем, что прямая L , содержащая промежуток Y , на котором располагаются источники звуковых волн, может пересекать область неоднородности D ; выше доказана единственность



Фиг. 2. Пример 9 из табл. 2. Графики функции $\xi_1^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

решения уравнения (1.2) в этом случае. В качестве области неоднородности D выбирается единичный куб $(0,1)^3$, в качестве множества детекторов Z — прямоугольник, параллельный одной из граней куба. Мы строим модельные примеры с заранее известным решением $\xi^*(x)$, вычисляя по нему функцию $f(y, z)$ в правой части (1.2), а затем решаем эти примеры с помощью описанного в [6] алгоритма. А именно, вводя на множествах D, Y, Z равномерные сетки $\{\bar{x}_{ijk}\}, \{\bar{y}_r\}, \{\bar{z}_{pq}\}, 0 \leq i, j, k; p, q, r \leq N$ соответственно и дискретизируя интегральное уравнение (1.2), мы получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{i,j,k=0}^{N-1} a_{ijk,pqr} \xi_{ijk} = f(\bar{y}_r, \bar{z}_{pq}); \quad 0 \leq p, q, r \leq N-1. \quad (3.1)$$

Здесь ξ_{ijk} , $0 \leq i, j, k \leq N-1$ — аппроксимации для значений $\xi^*(\bar{x}_{ijk})$ искомой функции ξ^* в узлах сетки,

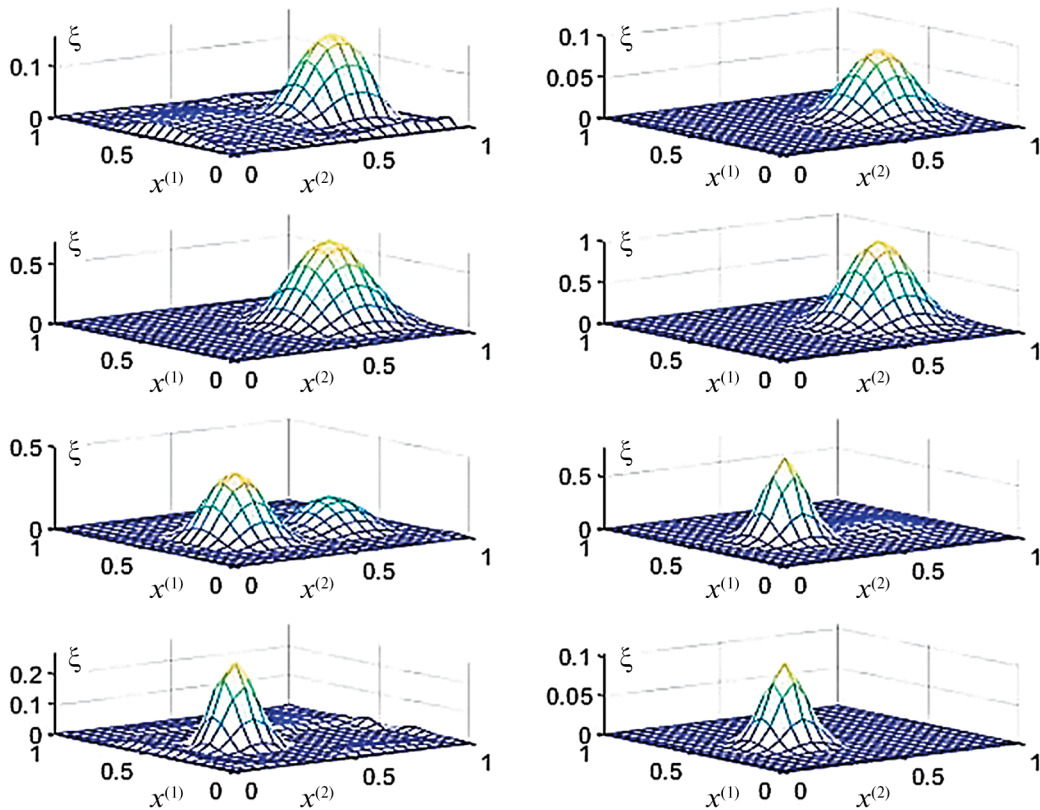
$$a_{ijk,pqr} = \frac{h^3}{|\bar{x}_{ijk} - \bar{y}_r| |\bar{x}_{ijk} - \bar{z}_{pq}|}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Регуляризация системы (3.1) по схеме Тихонова приводит к уравнению

$$(A^*A + \alpha E)\xi_\alpha = A^*f,$$

где $A = a_{ijk,pqr} \in \mathbb{R}^{N^3 \times N^3}$, $f = (f_{pqr}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. В расчетах полагаем $N = 20$, $\alpha = 10^{-11}$. Близость ξ_α к точному решению определяется нормой разности $\|\xi_\alpha - \xi^*\|_{L_2}$ и относительной погрешностью

$$\Delta = \frac{\|\xi_\alpha - \xi^*\|_{L_2}}{\|\xi^*\|_{L_2}}.$$



Фиг. 3. Пример 9 из табл. 2. Графики функции $\xi_2^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

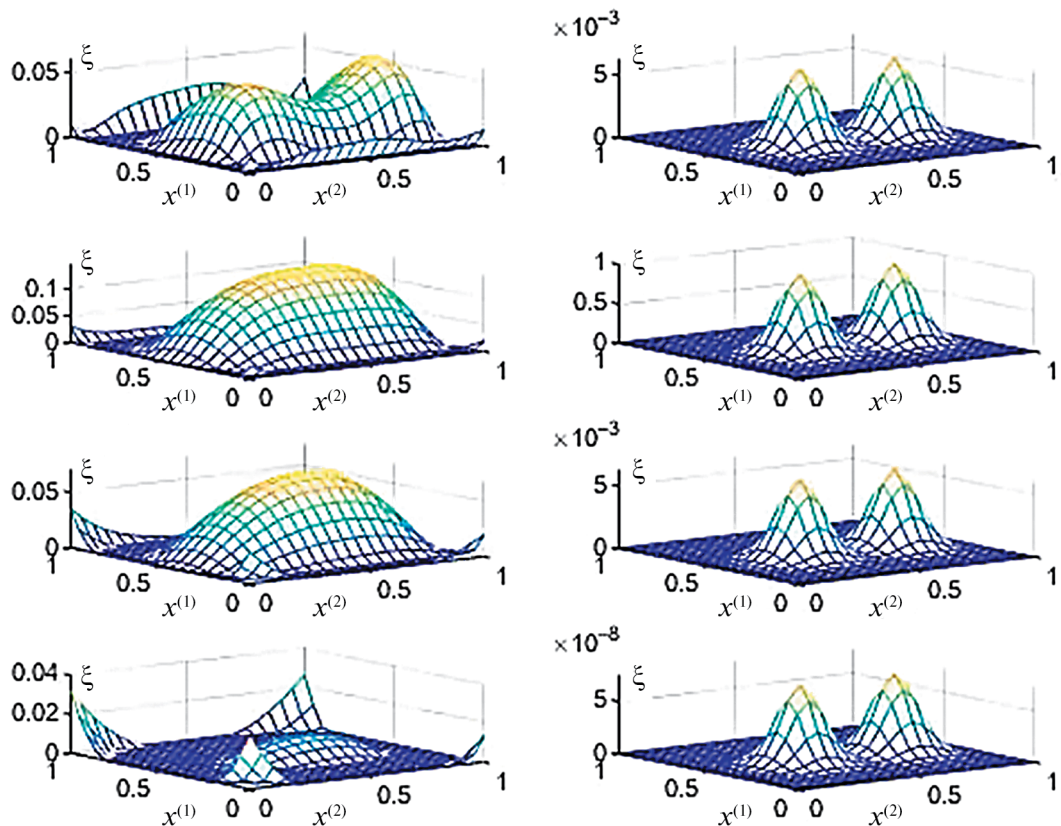
Рассматриваются неоднородности трех различных типов, описываемые функциями

$$\begin{aligned} \xi_1^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = & \exp\left[-81\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2\right)\right] + \\ & + \exp\left[-81\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.8)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2\right)\right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \xi_2^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = & \exp\left[-100\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.8)^2\right)\right] + \\ & + \exp\left[-40\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.8)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2\right)\right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \xi_3^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = & \exp\left[-50\left((x^{(1)} - 0.3)^2 + (x^{(2)} - 0.3)^2 + (x^{(3)} - 0.6)^2\right)\right] + \\ & + \exp\left[-50\left((x^{(1)} - 0.7)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.6)^2\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Первая и третья функции описывают две неоднородности одного размера, расположенные на одинаковой высоте ($x^{(3)} = 0.5$ и $x^{(3)} = 0.6$ соответственно), с центрами в точках $(0.5, 0.4, 0.5)$, $(0.5, 0.8, 0.5)$ и $(0.3, 0.3, 0.6)$, $(0.7, 0.7, 0.6)$. Вторая функция описывает две неоднородности различной геометрии, расположенные на высотах $x^{(3)} = 0.5$ и $x^{(3)} = 0.8$, с центрами в точках $(0.5, 0.8, 0.5)$ и $(0.5, 0.4, 0.8)$ соответственно. Значения относительной погрешности Δ для функций (3.2)–(3.4) при разных Y и Z



Фиг. 4. Пример 11 из табл. 2. Графики функции $\xi_1^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

представлены в табл. 1 и 2. Первый столбец содержит порядковый номер эксперимента, во втором выписаны расположения областей Y и Z . Отдельные численные эксперименты проиллюстрированы на фиг. 1–4. На этих рисунках сверху вниз представлены графики точных и приближенных функций $\xi(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ в порядке возрастания значения $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$. В правой колонке графиков расположены изображения точного решения ξ^* , в левой – соответствующие изображения приближенных решений ξ_α .

Результаты проведенных экспериментов показывают, что точность аппроксимации неоднородности обычно повышается при увеличении размеров отрезка Y и прямоугольника Z (ср. эксперименты 1 и 2, 6 и 7, 8 и 9), а также при их приближении к исследуемой неоднородности (ср. эксперименты 3–5, 9–11). Можно рекомендовать располагать отрезок Y и прямоугольник Z по разные стороны от куба D , параллельно его граням и как можно ближе к ним. В экспериментах 6–9, где множества Y и Z расположены именно так, погрешности аппроксимации минимальны (см. фиг. 1–3). В то же время фиг. 4 демонстрирует, что при удалении множеств Y и Z от зондируемой области D погрешность аппроксимации увеличивается. Проведенные эксперименты показывают, что обычно место локализации неоднородностей восстанавливается точнее, чем их амплитуды. Для дальнейшего увеличения точности вычислений необходимо увеличивать количество шагов сетки N , что, в свою очередь, требует применения суперкомпьютерных технологий (см. [17]). Альтернативой им могут выступать специальные быстрые алгоритмы, например, предлагаемые в [18], [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. 3. С. 520–521.

2. Лаврентьев М.М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. 1. С. 32–35.
3. Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 47. 3. С. 1201–1209.
4. Вайнберг М.М. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1982.
5. Романов В.Г. О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. 4. С. 883–889.
6. Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об интегральных уравнениях типа М.М.Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. 9. С. 1492–1507.
7. Klibanov M., Li J., Zhang W. Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // SIAM J. Appl. Math. 2021. V. 81. 5. P. 1954–1978.
8. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений гармонических функций и единственность решения уравнения М.М. Лаврентьева в обратных задачах волнового зондирования // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86. 6. С. 101–122.
9. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
10. Рамм А.Г. Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
11. Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцеров Е.В. Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. 4. С. 747–757.
12. Кокурин М.Ю., Паймеров С.К. Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. 1. С. 117–128.
13. Kokurin M. Yu. On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. 2013. V. 21. 1. P. 125–140.
14. Кокурин М.Ю. О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Матем. заметки. 2018. Т. 104. 5. С. 708–716.
15. Кокурин М.Ю. О полноте произведений решений уравнения Гельмгольца // Изв. вузов. Математика. 2020. 6. С. 30–35.
16. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. 2. С. 255–264.
17. Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева // Сиб. журн. вычисл. матем. 2022. Т. 25. 4. С. 441–458.
18. Бакушинский А.Б., Леонов А.С. К численному решению обратной многочастотной задачи скалярной акустики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. 6. С. 1013–1026.
19. Bakushinsky A.B., Leonov A.S. Multifrequency inverse problem of scalar acoustics: remarks on nonuniqueness and solution algorithm // J. of Math. Sci. 2023. V. 274. 4. P. 460–474.
20. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в 3-х томах). Том 2. М.: Дрофа, 2004.
21. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961.
22. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
23. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Физматлит, 1997.
24. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
25. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
26. Богачёв В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011.
27. Маргулис А.С. К теории потенциала в классах $L_p(\Omega)$ // Изв. вузов. Математика. 1982. Т. 236. 1. С. 33–41.

UNIQUENESS OF A SOLUTION TO THE LAVRENT'EV INTEGRAL EQUATION IN N-DIMENSIONAL SPACE

M. M. Kokurin^{a,*}, V. V. Klyuchev^a, A. V. Gavrilova^a

^a*Mari State University,*

Lenin Sqr., 1, Yoshkar-Ola, Republic of Mari El, 424001 Russia

**e-mail: kokurin@nextmail.ru*

Received 02 October, 2023

Revised 02 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. We study the multidimensional analogue of the Lavrent'ev integral equation to which an inverse problem of acoustic sounding is reduced. Conditions under which the studied equation has a unique solution are established. Results of numerical experiments concerning the solution of the inverse acoustic problem with variously located sets of sources and detectors are presented.

Keywords: hyperbolic equation, coefficient inverse problem, acoustics inverse problem, linear integral equation, Lavrentiev equation, singularity of solution, harmonic functions, complete system of functions, set of singularity.