

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.615

ТОЧНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ КВАДРАТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾© 2024 г. Ю. Г. Евтушенко^{1,2,*}, А. А. Третьяков^{1,3,**}¹119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия²141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9, Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия³08-110 Siedlce, Siedlce University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Poland

*e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**e-mail: prof.tretyakov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

Переработанный вариант 15.09.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Рассматривается система нелинейных уравнений вида $F(x) = 0_n$, где отображение F квадратичное, действующее из $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. При этом производная F' в решении вырождена, что является одним из главных характеристических свойств нелинейности отображения. На основе конструкций теории p -регулярности предложен 2-фактор метод решения этой системы, который сходится с квадратичной скоростью. Более того, получена точная формула для решения данной системы квадратичных уравнений в случае 2-регулярности отображения F . Библ. 7.

Ключевые слова: вырожденность, p -регулярность, p -фактор оператор.**DOI:** 10.31857/S0044466924030012, **EDN:** XHLYYB

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система нелинейных уравнений вида $F(x) = 0_n$, где отображение F определено как

$$F(x) = B[x]^2 + Mx + N, \quad (1)$$

где M – матрица размерности $n \times n$, N – вектор из $\mathbb{R}^n$ и $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квадратичное отображение вида

$$B[x]^2 = B(x, x) = [(B_1x, x), \dots, (B_nx, x)]^T \quad (2)$$

для $x \in \mathbb{R}^n$ и B_i есть $n \times n$ симметричная матрица, $i = 1, \dots, n$.

В статье описывается применение теории p -регулярности [1–3] к решению систем нелинейных уравнений с отображением F , введенным в (1). Цель статьи представить точную формулу для решения уравнения $F(x) = 0_n$, где $F(x)$ – квадратичное отображение вида (1) с вырождением в решении x^* . Отметим, что нелинейные проблемы, среди которых квадратичные и полиномиальные уравнения, интенсивно исследуются в различных областях знаний и прикладных задачах. Оказывается, как это было показано в [4], нелинейность тесно связана с вырожденностью, а именно: так называемые существенно нелинейные задачи и вырожденные локально эквивалентны (см. [4]). Поэтому в данной статье исследуем системы квадратичных уравнений вида

$$B[x]^2 + Mx + N = 0_n \quad (3)$$

с вырождением, как основным характеристическим признаком нелинейности в решении. В данной статье покажем, как на основе теории p -регулярности и специальной конструкции 2-фактор оператора свести исходную задачу к системе линейных уравнений и получить формулу для решения системы (3).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-30005).

Определение и обозначения. Обозначим через $\text{Ker} S = \{x \in \mathbb{R}^n | Sx = 0_m\}$ ядро линейного оператора $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и через $\text{Im} S = \{y \in \mathbb{R}^m | y = Sx \text{ для некоторого } x \in \mathbb{R}^n\}$ — образ этого оператора.

Пусть $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывное симметричное квадратичное отображение. 2-форма, ассоциированная с B , это отображение $B[\cdot]^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ определено как $B[x]^2 = B(x, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Будем использовать следующее обозначение $\text{Im}^2 B = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists x \in \mathbb{R}^n : B[x]^2 = y\}$ и $\text{Ker}^2 B = \{x \in \mathbb{R}^n | B[x]^2 = 0_n\}$. Через $N(x^*)$ обозначим окрестность точки x^* .

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ 2-РЕГУЛЯРНОСТИ

Напомним некоторые обозначения и определения теории 2-регулярности [1–7] для конечномерного случая и опишем несколько версий 2-фактор метода для решения вырожденных нелинейных уравнений. Проиллюстрируем, как применять модификацию 2-фактор метода для получения формулы решения нелинейной системы уравнений с квадратичным оператором. Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$F(x) = 0_n, \quad (4)$$

где F — достаточно гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$. Пусть x^* -решение (4). Отображение F называется регулярным в точке x^* , если

$$\text{Im} F'(x^*) = \mathbb{R}^n \quad (5)$$

или, другими словами,

$$\text{rank} F'(x^*) = n,$$

где $F'(x^*)$ — матрица Якоби отображения F в точке x^* . Отображение называется нерегулярным (вырожденным), если (5) не выполнено. Пусть

$$\mathbb{R}^n = Y_1 + Y_2, \quad Y_1 = \text{Im} F'(x^*), \quad Y_2 = Y_1^\perp. \quad (6)$$

Определим отображения

$$F_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i, \quad F_i(x) = P_{Y_i} F(x), \quad i = 1, 2,$$

где $P_{Y_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i$ — ортопроектор на Y_i , $i = 1, 2$. Тогда F может быть представлено как $F(x) := F_1(x) + F_2(x)$ или $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_2(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y_1 \oplus Y_2)$, где $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, определенный как

$$\Psi_2(h) = F_1'(x^*) + F_2'(x^*)[h],$$

называется 2-фактор оператором. (Или 2-фактор оператором, порожденным вектором h .)

Рассмотрим нелинейный оператор $\Psi_2[\cdot]^2$ такой, что

$$\Psi_2[x]^2 := F_1'(x^*)[x] + F_2'(x^*)[x]^2.$$

Заметим, что $\Psi_2[x]^2 = \Psi_2(x)[x]$.

Определение 2. 2-ядро оператора Ψ_2 обозначим

$$H_2 = \text{Ker}^2 \Psi_2,$$

где $\text{Ker}^2 \Psi_2 = \{h \in \mathbb{R}^n | F_1'(x^*)[h] + F_2'(x^*)[h]^2 = 0_n\}$. Отметим, что $\text{Ker}^2 \Psi_2 = \bigcap_{k=1}^2 \text{Ker}^k F_k^{(k)}(x^*)$, где $\text{Ker}^k F_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in \mathbb{R}^n | F_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0_n\}$, k — ядро оператора $F_k^{(k)}(\cdot)[\cdot]^k$, $k = 1, 2$.

Определение 3. Отображение F называется 2-регулярным в точке x^* на h , если $\text{Im} \Psi_2(h) = \mathbb{R}^n$.

Определение 4. Отображение F называется 2-регулярным в точке x^* , если оно 2-регулярно на каждом $h \in H_2(x^*) \setminus \{0_n\}$ или $H_2(x^*) = \{0_n\}$.

2. 2-ФАКТОР МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения системы (4) воспользуемся 2-фактор методом, предложенным в [1]:

$$x_{k+1} = x_k - \{F'(x_k) + P_{Y_2} F''(x_k)h\}^{-1} (F(x_k) + P_{Y_2} F'(x_k)h), \quad (7)$$

где вектор h , $\|h\| = 1$ выбирается таким образом, чтобы матрица $(F'(x^*) + P_{Y_2} F''(x^*)h)$ была обратима. Фактически схема (7) – это схема метода Ньютона для решения системы

$$\Phi(x) = F(x) + P_{Y_2} F'(x)h = 0_n. \quad (8)$$

Следующий результат устанавливает факт сходимости 2-фактор метода (7).

Теорема 1. Пусть $F \in C^3(\mathbb{R}^n)$ и x^* – решение (4). Предположим, что существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| = 1$ такой, что F 2-регулярно в точке x^* на элементе h , т.е. матрица $F'(x^*) + P_{Y_2} F''(x^*)h$ не вырождена.

Тогда существует окрестность $N(x^*)$ точки x^* такая, что для $x_0 \in N(x^*)$ последовательность $\{x_k\}$, генерируемая 2-фактор методом (7), сходится к x^* , причем

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2, \quad (9)$$

где $C > 0$ – независимая константа.

Доказательство. Поскольку схема (7) – это метод Ньютона, примененный к системе (8), и матрица $\Phi'(x^*)$ не вырождена из условия 2-регулярности F в точке x^* на векторе h , причем $\Phi(x^*) = 0_n$, то схему (7) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = x_k - \Phi'(x_k)^{-1} \Phi(x_k), \quad (10)$$

для которой будет верна оценка (9). Теорема доказана.

Рассмотрим другую версию 2-фактор метода для решения системы (4). Поскольку

$$P_{Y_2} F'(x^*)h = 0_n \quad (11)$$

для любого $h \in \mathbb{R}^n$, то можем рассматривать уравнение

$$P_{Y_2} F'(x)h = 0_n. \quad (12)$$

Причем, если на элементе h существует $(P_{Y_2} F''(x^*)h)^{-1}$, то точка x^* будет локально единственным решением уравнения (12). Поэтому для решения (4) можно рассмотреть схему

$$x_{k+1} = x_k - (P_{Y_2} F''(x_k)h)^{-1} P_{Y_2} F'(x_k)h, \quad k = 0, 1, \quad (13)$$

для которой будет справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. Пусть $F \in C^3$, x^* – решение (4). Предположим, что существует вектор h , $\|h\| = 1$ такой, что матрица $P_{Y_2} F''(x^*)h$ не вырождена.

Тогда для $x_0 \in N(x^*)$ последовательность (13) сходится к x^* , причем

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2,$$

где $C > 0$ – независимая константа.

Доказательство. Следует из доказательства сходимости классического метода Ньютона. Отметим, что в схеме (13) оператор P_{Y_2} определен в точке x^* . Способы его построения по текущей точке x_k из достаточно малой окрестности $N(x^*)$ описаны в [7], и мы не будем здесь останавливаться на этом моменте.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ.
ТОЧНАЯ ФОРМУЛА

Пусть теперь отображение F определяется как

$$F(x) = B[x]^2 + Mx + N, \quad (14)$$

где M — матрица размерности $n \times n$, N — вектор из $\mathbb{R}^n$ и $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, определенное формулой (2). Рассмотрим, как 2-фактор метод (13) может быть применен для поиска решения уравнения (14).

Более того, покажем, что 2-фактор метод (13) сходится за одну итерацию к решению x^* уравнения (14), и дадим точную формулу для решения x^* уравнения (14). Для уравнения (14) предположения теоремы 2 сводятся к существованию вектора $h \neq 0_n$ такого, что

1)

$$P_{Y_2}(2B[x^*] + M)h = 0_n, \quad (15)$$

2)

$$P_{Y_2} 2Bh \text{ не вырождена.} \quad (16)$$

При этом соотношение (15) выполнено для любого $h \in \mathbb{R}^n$, так как $(2B[x^*] + M)h \in \text{Im} F'(x^*)$, а P_{Y_2} — ортопроектор на $(\text{Im} F'(x^*))^\perp$. Проблема состоит в построении оператора P_{Y_2} , который, вообще говоря, определяется неизвестной точкой x^* . Однако при $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, мы можем восстановить оператор P_{Y_2} , используя только информацию о точке x_0 . Полное описание этого факта и саму процедуру построения оператора P_{Y_2} можно найти, например, в [7].

Тогда первая итерация 2-фактор метода дает

$$x_1 = x_0 - (2P_{Y_2} Bh)^{-1} [2P_{Y_2} (Bx_0 + M)h], \quad (17)$$

что эквивалентно $2P_{Y_2} Bh(x_1 - x_0) = -(2P_{Y_2} Bx_0 + M)h$. Учитывая, что $2P_{Y_2} B[h, x_0] = 2P_{Y_2} B[x_0, h]$, получаем

$$x_1 = x^* = -\frac{1}{2} [P_{Y_2} Bh]^{-1} \cdot (Mh), \quad (18)$$

где вектор h удовлетворяет условию (16).

Отметим, что множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$, для которых выполнено условие (16), является массивным множеством (см. [3]), и поэтому мы не будем в данной статье останавливаться на способах построения векторов h , удовлетворяющих (16).

Пример 1. Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 1 \\ x_1 x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Представим отображение F в форме (14) при

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $F(x) = 0$ имеет локально единственное решение $x^* = (1, 0)^T$. В этом примере $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \mathbb{R}^2$, $P_{Y_1} = [0]_{2 \times 2}$, $P_{Y_2} = [I]_{2 \times 2}$, $h = (1, 0)^T$. Следовательно, применяя формулу (18), получаем

$$\tilde{x}^* = -\frac{1}{2} [P_{Y_2} Bh]^{-1} (Mh) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что означает $\tilde{x}^* = x^*$, и мы получаем точную формулу для решения системы квадратичных уравнений (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белаиш К.Н., Третьяков А.А.* Методы решения вырожденных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. №. 7. С. 1097–1102.
2. *Белаиш К.Н.* Решение систем нелинейных уравнений общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. №. 6. С. 837–843.
3. *Измайлов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
4. *Tret'yakov A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. Vol. 2. No. 4. P. 425–445.
5. *Facchinei F., Fisher A., Kanzow C.* On the Accurate Identification of Active Constraints // SIAM J. Optim. 1998. No. 9. P. 14–32.
6. *Измайлов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физматлит, 1999.
7. *Брежнева О.А., Третьяков А.А.* Новые методы решения существенно нелинейных задач. М.: ВЦ РАН, 2000.

EXACT FORMULA FOR THE SOLUTION OF DEGENERATE SYSTEM OF QUADRATIC EQUATIONS

Yu. G. Evtushenko^{a,b,*}, A. A. Tret'yakov^{a,c,**}^a*Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS
Vavilova str., 44, Moscow, 119333 Russia*^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Institutskiy per, 1, Dolgoprudnyi, Moscow Region, 141701 Russia*^c*Faculty of Exact and Natural Sciences Siedlce University,
Siedlce, 08-110 Poland*^{*}*e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru*^{**}*e-mail: prof.tretyakov@gmail.com*

Received 05 June, 2023

Revised 15 September, 2023

Accepted 20 October, 2023

Abstract. The paper devoted to the solution of nonlinear system of equations $F(x) = 0$, where the mapping F is quadratic, acting from $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. We consider the case, when the derivative F' is degenerate at the solution point. Based on the constructions of the p-regularity theory was proposed a 2-factor method for solving singular system of equations, which converges at a quadratic rate. Moreover, an exact formula is obtained for solving this quadratic system of equations in the 2-regular case of the mapping $F(x)$.

Keywords: degenerate, p-regularity, p-factor method.