

## ЛОКАЛЬНАЯ ВЕЙВЛЕТНАЯ АДАПТАЦИЯ ДЕКАРТОВЫХ СЕТОК В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ<sup>1)</sup>

© 2024 г. А. Л. Афендигов<sup>1,\*</sup>, В. С. Никитин<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: andre@keldysh.ru

\*\*e-mail: zogorlol@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.

Переработанный вариант 12.10.2023 г.

Принята к публикации 19.10.2023 г.

Представлен метод динамической локальной адаптации градуированных декартовых деревьев для численного решения задач газовой динамики. Локальный вейвлетный анализ газодинамического поля на базе неравномерных В-сплайнов применяется независимо к каждой ячейке расчетной сетки и позволяет выделить негладкие или существенно нелинейные участки решения (или наоборот, достаточно гладкие и линейные) и модифицировать сетку для расчета следующего шага по времени так, чтобы у разномасштабных особенностей течения было адекватное сеточное разрешение. В комбинации с другими методами вычислительной газовой динамики, такими как метод свободной границы, представленный метод позволяет эффективно решать нестационарные задачи с обтеканием движущихся тел. На ряде таких задач продемонстрирована работа предложенного варианта вейвлетной адаптации. Библ. 37. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** вычислительная газовая динамика, вейвлетная адаптация, вейвлетный анализ, локально адаптивные декартовые сетки.

DOI: 10.31857/S0044466924020103, EDN: YJKTI

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема адаптации сеток для увеличения точности определяемых численно решений начально-краевых задач возникла вместе с появлением современных численных методов и проведением расчетов на первых ЭВМ. В вычислительной газовой динамике идеи адаптации, связанные с выделением сильных ударных волн и сгущением сетки без изменения числа узлов (ячеек) “пропорционально градиенту” или с использованием диффузионной прибавки (см. [1], [2]), были развиты в разных направлениях (см., например, [3]–[16]). Тем не менее, до сих пор даже для стационарных задач нет общепринятого определения оптимальности сетки, хотя давно понята связь этого вопроса с такими характеристиками как величины  $\varepsilon$ -энтропии и асимптотики поперечников функциональных компактов, в которых лежат разыскиваемые решения (см. [17], [18]).

В задачах газовой динамики трудность состоит еще и в том, что нет ясности с выбором функциональных компактов, в которых разыскиваются решения. В результате, в некоторых пакетах машинное время, затрачиваемое на адаптацию сетки, становится сравнимым со временем расчета газовой динамики. Сложность задачи усугубляется необходимостью строить алгоритмы, учитывающие архитектуру суперкомпьютеров, например, структуру памяти или наличие графических ускорителей. В силу появления все новых модификаций параллельных суперкомпьютеров эта тематика продолжает оставаться актуальной. Кроме того, отметим, что большинство известных адаптивных алгоритмов применяются для решения линейных стационарных задач (см. обсуждение этого вопроса в [19]). Нестационарность и нелинейность задачи ограничивают возможность использования апостериорного анализа решения, требуют адекватного учета связи временных и пространственных масштабов и, наконец, балансировки (т.е. как часто проводить) процессов измельчения и огрубления сетки.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Минобрнауки РФ (код 075-15-2019-1623).

Для учета граничных условий есть ряд подходов, позволяющих моделировать внутренние граничные условия модификацией, определяющей системы уравнений. Одним из таких подходов является метод свободной границы (free boundary method, см. [20]–[22]). В нем для учета влияния обтекаемых твердых тел вводится компенсационный поток — специальная поправка, делающая определяющую систему уравнений неоднородной. Появление таких подходов привело к возобновлению интереса к использованию декартовых сеток, разных вариантов их структуризации и адаптации. Алгоритмы на таких сетках устроены проще, а простота и универсальность построения таких сеток хорошо подходит для исследования динамики в нестационарных задачах с изменяющимися внутренними границами.

В настоящей работе описан и опробован новый алгоритм вейвлетной адаптации сетки, основанный на идеях использования градуированных декартовых деревьев и многомасштабных разложений (см. [13]–[16] и имеющиеся там ссылки). В нем применяется вариант преобразования вейвлетного типа, основанный на использовании неравномерных В-сплайнов и метода лифтинга (см. [23]–[26]). Этот подход позволяет эффективно решать такие задачи, как, например, задача о сверхзвуковом вылете пеллета (см. [27]) и задачи о свободном движении системы тел под действием набегающей ударной волны (см. [28]).

В работах [29]–[31] аналогичные подходы применяются для глобального многомасштабного вейвлетного анализа, который используется для контроля ошибки, перехода между разными масштабами и для вычисления пространственных производных. Для обобщения на многомерный случай используются тензорные произведения, а для внутренних граничных условий — метод фиктивных областей (см. [32]–[34]) (другая вариация метода погруженной границы). Ключевым отличием подхода, используемого в настоящей работе, является локальность вейвлетного анализа. Анализируется не вычислительная сетка целиком, а каждая ячейка в отдельности, причем для многомерного обобщения каждая ось тоже анализируется отдельно. Локальность вейвлетного анализа позволяет сделать весь метод предельно локальным, что необходимо для эффективной параллелизации. Кроме того, предложенный метод адаптации является модульным, т.е. не используется другими компонентами вычислительного алгоритма, и легковесным, т.е. не требует хранения в памяти дополнительных конструкций, связанных с разными масштабами.

## 2. ГРАДУИРОВАННЫЕ ДЕРЕВЬЯ И ИЕРАРХИИ ДЕКАРТОВЫХ СЕТОК

В версии метода декартовых сеток, развиваемой для решения нестационарных задач газовой динамики в [20], [22] и используемой в настоящей работе, начально-краевая задача в области со сложной — многосвязной и зависящей от времени границей, сводится к неоднородной задаче в стандартной прямоугольной области с помощью метода свободной границы. Метод свободной границы удобен тем, что позволяет путем введения в уравнения движения сил реакции стенок, рассматривая задачу в фиксированной прямоугольной области. Поэтому при использовании этого метода без ограничения общности задача об адаптации сетки может быть сведена заменой переменных к задаче в единичном кубе  $\Omega \subset R^d$  независимо от числа движущихся в заданном объеме тел. Идея построения градуированных декартовых деревьев возникла в гармоническом анализе, а затем была четко реализована в работе [18], где они называются «элементами класса элементарных продолжений разбиений единичного куба». Далее слова «градуированное декартово» опускаются там, где это не может привести к недоразумению. Полученные в этой статье результаты опираются на одну специальную теорему о субаддитивных функциях множеств, а доказательство основано на подробном исследовании некоторого конкретного алгоритма разбиений куба  $\Omega^d \subset R^d$ . Затем для заданной функции  $u(x)$  из пространства  $W_p^q(\Omega^d)$  на построенном для нее разбиении (дереве) определяется аппроксимирующий агрегат — кусочно-полиномиальная функция. В применении к теории аппроксимации этот нелинейный алгоритм порождает аппарат приближений, тесно увязанный с особенностями конкретной функции, что позволяет добиться хорошей скорости приближений. В этой статье параметром является число кубов в разбиении (листьев в дереве), а субаддитивной функцией — интегральная норма. Полученные в этом направлении результаты позволили получить оценки некоторых поперечников и  $\varepsilon$ -энтропии компактов в  $W_p^q(\Omega^d)$ .

Задачи, решаемые в настоящей работе, и методы исследования — иные в силу наличия сильных разрывов и того, что в расчетах приходится работать со значениями вектора газодинамических переменных в узлах, а не с интегральными средними. Кроме того, в выделенной фиксированной области течение зависит от времени и может существенно усложняться или упрощаться. Например, может появиться, а затем исчезнуть сложная конфигурация ударных волн, контактных разрывов и волн разрежения. При этом вне описанных сингулярностей решение может оставаться гладким.

Если предположить, что разрыв размазан на несколько ячеек, т.е. вектор-функция газодинамических величин сглажена, что в реальности и происходит при использовании методов типа конечного объема, то цель исследования состоит в построении зависящей от времени «квазиоптимальной» последовательности

деревьев, на каждом из которых и происходит расчет шага по времени. То есть рассматривается задача о введении в численных алгоритмах для решения эволюционных нелинейных задач более подробной сетки вблизи особенностей решения и адекватном укрупнении ячеек в областях высокой гладкости. На каждом временном шаге считается заданным двоичное (можно рассматривать и  $q$ -ичные) разбиение  $\{V_{l,k}\}$ . Здесь индекс  $0 \leq l \leq L$  отвечает уровню разбиения, а мультииндекс  $k$  — расположению ячейки на этом уровне, т.е.

$$V_{l,k} = \left(2^{-l}k_1, 2^{-l}(k_1 + 1)\right) \times \dots \times \left(2^{-l}k_d, 2^{-l}(k_d + 1)\right),$$

где  $d$  — размерность пространства, а

$$k_i \in I_l, \quad I_l = \{0, 1, \dots, 2^l - 1\}.$$

Определим множество целочисленных векторов  $J = \{0, 1\}^d$ . Тогда замыкание каждой ячейки  $V_{l,k}$ ,  $l < L$ , может быть представлено в виде

$$\bar{V}_{l,k} = \bigcup_{m \in M_{l,k}} \bar{V}_{l+1,m}, \quad (2.1)$$

где  $M_{l,k}$  — множество индексов, определяющих разбиение ячейки  $V_{l,k}$  на ячейки, принадлежащие уровню  $(l + 1)$

$$M_{l,k} = \{2k + j; j \in J\}.$$

Назовем  $M_{l,k}$  уточняющим набором индексов, а разложение (2.1) — уточняющим разбиением ячейки  $V_{l,k}$ . Тем самым, каждая ячейка  $V_{l+1,m}$ , принадлежащая уровню  $l + 1$ , входит в уточняющее разбиение некоторой ячейки  $V_{l,k}$  уровня  $l$ .

В этом разложении ячейка  $V_{l+1,m}$  называется потомком ячейки  $V_{l,k}$ , а  $V_{l,k}$ , в свою очередь, называется предком  $V_{l+1,m}$  уровня  $l$ . По индукции для каждой  $V_{l+1,m}$  определяются предки всех уровней до  $l = 0$ . Ячейки  $V_{l,k}$ ,  $V_{r,m}$ , для которых  $(l,k) \neq (r,m)$  и  $\dim(\bar{V}_{l,k} \cap \bar{V}_{r,m}) = d - 1$ , назовем прямыми соседями.

**Определение.** Назовем градуированным декартовым деревом порядка такое разбиение куба

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{(l,k) \in \mathcal{L}^n} \bar{V}_{l,k},$$

$$\mathcal{L}^n \subset \{(l,k), \quad l = 0, \dots, L; k \in I_l^d\},$$

что

- 1)  $V_{l,k} \cap V_{r,m} \neq \emptyset \Leftrightarrow (l,k) = (r,m)$ ;
- 2) если ячейки  $V_{l,k}$  и  $V_{r,m}$  — прямые соседи, то для уровней  $l, r$  выполняется  $|l - r| \leq b$ ;
- 3) если  $(l,k) \in \mathcal{L}^n$  и  $k \in M_{l-1,m}$ , то для любого  $k_1 \in M_{l-1,m}, (l, k_1) \in \mathcal{L}^n$ .

Другими словами, каждая ячейка уровня  $l$  из этой иерархической структуры входит в дерево только вместе со всеми элементами уточняющего разбиения предка этой ячейки предшествующего уровня, а уровни ячеек, имеющих пересекающиеся грани, отличаются не более, чем на  $b$ .

В алгоритме [4] фиксируется число конечных ячеек (листьев в дереве), а величина  $b$  произвольна, однако при расчете временного шага сильная неоднородность сетки может вести к потере точности, и поэтому в настоящей работе ограничимся.

**Замечание 1.** Из определения  $M_{l,k}$  следует, что при проведении вычислений удобно записывать координаты  $k = (k_1, \dots, k_d)$  ячейки  $V_{l,k}$  в двоичной системе счисления и, приписывать нули перед значащими цифрами так, чтобы число знаков в двоичной записи составляло  $l$ . Тогда набор цифр, стоящих на  $s$ -ых позициях двоичных записей индексов  $k_i$ , определяет соответствующий вектор  $j$  в уточняющем разложении предка данной ячейки на уровне  $s - 1$ . Указанное свойство позволяет находить соседей и предков данной ячейки, пользуясь двоичной арифметикой.

Рассмотрим для наглядности двумерный случай. В памяти компьютера градуированное декартовое дерево задается связанной структурой, где каждому элементу структуры поставлена в соответствие

некоторая ячейка из множества  $\{V_{l,k}\}$ . В каждом элементе этой структуры хранятся уровень разбиения  $l$ , векторный индекс ячейки  $k$  и флаг  $F$  ее принадлежности дереву. При этом  $F = 1 \Leftrightarrow (l,k) \in \mathcal{L}^n$ . Если ячейка принадлежит дереву (такие ячейки назовем листовыми), то в ней дополнительно хранится вся необходимая для вычислений информация о газодинамическом поле в этой ячейке. Если же  $F = 0$ ,  $(l,k) \notin \mathcal{L}^n$ , т.е. эта ячейка не входит в дерево, то в ней дополнительно хранятся адреса элементов, соответствующих потомкам данной ячейки. Эти адреса индексируются уточняющим вектором  $j$  из разложения (2.1). При этом в упомянутой структуре содержатся только элементы, соответствующие таким нелистовым ячейкам, у которых есть листовые потомки. В результате, если начать с корневой ячейки, последовательными операциями прохождения по адресу можно прийти до любой листовой ячейки.

Построение эффективного алгоритма поиска соседних ячеек в дереве является ключевым моментом и для работы солвера, и для адаптации сетки. Опишем, как в рамках предложенной структуры для каждой ячейки указываются прямые соседи.

По каждой оси  $e_a, a = 1, \dots, d$ , соседями (необязательно листовыми) ячейки  $V_{l,k}$  будут ячейки  $V_{l,k_{left}}$ ,  $V_{l,k_{right}}$ , у которых соответствующий индекс отличается на единицу:  $k_a^{left} = k_a - 1$ ,  $k_a^{right} = k_a + 1$ . Приведем алгоритм подъема по дереву для получения ячейки  $V_{r,m}$  на псевдокоде:

```

V = V0,0 — поиск начинается с корневой ячейки
while r>0 and F(V)=0 — поиск останавливается, либо когда достигнут необходимый уровень разбиения,
либо когда текущая ячейка оказалась листовой
  r=r-1
  j=(m>>r)&1 — получаем i-е биты вектора m, определяющие уточняющий вектор
  m=m>>1 — т.е. индекс ячейки целочисленно делится пополам
  V=Childj(V) — переход по указателю на потомка с индексом j
end while
return V
    
```

С помощью алгоритма поиска находятся ячейки  $V_{l,k_{left}}$ ,  $V_{l,k_{right}}$ . Если получившиеся ячейки нелистовые, то левыми (правыми) соседями исходной ячейки будут все листовые потомки получившейся ячейки с уточняющим индексом  $k_a = 1$  (соответственно  $k_a = 0$ ). Повторяя операцию для каждой из осей, получим всех прямых соседей данной ячейки.

### 3. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ГРАДУИРОВАННЫХ ДЕКАРТОВЫХ ДЕРЕВЬЯХ

Рассмотрим движение газа, описываемое системой Эйлера, которая в стандартной консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} = 0,$$

с обычным предположением о суммирование по повторяющимся индексам. Здесь  $\mathbf{q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E)^T$  — вектор консервативных переменных,  $\mathbf{f}_k = (\rho u_k, \rho u_k u_m + \delta_{km} p, \rho u_k H)^T$  — векторы потоков,  $m = 1, 2, 3$ , а  $\delta_{km}$  — символ Кронекера;  $\rho$ ,  $u_k$ ,  $p$  — плотность, компоненты вектора скорости и давление соответственно,  $H = e + p/\rho$  — энтальпия,  $e$  — удельная внутренняя энергия, а  $E = e + 0.5 u_k u_k$  — полная удельная энергия. Газ предполагается идеальным совершенным с показателем адиабаты  $\gamma$ , т.е.  $p = (\gamma - 1)\rho e$ . В области  $\Omega$  с набором твердых включений  $\Gamma$  и условием непротекания на них  $(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\Gamma} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности, ставится стандартная начально-краевая задача для уравнений Эйлера. Краевые условия на  $\partial\Omega$  устанавливаются в зависимости от стоящей задачи и, например, для задачи обтекания моделируют постоянный поток вдали от включений. Рассмотрим однородную задачу Коши, которая решается в единичном кубе  $\Omega$  методом конечного объема. Детали вычисления компенсационных потоков для неоднородной задачи могут быть найдены в [20], [27]. Задача о распаде разрыва может решаться приближенно, например, по Русанову или точно по Годунову (см. [2]), сама конструкция реализуется на градуированном декартовом дереве.

Если расчетная сетка состоит из ячеек разных уровней, то она является неконформной, и при расчете следующего шага суммарные потоки через заданную ячейку вычисляются по формуле

$$\mathbf{Q}_{j,k}^{n+1} = \mathbf{Q}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{V_{j,k}} \sum_{\sigma} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{Q}_{j,k}^n$  — среднее значение вектора консервативных переменных в ячейке  $V_{j,k}$  на временном шаге с номером  $n$  (объем ячейки  $V_{j,k}$ ),  $s_{\sigma}$  — площадь грани ячейки, а  $\mathbf{F}_{\sigma}$  — численный поток через грань.

Потоки по каждому из направлений, умноженные на площади соответствующих частей границы, суммируются по границе ячейки. Устойчивость оператора послойного перехода в (3.1) обеспечивается переменным шагом по времени  $\Delta t$  с выполнением условия Куранта—Фридрихса—Леви (см. [2]). Для увеличения порядка аппроксимации схемы можно применить подсеточную реконструкцию газодинамических параметров более высокого порядка точности, например, кусочно-линейное восполнение, обобщающее на неравномерные сетки интерполяцию схемы MUSCL (Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws). Схемы второго порядка точности по пространству и выше являются немонотонными и приводят к паразитическим осцилляциям в численных решениях вблизи поверхностей сильных разрывов. Для подавления этих осцилляций используются ограничители производных minmod и Ван Альбада (G.D. van Albada, B. van Leer, W. Roberts). Детали указанных конструкций и соответствующие ссылки имеются, например, в [20].

В результате расчета  $(n + 1)$  шага по времени каждой ячейке  $V_{j,k}$  дерева  $\{V_{j,k}\}^n$  оказывается поставлено в соответствие новое значение вектора газодинамических переменных, отнесенное к центрам ячеек. В разд. 5 описан алгоритм вейвлетного анализа, с помощью которого по этим векторам строится дерево  $\{V_{j,k}\}^{n+1}$ , адаптированное под решение на новом шаге. Обычно достаточно использовать не весь вектор, а только одно наиболее характерное поле. Как правило это поле плотности, либо давления. Но сначала в разд. 4 рассмотрим вейвлетное преобразование функции на последовательности неравномерно расположенных узлов, на основе которого будет строиться вейвлетный анализ в ячейках дерева.

#### 4. ОДНОМЕРНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Рассмотрим сначала вейвлетный анализ скалярной функции  $\tilde{f}(x)$  на узлах отрезка  $[a, b]$ . Считаем заданным разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+k}, \quad x_0 = a, \quad x_{n+k} = b, \quad (4.1)$$

где узлы  $x_j$  соответствуют центрам ячеек. Для решения вопроса о соответствии функции и ее особенностей разбиению на отрезке предлагается использовать преобразование вейвлетного типа, основанное на теории  $B$ -сплайнов (см., например, [17], [25]). Для удобства напомним некоторые общеизвестные факты. Для сетки (4.1) введем  $B$ -сплайны степени  $k$ :

$$B_i^k(x) = [x_i, \dots, x_{i+k+1}] (y - x)_+^k, \\ i = 0, \dots, n - 1,$$

где через  $[x_i, \dots, x_{i+k+1}]g(y)$  обозначена разделенная разность функции  $g(y)$ , а

$$(y - x)_+^k = \begin{cases} (y - x)^k, & y \geq x, \\ 0, & y < x. \end{cases}$$

Известно, что  $B_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , являются сплайнами дефекта 1 с минимальным носителем  $\text{supp} B_i(x) = [x_i, x_{i+k+1}]$  и линейно независимы. Кроме того, они удовлетворяют соотношениям

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_i} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

и

$$\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} B_i^k(s) g^{(k+1)}(s) ds = k! [x_i, \dots, x_{i+k+1}] g(s).$$

Из последнего равенства следует, что

$$\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} B_i^k(s) s^l ds = \frac{k!l!}{(k+l+1)!} [x_i, \dots, x_{i+k+1}] s^{k+l+1} \tag{4.2}$$

и, в частности,

$$\int_{x_i}^{x_{i+k+1}} B_i^k(s) ds = \frac{1}{(k+1)}. \tag{4.3}$$

В дальнейшем, в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, верхний индекс в обозначениях сплайнов будет опускаться.

Для сплайнов на равномерных сетках давно известно тождество

$$B^k(x) = \sum_{m=0}^{k+1} 2^{-k} C_k^m B^k(2x - m),$$

называемое двухмасштабным соотношением и лежащее в основе теории сплайн-вейвлетов (см., например, [35]). Аналогичное соотношение справедливо и для неравномерных сеток (см. [25]). Рассмотрим, например, при четном  $n+k$  сетку, полученную из (4.1) отбрасыванием каждого второго узла

$$\left\{ \tilde{x}_0 = x_0, \tilde{x}_1 = x_2, \dots, \tilde{x}_{\frac{n+k}{2}} = x_{n+k} \right\}. \tag{4.4}$$

Через  $\tilde{B}_i(x)$  обозначим сплайны, построенные для этой сетки:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i(x) &= [\tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{i+k+1}] (y-x)_+^k, \\ i &= 0, \dots, N-1; \quad N = \frac{n+k}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\tilde{x}_i = x_{2i}$ .

Обозначим через  $V$  линейное пространство  $V = \text{span}\{B_0(x), \dots, B_{n-1}(x)\}$  и  $\tilde{V} = \text{span}\{\tilde{B}_0(x), \dots, \tilde{B}_{N-1}(x)\}$ .

**Лемма 1.**  $\tilde{V} \subset V$ .

Это утверждение непосредственно следует из (4.1), (4.4) и линейной независимости  $B$ -сплайнов.

Отсюда следует, что существует подпространство  $W$ , являющееся дополнением  $\tilde{V}$  до прямой суммы

$$V = \tilde{V} + W, \quad \tilde{V} \cap W = \{0\},$$

и при этом  $\dim W = \frac{n+k}{2}$ .

Выберем в  $W$  базис  $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-N}\}$ , состоящий из функций, имеющих  $p$  нулевых моментов. Обозначим через  $Z = \{\zeta_j, j = 0, \dots, n-1\}$  базис биортогональный к  $\{B_0(x), \dots, B_{n-1}(x)\}$ , а через  $\Sigma = \{\sigma_i, i = 0, \dots, N-1\}$ ,  $\Theta = \{\theta_i, i = 0, \dots, n-N\}$  — базисы  $\tilde{V}$  и  $W$ , составленные из векторов базиса, биортогонального к базису  $\{\tilde{B}_0(x), \dots, \tilde{B}_{N-1}(x), \xi_0, \dots, \xi_{n-N}\}$ .

Пусть  $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon(x)$ , где  $|\varepsilon(x)| < \varepsilon_0, \varepsilon_0 \ll 1$ , а  $f(x) \in \text{span}\{B_i(x), i = 0, \dots, n-1\}$ , и

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \zeta_j. \tag{4.5}$$

Тем самым, ключевым для построения адаптивных сеток предлагаемым методом является предположение о том, что разыскиваемое решение лежит в пространстве  $V$  или хотя бы с достаточной точностью приближается элементами этого пространства.

Коэффициенты разложения функции  $f(x)$  по базисам  $\Sigma$  в  $\tilde{V}$  и  $\Theta$  в  $W$  зададут гладкие  $c_j = (f, \tilde{B}_j(x))$  и вейвлетные  $w_j = (f(x), \xi_j(x))$  компоненты вейвлетного разложения. Алгоритм для вычисления вейвлетного разложения описан ниже.

Из леммы 1 следует, что

$$\tilde{B}_i^k(x) = \sum_{j=2i}^{2i+k+1} r_{ij} B_j^k(x).$$

Компоненты низкочастотного фильтра  $r_{ij}$  легко найти, пользуясь линейной независимостью сплайнов  $B_j^k(x)$ . Для этого обозначим

$$y_l = B(x_l), \quad z_l^i = B_{2i}(x_l), \quad l = 2i + 1, \dots, 2i + k.$$

Тогда  $r_{ij}$  определяются последовательно;

$$\begin{aligned} r_{i,2i} &= y_{2i+1} / z_{2i+1}^{2i}, \dots, r_{i,2i+s} = \\ &= \left( y_{2i+s+1} - \sum_{j=2i}^{2i+s-1} r_{ij} z_j^{2i} \right) / z_{2i+s+1}^{2i}. \end{aligned}$$

Так, например, для  $k = 1$ , учитывая условие (4.3), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i(x) &= \frac{x_{2i+1} - x_{2i}}{x_{2i+4} - x_{2i}} B_{2i}(x) + \\ &+ \frac{x_{2i+3} - x_{2i+1}}{x_{2i+4} - x_{2i}} B_{2i+1}(x) + \\ &+ \frac{x_{2i+4} - x_{2i+3}}{x_{2i+4} - x_{2i}} B_{2i+2}(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Описанная процедура вычислительно устойчива и более проста, чем предложенная в [26].

Для выбора базиса в подпространстве  $W$  из матрицы  $r_{ij}$  нужно выбрать невырожденный минор  $\rho_{ij}$  порядка  $N$ , который всегда существует в силу линейной независимости сплайнов  $\{\tilde{B}_0(x), \dots, \tilde{B}_{N-1}(x)\}$ . Такой минор не единственен и имеется свобода, которой можно распорядиться так, чтобы минимизировать носитель  $\text{supp} \xi_l(x)$ . Естественно взять элементы базиса  $\{\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_{n-N}\}$  в  $W$  из функций  $B_j(x) \in \{B_0(x), \dots, B_{n-1}(x)\}$ . Этот «пробный» базис можно подправить, положив

$$\xi_l = \hat{\xi}_l - \sum_{j=j_{\min}(l)}^{j_{\min}(l)+p-1} \alpha_{lj} \tilde{B}_j,$$

нормированный условием  $\|\xi_l\|_{L_1} = 1$  так, чтобы удовлетворить условиям на моменты

$$(\xi_l, x^s) = 0, \quad s = 0, \dots, p - 1. \tag{4.7}$$

Число  $j_{\min}(l)$  определено из условия

$$\tilde{x}_{j_{\min}(l)} = \max \{ \tilde{x}_j \mid \tilde{x}_j \leq x_{j_l} \}.$$

Здесь через  $j_l$ ,  $l = 1, \dots, n - N$ , обозначены номера столбцов, не попавших в выбранный минор.

Положим  $\hat{\xi}_l = B_{j_l}$ ; тогда в силу (4.7) вектор  $\alpha_{lj}$ ,  $j = 0, \dots, p - 1$ , однозначно определяется из линейной системы с невырожденной матрицей

$$\begin{aligned} (B_{j_l}, x^s) &= \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{lj} (\tilde{B}_{j_{\min}(l)+j}, x^s), \\ j, s &= 0, \dots, p - 1, \end{aligned}$$

где невырожденность матрицы непосредственно следует из (4.2).

Тем самым, определено дискретное вейвлетное преобразование с

$$c_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} b_j$$

для сглаженных компонент и

$$w_l = b_{j_l} - \sum_{m=0}^{p-1} \alpha_{lm} c_{j_{\min(l)+m}}$$

для вейвлетных компонент.

Отметим, что для анализатора с  $(k, p) = (1, 2)$  необходим шаблон с семью узлами, а матрица  $r_{ij}$ ,  $i = 0, 1, j = 0, \dots, 4$ , определена соотношениями (4.6). Положим

$$\rho = \begin{Bmatrix} r_{00} & r_{04} \\ r_{01} & r_{14} \end{Bmatrix}.$$

В этом случае несложные вычисления для  $j_l = l + 1$  дают

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= \frac{x_6 + x_4 - x_3 - x_1}{x_6 - x_0}, \alpha_{01} = \frac{x_3 + x_1 - x_4 - x_0}{x_6 - x_0}, \\ \alpha_{10} &= \frac{x_6 - x_3}{x_6 - x_0}, \alpha_{11} = \frac{x_3 - x_0}{x_6 - x_0}; \\ \alpha_{20} &= \frac{x_6 + x_2 - x_5 - x_3}{x_6 - x_0}, \alpha_{21} = \frac{x_5 + x_3 - x_0 - x_2}{x_6 - x_0}. \end{aligned}$$

Итого, результатом вейвлетного анализа функции будет величина

$$\tilde{w} = \max_l \left( w_l \frac{\|\xi_l\|}{x_{n+k} - x_0} \right). \tag{4.8}$$

Отношение в (4.8) — нормировочный множитель, нужный чтобы соотносить величины вейвлетных коэффициентов, полученные на разных разбиениях.

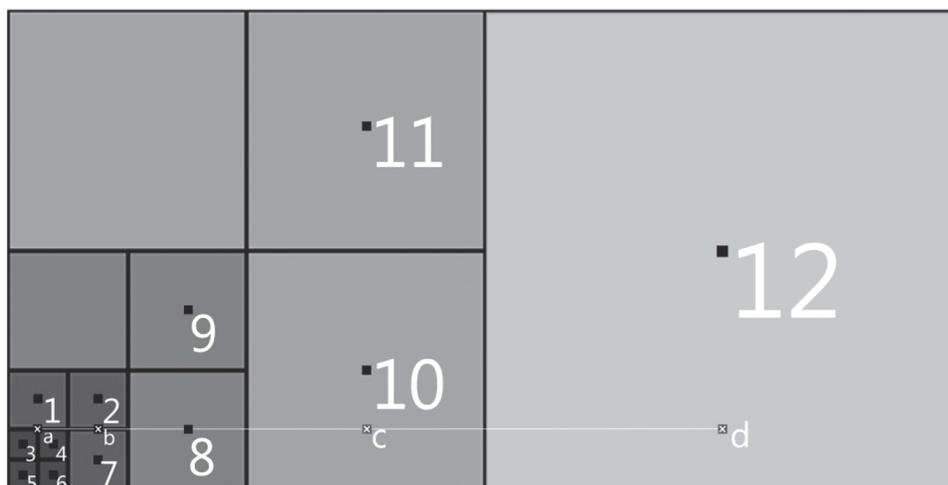
Вольно говоря, эта величина характеризует потерю информации при переходе от функции, заданной на сетке (4.1), к функции, заданной на прореженной сетке (4.4). По величине этих коэффициентов и производится решение об укрупнении или измельчении сетки. Так, например, при  $k = 1, p = 2$  для линейных функций  $f(x)$  и только для них имеем  $\tilde{w} = 0$ .

### 5. ЛОКАЛЬНАЯ ВЕЙВЛЕТНАЯ АДАПТАЦИЯ ГРАДУИРОВАННЫХ ДЕКАРТОВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Локальная адаптация деревьев состоит в том, чтобы по дереву  $\{V_{j,k}\}^n$  построить дерево  $\{V_{j,k}\}^{n+1}$ , принимая для каждой отдельной листовой ячейки одно из трех решений: разбить ячейку на  $2^d$  потомков большего уровня, объединить с другими потомками предка предыдущего уровня в одну ячейку меньшего уровня, либо оставить без изменений. Рассмотрим сначала одномерные деревья.

Для их вейвлетного анализа ведется поиск соседей слева и справа от исследуемой ячейки. Центры исследуемой ячейки и ее соседей используются в качестве узлов разбиения (4.1) для вейвлетного преобразования. Для эффективной работы алгоритма на суперкомпьютерах с распределенной памятью необходимо, чтобы эта процедура была как можно более локальной, т.е. использовала как можно меньше соседних ячеек. Минимальный шаблон для проведения анализа состоит из  $2p + 2k + 1$  узлов, т.е.  $n = 2p + k$ .

В качестве  $f(x)$  для вейвлетного преобразования возьмем функцию, совпадающую в центрах ячеек с выбранным компонентом газодинамического поля на  $(l + 1)$ -м шаге. Значения функции в промежутках между узлами нужны для вычисления скалярных произведений  $(f(x), B_j(x))$ . Для приближенного вычисления этих интегралов без интерполяции данных в промежуточных точках воспользуемся квадратурными формулами. В рамках анализа предположим, что  $f(x)$  в промежуточных точках является интерполяционным сплайном степени  $p - 1$ , тогда произведение  $f(x)B_j(x)$  будет сплайном степени  $p + k - 1$ , и скалярные произведения в (4.5) находятся точно с помощью квадратурных формул



Фиг. 1. Фрагмент градуированного декартового дерева первого порядка.

Гаусса точности  $p + k - 1$ . В случае  $p = 2, k = 1$  для проведения вычислений достаточно воспользоваться формулой Симпсона. Если, кроме того, сетка (4.1) равномерна, а функция  $f(x)$  — линейна на  $\text{supp } B_j(x)$ , то формула Симпсона сводится к  $(f(x), B_j(x))_{L_2} = \frac{1}{2}f(x_{j+1})$ . Этим в известной мере обосновывается обычный прием в численных приложениях теории вейвлетов, когда значения коэффициентов в разложениях функции по ортогональным или биортогональным системам заменяются на значения функции в соответствующих узлах. Воспользовавшись этим приближением для крайних узлов с индексами  $j = 0, j = n - 1$  можно уменьшить необходимый размер шаблона на 2, что значительно увеличивает локальность анализа.

При программной реализации метода выгодно учесть, что если фиксирован порядок  $b$  декартового дерева и размер шаблона, то несложно описать все возможные конфигурации сетки и вычислить все возможные коэффициенты  $r_{ij}, \alpha_j$  и нормы до компиляции программы. Например, если шаблон состоит из пяти ячеек, число различных конфигураций  $K = 57$ . Таким образом, в качестве входных данных алгоритма, вычисляющего  $w(x_j)$  помимо значений в центрах ячеек  $f(x)$ , требуются только разницы уровней соседних ячеек.

Для многомерных градуированных декартовых деревьев, предлагается квазиодномерный подход, позволяющий избежать вычислительно трудоемких конструкций, связанных с построением тензорных произведений сплайнов как, например, в [29]. Для этого для каждой из осей так же, как в случае одномерных деревьев, ищутся соседи слева и справа от исследуемой ячейки по каждой из осей. Центры этих ячеек на неравномерном участке сетки не обязаны лежать на одной прямой. Поэтому значения выбранного для анализа газодинамического поля проецируются из центров найденных ячеек на прямую, параллельную оси и проходящую через центр исследуемой ячейки. Получив узлы разбиения и значения функции в них, мы свели задачу к случаю одномерных деревьев.

Ниже приведены типичные приемы для построения разбиений типа (4.1) и интерполяции газодинамического поля на прямую на примере двумерной сетки и пятиточечного шаблона.

На фиг. 1 представлен участок сетки, на котором нужно вычислить данные для анализа ячейки 8 по горизонтальной оси для пятиточечного шаблона. Крестами обозначены точки, значения в которых необходимо вычислить для одномерного вейвлетного анализа. Черными точками обозначены центры ячеек, значения в которых будут использованы для построения значений поля в крестовых точках —  $a, b, c, d$ . Для проведения анализа с привлечением ячеек уровня выше, чем исследуемая, как, например, в случае с точками  $a$  и  $b$ , проводится осреднение:

$$f_a = 0.5(f_1 + 0.25(f_3 + f_4 + f_5 + f_6)),$$

$$f_b = 0.5(f_2 + f_7).$$

Если же используемые ячейки имеют уровень меньший, чем исследуемая, проводится экстраполяция:

$$f_c = f_{10} - 0.25(h_y)_{10} (f'_y)_{10},$$

$$f_d = f_{12} - 0.375(h_y)_{12} (f'_y)_{12}.$$

Производные по осям отличных от оси, по которой производится анализ, приближенно вычисляются с помощью соседней ячейки того же уровня, которая всегда существует для градуированных декартовых деревьев порядка 1:

$$(f'_y)_{10} = 0.5(f_9 - f_8) / (h_y)_{10}, \quad (5.1)$$

$$(f'_y)_{12} = 0.5(f_{11} - f_{10}) / (h_y)_{12}. \quad (5.2)$$

Порядок декартового дерева также ограничивает число шаблонов для подобных интерполяций.

**Замечание 2.** Описанный метод сведения анализа на деревьях к анализу на одномерной сетке подходит для расчетов с любым порядком аппроксимации, в том числе, первым. Если же в случае вычислений с высоким порядком в ячейках уже хранятся градиенты исследуемого поля, то можно использовать их для реконструкции значений вместо приближений (5.1), (5.2).

Результатом вейвлетного анализа для ячейки многомерного дерева будет значение

$$\widehat{w}(V_{l,k}) = \max_{0 < i \leq d} \widetilde{w}_i,$$

где  $d$  — размерность пространства, а  $\widetilde{w}_i$  — результат одномерного вейвлетного анализа вдоль оси  $i$ . Значение  $\widehat{w}$  далее сравнивается с заданными пороговыми величинами  $C_{\max}$  и  $C_{\min}$ :

- 1) если  $\widehat{w}(V_{l,k}) > C_{\max}$ , то соответствующая ячейка измельчается;
- 2) если  $C_{\min} < \widehat{w}(V_{l,k}) < C_{\max}$ , то соответствующая ячейка остается без изменений;
- 3) если  $\widehat{w}(V_{l,k_i}) < C_{\min}$  для каждого потомка общего предка предыдущего уровня, то ячейки объединяются. В противном случае потомок остается без изменений.

**Замечание 3.** Для восстановления порядка дерева, т.е. для выполнения условия отличия уровней соседних ячеек не более чем на единицу, необходимо дополнительно измельчить некоторые ячейки для балансировки. Эта процедура находится вне рамок этой работы.

**Замечание 4.** В процессе адаптации сетки очень важно не испортить решение, для чего следует применять гладкие, физически осмысленные и ненарушающие законы сохранения схемы интерполяции. В работах [27], [28] использовалась WENO-интерполяция (см. [36], [37]).

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

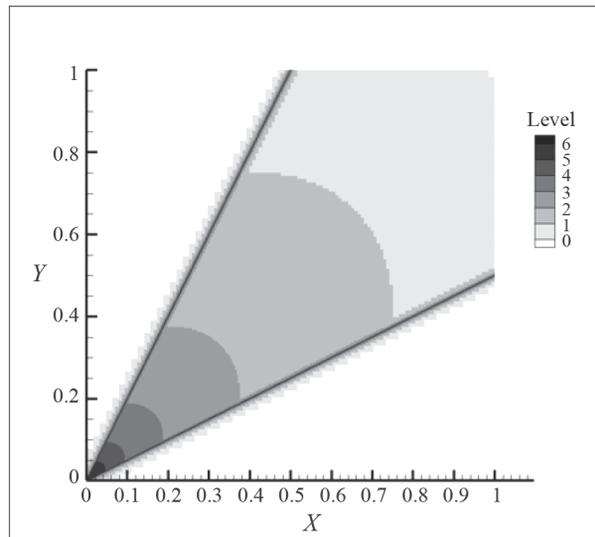
Ниже мы рассмотрим работу предложенного алгоритма вейвлетной адаптации в вычислительных экспериментах. В дальнейших примерах используется вейвлетный анализатор с порядком вейвлетов  $k = 1$  и числом нулевых моментов  $p = 2$ .

### 6.1. Аналитически заданное поле

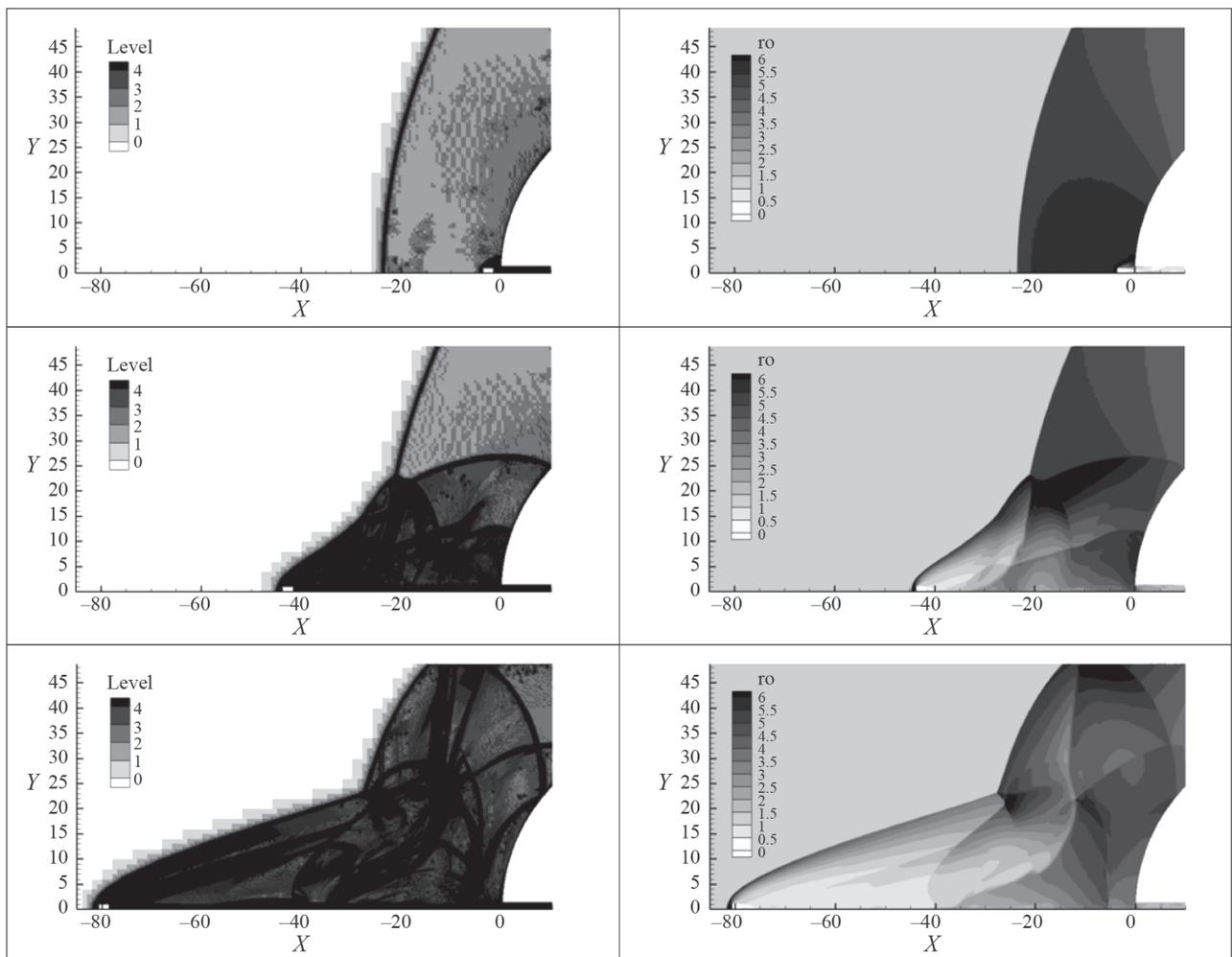
Работу вейвлетного анализатора можно наглядно продемонстрировать на адаптации сетки для аналитически заданного поля, моделирующего волну разряжения:

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(0.5), & y < 0.5x, \\ \operatorname{arctg}(2), & y > 2x, \\ \operatorname{arctg}(y/x), & 0.5x < y < 2x. \end{cases}$$

Область  $[0, 1] \times [0, 1]$  изначально разбита на  $64 \times 64$  ячеек. Все ячейки области  $l$  раз подвергаются вейвлетной адаптации, где  $l = 6$  — максимальный уровень разбиения базовой ячейки.



Фиг. 2. Результат адаптации аналитически заданного поля.



Фиг. 3. Уровни адаптации ячеек (слева) в промежуточных моментах времени и поля плотности (справа) в те же моменты в задаче о вылете pellets (фрагмент области).

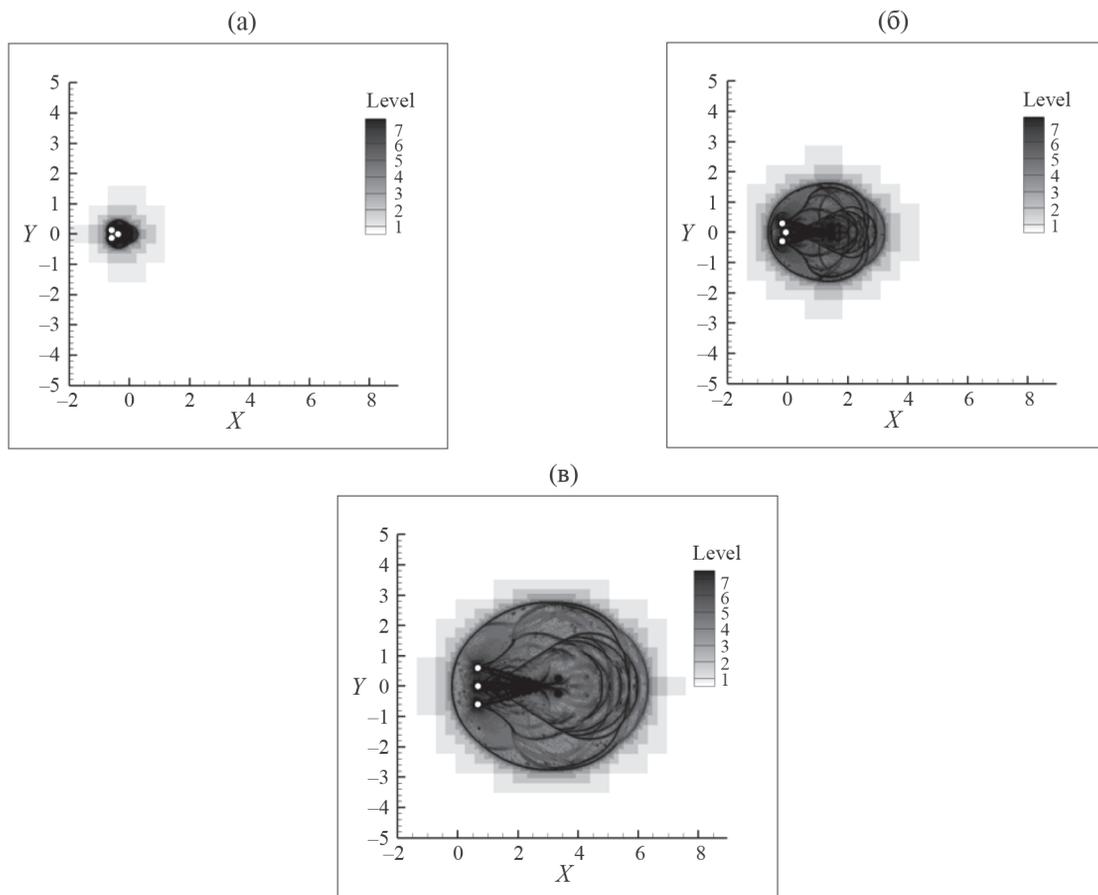
На фиг. 2 цветом обозначается уровень разбиения ячейки. Видно, что в области, где  $f$  не является константой, по мере приближения к началу координат увеличивается сложность функции, а вместе с ней — подробность сетки.

### 6.2. Адаптация декартовых сеток в газодинамических задачах

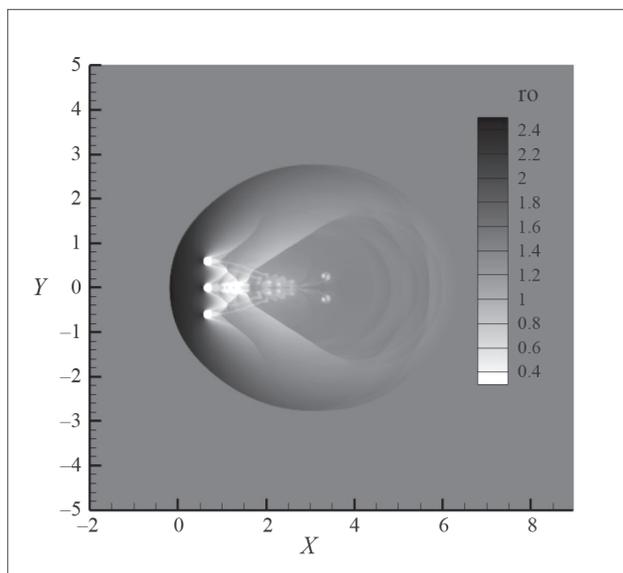
Теперь продемонстрируем работу предложенного метода на двух содержательных газодинамических задачах. В качестве функции  $f$  для вейвлетного анализа использовалось поле плотности. В обеих задачах использовался идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$  и посчитаны по схеме второго порядка аппроксимации. В первой задаче тело движется по заданному закону с постоянной скоростью, во второй система тел движется свободно под действием давления газа. Дополнительно проводилась адаптация до максимального уровня вдоль подвижных границ обтекаемых тел.

**Задача 1.** Эта задача о вылете пеллета подробно рассмотрена в [27]. В ней цилиндр малого размера  $2\text{мм} \times 2\text{мм}$  вылетает из канала неподвижного затупленного цилиндра  $100 \times 70\text{мм}$  со сферическим концом. Канал на оси симметрии цилиндров имел диаметр 3 мм. Система тел обтекалась сверхзвуковым потоком идеального газа с числом Маха  $M = 3$  а малый цилиндр двигался в противоположном потоку направлении с числом Маха  $M = 4$ . Расчетная область  $[-300, 100] \times [0, 130]$  (в мм). Пороговые величины вейвлетной адаптации  $C_{\max} = 0.0005$ ,  $C_{\min} = 0.0001$ .

**Задача 2.** Задача о разлете тел при сверхзвуковом обтекании в плоской постановке, опубликованная в [28], была пересчитана в настоящей работе в большей области и с большим числом уровней, поэтому опишем ее подробнее. Три цилиндра с осями, перпендикулярными расчетной области радиуса  $R = 0.1$  и массой  $M = 1$ , покоятся в начальный момент времени. Центральные оси цилиндров расположены в вершинах правильного треугольника с координатами  $\mathbf{X}_1(0) = (-0.6, 0.125)$ ,  $\mathbf{X}_2(0) = (-0.6, -0.125)$ ,  $\mathbf{X}_3(0) = (0.125\sqrt{3} - 0.6, 0)$ . Расчетная область  $[-2.14] \times [-8.8]$ .



**Фиг. 4.** Эволюция расчетной сетки в задаче о разлете цилиндров. Начальная стадия расчета (а), средняя стадия (б) и финальный момент времени (в). Цветом обозначен уровень ячейки.



Фиг. 5. Поле плотности в финальный момент времени в задаче о разлете цилиндров.

На нижней, верхней и правой границах задано условие свободного вытекания. На левой границе задан постоянный вектор, совпадающий с начальными данными  $(\rho, u_x, u_y, p)^T = (1.4, 2, 0, 1)^T$ . Размер базовой сетки  $25 \times 25$  с девятью уровнями адаптации. Пороговые величины вейвлетной адаптации  $C_{\max} = 0.0005$ ,  $C_{\min} = 0.0001$ .

Цилиндры взаимодействуют с потоком, получая импульс под действием поверхностных сил. Расчет производился до выхода цилиндров на одну прямую  $x = 1.813$  в момент времени  $t = 2.3525$ . Все величины даны в безразмерном виде. О методике расчета подробнее можно прочитать в исходной публикации [28].

На фиг. 3 для задачи 1 и на фиг. 4, 5 для задачи 2 видно, как сложные конфигурации разномасштабных особенностей течения, включающих головные ударные волны, волны разряжения и более мелкие скачки уплотнения эффективно динамически улавливаются вейвлетным анализатором, локально измельчающим сетку в соответствующих областях, а затем огрубляющим эти ячейки на более поздних шагах, если области с негладким и существенно нелинейным решением переместились в другие ячейки.

## 7.ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен эффективный метод локальной адаптации декартовых сеток, использующий одномерное вейвлетное преобразование на базе неравномерных В-сплайнов. Метод действует локально, выделяя необходимую ему информацию о газодинамическом поле из минимально возможного количества соседей исследуемой ячейки. В комбинации с другими приведенными в работе методами, такими как метод свободной границы, его можно применять для решения широкого класса задач газовой динамики, в том числе, существенно нестационарных, с обтеканием движущихся тел и активными перестройками течения.

Способность локального анализатора динамически выделять разномасштабные особенности газодинамических полей на текущем расчетном шаге и адекватно подстраивать сетку под решение продемонстрирована на ряде численных экспериментов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
2. Теоретические основы и конструирование вычислительных алгоритмов. Ред. К. И. Бабенко, М.: Наука, 1978.

3. Young D. P., Melvin R. G., Bieterman M. B., Johnson F. T., Samant S. S., and Bussoletti J. E. A locally refined rectangular grid finite element method: Application to computational fluid dynamics and computational physics // J. Comput. Phys. 1991. V. 92. N 1. P. 1.
4. Khokhlov A. M. Fully threaded tree algorithms for adaptive refinement fluid dynamics simulations // J. Comput. Phys. 1998. V. 143. P. 519–543.
5. Aftosmis M. J., Berger M. J., Melton J. E. Adaptive cartesian mesh generation // Chapter 22. Handbook of grid generation, ed. J. Thompson, B. Soni, N. Weatherill. CRC Press, 1999.
6. Pember R. B., Bell J. B., Colella P., Crutchfield W. Y., and Welcome M. L. An Adaptive Cartesian Grid Method for Unsteady Compressible Flow in Complex Geometries // AIAA Paper 93-3385-CP (1993).
7. Бреславский П. В., Мажукин В. И. Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 12. С. 48–78.
8. Бреславский П. В., Мажукин В. И. Динамически адаптирующиеся сетки для взаимодействующих разрывных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 717–737.
9. Афендииков А. Л., Луцкий А. Е., Плёнкин А. В. Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 1. С. 41–50.
10. Афендииков А. Л. и др. Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа // Матем. моделирование. 2008. № 7. С. 65–84.
11. Афендииков А. Л., Луцкий А. Е., Плёнкин А. В. Локализация особенностей газодинамических полей и адаптация расчетной сетки к положению разрывов // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 49–54.
12. Harten A. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. 1995. V. 48. N 12. P. 1305–1342.
13. Harten A. Multiresolution representation of data: A general framework // SIAM J. Numer. Anal. 1996. V. 33. N 3. P. 1205–1256.
14. Zumbusch G. Parallel multilevel methods. Adaptive mesh refinement and loadbalancing // Adv. Numeric. Math. Teubner, Wiesbaden, 2003.
15. Bramkamp F., Lamby P., Mueller S. An adaptive multiscale finite volume solver for unsteady and steady state flow computations // J. Comput. Phys. 2004. V. 197. P. 460–490.
16. Hartmann D., Meinke M., Schroder W. A strictly conservative Cartesian cut-cell method for compressible viscous flows on adaptive grids // Comput. Meth. Appl. Mech. Engineer. 2011. V. 200. P. 1038–1052.
17. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1998.
18. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов  $W_p^\alpha$  // Матем. сб. 1967. Т. 73. № 115. С. 331–355.
19. Василевский Ю. В. и др. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. М.: Физматлит, 2016.
20. Меньшов И. С., Корнев М. А. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 5. С. 99–112. англ. пер.: I. S. Menshov, M. A. Kornev. Free-boundary method for the numerical solution of gasdynamic equations in domains with varying geometry // Math. Mod. Comput. Simulat. 2014. V. 6. N 6. P. 612–621.
21. Меньшов И. С., Павлухин П. В. Эффективный параллельный метод сквозного счета задач аэродинамики на несвязных декартовых сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1677–1691.
22. Афендииков А. Л. и др. Адаптивные вейвлетные алгоритмы на декартовых сетках. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2016. 232 с.
23. de Boor C. Splines as linear combinations of B-splines. A Survey // in APPROXIMATION THEORY, II G. G. Lorentz, C. K. Chui, and L. L. Schumaker (ed.), Academic Press (New York), 1976, 1–47 (emended version, 1986).
24. Sweldens W. The Lifting Scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1996. V. 3. P. 186–200.
25. Ford J. M., Oseledets I. V., Tyrtysnikov E. E. Matrix approximations and solvers using tensor products and non-standard wavelet transforms related to irregular grids // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2004. V. 19. N 2. P. 185–204.
26. Демьянович Ю. К. Калибровочное соотношение для B-сплайнов на неравномерной сетке // Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 9. С. 98–100.
27. Афендииков А. Л., Луцкий А. Е., Меньшов И. С., Никитин В. С., Ханхасаева Я. В. (ИПМ им. М. В. Келдыша РАН) Численное моделирование вылета пеллета из затупленного тела. М.: ИПМ, РАН, 2017.

28. *Афендииков А. Л., Никитин В. С.* Численное моделирование на адаптивных сетках свободного движения системы тел в сверхзвуковом потоке газа // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 12. С. 55–64; *Math. Models Comput. Simul.* 2021. V. 13. N 4. P. 667–673.
29. *Regele J. D., Vasilyev O. V.* An adaptive wavelet-collocation method for shock computations // *Inter. J. Comput. Fluid Dynamic.* 2009. V. 23. N 7. P. 503–518.
30. *Vasilyev O. V., Bowman C.* Second generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 165. P. 660–693.
31. *Vasilyev O. V., Kevlahan N. K.R., Goldstein D. E., Vezolainen A. V., Regele J., Nejadmalayeri A., Reckinger S., BrownDymkoski E., Rogoz E.* Adaptive wavelet environment for in silico universal multiscale modeling (AWESUMM) (2019).
32. *Dymkoski E. Brown, Kasimov N., Vasilyev O. V.* A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows // *J. Comput. Phys.* 2014. V. 262. P. 344–357.
33. *Dymkoski E. Brown, Kasimov N., Vasilyev O. V.* Characteristic based volume penalization method for arbitrary Mach flows around solid obstacles // *Direct and Large Eddy Simulation IX* / ed. by J. Frohlich, H. Kuerten, B. Geurts, V. Armenio. Springer, 2015. P. 10–115.
34. *Vasilyev O. V., Kevlahan N. K. R.* Hybrid wavelet collocation Brinkman penalization method for complex geometry flows // *Inter. J. Numer. Meth. Fluid.* 2002. V. 40. P. 531–538.
35. *Chui C. K.* An Introduction to wavelets. Elsevier, 2014. P. 266.
36. *Chi-Wang Shu,* High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics // *High-order methods for computational physics*, Springer, Heidelberg, 1999, P. 438–480.
37. *Тишкин В. Ф., Пескова Е. Е., Жалнин Р. В., Горюнов В. А.* О построении WENO-схем для гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках // *Изв. вузов. Приволжский регион. Физ.-матем. науки.* 2014. № 1 (29).