ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 2, с. 304–321

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О. В. Солонуха[1, *]

[1]*19333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия*

**e–mail: solonukha@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.09.2023 г.
Переработанный вариант 13.09.2023 г.
Принята к публикации 20.10.2023 г.

Доказаны достаточные условия существования обобщенного решения нелинейного эллиптического дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского. Используется условие сильной эллиптичности вспомогательного дифференциально–разностного оператора. При сформулированных условиях дифференциально–разностный оператор является деминепрерывным, коэрцитивным и обладает полуограниченной вариацией, что позволяет применять общую теорию операторов псевдомонотонного типа. Библ. 16.

Ключевые слова: нелокальная задача, дифференциально-разностный оператор, условие сильной эллиптичности, оператор с полуограниченной вариацией.

DOI: 10.31857/S0044466924020097, **EDN:** YJKVNS

ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные эллиптические краевые задачи рассматривались начиная с 30-х гг XX века. В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский сформулировали новую нелокальную эллиптическую краевую задачу, возникающую в теории плазмы, см. [1]. Разрешимость задачи в общей постановке была сформулирована как нерешенная задача [2]. В конце 80-х годов была построена общая теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач, в рамках которой была решена указанная проблема, см. [3–7]. Нелинейные эллиптические нелокальные задачи с краевым условием типа Бицадзе–Самарского изучались автором ранее, см. [8, 9]. В данной работе исследование продолжено для существенно нелинейных уравнений и возможно несимметричных краевых условий. Будут рассмотрены достаточные условия существования решения существенно нелинейной нелокальной задачи. При исследовании использованы методы теории линейных нелокальных граничных задач [5–7] и теории существенно нелинейных дифференциальных уравнений, см. [10].

В разд. 1 сформулированы свойства разбиения области и границы, а также теорема об изоморфизме функциональных пространств, позволяющая поставить в соответствие нелокальной задаче некое эквивалентное (с точки зрения множества решений) функционально-дифференциальное уравнение, эти результаты доказаны в [11, 12, 8]. В разд. 2 доказаны свойства дифференциально-разностного оператора из эквивалентной задачи. При этом мы полагаем, что дифференциально-разностный оператор удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Остальные условия сформулированы для дифференциального оператора и соответствуют условиям, которые рассматривались ранее при изучении дифференциальных уравнений с классическими краевыми условиями. В разд. 3 доказаны теоремы существования решений дифференциально-разностных уравнений с однородным краевым условием типа Дирихле и соответствующих дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для изучения нелинейной краевой задачи нам потребуются некоторые вспомогательные построения, разработанные для линейных задач, см. [5, 6, 7].

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d)\times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geqslant 3$). В случае $n = 1$ мы полагаем $Q = (0,d)$. Обозначим через $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ конечное множество векторов h с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus (\bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h))$.

Определение 1. Множество Q_r называется *подобластью*. Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r ($r = 1, 2, \dots$) называется *разбиением* области Q.

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно, при этом $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$ и $\bigcup\limits_r \partial Q_r = (\bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)) \cap \overline{Q}$. Известно, что для любой подобласти Q_{r_1} и произвольного вектора $h \in M$ либо найдется подобласть Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$, см. лемму 7.1 из [5]. Таким образом, семейство $\mathcal{R}$ можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ для некоторого $h \in M$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса, а l — номер подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}. Множество классов может быть конечным или счетным, см. примеры в §7 гл. II из [5]. При этом предполагаются выполненными условия 1 и 2.

Условие 1. Для каждой подобласти Q_{sl} $(s = 1, 2, \dots,\ l = 1, \dots, N(s))$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl} \in C^1$ такое, что $\operatorname{mes}_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\operatorname{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Условие 2. Множество $K = \bigcup\limits_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}$ таково, что $\operatorname{mes}_{n-1}(K \cap \partial Q) = 0$.

Кроме разбиения области, необходимо рассмотреть разбиение границы ∂Q, определяемое тем же множеством сдвигов $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, см. выше.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \setminus K$. Множества $\left\{ \Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q}, \rho = 1, 2, \dots, h \in M \right\}$ могут быть разбиты на классы. Множества $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;

2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ однонаправлены.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, j — номер элемента в классе ($1 \leqslant j \leqslant J = J(r)$). Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ ($0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)$).

Множество всех распределений $u \in \mathcal{D}'(Q)$, являющихся вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка функциями из $L_p(Q)$, обозначим через $W_p^1(Q)$. При $p \in (1, \infty)$ пространства Соболева $W_p^1(Q)$ рефлексивны и банаховы относительно нормы $\| u \|_{W_p^1(Q)} = \left\{ \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_Q |\partial_i u|^p \, dx \right\}^{1/p}$, здесь $\partial_0 u \equiv u$. Через $\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$ обозначим замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $W_p^1(Q)$, $\| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} = \left\{ \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_Q |\partial_i u|^p \, dx \right\}^{1/p}$. Также будут рассматриваться сопряженные пространства $L_q(Q) = \left(L_p(Q)\right)^*$ и $W_q^{-1}(Q) = \left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\right)^*$, $1/p + 1/q = 1$.

Обозначим $W_{p,\gamma}^1(Q)$ ($\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$) подпространство функций из $W_p^1(Q)$, удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям*

$$
\begin{gathered}
w\,|_{\Gamma_{rl}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r w\,|_{\Gamma_{rj}} \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \ldots, J), \\
w\,|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \notin B, l = 1, \ldots, J),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, γ_{lj}^r — вещественные числа, $B = \{r : J_0 > 0\}$.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$
Aw(x) = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \partial_i A_i\left(x, w, \nabla w\right) + A_0\left(x, w, \nabla w\right) = f,\ x \in Q, \tag{2}
$$

с нелокальными краевыми условиями (1).

Определение 2. Пусть $f \in L_q(Q)$, $1/p + 1/q = 1$. Функция $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (2), (1), если для любого $\xi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$
\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_Q A_i\left(x, w, \nabla w\right) \partial_i \xi dx + \int_Q A_0\left(x, w, \nabla w\right) \xi dx = \int_Q f \xi dx. \tag{3}
$$

Пусть $\Lambda = \{a_h : h \in M\}$ — набор вещественных постоянных коэффициентов. Определим разностный оператор $R : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$
\mathrm{Ru}(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u\left(x + h\right), \tag{4}
$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$, здесь $I_Q : L_p(Q) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_p(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(Q)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на Q. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s = \{r_{ij}^s\}_{1 \leqslant i, j \leqslant N(s)}$ такие, что

$$
r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & \left(h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}\right), \\ 0 & \left(h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}\right), \end{cases} \tag{5}
$$

где h_{si} определяется условием $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$. Из ограниченности области Q и формулы (5) следует, что множество различных матриц R_s конечно. Обозначим эти матрицы через R_{s_ν} $(\nu = 1, \ldots, n_1)$.

Как известно, см. §7 из [5], для каждого $r = 1, 2, \ldots$, найдется единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ ($l = 1, \ldots, N$) после перенумерации подобластей s-го класса. Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из $R_s (s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть $e_j^r (j = 1, \ldots, J(r))$ есть j-я строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 3. Будем говорить, что матрицы R_s соответствуют граничным условиям (1), если выполнено условие 3.

Условие 3. Существует набор Λ такой, что для любого $s = 1, 2, \ldots$ матрицы R_s невырожденны, а также для всех $r \in B$ и $s = s(r)$ справедливы соотношения:

$$
e_l^r = \sum_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \qquad (l = J_0 + 1, \ldots, J). \tag{6}
$$

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N - J_0$ строк и столбцов.

Подробнее (с примерами и иллюстрациями) данное построение приведено в [5] для $p = 2$ и в [8] для $p \in (1,+\infty)$.

Теорема 1 (см. теорему 8.1 из [5] при $p = 2$ и теорему 2.1 из [8] при $p \in (1,+\infty)$). *Предположим, что выполнены условия* 1, 2 *и* 3, *а соответствующие матрицы* $R_s(s = 1,2,\ldots)$ *и* $R_{s0}(s = s(r), r \in B)$ *невырожденны.*

Тогда существует множество $\gamma = \{\gamma_{lj}^r\}$ *такое, что оператор* R_Q *отображает* $\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ *на* $W^1_{p,\gamma}(Q)$ *непрерывно и взаимнооднозначно.*

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* 1, 2 *и* 3, *а соответствующие матрицы* $R_s(s = 1,2,\ldots)$ *и* $R_{s0}(s = s(r), r \in B)$ *невырожденны. В этом случае функция* $w \in W^1_{p,\gamma}(Q)$ *является обобщенным решением задачи* (2), (1) *тогда и только тогда, когда* $w = R_Q u$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ *и для любого* $\xi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ *справедливо интегральное тождество*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_Q A_i\left(x, R_Q u, \nabla R_Q u\right)\partial_i \xi dx + \int_Q A_0\left(x, R_Q u, \nabla R_Q u\right)\xi dx = \int_Q f\xi dx. \tag{7}$$

Таким образом, чтобы найти обобщенное решение дифференциального уравнения (3) с нелокальным и краевыми условиями (2) необходимо найти обобщенное решение дифференциально–разностного уравнения

$$\mathrm{A_R}\, \mathrm{u} = AR_Q u = f \tag{8}$$

с краевым условием Дирихле

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{9}$$

Определение 4. Назовем $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ *обобщенным решением задачи* (8), (9), если для любого $\xi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ справедливо интегральное тождество (7).

2. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Для доказательства разрешимости дифференциально–разностного уравнения (8), (9) необходимо изучить свойства дифференциально–разностного оператора. Важным элементом рассмотрения дифференциально-разностного оператора является изучение его свойств на всех подобластях одного класса разбиения области одновременно.

Определим изоморфизм пространств $U_s : L_p\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right) \to L_p^N(Q_{s1})$ по формуле $(U_S u)_l(x) = u(x + h_{sl})$ для всех $x \in Q_{s1}$, где $l = 1,\ldots,N = N(s)$, $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ и $L_p^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_p(Q_{s1})$. Пространства U_S рефлексивны и банаховы.

Лемма 1 (см. §8 из [5] при $p = 2$ и [11] при $p \in (1,+\infty)$). *Для всех* $u \in W^1_p(Q)$ *имеем* $R_Q u \in W^1_p(Q_{sl})$ *и*

$$\left\|R_Q u\right\|_{W^1_p(Q_{sl})} \leqslant c_1 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W^1_p(Q_{sj})} \qquad \left(s = 1,2,\ldots; l = 1,\ldots,N\left(s\right)\right). \tag{10}$$

Причем оператор $R_{Qs} : L_p^{N(s)}(Q_{s1}) \to L_p^{N(s)}(Q_{s1})$, заданный соотношением

$$R_{Qs} = U_S R_Q U_s^{-1}, \tag{11}$$

есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, заданную в (5).

Более того, если $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1,\ldots,n_1)$, то существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ и для всех $w \in W^1_p(Q)$ справедливы включения $R_Q^{-1} w \in W^1_p(Q_{sl})$, при этом

$$\left\|R_Q^{-1}w\right\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{W_p^1(Q_{sj})} \qquad \left(s = 1,2,\ldots;l = 1,\ldots,N\left(s\right)\right). \tag{12}$$

Здесь константы $c_1,c_2 > 0$ не зависят от индекса s и функции u, причем

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s. \tag{13}$$

Будут использовны матрицы $\zeta \in R^{N(s)\times(n+1)}$:

$$\zeta := \begin{pmatrix} \zeta_{10} & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{20} & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N(s)0} & \zeta_{N(s)1} & \zeta_{N(s)2} & \cdots & \zeta_{N(s)n} \end{pmatrix}.$$

Через $\zeta_{\cdot i}$ будем обозначать i-й столбец матрицы ζ, через $\zeta_{l\cdot}$ будем обозначать i-ю строку матрицы ζ.

Сформулируем условия на дифференциальные коэффициенты и матрицы R_s. Заметим, что условия роста можно уточнить в зависимости от соотношения степени интегрируемости p и размерности n.

Пусть справедливы следующие условия:

A0) R_s невырожденны;

A1) условие интегрируемости или условие роста: функции $A_i(x,\xi), i = 0,1,\ldots,n,$ являются функциями типа Каратеодори (т.е. измеримы по $x \in Q$ и непрерывны по остальным переменным для п.в. $x \in Q$), а также удовлетворяют оценкам роста

$$\left|A_i(x,\xi)\right| \leqslant g_0\left(x\right) + c_1\left|\xi_0\right|^{p'-1} + c_1 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left|\xi_j\right|^{p-1},\ i = 1,\ldots,n, \tag{14}$$

$$\left|A_0(x,\xi)\right| \leqslant g_0\left(x\right) + c_1 \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \left|\xi_j\right|^{p'-1}, \tag{15}$$

где $c_1 > 0$, $p' \in (1,p)$ и $g_0 \in L_q(Q)$;

A2) условие сильной эллиптичности: для всех s, п.в. $x \in \overline{Q_{s1}}$ и любых $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0} \neq 0$ и $\eta \neq \zeta$, существует $\widehat{\Upsilon} > 0$ такая, что

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}\left(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}\right)\right)_l \geqslant$$
$$\geqslant \widehat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\zeta_{li} - \eta_{li}\right|^p; \tag{16}$$

A3) условие локальной липшицевости/гёльдеровости функций A_i $(i = 1,\ldots,n)$ по ξ_0 и функции A_0 по ξ_j $(j = 0,1,\ldots,n)$: существуют ρ ($\rho = 1$ при $p \in [2,\infty)$, $\rho \in (1 - 1/p, p - 1]$ при $p \in (1,2)$) и $\varepsilon > 0$ такие, что для п.в. $x \in Q$ и любых $\xi,\delta \in R^{n+1}$, $|\delta| = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} |\delta_j| = |\delta_k| < \varepsilon$,

$$\left|A_i\left(x,\xi + \delta\right) - A_i\left(x,\xi\right)\right| \leqslant \left(\Psi\left|\xi_k + \delta_k\right|^{p-1-\rho} + \Psi \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \left|\xi_j\right|^{p-1-\rho} + g_\Psi\left(x\right)\right)\left|\delta_k\right|^\rho, \tag{17}$$

где $\Psi > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$, $q' = p/(p - 1 - \rho)$, $k = 0$ при $i = 1,\ldots,n$ и $k = 0,1,\ldots,n$ при $i = 0$.

Определение 5. Оператор $A : X \to Y$ *деминепрерывен*, если из сходимости $u_m \to u$ в X следует слабая сходимость $Au_m \rightharpoonup Au$ в Y. Оператор $A : X \to Y$ *ограничен*, если образ ограниченного множества из X ограничен в Y [1].

Лемма 2. *Пусть коэффициенты оператора* $A : W_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$*, заданного в уравнении* (2)*, удовлетворяют условию* **A1)**. *Тогда оператор* $A_R : \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ *деминепрерывен и ограничен.*

Доказательство. В силу леммы 1 линейный оператор $R_Q : \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ ограничен. Линейный ограниченный оператор непрерывен. В силу условия **A1)** существуют $c_2 > 0$ и $g_1 \in L_q(Q)$ такие, что

$$|A_i(x,\xi)| \leqslant g_1(x) + c_2 \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} |\xi_j|^{p-1}, \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

т.е. дифференциальный оператор $A : W_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ деминепрерывен и ограничен, см., например, [13, Гл. 1 §2]. Композиция $A_R = AR_Q$ является деминепрерывным, ограниченным оператором. Лемма доказана.

Определение 6. Оператор $A : \mathrm{D}om(A) \subset X \to Y^*$ с линейной (аффинной) областью определения $\mathrm{D}om(A)$ *радиально непрерывен*, если для любых $u,v \in \mathrm{D}om(A)$ и $y \in Y$ функция $\tau \mapsto \langle A(u+\tau v), y\rangle$ непрерывна.

Очевидно, что деминепрерывный оператор является радиально непрерывным.

Определение 7. Оператор $A : X \to X^*$ называется *оператором с полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция C такая, что для всех $u,y \in X$ ($\| u \|_X \leqslant r_1, \| y \|_X \leqslant r_1$) справедливо неравенство

$$\langle Au - Ay, u - y\rangle \geqslant -C\left(r_1; \|u - y\|'_X\right), \tag{18}$$

где $\tau^{-1}C(r_1, \tau r_2) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r_1, r_2 > 0$, $\|\cdot\|'_X$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_X$.

При $X = \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$ в качестве $\|\cdot\|'_X$ удобно рассматривать $\|\cdot\|_{L_p(Q)}$. $\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$ компактно, см. [14, Гл. I, 8, пп. 2].

Операторы с полуограниченной вариацией были рассмотрены Ю. А. Дубинским, см. [15], он же предложил условие сильной эллиптичности для квазилинейных дифференциальных операторов. Ранее автором были исследованы квазилинейные дифференциально-разностные операторы, обладающие свойством полуограниченной вариацией. Как было доказано в 80-е, радиально непрерывные операторы с полуограниченной вариацией являются псевдомонотонными. При исследовании дифференциально-разностных операторов операторы с полуограниченной вариацией обладают следующим преимуществом: для дифференциально-разностных операторов достаточными условиями псевдомонотонности являются условие эллиптичности и условие коэрцитивности, каждое из которых выражено в виде оценки весовых сумм; для доказательства полуограниченной вариации будет использована одна весовая сумма — условие сильной эллиптичности; коэрцитивность дифференциально-разностного оператора будет доказана исходя из условия сильной эллиптичности и условия роста, накладываемого на дифференциальный оператор.

Лемма 3. *Пусть справедливы условия* **A0)–A3)**. *Тогда дифференциально-разностный оператор* $A_R : \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ *обладает полуограниченной вариацией.*

Доказательство. Обозначим $w = R_Q u$ и $v = R_Q y$, $u,y \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$, причем в силу невырожденности оператора R_Q существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$, см. лемму 1. По определению оператора A_R и в силу формулы (13)

---

[1] в определениях мы рассматриваем абстрактные банаховы пространства X и Y

$$
\begin{aligned}
&\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int_{\Omega_T}\Big(A_i\big(x,R_Q u,\nabla R_Q u\big) - A_i\big(x,R_Q y,\nabla R_Q y\big)\Big)\partial_i(u-y)dx = \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\int_{\Omega_T}\big(A_i(x,w,\nabla w) - A_i(x,v,\nabla v)\big)R_Q^{-1}\partial_i(w-v)dx = \\
&= \sum_s \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}}\sum_{0\leqslant i\leqslant n} P_s\big(A_i(x,w,\nabla w) - A_i(x,v,\nabla v)\big)U_s^{-1}R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)dx = \\
&= \sum_s\int\limits_{Q_{s1}}\sum_{0\leqslant i\leqslant n}\Big(U_sP_s\big(A_i(x,w,\nabla w) - A_i(x,v,\nabla v)\big),R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\Big)dx = \\
&= \sum_s\int\limits_{Q_{s1}}(I_{s1}+I_{s2}+I_{s3})dx,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $R^{N(s)}$. Очевидно, что при $u(x)=y(x)$ для почти всех $x\in Q$ значение данного интеграла неотрицательно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x)\neq y(x)$ для почти всех $x\in Q$. Очевидно, что при этом $w(x)\neq v(x)$ и существует $\lambda\in[0,1]$ такое, что $\lambda w(x)+(1-\lambda)v(x)\neq 0$, возможно $\lambda=\lambda(x)$.

Введем матрицы порядка $N(s)\times(n+1)$

$$
\zeta = \big(U_sP_sw, U_sP_s\partial_1 w\ldots, U_sP_s\partial_n w\big),\ \eta = \big(U_sP_sv, U_sP_s\partial_1 v\ldots, U_sP_s\partial_n v\big),
$$

а также матрицы $\hat\zeta$ и $\hat\eta$ такие, что

$$
\hat\zeta_{\cdot i} = \zeta_{\cdot i},\qquad \hat\eta_{\cdot i} = \eta_{\cdot i}\qquad \forall i=1,\ldots,n, \tag{20}
$$

$$
\hat\zeta_{l0} = \hat\eta_{l0} = \lambda\zeta_{l0} + (1-\lambda)\eta_{l0}\qquad \forall l=1,\ldots,N(s). \tag{21}
$$

По построению, $\hat\zeta_{l0}=\hat\eta_{l0}\neq 0$. В то же время $\hat\zeta_{\cdot i}-\hat\eta_{\cdot i}\equiv\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i}\quad\forall i=1,\ldots,n$. Сначала оценим часть подынтегральной суммы правой части (19):

$$
\begin{aligned}
I_{s1}+I_{s2} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(U_sP_s\big(A_i(x,w,\nabla w)-A_i(x,v,\nabla v)\big),R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\Big) = \\
&= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\big(A_i(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},\eta_{l\cdot})\big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l = \\
&= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\big(x+h_{sl},\hat\zeta_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\hat\eta_{l\cdot}\big)\Big)\Big(R_s^{-1}\big(\hat\zeta_{\cdot i}-\hat\eta_{\cdot i}\big)\Big)_l + \\
&+ \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}) - A_i\big(x+h_{sl},\hat\zeta_{l\cdot}\big)\Big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l + \\
&+ \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\big(x+h_{sl},\hat\eta_{l\cdot}\big) - A_i(x+h_{sl},\eta_{l\cdot})\Big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Первую сумму правой части (22) оценим с помощью условия сильной эллиптичности (16):

$$
\begin{aligned}
I_{s1} &= \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(A_i\big(x+h_{sl},\hat\zeta_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\hat\eta_{l\cdot}\big)\Big)\Big(R_s^{-1}\big(\hat\zeta_{\cdot i}-\hat\eta_{\cdot i}\big)\Big)_l \geqslant \\
&\geqslant \hat\Upsilon\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\hat\zeta_{li}-\hat\eta_{li}\right|^p = \hat\Upsilon\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\partial_i w(x+h_{sl}) - \partial_i v(x+h_{sl})\right|^p.
\end{aligned}
$$

То есть

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1}\,dx \geqslant \hat{\Upsilon} \|w - v\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)}. \tag{23}$$

Рассмотрим вторую и третью суммы правой части (22)[2]:

$$\begin{aligned} I_{s2} \leqslant | &\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Big(A_i\big(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\hat{\zeta}_{l\cdot}\big)\Big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l + \\ &+ \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Big(A_i\big(x+h_{sl},\hat{\eta}_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\big)\Big)\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l | \leqslant \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Big|A_i\big(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\hat{\zeta}_{l\cdot}\big)\Big|\Big|\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l\Big| + \\ &+ \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Big|A_i\big(x+h_{sl},\hat{\eta}_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\big)\Big|\Big|\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l\Big| \end{aligned} \tag{24}$$

Исходя из условия **А3)**, воспользуемся оценкой (17):

$$\begin{aligned} &\Big|A_i\big(x+h_{sl},\hat{\zeta}_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\big)\Big| \leqslant \\ &\leqslant \Big(\Psi\big|\hat{\zeta}_{l0}\big|^{p-1-\rho} + \Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-1-\rho} + g_\Psi(x+h_{sl})\Big)\Big|\zeta_{l0}-\hat{\zeta}_{l0}\Big|^\rho. \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогично для второй группы слагаемых правой части (24) имеем

$$\begin{aligned} &\Big|A_i\big(x+h_{sl},\hat{\eta}_{l\cdot}\big) - A_i\big(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\big)\Big| \leqslant \\ &\leqslant \Big(\Psi\big|\hat{\eta}_{l0}\big|^{p-1-\rho} + \Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-1-\rho} + g_\Psi(x+h_{sl})\Big)\Big|\eta_{l0}-\hat{\eta}_{l0}\Big|^\rho. \end{aligned} \tag{26}$$

Подставим (25) и (26) в (24); учитывая, что $\eta_{l0} - \hat{\eta}_{l0} = \lambda(\eta_{l0} - \zeta_{l0})$ и $\zeta_{l0} - \hat{\zeta}_{l0} = (1-\lambda)(\zeta_{l0} - \eta_{l0})$, см. (21), получаем оценку

$$\begin{aligned} I_{s2} \leqslant &\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (((\lambda^\rho + (1-\lambda)^\rho)\Psi|\lambda\zeta_{l0} + (1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-1-\rho} + (1-\lambda)^\rho\Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\,\zeta_{lk}\,|^{p-1-\rho} + \\ &+\lambda^\rho\Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\,\eta_{lk}\,|^{p-1-\rho} + ((\lambda^\rho + (1-\lambda)^\rho)g_\Psi(x+h_{sl}))\,|\,\zeta_{l0}-\eta_{l0}\,|^\rho\Big|\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (2^{1-\rho}\Psi|\lambda\zeta_{l0} + (1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-1-\rho} + \Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\,\zeta_{lk}\,|^{p-1-\rho} + \\ &+\Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\,\eta_{lk}\,|^{p-1-\rho} + 2^{1-\rho}g_\Psi(x+h_{sl}))\,|\,\zeta_{l0}-\eta_{l0}\,|^\rho\Big|\Big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\Big)_l\Big|. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь учтено, что $\lambda^\rho + (1-\lambda)^\rho \leqslant 2^{1-\rho}$ для всех $\lambda \in [0,1]$, а также $\lambda^\rho \leqslant 1$ и $(1-\lambda)^\rho \leqslant 1$. Заметим, что $|\lambda\zeta_{l0} + (1-\lambda)\eta_{l0}|^\alpha \leqslant |\zeta_{l0}|^\alpha + |\eta_{l0}|^\alpha$ для всех $\lambda \in [0,1]$ при $\alpha \geqslant 0$, а также в силу ограниченности и невырожденности матриц R_s^{-1} имеет вид

[2] пока будем считать, что $\rho < p - 1$, ситуацию $\rho = p - 1$ поясним в конце доказательства

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|\leqslant c_3\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|$$

для некоторго $c_3>0$. Тогда получим

$$I_{s2}\leqslant 2^{1-\rho}c_3\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}(\Psi|\zeta_{l0}|^{p-1-\rho}+\Psi|\eta_{l0}|^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\zeta_{lk}|^{p-1-\rho}+$$

$$+\Psi\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\eta_{lk}|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x+h_{sl}))\,|\,\zeta_{l0}-\eta_{l0}\,|^\rho\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|. \tag{28}$$

Перейдем к переменным w и v:

$$\sum_s\int_{Q_{s1}}I_{s2}dx\leqslant c_4(2\Psi\|\,w\,\|_{L_p(Q)}^{p-1-\rho}+2\Psi\|\,v\,\|_{L_p(Q)}^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\|\,\partial_iw\,\|_{L_p(Q)}^{p-1-\rho}+$$

$$+\Psi\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\|\,\partial_iv\,\|_{L_p(Q)}^{p-1-\rho}+\|\,g_\Psi\,\|_{L_{q'}(Q)})\,\|\,w-v\,\|_{L_p(Q)}^\rho\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\,\partial_iw-\partial_iv\,\|_{L_p(Q)}\leqslant$$

$$\leqslant c_4\left(c_5r_1^{p-1-\rho}+\|\,g_\Psi\,\|_{L_{q'}(Q)}\right)\|\,w-v\,\|_{L_p(Q)}^\rho\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\,\partial_iw-\partial_iv\,\|_{L_p(Q)}, \tag{29}$$

где $\|\,u\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}\leqslant r_1$ и $\|\,y\,\|_{W_p^1(Q)}\leqslant r_1$. В этой оценке учтено, что в силу ограниченности оператора R_Q $\|\,w\,\|_{L_p(Q)}=\|\,R_Qu\,\|_{L_p(Q)}\leqslant c_6\,\|\,u\,\|_{L_p(Q)}$ и согласно неравенству Фридрихса $\|\,u\,\|_{L_p(Q)}\leqslant c_7\,\|\,u\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}$, для $v=R_Qy$ оценки аналогичны. Т.е. $\|\,w\,\|_{L_p(Q)}\leqslant c_6c_7,\ \|\,u\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}\leqslant c_6c_7r_1$ и $\|\,v\,\|_{L_p(Q)}\leqslant c_6c_7,$ $\|\,y\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}\leqslant c_6c_7r_1$, $c_5=4\Psi(c_6c_7)^{p-1-\rho}+2\Psi c_6^{p-1-\rho}$. Для сокращения записи введем функцию $\hat{c}_1(r_1)=c_4\left(c_5r_1^{p-2}+\|\,g_\Psi\,\|_{L_{q'}(Q)}\right)$. В силу неравенства Юнга из (29) следует, что

$$\sum_s\int_{Q_{s1}}I_{s2}dx\leqslant\frac{\hat{\Upsilon}}{p}\,\|\,w-v\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}^p+\frac{1}{q}\left(\frac{\hat{c}_1(r_1)}{\hat{\Upsilon}}\right)^q\,\|\,w-v\,\|_{L_p(Q)}^{\rho q}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\hat{\Upsilon}}{p}\,\|\,w-v\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}^p+\frac{c_6^{\rho q}}{q}\left(\frac{\hat{c}_1(r_1)}{\hat{\Upsilon}}\right)^q\,\|\,u-y\,\|_{L_p(Q)}^{\rho q}\,. \tag{30}$$

Осталось оценить слагаемое при $i=0$ в подынтегральной сумме правой части (19):

$$I_{s3}\leqslant\left|(U_sP_s\left(A_0(x,w,\nabla w)-A_0(x,v,\nabla v)\right),R_s^{-1}U_sP_s(w-v))\right|=$$

$$=\left|\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\left(A_0\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)-A_0\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\right)_l\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\left|A_0\left(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot}\right)-A_0\left(x+h_{sl},\eta_{l\cdot}\right)\right|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\right)_l\right|. \tag{31}$$

Исходя из условия **А3)**, подставим оценку (17) в (31) покоординатно, аналогично выводу формулы (28) из (26). Так как

$$\left|A_0(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot})-A_0(x+h_{sl},\eta_{l\cdot})\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|A_0(x+h_{sl},\zeta_{l\cdot})-A_0(x+h_{sl},\eta_{l0},\zeta_{l1},\dots,\zeta_{ln})\right|+$$
$$+\left|A_0(x+h_{sl},\eta_{l0},\zeta_{l1},\dots,\zeta_{ln})-A_0(x+h_{sl},\eta_{l0},\eta_{l1},\zeta_{l2},\dots,\zeta_{ln})\right|+$$
$$+\dots+\left|A_0(x+h_{sl},\eta_{l0},\dots,\eta_{l,n-1},\zeta_{ln})-A_0(x+h_{sl},\eta_{l\cdot})\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant k}|\,\eta_{lj}\,|^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{k\leqslant j\leqslant n}|\,\zeta_{lj}\,|^{p-1-\rho}+g_\Psi\right)|\,\zeta_{lk}-\eta_{lk}\,|^{\rho}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\,\zeta_{lj}\,|^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\,\eta_{lj}\,|^{p-1-\rho}+g_\Psi\right)\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\,\zeta_{lk}-\eta_{lk}\,|^{\rho},$$

то

$$I_{s3}\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\left(\widehat{\Psi}\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\left(|\,\zeta_{lj}\,|^{p-1-\rho}+|\,\eta_{lj}\,|^{p-1-\rho}\right)+g_\Psi(x+h_{sl})\right)\times$$
$$\times\sum_{0\leqslant k\leqslant n}|\,\zeta_{lk}-\eta_{lk}\,|^{\rho}\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\right)_l\right|.$$

Вернемся к функциям w,v,u и y и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\sum_s\int_{Q_{s1}}I_{s3}\,dx\leqslant\sum_s\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\int_{Q_{s1}}\Psi\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\,\partial_j v(x+h_{sl}\right)|^{p-1-\rho}+$$
$$+\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\,\partial_j w(x+h_{sl})\,|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x+h_{sl}))\,|\,\partial_k w(x+h_{sl})-\partial_k v(x+h_{sl})\,|^{\rho})\times$$
$$\times|\,u(x+h_{sl})-y(x+h_{sl})\,|dx=$$
$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\int_Q(\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\,\partial_j v\,|^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\,\partial_j w\,|^{p-1-\rho}+g_\Psi)\,|\,\partial_k w-\partial_k v\,|^{\rho}|\,u-y\,|dx\leqslant$$
$$\leqslant\left\|\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\left(|\,\partial_j v\,|^{p-1-\rho}+|\,\partial_j w\,|^{p-1-\rho}\right)+g_\Psi\right\|_{L_{q'}(Q)}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\left\|\partial_k(w-v)\right\|^{\rho}_{L_p(Q)}\left\|u-y\right\|_{L_p(Q)}.$$

Заметим, что

$$\left\|\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\left(|\,\partial_j v\,|^{p-1-\rho}+|\,\partial_j w\,|^{p-1-\rho}\right)+g_\Psi\right\|_{L_{q'}(Q)}\leqslant$$
$$\leqslant\Psi\left(\|\,v\,\|^{p-1-\rho}_{W_p^1(Q)}+\|\,w\,\|^{p-1-\rho}_{W_p^1(Q)}\right)+\|\,g_\Psi\,\|_{L_{q'}(Q)}\leqslant c_8 r_1^{p-1-\rho}+\|\,g_\Psi\,\|_{L_{q'}(Q)}=:\hat{c}_2(r_1).$$

Здесь, как и выше, были учтены оценки $\|\,w\,\|_{L_p(Q)}\leqslant c_6c_7$, $\|\,u\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}\leqslant c_6c_7r_1$ и $\|\,v\,\|_{L_p(Q)}\leqslant$ $\leqslant c_6c_7$, $\|\,y\,\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}\leqslant c_6c_7r_1$, т.е. $c_8=2\Psi\left((c_6c_7)^{p-1-\rho}+c_6^{p-1-\rho}\right)$. Осталось воспользоваться известным неравенством $ab\leqslant\dfrac{(\varepsilon a)^p}{p}+\dfrac{1}{q}\left(\dfrac{b}{\varepsilon}\right)^q$:

$$\sum_s \int_{Q_{s_1}} I_{s_3}\,dx \leqslant \hat{c}_2(r_1)\|u-y\|_{L_p(Q)} \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \left\|\partial_j w-\partial_j v\right\|^{\rho}_{L_p(Q)} =$$

$$= \hat{c}_2(r_1)\|u-y\|_{L_p(Q)}\|w-v\|^{\rho}_{L_p(Q)} + \hat{c}_2(r)\|u-y\|_{L_p(Q)} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left\|\partial_j w-\partial_j v\right\|^{\rho}_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c_6^{\rho}\hat{c}_2(r_1)\|u-y\|^{1+\rho}_{L_p(Q)} + \frac{\hat{\Upsilon}\rho}{p}\|w-v\|^p_{W^1_p(Q)} + \frac{p-\rho}{p}\left(\frac{\hat{c}_2(r_1)}{\hat{\Upsilon}}\right)^{\frac{p}{p-\rho}} \|u-y\|^{\frac{p}{p-\rho}}_{L_p(Q)}. \tag{32}$$

Подставляя (23), (30) и (32) в (19), получим

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant \sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \left(\hat{\Upsilon} - \frac{\hat{\Upsilon}}{p} - \frac{\rho\hat{\Upsilon}}{p}\right)\|w-v\|^p_{W^1_p(Q)} - \frac{c_6^{\rho q}}{q}\left(\frac{\hat{c}_1(r_1)}{\hat{\Upsilon}}\right)^q \|u-y\|^{\rho q}_{L_p(Q)} -$$

$$-c_6^{\rho}\hat{c}_2(r_1)\|u-y\|^{1+\rho}_{L_p(Q)} - \frac{p-\rho}{p}\left(\frac{\hat{c}_2(r_1)}{\hat{\Upsilon}}\right)^{\frac{p}{p-\rho}} \|u-y\|^{\frac{p}{p-\rho}}_{L_p(Q)} =$$

$$= \frac{\hat{\Upsilon}(p-1-\rho)}{p}\|w-v\|^p_{W^1_p(Q)} - C(r_1; \|u-y\|_{L_p(Q)}). \tag{33}$$

Поскольку $\left(1-\frac{1+\rho}{p}\right)\hat{\Upsilon}\geqslant 0$, $\rho q = \frac{\rho p}{p-1} > 1$, $1+\rho > 1$, $\frac{p}{p-\rho} > 1$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q) \subset L_p(Q)$ компактно, то A_R — оператор с полуограниченной вариацией.

Заметим, что при $\rho = p-1$, что возможно при $p\in(1,2]$, доказательство существенно упрощается, поскольку из **A3)** следует, что $g_\Psi \in L_\infty(Q)$, а функции A_i удовлетворяют оценке

$$|A_i(x,\xi+\delta) - A_i(x,\xi)| \leqslant \hat{g}_\Psi(x)\,|\delta_k|^{p-1},$$

где $|\hat{g}_\Psi(x)| \leqslant |g_\Psi(x)| + 2\Psi(n+1)$, т.е. $\hat{g}_\Psi \in L_\infty(Q)$. Следовательно, в оценках (29) и (32) мы получим

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s2}\,dx \leqslant 2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}\|w-v\|^{p-1}_{L_p(Q)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i w - \partial_i v\|_{L_p(Q)},$$

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s3}\,dx \leqslant 2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}\|u-y\|_{L_p(Q)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\|\partial_i w - \partial_i v\|^{p-1}_{L_p(Q)}.$$

Таким образом,

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \geqslant \sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \left(\hat{\Upsilon} - \frac{\hat{\Upsilon}}{p} - \frac{\hat{\Upsilon}}{q}\right)\|w-v\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)} - \frac{c_6^p}{q}\left(\frac{2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}}{\hat{\Upsilon}}\right)^q \|u-y\|^p_{L_p(Q)} -$$

$$-c_6^{p-1}2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}\|u-y\|^p_{L_p(Q)} - \frac{1}{q}\left(\frac{2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}}{\hat{\Upsilon}}\right)^q \|u-y\|^p_{L_p(Q)} =$$

$$= -\left(\frac{c_6^p+1}{q}\left(\frac{2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}}{\hat{\Upsilon}}\right)^q + c_6^{p-1}2^{2-p}\|\hat{g}_\Psi\|_{L_\infty(Q)}\right)\|u-y\|^p_{L_p(Q)}$$

$$= -C(r_1; \| u - y \|_{L_p(Q)}). \tag{34}$$

Так как $p > 1$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$ компактно, то A_R — оператор с полуограниченной вариацией.

Замечание 1. При $p > 2$ оценка (33) имеет вид

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle \geqslant \left(1 - \frac{2}{p}\right)\widehat{\Upsilon}\| w - v \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} - \frac{1}{q}\left(\frac{c_6 \hat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}}\right)^q \| u - y \|^q_{L_p(Q)} -$$

$$-c_6 \hat{c}_2(r_1) \| u - y \|^2_{L_p(Q)} - \frac{1}{q}\left(\frac{\hat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}}\right)^q \| u - y \|^q_{L_p(Q)} \geqslant$$

$$\geqslant c_9 \frac{\widehat{\Upsilon}(p-2)}{p} \| u - y \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} - C(r_1; \| u - y \|_{L_p(Q)}),$$

где использована оценка $\| R_Q u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} \geqslant c_9 \| u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}$, справедливая в силу невырожденности линейного оператора R_Q.

В литературе, посвященной дифференциальным уравнениям в частных производных, более исследованным является случай, когда $p \geqslant 2$ и справедливо условие локальной липшицевости ($\rho = 1$) или дифференцируемости. При $p \in (1,2)$ необходимо установить $\rho \in (0,1)$ для интегрируемости рассматриваемых функций. Логично назвать это условие условием локальной гёльдеровости аналогично условию локальной липшицевости. Покажем, что из классического определения локальной липшицевости следует оценка (15).

Лемма 4. *Пусть* $p \in [2, \infty)$ *и существуют функция типа Каратеодори* $\widetilde{\Psi}(x,\xi)$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что для п.в.* $x \in Q$ *и любых* $\xi, \delta \in R^{n+1}$, $|\delta| = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |\delta_j| = |\delta_k| < \varepsilon$,

$$| A_i(x, \xi + \delta) - A_i(x,\xi) | \leqslant \widetilde{\Psi}(x,\xi) | \delta_k |, \tag{35}$$

$$\widetilde{\Psi}(x,\xi) \leqslant g_\Psi(x) + \Psi \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} | \xi_j |^{p-2}, \tag{36}$$

где $\Psi > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$, $q' = p/(p-2)$. *Тогда справедлива оценка* (15) *с* $\rho = 1$.

Доказательство. Очевидно, что существуют $n_2 \in N$ и $\delta \in R^{n+1}$ $(|\delta| < \varepsilon)$ такие, что $\xi = \hat{\xi} + n_2\delta$. Тогда

$$\left| A_i\left(x, \hat{\xi}\right) - A_i\left(x, \xi\right) \right| = \left| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \left(A_i\left(x, \hat{\xi} + k\delta\right) - A_i\left(x, \hat{\xi} + (k-1)\delta\right) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \left| A_i\left(x, \hat{\xi} + k\delta\right) - A_i\left(x, \hat{\xi} + (k-1)\delta\right) \right|.$$

Воспользуемся (35):

$$\left| A_i\left(x, \hat{\xi} + k\delta\right) - A_i\left(x, \hat{\xi} + (k-1)\delta\right) \right| \leqslant \widetilde{\psi}\left(x, \hat{\xi} + (k-1)\hat{\delta}\right) | \delta | =$$

$$= \widetilde{\psi}\left(x, \hat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}\left(\xi - \hat{\xi}\right)\right) \frac{| \hat{\xi} - \xi |}{n_2}.$$

То есть

$$\left| A_i\left(x, \hat{\xi}\right) - A_i\left(x, \xi\right) \right| \leqslant \frac{1}{n_2} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n_2} \widetilde{\psi}\left(x, \hat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}(\xi - \hat{\xi})\right) | \hat{\xi} - \xi | .$$

Переходя к пределу при $n_2 \to \infty$, в силу непрерывности функции Ψ получаем, что

$$\left|A_i\left(x,\hat{\xi}\right) - A_i\left(x,\xi\right)\right| \leqslant \int_0^1 \widetilde{\psi}(x,\hat{\xi}+\tau(\xi-\hat{\xi}))d\tau |\xi-\hat{\xi}|. \tag{37}$$

Оценим теперь интеграл по τ из формулы (37). Для этого подставим в (37) оценку (36) и используем известное неравенство $\int\limits_0^1 |a+\tau(b-a)|^\alpha\, d\tau \leqslant |a|^\alpha + |b|^\alpha$ при $\alpha \geqslant 0$. Поскольку мы считаем, что ξ и $\hat{\xi}$ отличаются только в одной координате j, то

$$\int_0^1 \widetilde{\Psi}(x,\hat{\xi}+\tau(\xi-\hat{\xi}))d\tau \leqslant \int_0^1 \left(\Psi \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\hat{\xi}_k + \tau(\xi_k - \hat{\xi}_k)|^{p-2} + g_\Psi(x)\right)d\tau =$$

$$= \Psi \int_0^1 |\hat{\xi}_j + \tau(\xi_j - \hat{\xi}_j)|^{p-2} d\tau + \Psi \sum_{k\neq j} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi \left|\hat{\xi}_j\right|^{p-2} + \Psi \sum_{0\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x).$$

Подставив это выражение в (37), получаем оценку (15).

Определение 8. Оператор $A : X \to X^*$ называется *коэрцитивным*, если существует $u_0 \in X$ такая, что

$$\|u\|_X^{-1} \langle Au, u-u_0\rangle \to \infty \text{ при } \|u\|_X \to \infty. \tag{38}$$

Лемма 5. *Пусть справедливы условия* **A0)–A2)**. *Тогда дифференциально–разностный оператор* $A_R : \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ *коэрцитивен.*

Доказательство. Пусть $w = R_Q u,\ u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$, причем в силу невырожденности оператора R_Q существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$, см. лемму 1. По определению оператора A_R и в силу формулы (13)

$$\langle A_R u, u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\partial_i u dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_i(x,w,\nabla w) R_Q^{-1} \partial_i w dx =$$

$$= \sum_s \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} P_s A_i(x,w,\nabla w) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\, dx =$$

$$= \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (U_s P_s \left(A_i(x,w,\nabla w) - A_i(x,w,\nabla 0)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w-0)) dx +$$

$$+ \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(U_s P_s A_i(x,w,\nabla 0), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\right) dx +$$

$$+ \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s A_0(x,w,\nabla w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w\right) dx = \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}) dx, \tag{39}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $R^{N(s)}$. Поскольку нас интересует поведение данного интеграла при $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} \to \infty$, то, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x) \neq 0$ для почти всех $x \in Q$, т.е. $w(x) \neq 0$ для почти всех $x \in Q$.

Введем матрицу порядка $N(s) \times (n+1)$

$$\zeta = (U_s P_s w, U_s P_s \partial_1 w \ldots, U_s P_s \partial_n w),$$

а также матрицу η такую, что $\eta_{\cdot 0} = \zeta_{\cdot 0}$ и $\eta_{\cdot i} = 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$.

Первую сумму правой части (22) оценим с помощью условия сильной эллиптичности (16):

$$I_{s1} = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant$$

$$\geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta_{li}|^p = \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|\partial_i w(x + h_{sl})\right|^p.$$

То есть

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1} dx \geqslant \hat{\Upsilon} \| w \|^p_{\overset{0}{W}{}_p^1(Q)} = \hat{\Upsilon} \| R_Q u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} \geqslant c_9 \hat{\Upsilon} \| u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}, \tag{40}$$

где $\| R_Q u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} \geqslant c_9 \| u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}$ в силу невырожденности линейного оператора R_Q.

Рассмотрим вторую сумму правой части (39) с учетом оценки роста (15) и ограниченности оператора R_Q:

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} | I_{s2} | dx \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_Q \left|A_i(x, w, \nabla 0)\partial_i u\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_Q \left(g_0(x) + c_1 | w(x) |^{p'-1}\right)\left|\partial_i u(x)\right| dx \leqslant \left(\| g_0 \|_{L_q(Q)} + c_1 \| w \|^{p'-1}_{L_p(Q)}\right) \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \| g_0 \|_{L_q(Q)} \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} + c_1 c_6^{p'-1} \| u \|^{p'-1}_{L_p(Q)} \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}. \tag{41}$$

Аналогично для третего слагаемого правой части (39) имеем

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} | I_{s3} | dx \leqslant \int_Q \left|A_0(x, w, \nabla w) u\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_Q \left(g_0(x) + c_1 | w(x) |^{p'-1} + c_1 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} | \partial_j w(x) |^{p'-1}\right)\left|u(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| g_0 \|_{L_q(Q)} + c_1 \| w \|^{p'-1}_{L_p(Q)} + c_1 \| w \|^{p'-1}_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}\right) \| u \|_{L_p(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \| g_0 \|_{L_q(Q)} \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} + c_1 c_6^{p'-1} \| u \|^{p'}_{L_p(Q)} + c_1 c_6^{p'-1} \| u \|^{p'-1}_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} \| u \|_{L_p(Q)}. \tag{42}$$

Таким образом, в правой части (39) мы имеем три слагаемых. Первое слагаемое строго положительно и имеет степень роста $p > 1$, см. (40). Второе и третье слагаемые имеют степень роста $p' < p$, см. (41) и (42). Следовательно, $\langle A_R u, u \rangle \geqslant c_{10} \| u \|^p_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)} - c_{11}$ при достаточно больших значениях $\| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)}$, где $c_{10}, c_{11} > 0$. Коэрцитивность доказана.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* **A0)–A3)**. *Тогда в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$ *для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует непустое, ограниченное, слабозамкнутое множество обобщенных решений задачи* (8)*,* (9).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что A_R — деминепрерывный, см. лемму 2, оператор с полуограниченной вариацией, см. лемму 3, причем A_R коэрцитивен, см. лемму 5. Следовательно, обобщенной решение задачи (8), (9) существует, см. теорему 3.1 из [15, Гл. 2, §3], множество решений ограниченно в силу коэрцитивности A_R и слабо замкнуто, см. следствие 4.1. из [16, Гл. 1, §4].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1–3 *из разд.* 1, *а соответствующие матрицы* R_s *и* R_{s0} *невырождены, а также справедливы условия* **A1)–A3)** *из разд.* 2. *Тогда в пространстве* $W^1_{p,\gamma}(Q)$ *для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует непустое, ограниченное, слабозамкнутое множество обобщенных решений задачи* (2), (1).

Доказательство. Из условий **A0)–A3)** из разд. 2 следует, что существует непустое, ограниченное, слабозамкнутое множество обобщенных решений задачи (8), (9), см. теорему 3. При этом, если $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ — решение (8), (9), то в силу условий 1–3 из разд. 1 и невырожденности матриц R_s и R_{s0} $w = R_Q u \in W^1_{p,\gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи (2), (1), см. теорему 2. Поскольку линейный оператор R_Q непрерывен и ограничен, то множество обобщенных решений задачи (2), (1) непусто, ограничено и слабозамкнуто в пространстве $W^1_{p,\gamma}(Q)$.

Пример 1. Пусть $p \in (1,\infty)$, $Q = (0,2)\times(0,1)$, $f \in L_q(Q)$, $1/p + 1/q = 1$. Рассмотрим задачу с краевыми условиями Бицадзе-Самарского:

$$Aw(x) = f \qquad (x \in Q), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &w(x_1,0) = w(x_1,1) = 0 \quad (0\leqslant x_1 \leqslant 2),\\ &w(0,x_2) = \gamma_1 w(1,x_2) \quad (0\leqslant x_2\leqslant 1),\\ &w(2,x_2) = \gamma_{-1} w(1,x_2) \quad (0\leqslant x_2 \leqslant 1). \end{aligned} \tag{44}$$

Пусть $\gamma_1\gamma_{-1} \ne 1$, $W^1_{p,\gamma}(Q)$ содержит функции из $W^1_p(Q)$, удовлетворяющие краевым условиям (44). Легко видно, что разностный оператор

$$Ru(x) = u(x_1,x_2) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_{-1}u(x_1 - 1, x_2)$$

таков, что $w = R_Q u \in W^1_{p,\gamma}(Q)$ для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$. Действие оператора определяется матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Если $\gamma_1\gamma_{-1} \ne 1$, то R_1 невырожденна. В то же время $R_{10} = (1)$ также невырождена. Обратной к R_1 является матрица $R_1^{-1} = \dfrac{1}{1-\gamma_1\gamma_{-1}}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\hat{\gamma}_0 := 1/(1-\gamma_1\gamma_{-1}), \hat{\gamma}_k = -\gamma_k/(1-\gamma_1\gamma_{-1})$.

Сформулируем условия, достаточные для существования обобщенного решения $w \in W^1_{p,\gamma}(Q)$ задачи (43), (44) для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$:

1) условие роста: для п.в. $x \in [0,2]\times[0,1]$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$|A_i(x,\xi)| \leqslant g_0(x) + c_1|\xi_0|^{p'-1} + c_1\sum_{j=1,2}|\xi_j|^{p-1}, \qquad i = 1,2,$$

$$|A_0(x,\xi)| \leqslant g_0(x) + c_1 \sum_{0\leqslant j\leqslant 2}|\xi_j|^{p'-1},$$

где $c_1 > 0$, $p' \in (1,p)$ и $g_0 \in L_q(Q)$;

2) условие сильной эллиптичности: для п.в. $x \in [0,1]\times[0,1]$ и всех $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ таких, что $\eta \ne \zeta$ и $\eta_{l0} = \zeta_{l0}$, для некоторого $\hat{\Upsilon} > 0$

$$\sum_{l,m=1,2}\sum_{i=1,2}\hat{\gamma}_{m-l}\big(A_i(x_1+l-1,x_2,\zeta_{l\cdot}) - A_i(x_1+l-1,x_2,\eta_{l\cdot})\big)(\zeta_{mi}-\eta_{mi}) \geqslant$$

$$\geqslant \hat{\Upsilon}\sum_{l,i=1,2}|\zeta_{li}-\eta_{li}|^p;$$

3) условие локальной липшицевости/гёльдеровости функций A_i $(i=1,2)$ по ξ_0 и функции A_0 по ξ_j $(j=0,1,2)$: существуют ρ ($\rho=1$ при $p\in[2,\infty)$, $\rho\in(1-1/p,p-1]$ при $p\in(1,2)$) и $\varepsilon>0$ такие, что для п.в. $x\in[0,2]\times[0,1]$ и любых $\xi,\delta\in R^3$, $|\delta|=\sum_{0\leqslant j\leqslant n}|\delta_j|=|\delta_k|<\varepsilon$,

$$|A_i(x,\xi_0+\delta_0,\xi_1,\xi_2)-A_i(x,\xi)|\leqslant\left(\Psi|\xi_0+\delta_0|^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant 2}|\xi_j|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x)\right)|\delta_0|^\rho,$$

$$|A_0(x,\xi+\delta)-A_0(x,\xi)|\leqslant\left(\Psi|\xi_k+\delta_k|^{p-1-\rho}+\Psi\sum_{0\leqslant j\leqslant 2}|\xi_j|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x)\right)|\delta_k|^\rho,$$

где $\Psi>0$, $g_\Psi\in L_{q'}(Q)$, $q'=p/(p-1-\rho)$, $i=1,2$, $k=0,1,2$.

Пример 2. Пусть $p\in(1,\infty)$, $n\geqslant 3$, $Q=(0,3)\times G$, где $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей ∂G класса C^∞, $f\in W_q^{-1}(Q)$, $1/p+1/q=1$. Пусть $x'=(x_2,\ldots,x_n)$. Рассмотрим задачу с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского:

$$Aw(x)=f \qquad (x\in Q), \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &w(x_1,x')=w(x_1,x')=0 && (0\leqslant x_1\leqslant 3, x'\in\partial G),\\ &w(0,x')=-w(1,x') && (x'\in G),\\ &w(3,x')=0 && (x'\in G). \end{aligned} \tag{46}$$

$W_{p,\gamma}^1(Q)$ содержит функции из $W_p^1(Q)$, удовлетворяющие краевым условиям (46). Покажем, что разностный оператор

$$Ru(x)=u(x_1,x')-u(x_1+1,x')+u(x_1+2,x')$$

таков, что $w=R_Qu\in W_{p,\gamma}^1(Q)$ для любого $u\in W_p^1(Q)$:

$$w(0,x')=R_Qu(0,x')=u(0,x')-u(1,x')+u(2,x')=-u(1,x')+u(2,x'); \tag{47}$$

$$w(1,x')=R_Qu(1,x')=u(1,x')-u(2,x')+u(3,x')=u(1,x')-u(2,x'); \tag{48}$$

$$w(2,x')=R_Qu(2,x')=u(2,x')-u(3,x')=u(2,x');\quad w(3,x')=u(3,x')=0.$$

То есть, $w(0,x')=-w(1,x')$, см. (47), (48), $w(x_1,x')=R_Qu(x_1,x')=0$, w удовлетворяет краевым условиям (46). Действие оператора R_Q определяется матрицей

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ причем } R_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

R_1 и R_{10} невырожденны. Заметим также, что обратный оператор R_Q^{-1} в рассматриваемом примере является разностным, поскольку его действие определяется тёплицевой матрицей R_1^{-1}. В общем случае обратный к разностному оператору не обязан быть разностным.

Для существования обобщенного решения $w \in W^1_{p,\gamma}(Q)$ задачи (45), (46) для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$ достаточно выполнения условий **A1), A3)** и условия сильной эллиптичности для дифференциально–разностного оператора, для нашего конкретного разностного оператора оценка (16) имеет вид

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant 3}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x_1+l-1,x',\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x_1+l-1,x',\eta_{l\cdot}\right)\right)(\zeta_{li}-\eta_{li})+$$

$$+\sum_{1\leqslant l\leqslant 2}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x_1+l-1,x',\zeta_{l\cdot}\right)-A_i\left(x_1+l-1,x',\eta_{l\cdot}\right)\right)(\zeta_{l+1,i}-\eta_{l+1,i})\geqslant$$

$$\geqslant\hat{\Upsilon}\sum_{1\leqslant l\leqslant 3}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\,\zeta_{li}-\eta_{li}\quad \text{для п.в. } x_1\in[0,1], x'\in\overline{G}.$$

Заметим, что для разрешимости уравнения (45) с краевыми условиями Дирихле достаточно выполнения условий **A1), A3)** и условия сильной эллиптичности для дифференциального оператора:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left(A_i\left(x,\xi\right)-A_i\left(x,\mu\right)\right)(\xi_i-\mu_i)\geqslant\hat{\Upsilon}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\,\xi_i-\mu_i\,|^p\quad \text{для п.в. } x\in[0,1]\times\overline{G}.$$

В условии сильной эллиптичности дифференциально–разностного оператора обязательно появляются слагаемые, соответствующие связям значений рассматриваемых функций в точках различных подобластей одного класса разбиения области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 1980. Т. 16. № 1. С. 1925–1935.
3. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с параметром // Матем. сборник. 1983. Т. 121. № 6. С.201–210.
4. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сборник. 1986. Т. 129. № 2. С. 279–302.
5. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
6. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // СМФН, РУДН. 2007. Т. 26. С. 3–132.
7. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II // СМФН, РУДН. 2009. Т. 33. С. 3–179.
8. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 60–72.
9. *Солонуха О. В.* Обобщенные решения квазилинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2085–2097.
10. *Солонуха О. В.* О существовании решений нелинейных параболических вариационных неравенств с односторонними ограничениями // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 3. С. 460–476.
11. *Солонуха О. В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально–разностных уравнений // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 226–244.
12. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional–differential equations // Discrete and Continuous Dynamic Systems, Seria S. 2016. V. 9. N 3. P. 847–868.

13. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
14. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., перераб. и доп. / Под ред. О. О. Олейник. М.: Наука. 1988.
15. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники: ВИНИТИ. Современные проблемы математики, 1976. № 9. С. 5–130.
16. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. Киев: Наук. думка, 1988.