

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.63

ЯВНЫЕ ЧИСЛЕННО РЕАЛИЗУЕМЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ
ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА© 2024 г. А. С. Демидов^{1,*}, А. С. Самохин²¹119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия;²117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65, Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Россия

*e-mail: demidov.alexandre@gmail.com

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.

Переработанный вариант 09.09.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Представлены явные численно реализуемые формулы для операторов Пуанкаре–Стеклова, таких как операторы Дирихле–Неймана, Дирихле–Робена, Робена1–Робена2, Гринберга–Майергойза, относящихся к двумерному уравнению Лапласа. Эти формулы базируются на лемме об однолистном изометрическом отображении замкнутой аналитической кривой на окружность. Численные результаты для областей с весьма сложной геометрией получены для нескольких тестовых гармонических функций для операторов Дирихле–Неймана и Дирихле–Робена. Библ. 9. Фиг. 9.

Ключевые слова: операторы Пуанкаре–Стеклова, однолистное изометрическое отображение аналитической кривой, явные численно реализуемые формулы.

DOI: 10.31857/S0044466924020064, EDN: YJZOIN

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея альтернирующего метода Шварца [1] получила развитие в так называемых методах декомпозиции “сложной” области $\Omega = \cup_{k \geq 1}^m \omega_k$ на “простые” подобласти при построении решения $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ краевой задачи в исходной сложной области. Это позволяет (см., например, [2]) эффективно использовать распараллеливание численных расчетов. А именно, искомое решение $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в сложной области может быть найдено в результате “склейки” параллельно построенных решений $u_k : \omega_k \rightarrow \mathbb{R}$, если для смежных областей ω_j и ω_k известно соответствие между граничными условиями для u_j и u_k . В некоторых задачах (см., например, [3], [4]) эти условия имеют вид

$$(1 - \lambda)u_k - (1 + \lambda)u_j = 2f, \quad |\lambda| \leq 1, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \nu} = \frac{\partial u_j}{\partial \nu}, \quad (1)$$

где ν — нормаль к границе смежных областей ω_k и ω_j . Но особую значимость имеют граничные операторы Робена¹

$$\mathcal{R}_k : u|_{\omega_k} \mapsto \left(\alpha_k u_k + \beta_k \frac{\partial u_k}{\partial \nu} \right) |_{\partial \omega_k}, \quad \alpha_k + \beta_k \neq 0, \quad (2)$$

в которых ν — внешняя нормаль к границе соответствующей «простой» области ω_k .

Впрочем, и для одной конкретной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ большой интерес (см., например, [5], [6]) представляет соответствие между двумя операторами Робена, в частности, между операторами Дирихле $\mathcal{D} : u|_{\Omega} \mapsto u|_{\partial \Omega}$ и Неймана $\mathcal{N} : u|_{\Omega} \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial \Omega}$, чьи альтернативные композиции $\mathcal{DN} : u|_{\partial \Omega} \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial \Omega}$

¹Граничные операторы вида $u + b \frac{\partial u}{\partial \nu}$ впервые появились у Исаака Ньютона (1642–1727) и Георгия Рихмана (1711–1753) в качестве

эмпирической зависимости процесса теплообмена. Но недаром Французская академия наук дважды удостоивала Виктора Робена (1855–1897) премией Francœur (1893 и 1897), а также премией Ponsel (1895). Ведь Робен, рассматривая проблему распределения плотности поверхностного тока в проводнике, свел ее к интегральному уравнению (задолго до появления теории интегральных уравнений) и в случае выпуклого проводника нашел решение этого уравнения методом последовательных приближений.

и $\mathcal{ND} : \frac{\partial u}{\partial \nu} \big|_{\partial \Omega} \mapsto u \big|_{\partial \Omega}$ называются, соответственно, операторами Дирихле–Неймана и Неймана–Дирихле.

Соответствия граничных операторов типа (1) или композиции операторов Робена стали называть, следуя [7], операторами Пуанкаре–Стеклова, поскольку в работах [8] и [9] такого рода операторы играли важную роль при построении решений весьма общих краевых задач для уравнений математической физики 19 века.

В настоящей работе строятся и численно реализуются формулы для операторов Пуанкаре–Стеклова, относящихся к решению уравнения Лапласа в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с C^1 -границей Γ длины 2π . Если область Ω_ε отличается от Ω только тем, что ее граница $\Gamma_\varepsilon = \partial \Omega_\varepsilon$ аналитична и в хаусдорфовой C^1 -метрике отличается от Γ на величину порядка $\varepsilon > 0$, то оператор Пуанкаре–Стеклова для Ω_ε и для Ω будет отличаться в метрике C^1 на тот же порядок. Поэтому в дальнейшем будем считать, что кривая Γ аналитична. Это позволяет воспользоваться приведенной в разд. 2 леммой, которая играет ключевую роль при построении формул для операторов Пуанкаре–Стеклова. Дело в том, что в этой лемме явно строится однолистное отображение

$$z : V_{\mathbb{T}} \ni \zeta = \rho e^{i\theta} \mapsto z(\zeta) \in V_{\Gamma}, \stackrel{\text{def}}{\left| \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \right|} \equiv 1 \text{ для } \zeta \in \mathbb{T} \quad (3)$$

окрестности $V_{\mathbb{T}}$ единичной окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi$ на окрестность V_{Γ} кривой Γ , которое изометрично преобразует $\mathbb{T}$ в Γ ($\mathbb{T}$ и Γ изометричны, а их окрестности связаны однолистным отображением). Поэтому при таком отображении единичная нормаль к окружности $\mathbb{T}$ переходит в *единичную* (!) нормаль к Γ , в результате чего нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu} \big|_{\Gamma}$ совпадает с нормальной производной $\frac{\partial U(\rho e^{i\theta})}{\partial \rho} \big|_{\rho=1}$ функции $U(\zeta) = u(z(\zeta))$.

2. ИЗОМЕТРИЧНОЕ ОДНОЛИСТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ НА ОКРУЖНОСТЬ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область с аналитической границей Γ длины 2π , а $s \in \mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi$ — натуральный параметр на Γ , т.е. s — длина дуги $\sphericalangle P_0 P_s$ кривой Γ , отсчитываемой в положительном направлении от некоторой фиксированной точки P_0 с декартовыми координатами $(x(0), y(0))$ до точки P_s с координатами $(x(s), y(s))$. Без ограничения общности можно считать, что $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Тем самым, применив простейшие геометрические построения, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= -\sin N(s), \quad x(0) = 1; \\ \dot{y}(s) &= \cos N(s), \quad y(0) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $N(s)$ — радианная мера угла между осью x и внешней нормалью ν к Γ в точке $P_s \in \Gamma$. Ввиду (4), замкнутость кривой Γ влечет условие

$$\int_0^{2\pi} \sin N(s) ds = \int_0^{2\pi} \cos N(s) ds = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} e^{iN(\theta)} d\theta = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} e^{i[N(\theta)-\theta]} d\theta = 0. \quad (5)$$

Поскольку длина кривой Γ задана, эта кривая полностью определяется заданием угловой функции $s \mapsto N(s)$ и, соответственно, 2π -периодической функцией

$$Q : \mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi \ni s \mapsto Q(s) \stackrel{\text{def}}{=} N(s) - s. \quad (6)$$

Обозначим через Q^σ комплексно-значное аналитическое продолжение вещественной аналитической функции Q в такую окрестность V_{Γ} кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \ni z = x + iy$, которая содержит все точки, отстоящие от Γ на расстоянии $\sigma > 0$. Как известно (см., например, [10]), коэффициенты L_k и M_k в фурье-представлении

$$Q(s) = \sum_{k \geq 0} (L_k \cos ks + M_k \sin ks), \quad (7)$$

$$|L_k| \leq C e^{-k\sigma_1}, \quad |M_k| \leq C e^{-k\sigma_1},$$

с константой $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma, \Gamma) > 0$ и константой C , мажорирующей модуль функции Q^σ .

Лемма 1². Справедливы следующие три утверждения.

1. Существует такая окрестность $V_{\mathbb{T}} \ni \zeta = \rho e^{i\theta}$ единичной окружности $\mathbb{T} = \{\rho = 1, \theta \in \mathbb{R} / 2\pi\}$, в которой функции A и B , заданные формулами

$$A(\rho, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{\rho^k - \rho^{-k}}{2} \{M_k \cos k\theta - L_k \sin k\theta\},$$

$$B(\rho, \theta) = \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k + \rho^{-k}}{2} \{L_k \cos k\theta + M_k \sin k\theta\},$$

гармонически сопряжены, $A(1, \theta) = 0$, а $B(1, \theta) \stackrel{(6),(6)(7)}{=} Q(\theta)$.

2. Определено отображение

$$z : V_{\mathbb{T}} \ni \zeta = \rho e^{i\theta} \mapsto z(\zeta) = x(\rho, \theta) + iy(\rho, \theta) \in V_{\Gamma}, \quad (8)$$

заданное интегралом

$$z(\zeta) = 1 + \int_1^{\zeta} e^{A+iB} d\zeta, \quad \zeta \in V_{\mathbb{T}} \Leftrightarrow A + iB = \ln \frac{dz}{d\zeta}, \quad (9)$$

который не зависит, в силу (5), от пути интегрирования.

3. Отображение (8) является однолиственным и оно изометрично переводит окружность $\mathbb{T}$ на кривую Γ , т.е. справедливо упомянутое в (3) тождество

$$\left| \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} \right| \equiv 1 \text{ для } \zeta \in \mathbb{T}.$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИРИХЛЕ–РОБЕНА И РОБЕНА1–РОБЕНА2

Пусть u — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т.е. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в Ω , $u(P_s) = F(s)$, где функция $F \in C^1(\mathbb{T})$ задана рядом Фурье

$$F : \mathbb{T} \ni s \mapsto \sum_{k \geq 0} (a_k \cos ks + b_k \sin ks). \quad (10)$$

Возьмем кривую $\gamma_r = z(\mathcal{C}_r) \subset V_{\Gamma}$, где $\mathcal{C}_r = \{\zeta \mid |\zeta| = r < 1\}$. Обозначим через g след на $\gamma = \gamma_r$ решения u исходной задачи Дирихле. Положим $f : \mathbb{T} \ni \theta \mapsto f(\theta) = g(z) \big|_{z=z(re^{i\theta}) \in \gamma}$.

Ряд Фурье этой периодической функции имеет вид

$$f : \mathbb{T} \ni \theta \mapsto \sum_{k \geq 0} (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta). \quad (11)$$

Учитывая (10) и (11), положим $p_0 = c_0$, а для $k \geq 1$ имеем

$$p_k = a_k - \frac{c_k r^k - a_k r^{2k}}{1 - r^{2k}}, \quad q_k = b_k - \frac{d_k r^k - b_k r^{2k}}{1 - r^{2k}}, \quad \varphi_k = \frac{c_k - a_k r^k}{1 - r^{2k}}, \quad \psi_k = \frac{d_k - b_k r^k}{1 - r^{2k}}.$$

Тогда гармоническая в кольце $V_{\mathbb{T}} = \{r < \rho < 1; \theta \in \mathbb{T}\}$ функция³

² Короткое доказательство, предпочтительнее изначальных [11] и [12], приведено в сноске 4 статьи [13].

³ Функция U , заданная рядом (12), зависит от параметра r , как и коэффициенты c_k и d_k в формуле (11). Однако эта зависимость может сказаться лишь на скорости сходимости ряда в формуле (12), но никоим образом не на представленных ниже результатах и их доказательствах.

$$\zeta = \rho e^{i\theta} \mapsto U(\rho, \theta) = p_0 + \sum_{k \geq 1} \left\{ \rho^k [p_k \cos k\theta + q_k \sin k\theta] + \left(\frac{r}{\rho} \right)^k [\varphi_k \cos k\theta + \psi_k \sin k\theta] \right\} \quad (12)$$

удовлетворяет таким граничным условиям: $U(1, \theta) = F(\theta)$, $U(r, \theta) = f(\theta)$.

Теорема 1. Для оператора Дирихле–Неймана $\mathcal{DN}(u|_\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma$ имеем

$$\mathcal{DN}(u|_{s \in \Gamma}) \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}, \quad (13)$$

а для оператора Дирихле–Робена справедлива формула

$$\mathcal{DR}(u|_{s \in \Gamma}) = (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}) \Big|_{P_s \in \Gamma} \stackrel{(12), (13)}{=} \alpha U(1, s) + \beta \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}. \quad (14)$$

Остается представить численно реализуемые формулы для $u|_\gamma$, где u — решение исходной задачи Дирихле. Известно (см. [14] и [15]), что

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} \mu(t) K(x(t) - x, y(t) - y) dt, \quad \text{где } K(\xi(t), \eta(t)) = \frac{\eta'(t)\xi(t) - \eta(t)\xi'(t)}{\xi^2(t) + \eta^2(t)}, \quad (15)$$

т.е. $K(\xi(t), \eta(t)) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)}$, а μ — решение интегрального уравнения

$$\mu(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(t) \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)} dt = \frac{1}{\pi} F(\tau). \quad (16)$$

Аппроксимируя интеграл в (16) суммой (подробности см. в [16]) и полагая последовательно $\tau = t_1, \dots, t_n$, получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой находится приближение к плотности μ и, соответственно, приближение исходной задачи Дирихле.

Замечание 1. Ядро K интегрального оператора (15) имеет особенность $0/0$ там, где $\xi = x(t) - x$ и $\eta = y(t) - y$ обращаются в ноль. При численном счете эта особенность устраняется следующим образом. Поскольку

$$x(t) \approx x(\tau) + x'(\tau)(t - \tau) + \frac{1}{2} x''(\tau)(t - \tau)^2,$$

$$y(t) \approx y(\tau) + y'(\tau)(t - \tau) + \frac{1}{2} y''(\tau)(t - \tau)^2,$$

а

$$x'(t) \approx x'(\tau) + x''(\tau)(t - \tau), \quad y'(t) \approx y'(\tau) + y''(\tau)(t - \tau),$$

то

$$\begin{aligned} K &= \frac{y'(t)[x(t) - x(\tau)] - x'(t)[y(t) - y(\tau)]}{[x(t) - x(\tau)]^2 + [y(t) - y(\tau)]^2} \approx \\ &\approx \frac{[y'(\tau) + y''(\tau)(t - \tau)][x'(\tau)(t - \tau) + \frac{1}{2} x''(\tau)(t - \tau)^2] - [x'(\tau) + x''(\tau)(t - \tau)][y'(\tau)(t - \tau) + \frac{1}{2} y''(\tau)(t - \tau)^2]}{[x'(\tau)(t - \tau)]^2 + [y'(\tau)(t - \tau)]^2} = \\ &= \frac{y''(\tau)x'(\tau) - x''(\tau)y'(\tau)}{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} - \frac{1}{2} \frac{x'(\tau)y''(\tau) - y'(\tau)x''(\tau)}{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} = \frac{1}{2} \frac{x'(\tau)y''(\tau) - y'(\tau)x''(\tau)}{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2}. \end{aligned}$$

Поэтому, полагая $x_k = k\tau$ и $y_k = k\tau$ для $k = -1, 0, 1$, получаем вблизи особой точки $t - \tau = 0$ такую аппроксимацию

$$K \approx \frac{1}{h} \frac{(y_1 - 2y_0 + y_{-1})(x_1 - x_{-1}) - (x_1 - 2x_0 + x_{-1})(y_1 - y_{-1})}{(x_1 - x_{-1})^2 + (y_1 - y_{-1})^2}. \quad (17)$$

Замечание 2. Численная реализация оператора Робена1–Робена2, т.е. оператора

$$\left(\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\Gamma} \mapsto \left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad |\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0,$$

сводится к рассмотренной выше задаче Дирихле–Робена2 с использованием построения (см., например, [17]) решения такой γ -задачи Робена1–Дирихле $(\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}) \Big|_{\Gamma} \mapsto u \Big|_{\gamma}$.

Замечание 3. Еще один частный случай оператора Пуанкаре–Стеклова — это оператор Гринберга–Майергойза $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$, который задается при $-1 \leq \lambda < 1$ условиями (1), т.е. так:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)u(P_s^-) - (1 + \lambda)u(P_s^+) &= 2F(P_s), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(P_s^-) &= \frac{\partial u}{\partial \nu}(P_s^+). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь значение в точке P_s^+ (соответственно в P_s^-) означает предельное значение в точке $P_s \in \Gamma$ вдоль нормали ν с внешней (соответственно внутренней) стороны Γ . Явные формулы для следов $u \Big|_{\gamma}$ и $u \Big|_{\Gamma}$ решения задачи (18) обозначены выше в случае задачи Дирихле, т.е. для $\lambda = -1$, а при $|\lambda| < 1$ такого же типа формулы через потенциалы с плотностью, удовлетворяющей интегральному уравнению II рода, даны в [4]. Это позволяет получить (аналогично теореме 1) значение $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(F)$.

Замечание 4. Рассмотренный выше вопрос о построении явных численно реализуемых формул для операторов Пуанкаре–Стеклова, относящихся к уравнению Лапласа в односвязной области Ω , позволяет, ввиду [13], получить явные численно реализуемые формулы для операторов Пуанкаре–Стеклова в случае уравнений

$$\operatorname{div}(\alpha(w)\nabla w), \quad \operatorname{div}(\beta\nabla w) = 0,$$

в том числе для некоторых многомерных областей.

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ЕЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Представленные далее численные результаты относятся к операторам Дирихле–Неймана и Дирихле–Робена для уравнения Лапласа в плоской односвязной области Ω с весьма сложной C^1 -границей Γ . При численном моделировании брались различные тестовые гармонические функции u . Приводимые ниже результаты получены для $u(x, y) = x + y$, $u(x, y) = \sin xy$ и $u(x, y) = x^2 - y^2$.

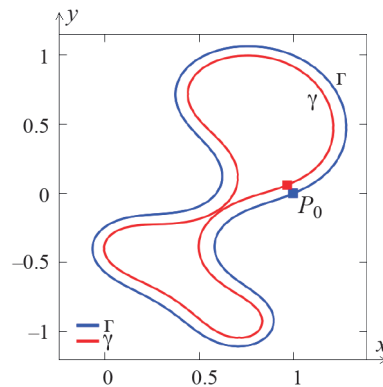
Были рассмотрены два способа задания границы Γ .

Способ 1. Этот способ предполагает задание функции (6) конечным рядом Фурье (7) с заранее фиксированным не слишком большим числом членов ряда. В этом случае возможно подобрать такие коэффициенты ряда, при которых выполнено с большой точностью условие замкнутости кривой (5). Однако таким способом затруднительно получить хорошее приближение к априори заданному, возможно весьма сложному виду кривой Γ .

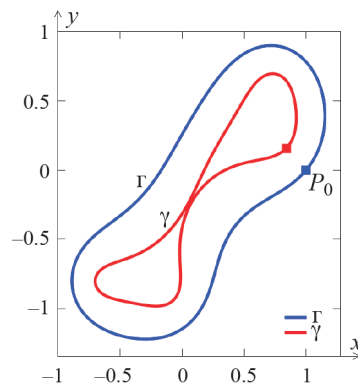
Ниже рассмотрено 2 примера для гармонической функции $x + y$. В первом примере в качестве такого ряда Фурье была взята следующая сумма. Кривая задана рядом (7): $L_1 = 0, M_1 = 0, L_2 = -0.663, M_2 = -0.793, L_3 = 0.4, M_3 = 0.6, L_4 = -0.6, M_4 = 0.2, L_5 = 0.2, M_5 = 0.2$, $r = 0.93$. Для представления ответа берется 30 членов ряда Фурье. Количество точек разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ при дискретизации $N = 700$. Соответствующие кривые Γ и γ изображены на фиг. 1.

Во втором примере кривая задавалась рядом: $L_1 = 0, M_1 = 0, L_2 = -0.75, M_2 = -0.11, L_3 = 0, M_3 = 0, L_4 = -0.1, M_4 = 0.1, L_5 = 0.1, M_5 = 0.1$, $r = 0.75$. Для представления ответа берется 25 членов ряда Фурье. Количество точек разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ при дискретизации $N = 2000$. Для этого случая кривые Γ и γ представлены на фиг. 2.

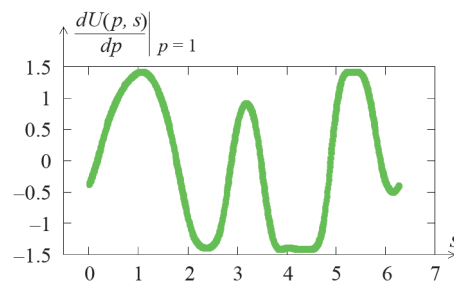
На фиг. 3, 4 изображен ответ — полученные численно производные по нормали на Γ для примеров 1 и 2. Абсолютная ошибка в норме $C[0, 2\pi]$ составляет $8 \cdot 10^{-4}$, в приведенном на фиг. масштабе численно полученный результат совпадает с известным аналитическим решением.



Фиг. 1. Пример 1 двух кривых Γ и γ в случае конечного ряда Фурье. На кривой γ точкой отмечено значение $z(\zeta)$ при $\zeta = r$, полученное интегрированием (9) от P_0 до r .



Фиг. 2. Пример 2 двух кривых Γ и γ в случае конечного ряда Фурье. На кривой γ точкой отмечено значение $z(\zeta)$ при $\zeta = r$, полученное интегрированием (9) от P_0 до r .



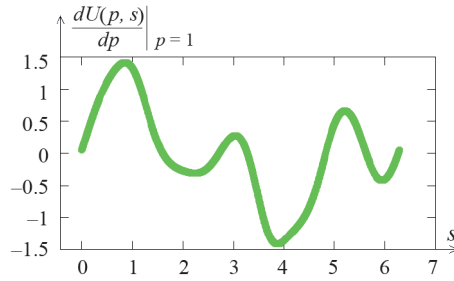
Фиг. 3. Ответ — производная по нормали ν на границе Γ из примера 1.

Более гибким в отношении задания того или иного вида кривой оказался

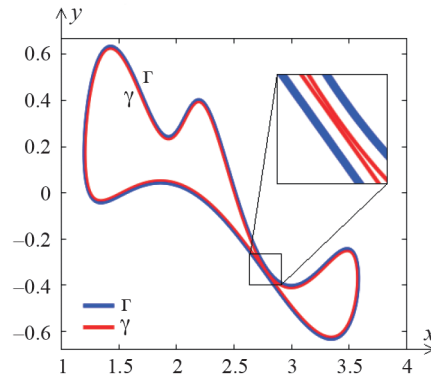
Способ 2. Этот способ основывается на параметрическом задании декартовых координат точки кривой Γ в виде $(x(t), y(t)) = \Lambda(a(t), b(t))$. Эти координаты лишь множителем

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2} dt}$$

отличаются от параметризации



Фиг. 4. Ответ — производная по нормали ν на границе Γ из примера 2.



Фиг. 5. Пример 3 двух кривых Γ и γ для $r = 0.99$ в случае аналитически заданной области. Количество точек разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ при дискретизации $N = 8000$. В разложении Γ в ряд Фурье используются первые 150 членов.

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto (a(t), b(t)).$$

Ниже в качестве 3-го примера взята параметризация, в которой

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos t - 0.6 \cos 2t - 3 \sin t + 0.2 \sin 2t, \\ b(t) &= \sin t + 0.4 \sin 4t. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответствующая кривая Γ , представленная на фиг. 5, специально была выбрана так, чтобы тестирование численной реализации оператора Дирихле–Неймана происходило в достаточно сложной области Ω , имеющей узкий перешеек или аппендикс.

Хотя второй способ достаточно гибок при задании кривой Γ , однако он связан с вычислительной сложностью представления зависимости от натурального параметра s функции $Q : s \mapsto Q(s) = N(s) - s$. Дело в том, что для этого предварительно требуется построение отображения $s \mapsto t(s)$. Оно возможно в силу формул

$$x(s(t)) = \Lambda a(t), \quad y(s(t)) = \Lambda b(t) \quad \text{и} \quad x'(s)|_{s=s(t)} \dot{s}(t) = \Lambda \dot{a}(t), \quad y'(s)|_{s=s(t)} \dot{s}(t) = \Lambda \dot{b}(t). \quad (20)$$

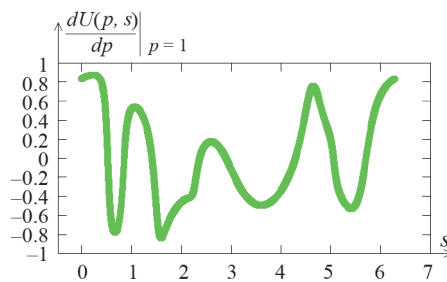
Здесь $x'(s) = -\sin N(s)$, $y'(s) = \cos N(s)$. Тем самым, $\operatorname{tg} N(s)|_{s=s(t)} = \sigma(t)$, где $\sigma(t) = -\frac{\dot{a}(t)}{\dot{b}(t)}$. Значит,

$$Q(s) = -\operatorname{arctg} \frac{\dot{a}(t)}{\dot{b}(t)} \Big|_{t=t(s)} - s. \quad (21)$$

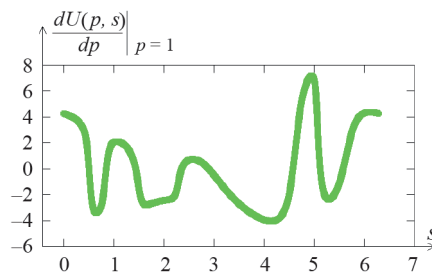
Но зависимость t от s удастся получить только численно, задав зависимость $s_k \mapsto t(s_k)$, представленную при $s_k = s(t_k) = k\tau$, $\tau = 2\pi / K$ ($K \gg 1$) такими соотношениями

$$\begin{aligned}
 s_0 &= t_0 = 0, \\
 s_{k+1} - s_k &= \Lambda \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2} dt = \tau, \\
 k &= 0, 1, 2, \dots, K-1.
 \end{aligned} \tag{22}$$

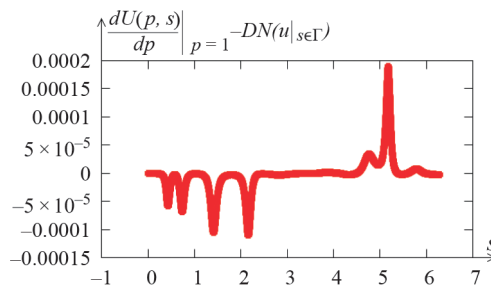
Заменяя в формуле (21) значение $t = t(s)$ на $t = t_k(s_k)$ ($k = 0 \div K$) получаем вместо функции Q ее численную аппроксимацию $\tilde{Q}$, разложение которой в ряд Фурье сходится медленно. Ускорить сходимость можно сгладив численную аппроксимацию $\tilde{s}$ функции s , например, с помощью имитации регуляризации по Стеклову (свертки с δ -образной функцией). А именно, сначала зависимость $\pi(s_k) \stackrel{\text{def}}{=} t(s_k) - s_k$ для $k = 0, 1, 2, \dots, K$ продолжается периодически с периодом K по формуле: $\pi(s_k) = \pi(s_{K+k})$ для $k \in \mathbb{Z}$. Затем в качестве нового значения $\pi(s_k) = \pi_0(s_k)$ берется $\pi_1(s_k) = \frac{1}{2}(\pi_0(s_{k+1}) + \pi_0(s_{k-1}))$. Эта процедура



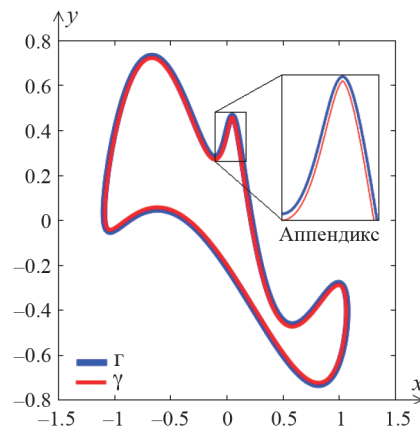
Фиг. 6. Ответ — производная по нормали ν на границе Γ для примера 3 в случае функции $x^2 - y^2$.



Фиг. 7. Ответ — производная по нормали ν на границе Γ для примера 3 в случае функции $\cosh(x) \cdot \sin(y)$.



Фиг. 8. График погрешности — разности производной по нормали на границе для примера 3 в случае функции $\cosh(x) \cdot \sin(y)$, найденной численно $\frac{\partial U(p, s)}{\partial p} \Big|_{p=1}$ и точного аналитического решения $\mathcal{DN}(u|_{s \in \Gamma})$.



Фиг. 9. Пример 4 кривых Γ и γ с особенностью в виде аппендикса.

сглаживания (которую можно повторить несколько раз) позволяет существенно ускорить сходимость ряда Фурье для аппроксимации функции Q .

Далее по найденному фурье-разложению $\tilde{Q}(s) = \sum_{k \geq 0} (\tilde{L}_k \cos ks + \tilde{M}_k \sin ks)$ для аппроксимации функции Q (ср. с (6)) строится (в соответствии с леммой 1) отображение (9).

Ниже для второго способа задания кривой Γ представлены численные результаты для оператора Дирихле–Неймана. Результаты для Дирихле–Робена очевидным образом вытекают из результатов для Дирихле–Неймана по (13), (14).

На фиг. 6 и 7 представлены графики решения — найденные численно производные по нормали к Γ для гармонических функций $x^2 - y^2$ и $\cosh(x) \cdot \sin(y)$ соответственно.

На фиг. 8 приведен график погрешности найденного решения для функции $\cosh(x) \cdot \sin(y)$. Норма ошибки в $C[0, 2\pi]$ составила $2 \cdot 10^{-4}$.

Если в формуле (19) коэффициент в $a(t)$ при $\sin(x)$ взять равным -2.3 , то получится кривая, изображенная на фиг. 9.

Она не имеет узкого перешейка как кривая в примере 3 выше, но зато у нее есть достаточно крутой горб-аппендикс. Для данной кривой также было проведено численное моделирование, описанная выше методика работает, получились схожие результаты. Количество точек разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ при дискретизации бралось равным $N = 8000$ для $r = 0.992$. В разложении Γ в ряд Фурье использовались первые 550 членов. Для гармонических функций $x^2 - y^2$ и $\cosh(x) \cdot \sin(y)$ относительная погрешность в C составила 0.001 и достигалась в малой окрестности аппендикса.

Отметим также, что в случае более простых границ областей Γ результат получается намного точнее. Например, для симметричной кривой, рассмотренной в [16] абсолютная погрешность, полученная в результате численных расчетов описанным выше методом получается порядка 10^{-6} .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опираясь на лемму, дающую явную численно реализуемую формулу для изометричного однолистного отображения аналитической границы односвязной двумерной области на единичную окружность, представлены численные алгоритмы для операторов Пуанкаре–Стеклова, относящихся к уравнению Лапласа в двумерной односвязной области с C^1 -границей. Тестовые численные результаты для операторов Дирихле–Неймана и Дирихле–Робена показали точность приближения с относительной погрешностью порядка 0.1 процента даже для сложных областей, имеющих узкий перешейк или аппендикс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // Ges. Math. 1869. Abh. II. P. 65.
2. Агошков В. И. Новая методика формулировки алгоритмов разделения области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 3. С. 351.

3. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд. АН СССР. 1948.
4. *Маергойз И. Д.* О численном решении краевых задач теории потенциала методом интегральных уравнений // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. № 6. С. 1318.
5. *Khoromskij B. N., Wittum G.* Elliptic Poincaré–Steklov Operators. Springer. Berlin. Heidelberg. Lecture Notes Comput. Science and Engng. 2004. V. 36. P. 63–81.
6. *Новиков Р. Г., Тайманов И. А.* Преобразования Дарбу–Мутара и операторы Пуанкаре–Стеклова // Труды МИАН. 2018. Т. 302. Р. 334.
7. *Лебедев В. И., Агошков В. И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М.: Отдел вычислительной математики АН СССР. 1983. 184 с.
8. *Poincaré H.* La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet // Acta Math. V. XX. 59.
9. *Stekloff W.* Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique // Ann. fac. sci. Toulouse. Sér. 1900. V. 2. N 2. P. 207.
10. *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО. 2012.
11. *Демидов А. С.* Полная асимптотика решения задачи Дирихле для 2-мерного уравнения Лапласа с быстро осциллирующими граничными данными // Докл. АН. 1996. Т. 346. № 6. С. 732.
12. *Демидов А. С.* Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций // Успехи матем. наук. 2010. Т. 65. № 1. С. 3.
13. *Демидов А. С.* О численно реализуемых явных формулах для решений двумерных и трехмерных уравнений $\operatorname{div}(\alpha(w)\operatorname{div}w) = 0, \operatorname{div}(\beta\nabla w) = 0$ с данными Коши на аналитической границе // Функц. анализ и его прил. 2021. Т. 55. № 1. С. 65.
14. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приближенное решение задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1929. № 12. 283.
15. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физмат. гиз., 1962.
16. *Власов В. К., Бакушинский А. Б.* Метод потенциалов и численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 3. С. 574.
17. *Zhou Y., Cai W.* Numerical Solution of the Robin Problem of Laplace Equations with a Feynman–Kac Formula and Reflecting Brownian Motions // J. Scientific Comput. 2016 T. 69. № 1. 107. <https://doi.org/10.1007/s10915-016-0184-y>