

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.624

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2024 г. Н. Б. Конюхова^{1, *}¹19333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: n.konyukhova@gmail.com

Поступила в редакцию 20.09.2023 г.

Переработанный вариант 20.09.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Для автономной системы N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматриваемой на полубесконечном интервале $T_0 \leq t < \infty$ и обладающей точкой покоя (псевдо)гиперболического типа, изучается n -мерное ($0 < n < N$) устойчивое многообразие решений, или многообразие условной устойчивости по Ляпунову, которое для каждого достаточно большого t существует в фазовом пространстве переменных системы в окрестности ее седловой точки. Гладкая сепаратрисная поверхность седла для такой системы описывается с помощью решения сингулярной задачи типа Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка с вырождением по начальным данным. Дается применение результатов к правильной постановке граничных условий на бесконечности и их переносу в конечную точку для автономной системы нелинейных уравнений, в том числе с указанием использования этого подхода в некоторых прикладных задачах. Библ. 26.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, автономная система нелинейных уравнений, стационарная точка типа (псевдо)гиперболического седла, граничные условия на бесконечности, устойчивые многообразия решений, сингулярная задача Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка.

DOI: 10.31857/S0044466924020053, EDN: YKGYLK

ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Данная работа является итоговой по теме, указанной в названии: излагаются некоторые результаты [1]–[3] в переработанном, дополненном и исправленном виде и дается их применение к построению гладких устойчивых многообразий решений (УМР) для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), к постановке и аппроксимации для таких систем сингулярных краевых задач (КрЗ); учитывается также малая доступность издания [3].

Система N нелинейных автономных ОДУ рассматривается на полу-бесконечном интервале $T_0 \leq t < \infty$. Исследуется проблема корректной постановки для нее нелинейных сингулярных КрЗ: на бесконечности задается условие типа стремления решения к стационарной точке системы ОДУ; такое граничное условие называем *правильным*, если в фазовом пространстве переменных ОДУ рассматриваемая стационарная точка является (псевдо)гиперболическим седлом (определение многомерного (псевдо)гиперболического седла для автономных систем нелинейных ОДУ см., например, в [4, п. 2.2] и ниже в разд. 1). В этом случае значения решений системы ОДУ, удовлетворяющих заданному условию на бесконечности, образуют в окрестности стационарной точки фазового пространства переменных нелинейное УМР, инвариантное относительно t . Тем самым, понятие правильности граничного условия связано с возможностью сведения сингулярной задачи к регулярной заменой предельного условия на бесконечности требованием: для достаточно больших конечных значений t ($t \geq T$) значения решений принадлежат УМР.

Если система ОДУ обладает стационарной точкой типа многомерного седла, то для гладких функций гладкое УМР задается с помощью решения сингулярной задачи типа Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка с вырождением по начальным данным (о задаче Ляпунова см. [5, с. 153–158], [6, гл.VI]). Даются обобщения теорем Ляпунова на системы уравнений с частными производными с неголоморфными заданными функциями и неголоморфными решениями,

а также на системы типа Гамильтона-Якоби, возникающие при описании гладких УМР (или, по терминологии [7, гл. VI], гладких полей) для векторных автономных систем нелинейных ОДУ второго порядка; описание таких нелинейных гладких полей дано в разд. 3. Описывается применение результатов к правильной постановке и аппроксимации сингулярных КрЗ для автономных систем нелинейных ОДУ: перенос из бесконечности граничного условия типа стремления решения к стационарной точке осуществляется требованием: для достаточно больших конечных значений t ($t \geq T$) значения решений принадлежат УМР. В линейном приближении в качестве граничного условия при конечном $t = T$ задается уравнение касательного подпространства к УМР, взятого в стационарной точке. Обобщается понятие допустимого граничного условия на бесконечности, введенное в [8]–[10] для линейных систем ОДУ. Выделяется класс таких условий как стремления решения попасть по направлению в касательное подпространство к УМР, взятое в точке (псевдо)гиперболического равновесия. Частные случаи задачи Ляпунова для систем нелинейных ОДУ представляют самостоятельный интерес для теории сингулярных задач Коши (ЗК).

Всюду далее a_0, T_0 — фиксированные вещественные постоянные, $a_0 > 0$; входящие в уравнения функции многих переменных предполагаются непрерывными по совокупности переменных в заданной области их изменения, то же относится и к их частным производным по соответствующим переменным, если таковые существуют (при определении классов функций это не будет более оговариваться). Используются обозначения: $I_T = [T, \infty)$, $T \geq T_0$; $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}$ — множества вещественных, комплексных и натуральных чисел соответственно, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{K}^n$ — линейное пространство столбцов высоты n , $|\cdot|$ — какая-либо норма в $\mathbb{K}^n$, для подчиненной нормы матрицы обозначение аналогично; $L(\mathbb{K}^n)$ ($L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$) — линейное пространство $n \times n$ —матриц ($(m \times n)$ —матриц), E_n — единичная матрица порядка n , $\lambda(A)$ — собственное значение (СЗ) матрицы A , $\partial \sigma / \partial x = (\partial \sigma_i / \partial x_j)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ — матрица Якоби, $\partial \sigma / \partial x \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$; $\Omega_x(a) = \{x : x \in \mathbb{K}^n, |x| < a\}$, $\bar{\Omega}_x(a) = \{x : x \in \mathbb{K}^n, |x| \leq a\}$, $a > 0$, т.е. $\Omega_x(a)$ ($\bar{\Omega}_x(a)$) — открытый (замкнутый) поликруг в окрестности начала координат x -пространства, $\bar{\Omega}_{x,y}(a) = \bar{\Omega}_x(a) \times \bar{\Omega}_y(a)$; $C_\mu[0, \infty)$ — банахово пространство, элементами которого $z(t)$ являются пары вектор-функций, $z(t) = \{x(t); y(t)\}$, $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K}^m$, $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$, непрерывных на $[0, \infty)$ и ограниченных с весом $\exp(\mu t)$, где $\mu \geq 0$, а норма в пространстве $C_\mu[0, \infty)$ определена формулой

$$|z|_{C_\mu} = |\{x; y\}|_{C_\mu} = \max \left\{ \sup_{t \in [0, \infty)} [\exp(\mu t) |x(t)|]; \sup_{t \in [0, \infty)} [\exp(\mu t) |y(t)|] \right\};$$

$C_l(\bar{\Omega}_{x,y}(a_0))$ (или сокращенно C_{l,a_0}) — класс непрерывных по $\{x, y\}$ вектор-функций $\varphi(x, y)$, $\varphi : \bar{\Omega}_x(a_0) \times \bar{\Omega}_y(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^l$; $C_l^k(\bar{\Omega}_{x,p}(a_0))$ (или сокращенно C_{l,a_0}^k , $k \geq 1$) — класс вектор-функций $\varphi(x, p)$, $\varphi : \bar{\Omega}_{x,p}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^l$, обладающих в той же области частными производными по $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m$ до k -го порядка включительно; $H_{l,a_0} = H_l(\bar{\Omega}_{x,p}(a_0))$ — класс голоморфных по $\{x, p\}$ в некоторой окрестности поликруга $\bar{\Omega}_{x,p}(a_0)$ вектор-функций $\varphi(x, p)$ со значениями в $\mathbb{C}^l$; $[x]_v$ — абсолютно сходящийся степенной ряд по координатам x , $x \in \mathbb{K}^n$, начинающийся с членов степени не ниже v , $0 \leq v$ — целое.

Остальные обозначения будут вводиться по мере необходимости.

1. О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИИ УМР

Пусть на бесконечном интервале рассматривается автономная система N нелинейных ОДУ

$$z'(\tau) = Q(z(\tau)), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (1.1)$$

где $z \in \mathbb{K}^N$, $Q \in C_N(G_N)$, G_N — некоторая область в $\mathbb{K}^N$ или все пространство. Пусть z_s — стационарная точка этой системы, $z_s : z_s \in G_N$, $Q(z_s) = 0$, и пусть $Q(z)$ в окрестности точки z_s представима в виде

$$Q(z) = A(z - z_s) + P(z), \quad P(z) = o(z - z_s), \quad |z - z_s| \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Здесь A — постоянная матрица, $A \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N)$, $P(z) \in C_N(G_N)$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L_p(G_N)$, которая может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора в качестве G_N малой окрестности точки z_s . (Стационарные точки системы (1.1) называют также точками равновесия (equilibrium points), или просто равновесиями (equilibriums).)

Определение 1. Стационарную точку $z = z_s$ системы (1.1) назовем седло-узлом (μ, n) -типа при $\mu \geq 0$ ($(\mu, N-n)$ -типа при $\mu \leq 0$), где $0 \leq n \leq N$, n -целое, если для этих μ, n матрица A в (1.2) имеет n СЗ, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \lambda(A) < -\mu$, и $N-n$ СЗ, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} \lambda(A) > -\mu$. (Если $n(N-n) \neq 0$ и $\mu = 0$ ($\mu \neq 0$), то такую точку называют в литературе гиперболическим (псевдогиперболическим) седлом или равновесием; см., например, [4, п. 2.2].)

Пусть точка $z = z_s$ является для (1.1) седло-узлом (μ, n) -типа при $\mu \geq 0$ и $0 \leq n \leq N$. Поставим для решений системы (1.1) граничное условие на бесконечности в виде

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \exp(\mu\tau) [z(\tau) - z_s] \right\} = 0 \quad (1.3)$$

и рассмотрим задачу (1.1), (1.3) как сингулярную ЗК. Эта задача обладает, как известно, n -параметрическим семейством решений, значения которых порождают в фазовом пространстве системы (1.1) в окрестности точки $z = z_s$ инвариантное относительно τ n -мерное УМР $M_+^{(n)}$ (см. [11, гл. XIII]). Тогда предельное условие (1.3) эквивалентно требованию: для достаточно больших конечных значений τ ($\tau \geq \tau_\infty$) значения решений принадлежат УМР, т.е.

$$z(\tau) \in M_+^{(n)}, \quad \tau \geq \tau_\infty. \quad (1.4)$$

Будем говорить, что (1.4) есть результат перенесения условия (1.3) из бесконечности в конечную точку τ . Для такого переноса надо задать (точно или приближенно) уравнение $M_+^{(n)}$.

Пусть, например, для системы (1.1) рассматривается сингулярная КрЗ на полуоси $0 \leq \tau < \infty$ с каким-либо условием при $\tau = 0$ и предельным условием (1.3) на бесконечности, где $0 \leq \mu$ фиксировано. Возможность сведения сингулярной КрЗ к эквивалентной регулярной, в том числе для исследования корректности постановки исходной задачи по общему числу краевых условий на обоих концах полубесконечного интервала, порождает

Определение 2. Предельное условие (1.3) назовем правильным граничным условием на бесконечности для системы (1.1), если стационарная точка $z = z_s$ является для нее седло-узлом (μ, n) -типа, $0 \leq n \leq N$.

Замечание 1. Очевидно, случай $n = N$ (устойчивый узел) означает, что все решения (1.1), достаточно близкие к z_s , удовлетворяют условию (1.3), а случай $n = 0$ означает, что условию (1.3) удовлетворяет только одно решение $z(\tau) \equiv z_s$. В общем случае при постановке сингулярных КрЗ для (1.1) необходимо учитывать, что количество нелинейных соотношений в конечной точке, эквивалентных в совокупности предельному условию (1.3), равно $N-n$, а сами эти соотношения задаются уравнением УМР. В противном случае возможны следующие ошибки, встречающиеся в литературе при постановке и решении физических задач: неточно задается граничное условие на бесконечности (указываются предельные значения отдельных компонент, а не всего решения); неверно ставится (или неверно трактуется) задача по общему числу краевых условий на обоих концах (полу)бесконечного интервала; неточно аппроксимируется и неудачно численно решается задача на конечном интервале, не эквивалентная исходной (см. примеры в [3] и статьях, перечисленных в заключении).

Пусть система (1.1) рассматривается на всей оси. Пусть $z = z_s$ и $z = \tilde{z}_s$ — точки равновесия системы, причем z_s является седло-узлом (μ, n) -типа при некоторых $\mu \geq 0$ и $n : 0 \leq n \leq N$, а $\tilde{z}_s$ — седло-узлом $(\nu, N-n)$ -типа при некотором $\nu \leq 0$ и том же значении n . Наряду с (1.3) зададим предельное условие на левом конце

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left\{ \exp(\nu\tau) [z(\tau) - \tilde{z}_s] \right\} = 0. \quad (1.5)$$

Аналогично предыдущему, в фазовом пространстве системы (1.1) в окрестности точки $z = \tilde{z}_s$ существует $(N-n)$ -мерное УМР $M_-^{(N-n)}$, инвариантное относительно τ и порожденное значениями $(N-n)$ -параметрического семейства решений сингулярной ЗК (1.1), (1.5). Тогда сингулярная КрЗ (1.1), (1.3), (1.5) правильно поставлена по общему числу краевых условий в окрестностях точек $\tau = -\infty$ и $\tau = \infty$. (Подобные КрЗ встречаются, например, в нелинейной теории поля, в математических моделях химии и биологии, где их решения называют кинк-солитонами, стенками или волновыми фронтами, если $z_s \neq \tilde{z}_s$, и решениями типа колокола, всплеска или волнового вала в противном случае.)

Очевидно, что, если точка равновесия $z = z_s$ системы (1.1) является седло-узлом $(0, n)$ -типа, то она одновременно является и седло-узлом $(0, N - n)$ -типа, так что в ее окрестности в z -пространстве оба многообразия $M_+^{(n)}$ и $M_-^{(N-n)}$ существуют и имеют хотя бы одну общую точку $z = z_s$.

Важным для приложений является случай, когда точка $z = z_s$ в (1.3), будучи седло-узлом (μ, n) -типа, зависит от k параметров $(c_1, \dots, c_k) \in S_k$, где $0 < k < n$, т.е. когда стационарные точки одного типа образуют k -параметрическое семейство — равновесное (или стационарное) множество S_k . Тогда для правильной постановки КрЗ на (полу)оси недостаточно иметь $N - n$ условий на левом конце, требуется задать еще k локальных или нелокальных условий для определения значений параметров $c_1, \dots, c_k$. (Примеры таких задач в теории пограничного слоя см., например, в [3] и работах, перечисленных здесь в заключении.)

Пусть теперь $Q(z) \in C_N^1(G_N)$, $z_s : z_s \in G_N, Q(z_s) = 0, (\partial Q / \partial z)(z_s) \neq 0$, и пусть на бесконечности задано предельное условие вида

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_0 [z(\tau) - z_s] |z(\tau) - z_s| = 0, \quad (1.6)$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}^{N-n})$ и имеет ранг $N - n$, $0 \leq n \leq N$ (решение стремится попасть по направлению в заданное линейное подпространство). При этом полагаем по определению, что $z(\tau) \equiv z_s$ удовлетворяет условию (1.6).

Определение 3. Условие (1.6) назовем *допустимым граничным условием* на бесконечности для системы (1.1), если в окрестности точки $z = z_s$ существует дифференцируемое УМР $M_+^{(n)}$, порожденное значениями решений (1.1), достаточно близких к z_s , а уравнение $\mathbb{K}_0^n$,

$$\mathbb{K}_0^n : \varphi_0 [z - z_s] = 0, \quad z \in \mathbb{K}^N, \quad (1.7)$$

задает n -мерное касательное подпространство к $M_+^{(n)}$ в точке $z = z_s$. (Тем самым, если $M_+^{(n)}$ задается уравнением $\varphi(z) = 0$, где $\varphi \in \mathbb{K}^{N-n}$ и $\varphi(z_s) = 0$, то $\varphi_0 = M(\partial \varphi / \partial z)(z_s)$, где M — произвольная неособенная матрица, $M \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^{N-n})$, например, $M = E_{N-n}$.)

Класс допустимых φ_0 может быть получен по аналогии с линейным случаем (о допустимых граничных условиях в особой точке или на бесконечности для систем линейных ОДУ и классах таких условий для систем с регулярной или иррегулярной особенностью см., например, в [8]–[10]). А именно, справедливо

Утверждение 1. Пусть $\mathbb{H}$ — пространство строк длины N . Зададим любое вещественное число $\mu \geq 0$ такое, что $A = (\partial Q / \partial z)(z_s)$ не имеет СЗ на прямой $\text{Re} \lambda = -\mu$. Пусть $\mathbb{X}$ — подпространство $\mathbb{H}$, порожденное всеми левыми корневыми векторами A , для которых $\text{Re} \lambda(A) > -\mu$. В качестве φ_0 возьмем какой-либо базис в $\mathbb{X}$. Тогда граничное условие (1.6) будет допустимым граничным условием на бесконечности для решений (1.1); оно эквивалентно условию (1.3) и его перенос из бесконечности в конечную точку осуществляется заданием уравнения УМР $M_+^{(n)}$ (в частности, в линейном приближении соотношение (1.7) может рассматриваться как граничное условие в конечной точке $\tau \geq \tau_\infty$).

Замечание 2. Для линейной системы (ЛС) $z' = A(z - z_s)$ с постоянной матрицей $A, A \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N)$, условие (1.6) называется *допустимым граничным условием* на бесконечности, если совокупность решений ЛС, удовлетворяющих (1.6), образует n -мерное подпространство $\mathbb{K}_0^n$ в N -мерном пространстве $\mathbb{K}^N$ всех решений, $0 \leq n \leq N$. Два n -мерных линейных подпространства, задаваемых уравнениями (1.7), называются эквивалентными, если соответствующие им граничные условия (1.6) выделяют одну и ту же совокупность решений ЛС. Тогда класс $\mathbb{K}_0^n$, порождающих допустимые условия (1.6) для ЛС, можно построить исчерпывающим образом (с точностью до эквивалентных подпространств) по следующей схеме (см. [8]–[10]): зададим любое вещественное число μ ; возьмем все правые корневые векторы матрицы A , соответствующие СЗ $\lambda(A) : \text{Re} \lambda(A) < \mu$; для каждого СЗ $\lambda(A) : \text{Re} \lambda(A) = \mu$, в соответствующем корневом пространстве возьмем какие-либо (например, все или никакие) правые собственные векторы (СВ), не тянущие жордановы цепочки; в качестве $\mathbb{K}_0^n$ возьмем подпространство, порожденное всеми указанными векторами. Из этого результата, однако, виден и недостаток такого определения допустимого условия, так как в этот класс не попадает подпространство всех решений ЛС, ограниченных с весом $\exp(\mu t), t > 0$ (или, в более общем случае, ограниченных с весом $t^{-\alpha} \exp(\mu t), t > 0$, где $0 \leq \alpha \leq \kappa - 1, 1 \leq \kappa \leq N$, κ — наибольший размер жордановой клетки, отвечающей СЗ $\lambda(A) : \text{Re} \lambda(A) = \mu$). Такое подпространство приходится выделять отдельно, например следующим образом: зададим любое вещественное число μ ; возьмем все правые корневые векторы матрицы A , соответствующие СЗ $\lambda(A) : \text{Re} \lambda(A) < \mu$, и все СВ, отвечающие СЗ $\lambda(A) : \text{Re} \lambda(A) = \mu$ (в общем случае берем все корневые векторы высоты не более $\alpha + 1$

); в качестве $\mathbb{K}_0^n$ возьмем подпространство, порожденное всеми указанными векторами, и рассмотрим условие (1.6) в подпространстве решений ЛС, ограниченных с весом $\exp(\mu t)$ (с весом $t^{-\alpha} \exp(\mu t)$ соответственно); тогда на таком классе функций условие (1.6) будет допустимым граничным условием для решений ЛС и эквивалентным соотношению (1.7), рассматриваемому уже в пространстве всех решений.

Суммируя некоторые утверждения [2], [3], приведем теорему существования УМР для случая, когда точка $z = z_s$ является седло-узлом (μ, n) -типа. Без ограничения общности можем положить $z_s = 0$. Если точка $z = 0$ является для системы (1.1) седло-узлом (μ, n) -типа при $\mu \geq 0$, $0 \leq n \leq N$, то, как известно (см. [11]), эта система может быть неособенным преобразованием приведена к виду

$$dx d\tau = \Lambda_1 x + F_1(x, y), dy d\tau = \Lambda_2 y + F_2(x, y), -\infty < \tau < \infty, \quad (1.8)$$

где $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$, $m + n = N$, $\Lambda_{1,2}$ — постоянные матрицы, $\Lambda_1 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$, $\Lambda_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^m)$, $F_1 : \Omega_{x,y}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $F_2 : \Omega_{x,y}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^m$, и выполняются приведенные ниже соотношения.

Соотношение 1. Существует $\mu \geq 0$ такое, что для всех СЗ $\Lambda_{1,2}$ справедливо

$$\operatorname{Re} \lambda(\Lambda_1) < -\mu < \operatorname{Re} \lambda(\Lambda_2). \quad (1.9)$$

Соотношение 2. Пусть $F_1 \in C_{n,a_0}$, $F_2 \in C_{m,a_0}$,

$$F_j(0, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.10)$$

и, кроме того, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon$, $0 < \delta_\varepsilon \leq a_0$, при котором справедливо

$$\begin{aligned} |F_j(x, y) - F_j(\tilde{x}, \tilde{y})| &\leq \varepsilon (|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|), \\ \forall \{x, y, \tilde{x}, \tilde{y}\} &\in \overline{\Omega}_{x,y}(\delta_\varepsilon), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Пусть выполняются соотношения 1, 2. Введем обозначение

$$J_1 = \int_0^\infty |\exp((\Lambda_1 + \mu E_n)\tau)| d\tau, \quad (1.12)$$

$$J_2 = \int_0^\infty |\exp(-(\Lambda_2 + \mu E_m)\tau)| d\tau,$$

$$J = \max_{j=1,2} J_j, \quad (1.13)$$

$$K_1 = \sup_{\tau \geq 0} |\exp((\Lambda_1 + \mu E_n)\tau)|, \quad (1.14)$$

где, в силу соотношения 1, справедливо $0 < J < \infty$, $1 \leq K_1 < \infty$.

Зафиксируем $q : 0 < q < 1$, и возьмем $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq q / (2J)$; по ε выберем δ_ε , $0 < \delta_\varepsilon \leq a_0$, при котором справедливо (1.11). Зафиксируем $\delta : 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon$, и введем величины

$$c_1(\delta) = (1 - q)\delta / K_1, d(\delta) = q\delta. \quad (1.15)$$

Тогда справедлива следующая теорема о существовании УМР.

Теорема 1. Пусть выполняются соотношения 1, 2 и пусть для фиксированного q , $0 < q < 1$, определены $\varepsilon, \delta, c_1(\delta), d(\delta)$ указанным выше способом. Тогда каждому вектору $x^{(0)}$, $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$, удовлетворяющему требованию

$$|x^{(0)}| \leq c_1(\delta), \quad (1.16)$$

соответствует единственная траектория системы (1.8), лежащая в шаре

$$\max \left\{ \sup_{\tau \geq 0} [\exp(\mu\tau) |x(\tau)|]; \sup_{\tau \geq 0} [\exp(\mu\tau) |y(\tau)|] \right\} \leq \delta \quad (1.17)$$

и такая, что

$$x(0) = x^{(0)}, \quad x^{(0)} \in \mathbb{K}^n, \quad (1.18)$$

т.е. начальные точки $z(0) = \{x(0); y(0)\}$, порождающие решения системы (1.8), не выходящие из шара (1.17), образуют в “шаре”

$$|x(0)| \leq c_1(\delta), \quad |y(0)| \leq d(\delta) \quad (1.19)$$

n -мерное УМР $M_+^{(n)}$, гомеоморфное окрестности начала координат x -пространства. Уравнение $M_+^{(n)}$ как “поверхности” в декартовом произведении пространств $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$, т.е. связь между $y(0)$ и $x(0)$, неявно содержится в интегральном соотношении

$$y(0) = -\int_0^\infty \exp(-\Lambda_2 \tau) F_2(x(\tau, x(0)), y(\tau, x(0))) d\tau. \quad (1.20)$$

Всякое решение системы (1.8), значения которого в момент $\tau = 0$ принадлежат шару (1.19), но не принадлежат УМР $M_+^{(n)}$, удаляется от $M_+^{(n)}$ и при некотором $\tau = \tau_f > 0$ выходит из шара (1.17) (в частности, при $\mu = 0$ имеет место локальная экспоненциальная расходимость траекторий). Многообразие $M_+^{(n)}$ инвариантно относительно τ и существует, по крайней мере, во всей области фазового пространства, порожденной значениями решений n -параметрического семейства задач (1.8), (1.17), (1.18), где вектор параметров $x^{(0)}$ удовлетворяет ограничению (1.16), так что всякое решение системы (1.8), значения которого в момент $\tau = \tau_0$ принадлежат УМР $M_+^{(n)}$, остается на этом многообразии для всех $\tau \geq \tau_0$.

Доказательство существования и единственности решения задачи (1.8), (1.17), (1.18) основано на применении принципа сжатых отображений к оператору $V : C_\mu[0, \infty) \rightarrow C_\mu[0, \infty)$, заданному выражением

$$(V(\{x; y\}))(\tau) = \begin{cases} \exp(\Lambda_1 \tau) x^{(0)} + \int_0^\tau \exp(\Lambda_1(\tau - s)) F_1(x(s), y(s)) ds; \\ - \int_\tau^\infty \exp(\Lambda_2(\tau - s)) F_2(x(s), y(s)) ds \end{cases}, \quad \tau \geq 0.$$

Остальные утверждения достаточно очевидны (подробнее см. [2]).

Замечание 3. Следуя [11], [12], можно уточнить поведение решений системы (1.8) на УМР $M_+^{(n)}$. Возьмем число $\alpha > 0$ такое, что $\max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_1 + \mu E_n) < -\alpha$. Отсюда и из (1.12) следует, что $\exists K_1, \sigma$, $1 \leq K_1 = \text{const}$, $0 < \sigma = \text{const}$, при которых для $\tau \geq 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\exp((\Lambda_1 + \mu E_n)\tau)| &\leq K_1 \exp(-(\alpha + \sigma)\tau), \\ |\exp(-(\Lambda_2 + \mu E_m)\tau)| &\leq K_1 \exp(-\sigma\tau). \end{aligned}$$

Из этих оценок в (1.13) получаем $J \leq K_1 / \sigma$. Зафиксируем $q : 0 < q < 1$, и возьмем $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq q\sigma / (2K_1)$; по ε выберем $\delta_\varepsilon, 0 < \delta_\varepsilon \leq a_0$, при котором справедливо (1.11). Зафиксируем $\delta : 0 < \delta \leq \delta_\varepsilon$, и введем величины $c_1(\delta)$, $d(\delta)$ по формулам (1.15). Тогда при указанном выборе δ и фиксированном значении $x^{(0)}$, удовлетворяющем неравенству (1.16), решение задачи (1.8), (1.17), (1.18) удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} |x(\tau) - \exp(\Lambda_1 \tau) x^{(0)}| &\leq q\delta \exp(-(\alpha + \mu)\tau), \\ |y(\tau)| &\leq q\delta \exp(-(\alpha + \mu)\tau), \quad \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 1 и замечание 3 дополняют и уточняют в современной форме классические результаты [11], [12] о существовании УМР для автономных систем нелинейных ОДУ с экспоненциально дихотомической главной частью (аналогичные теоремы для более общих систем функционально-дифференциальных и операторных уравнений см., например, в [13]–[17]).

Важным является следующее дополнение (см. [2], [3]; некоторые погрешности, допущенные в [2], [3], здесь исправлены). Вместо (1.8) рассмотрим неавтономную систему N нелинейных ОДУ с начальным вырождением по независимой переменной (типа регулярной особенности):

$$tdxdt = \Lambda_1 x + F_1(t, x, y), \quad tdydt = \Lambda_2 y + F_2(t, x, y), \quad 0 < t \leq 1. \quad (1.21)$$

Здесь $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$, $m + n = N$, $\Lambda_1 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$, $\Lambda_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^m)$, $F_1 : [0,1] \times \overline{\Omega}_{x,y}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $F_2 : [0,1] \times \overline{\Omega}_{x,y}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^m$, причем $\operatorname{Re} \lambda(\Lambda_1) > \mu \quad \forall \lambda(\Lambda_1)$, $\operatorname{Re} \lambda(\Lambda_2) < \mu \quad \forall \lambda(\Lambda_2)$, где μ — фиксированное число из интервала $[0,1]$. Введем новую независимую переменную

$$\tau = -\ln t, \quad t = \exp(-\tau), \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (1.22)$$

и обозначения

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \hat{x} \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \hat{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Lambda}_2 = -\Lambda_2, \quad \hat{F}_j(\hat{x}, y) = -F_j(t, x, y), \quad j = 1, 2.$$

Тогда в новых переменных получим автономную систему $N + 1$ нелинейных ОДУ на полубесконечном интервале

$$d\hat{x}d\tau = \hat{\Lambda}_1 \hat{x} + \hat{F}_1(\hat{x}, y), \quad dyd\tau = \hat{\Lambda}_2 y + \hat{F}_2(\hat{x}, y), \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (1.23)$$

К системе (1.23) уже применима теорема 1 и последующие результаты этого разд. 1 при соответствующих предположениях относительно $F_j(t, x, y)$, $j = 1, 2$. В частности, для системы (1.21) соотношение (1.20), с учетом формул (1.22), перепишется в виде

$$y(t_0) = \int_0^{t_0} \left[(t/t_0)^{-\Lambda_2} F_2 \begin{pmatrix} t, x(t, x(t_0)), \\ y(t, x(t_0)) \end{pmatrix} / t \right] dt. \quad (1.24)$$

Это соотношение задает уравнение УМР, зависящее от t_0 как от параметра.

В заключение этого разд. 1 отметим, что соотношение (1.20) ((1.24)) является нелокальным и зависит от решений системы (1.8) на полуоси (системы (1.21) на отрезке $[0, t_0]$). Локальное соотношение можно получить для гладких УМР в случае гладких функций в правой части системы (1.8) ((1.21)) с помощью решения сингулярной задачи типа Ляпунова для сопутствующей системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка с вырождением по начальным данным. Эта задача, представляющая самостоятельный интерес, рассматривается далее в разд. 2.

2. О ГЛАДКИХ УМР И СОПУТСТВУЮЩИХ ЗАДАЧАХ ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Пусть в декартовом произведении пространств $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^N$ заданы система N нелинейных ОДУ

$$dxd\tau = f(x, y), \quad dyd\tau = g(x, y), \quad x \in G_n, \quad y \in G_m, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (2.1)$$

и нелинейное соотношение

$$y = \rho(x), \quad x \in \tilde{G}_n \subseteq G_n, \quad (2.2)$$

где

$$f \in C_n(G_N), \quad g \in C_m(G_N), \quad G_N = G_n \times G_m, \quad \rho(x) \in C_m(\tilde{G}_n).$$

Определение 4. Будем говорить, что соотношение (2.2) задает в N -мерном фазовом пространстве системы (2.1) инвариантное относительно τ n -мерное УМР $M_+^{(n)}$ ($M_-^{(n)}$), если всякое решение системы (2.1), значения которого в момент $\tau = 0$ удовлетворяют соотношению (2.2), обладает тем же свойством для всех $\tau \geq 0$ ($\tau \leq 0$). Такое многообразие назовем *гладким*, если $\rho \in C_m^k(\tilde{G}_n)$, $k \geq 1$.

Следующие утверждения достаточно очевидны.

Теорема 2. Соотношение (2.2) тогда, и только тогда, задает инвариантное относительно τ гладкое n -мерное УМР в N -мерном фазовом пространстве системы (2.1), когда $\rho(x)$ есть решение уравнения

$$\partial \rho \partial x f(x, \rho) = g(x, \rho). \quad (2.3)$$

Теорема 3. Пусть $\{x, y\} = \{0, 0\}$ — стационарная точка системы (2.1), т.е. $\{0, 0\} \in G_N$, $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$. Для того, чтобы это стационарное решение принадлежало гладкому УМР (2.2), необходимо и достаточно, чтобы $\rho(x)$ было решением уравнения (2.3), удовлетворяющим условию

$$\rho(0) = 0. \quad (2.4)$$

Пусть теперь система (2.1) имеет вид (1.8), т.е.

$$f(x, y) = \Lambda_1 x + F_1(x, y), \quad g(x, y) = \Lambda_2 y + F_2(x, y).$$

Тогда получим из (2.3), (2.4) сингулярную задачу, которую будем называть *сингулярной задачей Ляпунова*. Она была поставлена и исследована Ляпуновым в предположениях $F_1 \in H_{n, a_0}$, $F_2 \in H_{m, a_0}$ и более общих, чем в (1.9), предположениях о взаимном расположении спектров Λ_1 и Λ_2 (см. [5, с. 153–158], [6, гл. VI] и здесь п. 2.1): доказаны теоремы существования и единственности решения в классе голоморфных в нуле функций; различные частные случаи этих теорем использованы для описания и развития метода, известного в настоящее время как второй метод Ляпунова в теории устойчивости.

В предположениях $F_1 \in C_{n, a_0}^1$, $F_2 \in C_{m, a_0}^1$ и справедливости (1.9) сингулярная задача Ляпунова, ее обобщения и применения изучены в [1]–[3] и цитированных там более ранних работах автора. (До этих работ сингулярная задача в указанных предположениях, по-видимому, не рассматривалась, а ее решение не связывалось с построением гладких УМР для автономных систем нелинейных ОДУ и другими приложениями.)

Основной сингулярной задачей Ляпунова называем задачу вида

$$\partial \rho \partial x [\Lambda_1 x + F_1(x, \rho)] = \Lambda_2 \rho + F_2(x, \rho), \quad x \in \Omega_x(c), \quad (2.5)$$

$$\rho(0) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь $x \in \mathbb{K}^n$, $\rho \in \mathbb{K}^m$, $\partial \rho / \partial x \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\Lambda_1 \in L(\mathbb{K}^n)$, $\Lambda_2 \in L(\mathbb{K}^m)$, $F_1 : \overline{\Omega}_{x, \rho}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $F_2 : \overline{\Omega}_{x, \rho}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^m$.

2.1. Существование и единственность голоморфного решения

Первая теорема Ляпунова. Пусть действительные части всех СЗ матрицы Λ_1 отличны от нуля и одного знака и пусть не существует никаких соотношений вида

$$\sum_{j=1}^n l_j \lambda_j(\Lambda_1) = \lambda_s(\Lambda_2), \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.7)$$

для целых $l_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, таких, что

$$\sum_{j=1}^n l_j > 0; \quad (2.8)$$

пусть $F_1 \in H_{n, a_0}$, $F_2 \in H_{m, a_0}$, причем для $(x, \rho) \in \overline{\Omega}_{x, \rho}(a_0)$ справедливо

$$F_1(x, \rho) = [x; \rho]_2, \quad (2.9)$$

$$F_2(0, \rho) = [\rho]_2, \quad F_2(x, 0) = [x]_v, \quad (2.10)$$

где $v \geq 1$.

Тогда $\exists c_0$, $0 < c_0 \leq a_0$, такое, что $\forall c : 0 < c \leq c_0$, в классе $H_m(\Omega_x(c))$ существует единственное решение $\hat{\rho}(x)$ задачи (2.5), (2.6), причем справедливо

$$\hat{\rho}(x) = [x]_v, \quad x \in \Omega_x(c). \quad (2.11)$$

Рассмотрим теперь сингулярную задачу Ляпунова с дополнительным требованием

$$\partial \rho \partial x(0) = 0. \quad (2.12)$$

Вторая теорема Ляпунова. Пусть в предположениях предыдущей теоремы неравенство (2.8) заменено неравенством $\sum_{j=1}^n l_j > 1$, а условия (2.9), (2.10) — требованиями

$$F_1(x, 0) = [x]_2, \quad F_1(0, \rho) = [\rho]_1, \quad F_2(x, \rho) = [x, \rho]_2, \quad (x, \rho) \in \bar{\Omega}_{x, \rho}(a_0).$$

Тогда $\exists c_0, 0 < c_0 \leq a_0$, такое, что $\forall c : 0 < c \leq c_0$, в классе $H_m(\Omega_x(c))$ существует единственное решение $\hat{\rho}(x)$ задачи (2.5), (2.6), (2.12), причем если справедливо (2.10) при $v \geq 2$, то справедливо (2.11).

Доказательства этих утверждений тесно связаны с приведенной ниже леммой, представляющей самостоятельный интерес и следующей из результатов [5, с.101–106].

Обозначим N_p -мерное линейное пространство однородных m -векторных форм p -й степени по $x_1, \dots, x_n$ через $F_{m,n}^{N_p}$, т.е. любой элемент $\rho_{(p)}$ этого пространства имеет вид

$$\rho_{(p)}(x) = \sum_{|l|=p} \rho_l x^l, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad (2.13)$$

где p — фиксировано, $p \geq 1$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндекс, $0 \leq l_j$ — целые, $|l| = \sum_{j=1}^n l_j$, $x^l = x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, $\rho_l \in \mathbb{K}^m$. Размерность N_p этого пространства, как нетрудно убедиться, находится по формуле $N_p = m C_{n+p-1}^p$ (здесь C_{n+p-1}^p — коэффициент при t^p в разложении производящей функции $f(t) = (1-t)^{-n} - 1$).

В пространстве $F_{m,n}^{N_p}$ рассмотрим линейный конечномерный оператор $L_{(p)} : F_{m,n}^{N_p} \rightarrow F_{m,n}^{N_p}$ такой, что

$$L_{(p)} \rho_{(p)} = \frac{\partial \rho_{(p)}}{\partial x} \Lambda_1 x - \Lambda_2 \rho_{(p)}. \quad (2.14)$$

Лемма Ляпунова. Все СЗ оператора $L_{(p)}$ найдутся по формуле

$$\lambda_{s, l_1, \dots, l_n}(L_{(p)}) = \sum_{j=1}^n l_j \lambda_j(\Lambda_1) - \lambda_s(\Lambda_2), \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.15)$$

где $0 \leq l_j$ — целые, $|l| = p$, причем при каждом $s : 1 \leq s \leq m$, ни один из наборов $\{l_1, \dots, l_n\}$ не встречается более одного раза.

Отсюда, в частности, следует, что уравнение

$$L_{(p)} \rho_{(p)} = \chi_{(p)}, \quad \chi_{(p)} \in F_{m,n}^{N_p}, \quad (2.16)$$

однозначно разрешимо в пространстве $F_{m,n}^{N_p}$, если не существует никаких соотношений вида (2.15), где $0 \leq l_j$ — целые, $|l| = p$. В частности, при выполнении (1.9) уравнение (2.16) однозначно разрешимо в пространстве $F_{m,n}^{N_p}$.

Следствие 1. Пусть $F_1 \in H_{n,a_0}$, $F_2 \in H_{m,a_0}$, а в остальном выполняются условия первой (или второй) теоремы Ляпунова. Представим голоморфное решение задачи (2.5), (2.6) (или задачи (2.5), (2.6), (2.12)) в виде

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{p=v}^{\infty} \rho_{(p)}(x), \quad x \in \Omega_x(c), \quad \rho_{(p)} \in F_{m,n}^{N_p}, \quad (2.17)$$

и положим

$$F_1(x, \hat{p}(x)) = \sum_{\substack{|\tau|, |s|=0 \\ |\tau|+|s| \geq 2-\delta_{|\tau|,0}}}^{\infty} F_{\tau s}^{(1)} x^{\tau} \left(\sum_{|l|=v}^{\infty} \rho_l x^l \right)^s = \sum_{p=2}^{\infty} F_{(p)}^{(1)}(x, \rho_{(v)}, \dots, \rho_{(p-1)}) + \partial F_1 \partial \rho(0,0) \sum_{p=v}^{\infty} \rho_{(p)} \quad (2.18)$$

(второе слагаемое отсутствует для первой теоремы Ляпунова),

$$F_2(x, \hat{p}(x)) = \sum_{\substack{|\tau|, |s|=0 \\ |\tau|+|s| \geq v \delta_{|s|,0} + 2(1-\delta_{|s|,0})}}^{\infty} F_{\tau s}^{(2)} x^{\tau} \left(\sum_{|l|=v}^{\infty} \rho_l x^l \right)^s = F_{(v)}^{(2)}(x) + \sum_{p=v+1}^{\infty} F_{(p)}^{(2)}(x, \rho_{(v)}, \dots, \rho_{(p-1)}); \quad (2.19)$$

здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $F_{(p)}^{(1)} \in F_{n,n}^N$, $F_{(p)}^{(2)} \in F_{m,n}^N$,

$$F_{(v)}^{(2)}(x) = \sum_{|l|=v} F_{l,0}^{(2)} x^l,$$

а коэффициенты разложений $F_{(p)}^{(j)}$ по x^l ($j = 1, 2, |l| = p$), образованы из коэффициентов $F_{\tau s}^{(j)}$ и коэффициентов разложений предыдущих форм $\rho_{(v)}, \dots, \rho_{(p-1)}$ с помощью только действий типа сложения и умножения.

Тогда слагаемые ряда (2.17) удовлетворяют рекуррентной последовательности уравнений

$$L_{(p)} \rho_{(p)} = \chi_{(p)}(x, \rho_{(v)}, \dots, \rho_{(p-1)}), \quad p = v, v+1, \dots, \quad (2.20)$$

где оператор $L_{(p)}$ определен в (2.14),

$$\begin{aligned} \chi_{(v)} &= F_{(v)}^{(2)}, \\ \chi_{(p)} &= F_{(p)}^{(2)} - \sum_{k=v}^{p-1} \partial \rho_{(k)} \partial x \left[\begin{array}{c} F_{(p-k+1)}^{(1)} + \\ + \partial F_1 \partial \rho(0,0) \rho_{(p-k+1)} \end{array} \right], \quad p \geq v+1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

т.е. при каждом $p \geq v$ из (2.20) получается невырожденная система N_p линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов ρ_l формы (2.13) ($|l| = p$) и тем самым эти коэффициенты могут быть определены и притом однозначно.

2.2. Существование и единственность решения в классе $C_m^1(\Omega_x(c))$, оценки решения

Соотношение 3. Для $F_j(x, \rho), j = 1, 2$, справедливо $F_1 \in C_{n,a}^1, F_2 \in C_{m,a_0}^1$,

$$F_j(0,0) = 0, \quad \partial F_j \partial x(0,0) = 0, \quad \partial F_j \partial \rho(0,0) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.22)$$

Пусть выполняются соотношения 1, 3. Зафиксируем число $q \in (0,1)$ и выберем $\delta \in (0, a_0)$ из условия

$$\max_{j=1,2} \sup_{(x,\rho) \in \bar{\Omega}_{x,\rho}(\delta)} \left\{ \max \left[\left| \partial F_j \partial x(x,\rho) \right|; \left| \partial F_j \partial \rho(x,\rho) \right| \right] \right\} \leq q / (2J), \quad (2.23)$$

где J определено в (1.12), (1.13). В силу (2.22) выполнения (2.23) можно добиться за счет выбора δ .

Используя обозначение (1.14), введем величины $c_1 = c_1(\delta)$ и $d = d(\delta)$ по формулам (1.15) и приведем обобщение первой теоремы Ляпунова.

Теорема 4. Пусть выполняются соотношения 1, 3; пусть для фиксированного $q \in (0,1)$ определены $\delta, c_1(\delta), d(\delta)$ указанным выше способом.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\forall c : 0 < c \leq c_1$, в классе $C_m^1(\Omega_x(c))$ существует единственное решение $\hat{p}(x)$ задачи (2.5), (2.6), причем $\hat{p}(x)$ удовлетворяет условию (2.12) и справедлива оценка

$$|\hat{\rho}(x)| \leq K_1 q |x| / (1 - q), \quad x \in \Omega_x(c);$$

это решение однозначно продолжается в область $\tilde{\Omega}_x$, $\tilde{\Omega}_x \subseteq \bar{\Omega}_x(\delta)$, порожденную x -характеристиками системы (1.8) — проекциями на x -пространство решений x -параметрического семейства задач (1.8), (1.17), (1.18), где вектор параметров $x^{(0)}$ удовлетворяет требованию (1.16) причем

$$\sup_{x \in \tilde{\Omega}_x} |\hat{\rho}(x)| \leq d;$$

2) если $\exists \beta : 0 < \beta = \text{const}$, и $\forall c : 0 < c \leq a_0, \exists C_1(c) : 0 < C_1(c) = \text{const}$ такие, что выполняется неравенство

$$|\partial F_2 \partial x(x, 0)| \leq C_1(c) |x|^\beta, \quad x \in \Omega_x(c), \quad (2.24)$$

то справедлива оценка

$$|\hat{\rho}(x)| \leq C_1(c) J_2 K_1^{\beta+1} |x|^{\beta+1} / \left[(1 - q/2)(1 - q)^{\beta+1} \right], \quad x \in \Omega_x(c); \quad (2.25)$$

3) если $F_1 \in C_{n,a_0}^k, F_2 \in C_{m,a_0}^k, k \geq 1$, то $\hat{\rho} \in C_m^k(\Omega_x(c))$;

4) если $F_1 \in H_{n,a_0}, F_2 \in H_{m,a_0}$, то $\hat{\rho} \in H_m(\Omega_x(c))$, причем если справедливо (2.10) при $v \geq 2$ и $x \in \bar{\Omega}_x(a_0)$, то $\hat{\rho}(x) = [x]_v, x \in \Omega_x(c)$.

Следствие 2. Пусть не выполнено одно из условий в (2.22), а именно,

$$\partial F_2 \partial x(0, 0) = D \neq 0, \quad D \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m),$$

а в остальном пусть выполняются предположения теоремы 4. Пусть $(m \times n)$ -матрица α есть решение уравнения

$$\Lambda_2 \alpha - \alpha \Lambda_1 = -D, \quad (2.26)$$

что влечет представление

$$\alpha = - \int_0^\infty \exp(-\Lambda_2 \tau) D \exp(\Lambda_1 \tau) d\tau. \quad (2.27)$$

Пусть $F_j(x, \rho), j = 1, 2$, определены в области $\bar{\Omega}_x(a_0) \times \{\rho : |\rho| \leq (1 + |\alpha|)a_0\}$. Тогда замена $\rho = \alpha x + \tilde{\rho}$ приводит задачу (2.5), (2.6) к аналогичной задаче для $\tilde{\rho}$ с функциями $\tilde{F}_1(x, \tilde{\rho}) = F_1(x, \alpha x + \tilde{\rho}), \tilde{F}_2(x, \tilde{\rho}) = F_2(x, \alpha x + \tilde{\rho}) - \alpha F_1(x, \alpha x + \tilde{\rho}) - Dx$, для которых уже выполняются условия теоремы 4.

Представление (2.27) можно проверить, следуя подходу [13, § 4, п. 4]: подставляя (2.27) в (2.26), получаем

$$\begin{aligned} -\Lambda_2 \int_0^\infty \exp(-\Lambda_2 \tau) D \exp(\Lambda_1 \tau) d\tau + \int_0^\infty \exp(-\Lambda_2 \tau) D \exp(\Lambda_1 \tau) d\tau \Lambda_1 = \\ = \int_0^\infty d(\exp(-\Lambda_2 \tau) D \exp(\Lambda_1 \tau)) = -D. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Замечание 4. Если $F_1(x, \rho) \equiv 0$, то в теореме 4 относительно Λ_1 достаточно предполагать $\text{Re} \lambda(\Lambda_1) \leq -\mu$ для всех СЗ Λ_1 , где СЗ Λ_1 , для которых $\text{Re} \lambda(\Lambda_1) = -\mu$, “не тянут жордановы цепочки”. При этом в (1.15) достаточно положить $c_1(\delta) = \delta / K_1$, а в правой части (2.23) будет $q / (2J_2)$. Если, кроме того, справедливо $F_2(x, \rho) \equiv F_2(x) = \sum_{p=v}^K F_{(p)}^{(2)}(x)$, $F_{(p)}^{(2)} \in F_{m,n}^{N,p}$, $v \geq 1$, т.е. F_2 —векторный многочлен по компонентам x , то решением задачи (2.5), (2.6) также, очевидно, будет многочлен $\hat{\rho}(x) = \sum_{p=v}^K \rho_{(p)}(x)$, $\rho_{(p)} \in F_{m,n}^{N,p}$, и в этом простейшем случае решение (2.5), (2.6) определено глобально, т.е. для всех $x \in \mathbb{K}^n$. Например, для скалярного уравнения

$$\rho' \lambda_1 x = \lambda_2 \rho - \sum_{p=v}^K p x^p$$

получаем ответ

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{p=v}^K p x^p / (\lambda_2 - p \lambda_1).$$

Замечание 5. В [19] изучается, как вспомогательная, следующая скалярная сингулярная ЗК (см. в [19] задачу (3.2) в п. 3):

$$rh' + bh = rf(r, h) + h^2 g(r, h), \quad h(0) = 0,$$

где $f(r, h), g(r, h)$ — вещественные аналитические в точке $(0, 0)$ функции. Приводится утверждение, что при $b > -1$ существует единственное аналитическое в нуле решение этой задачи (см. в [19] теорему 3.1 и два способа ее доказательства, одно из которых принадлежит Л. Ниренбергу). Нетрудно, однако, заметить, что это утверждение сразу следует из первой теоремы Ляпунова, а из теоремы 4 и следствия 2 следует, что это решение единственно в классе $C^1_1(\Omega_r(r_0))$.

Замечание 6. Легко построить пример, когда при невыполнении соотношения 3 для $F_1(x, \rho)$ задача (2.5), (2.6) имеет не одно решение: скалярное ОДУ

$$\rho'(\lambda_1 x + m\rho) = \lambda_2 \rho,$$

где $m \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, имеет, по крайней мере, два решения, обращающиеся в нуль при $x = 0$:

$$\rho_1(x) \equiv 0, \quad \rho_2(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)x / m.$$

При этом для первого из этих решений $\rho_1(x)$, и только для него, выполнены условия второй теоремы Ляпунова, а также условия приведенной здесь далее теоремы 5.

Для обобщения второй теоремы Ляпунова введем

Соотношение 4. Для $F_j(x, \rho), j = 1, 2$, справедливо: $F_1 \in C^1_{n, a_0}, F_2 \in C^1_{m, a_0}, 0 < a_0 \leq 1$,

$$F_j(0, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \partial F_1 \partial x(0, 0) = 0, \quad \partial F_2 \partial \rho(0, 0) = 0, \quad (2.29)$$

$$\partial F_1 \partial \rho(0, 0) = M \neq 0, \quad M \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n), \quad (2.30)$$

$$|\partial F_2 \partial x(x, \rho)| \leq C(|x|^\gamma + |\rho|^\gamma), \quad (x, \rho) \in \bar{\Omega}_{x, \rho}(a_0), \quad (2.31)$$

где $0 < C = \text{const}, 0 < \gamma = \text{const}$.

Пусть выполняются соотношения 1, 4. Зафиксируем числа q и Δ , $0 < q < 1, 0 < \Delta < \gamma$, и выберем $\delta \in (0, a_0)$, при котором справедливы неравенства

$$\sup_{(x, \rho) \in \Omega_{x, \rho}(\delta)} \left\{ \max \left[2|\partial F_1 \partial x(x, \rho)|; 2|\partial F_1 \partial \rho(x, \rho) - M|; |\partial F_2 \partial \rho(x, \rho)| \right] \right\} \leq q / (2J), \quad (2.32)$$

$$|M| \delta^\Delta \leq q / (2J_1), \quad 2C \delta^{\gamma-\Delta} \leq q / (2J_2), \quad (2.33)$$

где J, J_1, J_2 определены в (1.12), (1.13) (здесь $\delta = \delta(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ и при $\Delta \rightarrow \gamma - 0$). Для выбранного δ определим величины $c_1(\delta)$ и $d(\delta)$ по формулам (1.15) и приведем обобщение второй теоремы Ляпунова.

Теорема 5. Пусть выполняются соотношения 1, 4; пусть для фиксированных $q \in (0, 1)$ и $\Delta \in (0, \gamma)$ определены $\delta, c_1(\delta), d(\delta)$ указанным выше способом. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\forall c : 0 < c \leq c_1$, в классе $C^1_m(\Omega_x(c))$ существует единственное решение $\hat{\rho}(x)$ задачи (2.5), (2.6), удовлетворяющее дополнительному требованию

$$\rho(x) = O(|x|^{1+\Delta}), \quad |x| \rightarrow 0, \quad (2.34)$$

причем при выполнении (2.24), где $\beta \geq \gamma$, справедлива оценка (2.25);

- 2) если $F_1 \in C_{n,a_0}^k$, $F_2 \in C_{m,a_0}^k$, $k \geq 1$, то $\hat{\rho} \in C_m^k(\Omega_x(c))$;
 3) если $F_1 \in H_{n,a_0}$, $F_2 \in H_{m,a_0}$, то $\hat{\rho} \in H_m(\Omega_x(c))$, причем если справедливо (2.10) при $v \geq 2$ и $x \in \Omega_x(a_0)$, то $\hat{\rho}(x) \equiv [x]_v$, $x \in \Omega_x(c)$, и справедлива оценка (2.25) при $\beta = v - 1$.

Учитывая следствие 1, получаем

Утверждение 2. Пусть $F_1 \in H_{n,a_0}$, $F_2 \in H_{m,a_0}$, а в остальном выполняются условия теоремы 4 (или теоремы 5). Тогда для голоморфного решения основной сингулярной задачи Ляпунова (2.5), (2.6) (или задачи (2.5), (2.6), (2.12)) слагаемые ряда (2.17) последовательно определяются по формулам

$$\rho_{(p)}(x) = -\int_0^\infty \exp(-\Lambda_2 \tau) \chi_{(p)}(\exp(\Lambda_1 \tau)x, \rho_{(v)}(\exp(\Lambda_1 \tau)x), \dots, \rho_{(p-1)}(\exp(\Lambda_1 \tau)x)) d\tau, \quad (2.35)$$

где $p = v, v+1, \dots$, а однородные формы $\chi_{(p)}(x, \rho_{(v)}, \dots, \rho_{(p-1)})$ образованы по формулам (2.18), (2.19), (2.21).

Замечание 7. Как уже отмечалось, для примера в замечании 6 условия теоремы 5 выполнены для решения $\rho_1(x) \equiv 0$. Следующий пример показывает, что нарушение условий обеих теорем 4, 5 для $F_j(x, \rho)$, $j = 1, 2$, приводит, например, к неединственности решения задачи (2.5), (2.6) и несуществованию решения задачи (2.5), (2.6), (2.12) (или задачи (2.5), (2.6), (2.34)). Например, скалярное ОДУ

$$\rho'(\lambda x + \rho) = ax$$

при $a \neq -\lambda^2 / 4$ имеет два решения, обращающиеся в нуле в нуль,

$$\rho_j = \alpha_j x, \quad j = 1, 2,$$

где

$$\alpha_{1,2} = -\lambda / 2 \pm \sqrt{\lambda^2 / 4 + a},$$

и не имеет ни одного решения, удовлетворяющего условиям $\rho(0) = (d\rho / dx)(0) = 0$.

Приведем еще одно ОДУ, удобное тем, что оно также полностью интегрируется явно:

$$d\rho dx (\lambda x + m\rho) = -\lambda\rho + ax^k,$$

где $m \neq 0, \lambda \neq 0, k \geq 1, a \neq 0$ при $k > 1$ и $a > -\lambda^2 / m^2$ при $k = 1$. Это уравнение записывается в виде

$$(\lambda x\rho + m\rho^2 / 2)' = ax^k,$$

т.е.

$$\lambda x\rho + m\rho^2 / 2 = ax^{k+1} / (k+1) + \text{const.}$$

Для решений, удовлетворяющих условию $\rho(0) = 0$, имеем

$$\rho_{\pm}(x) = -\lambda xm \pm \sqrt{\lambda^2 x^2 m^2 + 2ax^{k+1}m(k+1)},$$

т.е. при $k \geq 1$, когда условия теоремы 4 не выполнены, имеем два решения, причем при $k > 1$ ровно одно из них $\rho_+(x)$ удовлетворяет дополнительному требованию типа (2.34) (для этого решения выполнены условия теоремы 5), а при $k = 1$, когда условия обеих теорем 4, 5 не выполняются, таких решений нет.

Замечание 8. Частным случаем задачи (2.5), (2.6) является сингулярная задача Коши для ОДУ

$$\begin{aligned} dydt [\lambda_1 t + f(t, y)] &= \Lambda_2 y + F_2(t, y), \\ |t| &\leq t_0, \quad t_0 > 0, \quad y(0) = 0, \end{aligned}$$

где λ_1, f — скалярные величины. При $f(t, y) \equiv 0, \lambda_1 = -1$ эта задача, представляющая самостоятельный интерес (см., в частности, замечание 5), подробно изучена при достаточно общих предположениях как для некоторых классов систем нелинейных ОДУ (см. [18]), так и для функционально-дифференциальных и операторных уравнений (см., например, [13]–[17] и цитированные там работы). В частности, во втором примере замечания 7 такая задача отвечает случаю $m = 0$. Тогда выполнены условия теоремы 4

(при $k > 1$) или следствия 2 (при $k = 1$), и единственное решение основной сингулярной задачи Ляпунова имеет вид

$$\rho(x) = ax^k / [\lambda(k+1)]$$

(параметр m является параметром бифуркации для указанной задачи с критическим значением $m = 0$). Это решение имеет смысл и при $0 < k < 1$, но уже в классе функций, которые не дифференцируемы в нуле; его существование и единственность не укладываются в рамки теорем данной работы, но следуют из более общих результатов для функционально-дифференциальных уравнений.

3. О ГЛАДКИХ ПОЛЯХ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ СИСТЕМ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СОПУТСТВУЮЩИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Пусть на бесконечном интервале рассматривается автономная система N нелинейных ОДУ второго порядка

$$y'' = Q(y, y'), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad y, y' \in G_N, \quad (3.1)$$

где $Q \in C_N(G_N \times G_N)$, и пусть в $2N$ -мерном фазовом пространстве этой системы задано разрешенное относительно производной нелинейное соотношение

$$y' = \alpha(y), \quad y \in \tilde{G}_N \subseteq G_N, \quad (3.2)$$

где $\alpha \in C_N(\tilde{G}_N)$.

Определение 5. Пусть соотношение (3.2) задает инвариантное относительно τ N -мерное УМР в $2N$ -мерном фазовом пространстве системы (3.1) для всех $\tau \geq 0$ ($\tau \leq 0$). Такое УМР будем называть N -мерным полем, отвечающим данной системе. Поле назовем гладким, если $\alpha \in C_N^k(\tilde{G}_N)$, $k \geq 1$.

Теорема 6. Соотношение (3.2) тогда, и только тогда, задает гладкое N -мерное поле для решений системы (3.1), когда $\alpha(y)$ есть решение уравнения

$$\partial \alpha \partial y \alpha = Q(y, \alpha). \quad (3.3)$$

Теорема 7. Пусть $\{y, y'\} = \{0, 0\}$ — стационарная точка системы (3.1), т.е. $\{0, 0\} \in G_N \times G_N$, $Q(0, 0) = 0$. Для того, чтобы это стационарное решение принадлежало гладкому полю (3.2), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(y)$ было решением уравнения (3.3), удовлетворяющим условию

$$\alpha(0) = 0. \quad (3.4)$$

Пусть теперь система (3.1) имеет вид

$$y'' = Ay' + By + F(y, y'), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (3.5)$$

где A и B — постоянные матрицы, $A, B \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N)$, $F: \bar{\Omega}_{y, y'}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^N$, $F(y, y') = o(|y| + |y'|)$, $|y| + |y'| \rightarrow 0$. Ассоциированным с ОДУ (3.5) является квадратное матричное уравнение

$$\Lambda^2 - A\Lambda - B = 0. \quad (3.6)$$

Нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 8. Пусть существуют квадратные матрицы Λ_1 и Λ_2 , $\Lambda_j \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие уравнению (3.6) и условиям

$$\det(\Lambda_1 - \Lambda_2) \neq 0, \quad (3.7)$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1. \quad (3.8)$$

Тогда справедливы матричные формулы Виета:

$$A = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad B = -\Lambda_1 \Lambda_2. \quad (3.9)$$

Обратно, пусть матрицы A и B определены по формулам (3.9), где $\Lambda_j \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N)$, $j = 1, 2$, и справедливо равенство (3.8).

Тогда Λ_1 и Λ_2 являются решениями уравнения (3.6).

Пусть Λ_1 и Λ_2 такие решения уравнения (3.6), что справедливы равенства (3.7), (3.8). В фазовом пространстве системы (3.5) зададим соотношение

$$y' = \Lambda_1 y + \rho(y), \quad y \in \Omega_y(c), \quad (3.10)$$

где $\rho \in C_N(\Omega_y(c))$, $0 < c \leq a_0$. Тогда для того, чтобы соотношение (3.10) задавало гладкое поле для решений системы (3.5), содержащее стационарное решение $\{y, y'\} = \{0, 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(y)$ было решением задачи типа Ляпунова:

$$\begin{aligned} \partial \rho \partial y (\Lambda_1 y + \rho) &= \Lambda_2 \rho + F(y, \Lambda_1 y + \rho), \\ y &\in \Omega_y(c), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\rho(0) = 0. \quad (3.12)$$

Достаточные условия существования и единственности решения задачи (3.11), (3.12) получаем из теоремы 5. Таким образом вопрос сводится к существованию и построению корней квадратного матричного уравнения (3.6), удовлетворяющих соотношениям 1 и равенствам (3.8), (3.9).

Следуя [1], где, в частности, исправлены неточности, допущенные в [9], зафиксируем нужные нам свойства корней квадратного матричного уравнения (3.6) в переработанном и дополненном виде. Приведенные ниже утверждения достаточно просты, однако большая часть из них нами в литературе не обнаружена.

Известно (см. [21, §17], [9]), как получить множество решений уравнения (3.6), выделяя N -мерные инвариантные подпространства сопутствующего линейного оператора $L: \mathbb{K}^{2N} \rightarrow \mathbb{K}^{2N}$, где $L = \begin{pmatrix} 0 & E_N \\ B & A \end{pmatrix}$. В самом деле, уравнение (3.6) эквивалентно соотношению $L \begin{pmatrix} E_N \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_N \\ \Lambda \end{pmatrix} \Lambda$. Возьмем какое-либо N -мерное подпространство (обозначим его $\mathbb{K}_{(L)}^N$), инвариантное относительно L . Возьмем какой-либо базис в $\mathbb{K}_{(L)}^N$ и из этих столбцов составим $2N \times N$ -матрицу $S = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$, где $M_j \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^N)$, $j = 1, 2$. Тогда справедливо $LS = SM$, $M_2 = M_1 M$. Если $\det M_1 \neq 0$, и только в этом случае, заменим S на $\tilde{S}$ (также дающую базис): $\tilde{S} = SM_1^{-1} = \begin{pmatrix} E_N \\ \tilde{M} \end{pmatrix}$, $\tilde{M} = M_2 M_1^{-1}$. Тогда окончательно получаем $L \begin{pmatrix} E_N \\ \tilde{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_N \\ \tilde{M} \end{pmatrix} \tilde{M}$, $\Lambda = \tilde{M} = M_1 M M_1^{-1}$ (тем самым максимальное возможное число различных решений уравнения (3.6) равно C_{2N}^N ; см. [21, с. 138]).

Из этого способа сразу вытекает справедливость следующих утверждений (см., например, [9]).

Утверждение 3. Пусть Λ_1 и Λ_2 — два решения уравнения (3.6), не имеющие общих СЗ. Тогда для них выполняется требование (3.7).

Утверждение 4. Пусть Λ_1 и Λ_2 — два решения уравнения (3.6), удовлетворяющие соотношениям 1. Тогда такая пара матриц единственна.

Так как нас интересуют коммутирующие решения уравнения (3.6), то обратимся к известным свойствам коммутирующих матриц. Пусть C и D — коммутирующие матрицы порядка N . Пусть X_λ — собственное подпространство матрицы C , отвечающее СЗ λ , т.е. X_λ — множество решений уравнения $(C - \lambda E_N)x = 0$, $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда, очевидно, X_λ инвариантно относительно D . Отсюда следует тот известный факт, что перестановочные матрицы всегда имеют хотя бы один общий СВ (см. [20, с. 221]), и, в частности, если C и D простой структуры, то существует общий базис в $\mathbb{K}^N$, в котором обе эти матрицы имеют диагональный вид (см. [20, с. 186]). В общем случае по индукции получаем

Утверждение 5. Пусть C и D — коммутирующие матрицы порядка N . Тогда для них существует общий ортонормированный базис в $\mathbb{K}^N$, в котором обе эти матрицы имеют верхний треугольный вид.

Обратимся к построению коммутирующих решений уравнения (3.6). Введем обозначения

$$D = A^2 + 4B, \quad R = \sqrt{D}, \quad (3.13)$$

$$\Lambda_1 = (A - R) / 2, \quad \Lambda_2 = (A + R) / 2. \quad (3.14)$$

Здесь под $\sqrt{D}$ понимается пока любая матрица R такая, что $R^2 = D$, если таковая существует. Если матрица D непростой структуры, то существование R , во всяком случае, обеспечивается выполнением требования

$$\det D = \det(A^2 + 4B) \neq 0. \quad (3.15)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что справедлива

Теорема 9. Матрицы Λ_1 и Λ_2 , определенные по формулам (3.14), тогда, и только тогда, являются решениями уравнения (3.6), когда A коммутирует с R . При этом справедливы равенства (3.7), (3.8).

Очевидным является

Утверждение 6. Пусть матрицы D и R определены по формулам (3.13) и пусть A коммутирует с R . Тогда A и B коммутируют.

Обратное утверждение (в частности, ошибочно сформулированное в [9]), вообще говоря, неверно, в чем легко убедиться на примерах. Во всяком случае, справедливо

Утверждение 7. Пусть A и B коммутируют и пусть определены матрицы D и R по формулам (3.13), причем R и $-R$ не имеют общих СЗ. Тогда A коммутирует с R .

Доказательство. Пусть $K = AR - RA$. Из равенства $AB = BA$ имеем, в частности, $AR^2 = R^2A$, что равносильно $KR + RK = 0$. Из последнего равенства получаем $K = 0$, так как линейное преобразование $L(K) = KR + RK$ в пространстве $N \times N$ -матриц является невырожденным.

Утверждение доказано.

Пусть далее в (3.6) будет

$$AB = BA. \quad (3.16)$$

На основании утверждения 5, возьмем матрицу T , приводящую одновременно A и B к верхнему треугольному виду, и занумеруем в порядке следования получившиеся диагональные элементы: $\lambda_1(A), \dots, \lambda_N(A)$, $\lambda_1(B), \dots, \lambda_N(B)$. Полагая в (3.14) $\tilde{\Lambda} = T^{-1}\Lambda T$, получим для $\tilde{\Lambda}$ снова уравнение вида (3.14) с верхними треугольными матрицами $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}BT$. Полагая, что в уравнении (3.14) матрицы A и B уже имеют верхний треугольный вид, определим верхние треугольные матрицы Λ_j по формулам (3.13), (3.14) и занумеруем их диагональные элементы в порядке следования: $\lambda_1(\Lambda_j), \dots, \lambda_N(\Lambda_j)$, $j = 1, 2$. Введем обозначения:

$$P_j^{(1)} = [\operatorname{Re}\lambda_j(A)]^2 \operatorname{Re}\lambda_j(B) + [\operatorname{Im}\lambda_j(B)]^2 + \operatorname{Re}\lambda_j(A) \operatorname{Im}\lambda_j(A) \operatorname{Im}\lambda_j(B), \quad j = 1, \dots, N; \quad (3.17)$$

$$P_j^{(2)} = \operatorname{Re}\lambda_j(A) \operatorname{Im}\lambda_j(A) + 2 \operatorname{Im}\lambda_j(B), \quad j = 1, \dots, N; \quad (3.18)$$

$$P_j^{(3)} = [\operatorname{Re}\lambda_j(A)]^2 - [\operatorname{Im}\lambda_j(A)]^2 + 4 \operatorname{Re}\lambda_j(B), \quad j = 1, \dots, N; \quad (3.19)$$

$$\mu_j = -\operatorname{Re}\lambda_j(A) / 2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

Очевидно, что при вычислении СЗ треугольных матриц Λ_j , $j = 1, 2$, через СЗ треугольных матриц A и B можем обращаться с (3.13), (3.14) как со скалярными формулами.

Предварительно напомним скалярные формулы. Пусть a и b — вещественные числа, $a^2 + b^2 \neq 0$; положим $x + iy = \sqrt{a + ib}$, где корень берется с положительной вещественной частью; тогда $x = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + b^2}) / 2}$, $y = \operatorname{sign}(b) \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} - a) / 2}$. Эти формулы однозначно определяют величины x и y для почти всех случаев, кроме $b = 0$, $a < 0$, в этом случае берем $x = 0$, $y = \sqrt{-a}$ или $y = -\sqrt{-a}$. Исключая из рассмотрения тривиальный случай, когда A и B простой структуры, из теоремы 9 и утверждений 6, 7 получаем следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть в (3.6) для матриц A, B выполнены условия (3.15), (3.16), причем A или B непростой структуры, и пусть осуществлено приведенное выше преобразование. Пусть матрица R в (3.13) определена по следующим правилам:

1) если матрица D не имеет $C3$, лежащих на отрицательной вещественной полуоси комплексной плоскости λ , то под R понимаем такой корень из D , что

$$\operatorname{Re} \lambda_j(R) > 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.21)$$

(этим требованием R определяется однозначно);

2) если матрица D имеет отрицательные вещественные $C3$, то под R понимаем какой-либо корень из D такой, что

$$\operatorname{Re} \lambda_j(R) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.22)$$

и справедливо (3.16) (этим требованиями R определяется однозначно, если для всех тех j , для которых $\lambda_j(D) < 0$, под обозначением $\sqrt{\lambda_j(D)}$ понимаем чисто мнимое число с положительной мнимой частью, т.е. берем $\operatorname{Re} \lambda_j(R) = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_j(R) > 0$, в противном случае R определяется неоднозначно).

Тогда формулы (3.14) определяют решения уравнения (3.6), удовлетворяющие соотношениям (3.8), (3.9).

Учитывая результаты [1], получаем

Теорема 11. Пусть выполняются условия теоремы 10.

Тогда для величин (3.14) справедливы следующие утверждения:

1) если для фиксированного $j, 1 \leq j \leq n$, в (3.17) будет $P_j^{(1)} > 0$, то справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_1) < 0, \operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_2) > 0$, а если будет $P_j^{(1)} = 0$, то при $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ справедливо $\operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_1) < 0, \operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_2) = 0$, а при $\operatorname{Re} \lambda_j(A) > 0$ справедливо $\operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_1) = 0, \operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_2) > 0$;

2) если для фиксированного $j, 1 \leq j \leq n$, в (3.18), (3.19) будет $P_j^{(3)} > 0$ или $P_j^{(2)} \neq 0$, то справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_1) < -\mu_j, \operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_2) > -\mu_j$, а если будет $P_j^{(3)} < 0$ и $P_j^{(2)} = 0$, то $\operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_1) = \operatorname{Re} \lambda_j(\Lambda_2) = -\mu_j$, где $\mu_j = -\operatorname{Re} \lambda_j(A) / 2$.

Замечание 9. В заключение этого раздела отметим, что для одного автономного нелинейного ОДУ второго порядка вида (3.5), заданного на полуоси и с малым параметром при старшей производной, в [22], [23] получены, в частности, оценки погрешности переноса предельного условия $\{y, y'\} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$, из бесконечности в достаточно удаленную конечную точку $\tau = \tau_\infty$ с помощью приближенно заданного нелинейного соотношения (3.10). Эти оценки и проведенные в [22], [23] численные эксперименты подтверждают эффективность такого подхода по сравнению с заданием грубых условий, например вида $y(\tau_\infty) = 0$ или $y'(\tau_\infty) = 0$. (Задачи, рассмотренные в [22], [23], являются модельными в теории горения.)

4. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ВНУТРИ И ВНЕ УМР

4.1. О параметрических экспоненциальных рядах Ляпунова, порождающих в фазовом пространстве аналитические УМР

Вернемся к системе (1.8) на неотрицательной вещественной полуоси

$$dx/d\tau = \Lambda_1 x + F_1(x, y), \quad dy/d\tau = \Lambda_2 y + F_2(x, y), \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (4.1)$$

с условием на левом конце

$$x(0) = a, \quad a \in \mathbb{K}^n, \quad (4.2)$$

и с предельными условиями на бесконечности

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\exp(\mu\tau)x(\tau)] = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\exp(\mu\tau)y(\tau)] = 0, \quad (4.3)$$

где $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$, $m + n = N$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ — вектор параметров, $\Lambda_{1,2}$ — постоянные матрицы, $\Lambda_1 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$, $\Lambda_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{K}^m)$, $F_1 : \bar{\Omega}_{x,y}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^n$, $F_2 : \bar{\Omega}_{x,y}(a_0) \rightarrow \mathbb{K}^m$, и выполняются условия теоремы 4 или теоремы 5. Рассмотрим задачу (4.1), (4.3) как сингулярную ЗК. Тогда, на основании результатов подразделов 2.1, 2.2 эта задача обладает n -параметрическим семейством решений, значения которых порождают в окрестности точки $x = 0, y = 0$ фазового пространства n -мерное гладкое УМР $M_+^{(n)}$, инвариантное относительно τ и задаваемое соотношением (2.2), где $\rho(x)$ есть решение задачи (2.5), (2.6). При этом при каждом фиксированном a , достаточно малом по норме, решение КрЗ (4.1)–(4.3) существует, единственно и принадлежит УМР для всех $\tau \geq 0$.

Пусть теперь $F_1 \in H_{n,a_0}$, $F_2 \in H_{m,a_0}$, а в остальном выполняются приведенные выше предположения. Тогда для аналитического УМР $M_+^{(n)}$ имеем

$$M_+^{(n)} : y = \rho(x), \quad \rho(x) = [x]_v, \quad v \geq 2, \quad x \in \Omega_x(c), \quad (4.4)$$

где $\rho(x)$ — голоморфное в нуле решение сингулярной задачи Ляпунова (2.5), (2.6). Из результатов Ляпунова [5, §23] следует, что решения системы (4.1), значения которых порождают УМР (4.4), представимы сходящимися n -параметрическими экспоненциальными рядами с коэффициентами, имеющими рост не выше степенного. При выполнении указанных выше предположений эти ряды могут быть построены с помощью простой рекурсивной процедуры, дающей представление об устройстве этих рядов. В самом деле, представим решения задачи (4.1)–(4.3) (т.е. решения, принадлежащие УМР (4.4) для всех $\tau \geq 0$) в виде разложений по степеням параметров $a_1, \dots, a_n$:

$$x(\tau, a) = \sum_{p=1}^{\infty} x_{(p)}(\tau, a), \quad y(\tau, a) = \sum_{p=v}^{\infty} y_{(p)}(\tau, a), \quad \tau \geq 0, \quad (4.5)$$

где $x_{(p)}(\tau, a)$ ($y_{(p)}(\tau, a)$) — однородная n -векторная (m -векторная) форма степени p величин $a_1, \dots, a_n$,

$$x_{(p)}(\tau, a) = \sum_{|l|=p} X_l(\tau) a^l, \quad (4.6)$$

$$X_l(\cdot) \in \mathbb{K}^n, \quad |l| = p, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$y_{(p)}(\tau, a) = \sum_{|l|=p} Y_l(\tau) a^l, \quad (4.7)$$

$$Y_l(\cdot) \in \mathbb{K}^m, \quad |l| = p, \quad p = v, v+1, \dots,$$

причем из (4.2), (4.3) следует выполнение условий

$$x_{(1)}(0, a) = a, \quad x_{(p)}(0, a) = 0, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (4.8)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\exp(\mu\tau) x_{(p)}(\tau, a)] = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\exp(\mu\tau) y_{(p)}(\tau, a)] = 0, \quad p = v, v+1, \dots \quad (4.10)$$

Далее представим

$$F_j(\sum_{p=1}^{\infty} x_{(p)}(\tau, a), \sum_{p=v}^{\infty} y_{(p)}(\tau, a)), \quad j = 1, 2,$$

в виде разложений по формам:

$$\begin{aligned}
& F_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} x_{(p)}(\tau, a), \sum_{p=v}^{\infty} y_{(p)}(\tau, a) \right) = \\
& = \sum_{\substack{|q|, |s|=0 \\ |q|+|s| \geq (2-j)(2-\delta_{|q|,0}) + (j-1)(v\delta_{0,|s|} + 2(1-\delta_{0,|s|}))}}^{\infty} F_{qs}^{(j)} \left(\sum_{p=1}^{\infty} x_{(p)}(\tau, a) \right)^q \left(\sum_{p=v}^{\infty} y_{(p)}(\tau, a) \right)^s = \\
& = \sum_{p=2(2-j)+v(j-1)}^{\infty} F_{(p)}^{(j)}(x_{(1)}, \dots, x_{(p-1)}; y_{(v)}, \dots, y_{(p-1)}) + \\
& \quad + (2-j) \partial F_1 \partial y(0,0) \sum_{p=v}^{\infty} y_{(p)},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

где, в частности, справедливо

$$F_{(2)}^{(1)}(x_{(1)}) = \sum_{|q|=2} F_{q0}^{(1)} x_{(1)}^q, \quad F_{(v)}^{(2)}(x_{(1)}) = \sum_{|q|=v} F_{q0}^{(2)} x_{(1)}^q, \tag{4.12}$$

а коэффициенты разложений $F_{(p)}^{(j)}$, $j = 1, 2$, по a^l , $|l| = p$, образованы из коэффициентов $F_{qs}^{(j)}$ и коэффициентов разложений предыдущих форм $x_{(1)}, \dots, x_{(p-1)}$, $y_{(v)}, \dots, y_{(p-1)}$ с помощью только действий типа сложения и умножения.

Подставляя разложения по формам (4.5), (4.11) в (4.1) и собирая формы одинаковой степени, получим рекуррентную последовательность ОДУ для определения этих форм:

$$x'_{(1)} = \Lambda_1 x_{(1)}, \quad y'_{(v)} = \Lambda_2 y_{(v)} + F_{(v)}^{(2)}(x_{(1)}), \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
x'_{(p)} &= \Lambda_1 x_{(p)} + F_{(p)}^{(1)}(x_{(1)}, \dots, x_{(p-1)}) + \\
&+ \delta_{p,v} \partial F_1 \partial y(0,0) y_{(v)}, \quad 2 \leq p \leq v,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$x'_{(p)} = \Lambda_1 x_{(p)} + F_{(p)}^{(1)}(x_{(1)}, \dots, x_{(p-1)}; y_{(v)}, \dots, y_{(p-1)}) + \partial F_1 \partial y(0,0) y_{(p)}, \quad p \geq v+1, \tag{4.15}$$

$$y'_{(p)} = \Lambda_2 y_{(p)} + F_{(p)}^{(2)}((x_{(1)}, \dots, x_{(p-1)}; y_{(v)}), \dots, y_{(p-1)}), \quad p \geq v+1. \tag{4.16}$$

Отсюда, учитывая требования (4.8)–(4.10), окончательно для всех $\tau \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned}
x_{(1)}(\tau, a) &= a \exp(\Lambda_1 \tau), \\
y_{(v)} &= - \int_{\tau}^{\infty} \exp(\Lambda_2(\tau - s)) F_{(v)}^{(2)}(x_{(1)}(s, a)) ds,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
x_{(p)}(\tau, a) &= \int_0^{\tau} \exp(\Lambda_1(\tau - s)) \times \left[F_{(p)}^{(1)}(x_{(1)}(s, a), \dots, x_{(p-1)}(s, a)) + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{p,v} \partial F_1 \partial y(0,0) y_{(v)}(s, a) \right] ds, \\
&2 \leq p \leq v,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
x_{(p)}(\tau, a) &= \int_0^{\tau} \exp(\Lambda_1(\tau - s)) \times \left[F_{(p)}^{(1)} \left(x_{(1)}(s, a), \dots, x_{(p-1)}(s, a); \right. \right. \\
&\quad \left. \left. y_{(v)}(s, a), \dots, y_{(p-1)}(s, a) \right) + \partial F_1 \partial y(0,0) y_{(p)}(s, a) \right] ds, \\
&p \geq v+1,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$y_{(p)}(\tau, a) = -\int_{\tau}^{\infty} \exp(\Lambda_2(\tau - s)) F_{(p)}^{(2)} \times (x_{(1)}(s, a), \dots, x_{(p-1)}(s, a), y_{(v)}(s, a), \dots, y_{(p-1)}(s, a)) ds, \quad (4.20)$$

$$p \geq v + 1.$$

Замечание 10. При сделанных предположениях задача (4.1)–(4.3) эквивалентна ЗК на гладком многообразии (4.4):

$$\frac{dx}{d\tau} = \Lambda_1 x + F_1(x, \rho(x)), \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad x(0) = a,$$

$$y(\tau) = \rho(x(\tau)), \quad \tau \geq 0.$$

Из сравнения формул (4.17)–(4.20) и (2.17), в частности, следует тот общий для теории УМР факт, что строение всего УМР является, как правило, более простым, чем поведение отдельных решений, его порождающих.

О построении УМР и рядов Ляпунова в конкретных прикладных задачах см. в статьях, указанных здесь в заключении, и цитированных там работах.

4.2. О поведении решений вне УМР

Пусть теперь $\{x(\tau); y(\tau)\}$ — какое-либо решение системы (4.1), достаточно малое в момент $\tau = 0$, но не принадлежащее УМР (4.4). Введем функцию уклонения решения от $M_+^{(n)}$:

$$\eta(\tau) = y(\tau) - \rho(x(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Для $\eta(\tau)$ получаем

$$\eta' = \Lambda_2 \eta + W(x(\tau), \eta), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad \eta(0) = \eta_0 \neq 0, \quad (4.21)$$

где $|\eta_0|$ — мало,

$$W(x, \eta) = F_2(x, \eta + \rho(x)) - F_2(x, \rho(x)) - \partial \rho / \partial x(x) [F_1(x, \eta + \rho(x)) - F_1(x, \rho(x))],$$

так что $W(x, 0) \equiv 0, \partial W / \partial \eta(0, 0) = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что при $0 \leq \tau \leq \tau_0$ справедливо $|W(x, \eta)| \leq \varepsilon |\eta|$, если $\max\{\sup_{0 \leq \tau \leq \tau_0} |x(\tau)|; \sup_{0 \leq \tau \leq \tau_0} |y(\tau)|\} \leq \delta_\varepsilon$.

Тогда при выполнении неравенства (1.9) с $\mu = 0$ стандартным образом получаем из (4.21) известную оценку удаления от $M_+^{(n)}$ решения системы (4.1), начинающегося вне этого УМР, но остающегося достаточно малым при $0 \leq \tau \leq \tau_0$:

$$|y(\tau) - \rho(x(\tau))| \geq C \exp(b\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (4.22)$$

где $0 < C = \text{const}$, $0 < b = \text{const}$ (не будем уточнять эти постоянные, см. [11, гл. XIII]). Эта оценка показывает, что расстояние решения $\{x(\tau); y(\tau)\}$, измеренное по нормали к поверхности $y = 0$, есть экспоненциально возрастающая функция τ . Если в (1.9) справедливо $\mu \neq 0$, то соответствующую оценку получим для величины $\exp(\mu\tau)\eta(\tau)$, на чем останавливаться не будем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что результаты изложенной теории применялись в ряде работ для корректной постановки, анализа и численного решения сингулярных нелинейных краевых задач, возникающих в различных прикладных областях. Для примера, наряду с [3], укажем статьи [24]–[26], в которых, в частности, устранены допущенные в литературе неточности при постановке, аппроксимации и численном решении некоторых сингулярных краевых задач математической физики (см. подробнее замечание 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конюхова Н. Б. О стационарной задаче Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 8. С. 1384–1395.

2. Конюхова Н. Б. Об устойчивых многообразиях Ляпунова для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1358–1379.
3. Конюхова Н. Б. Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи // Сообщ. по прикл. матем. ВЦ РАН. М.: ВЦ РАН, 1996.
4. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1995.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.
8. Абрамов А. А. О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 1. С. 275–278.
9. Abramov A. A., Konyukhova N. B. Transfer of admissible boundary conditions from a singular point of linear ordinary differential equations // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1986. 4. N 4. V. 1. P. 245–265 (VNU Science Press., Utrecht, The Netherlands).
10. Абрамов А. А., Конюхова Н. Б. Допустимые граничные условия на бесконечности или в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Numer. Anal. Math. Modelling. 1990. V. 24. P. 181–198 (Banach Center Publ., Warsaw, PWN-Polish Scient. Publs.).
11. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1957.
13. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
14. Конюхова Н. Б. О существовании и единственности решений сингулярных задач Коши для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 798–801.
15. Конюхова Н. Б. О существовании устойчивых начальных многообразий для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 3. С. 535–540.
16. Конюхова Н. Б. Об устойчивых начальных многообразиях для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // В сб.: Аналитич. и числ. методы решения задач матем. физ. М.: ВЦ АН СССР, 1989. С. 136–154.
17. Конюхова Н. Б. Сингулярные задачи Коши для некоторых систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1340–1347.
18. Конюхова Н. Б. Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 3. С. 629–645.
19. Guan P., Li Y. Y. $C^{1,1}$ estimates for solutions of a problem of Alexandrov // Commun. Pure and Appl. Math. 1997. V. 50. P. 789–811.
20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Гостехтеориздат, 1953.
21. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
22. Задорин А. И. Численное решение уравнения с малым параметром на бесконечном интервале // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1671–1682.
23. Задорин А. И. Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром // Сибирский ж. вычисл. матем. 1999. Т. 2. № 1. С. 21–35.
24. Конюхова Н. Б., Курочкин С. В. Сингулярные нелинейные задачи для автомодельных решений уравнений пограничного слоя с нулевым градиентом давления: анализ и численное решение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 10. С. 1619–1645.
25. Konyukhova, N.B. and Sukov, A. I. Smooth Lyapunov manifolds and correct mathematical simulation of nonlinear singular problems in mathematical physics // Mathematical Modeling. Problems, Methods, Applications. — New York—Boston—Dordrecht—London—Moscow: Kluwer Academic/ Plenum Publishers, 2001. P. 205–217.
26. Konyukhova, N.B. and Sukov, A. I. On correct statement of singular BVPs for autonomous systems of nonlinear ODEs with the applications to hydrodynamics // Proc. Inter. Seminar “Day on Diffraction — 2003” (St. Petersburg, Russia, June 24–27, 2003) / Ed. by I. V. Andronov. — St. Petersburg: Faculty of Physics, SPbU, 2003. P. 99–109 (IEEE Xplore, Digital Library, 2003; <https://doi.org/10.1109/DD.2003.23818>).