ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 2, с. 225–231

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.5

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

Л. Т. Ащепков[1,*]

[1]690922 Владивосток, о. Русский, ДВФУ, Россия

*e-mail: ashchepkov@yahoo.com

Поступила в редакцию 22.08.2023 г.
Переработанный вариант 08.09.2023 г.
Принята к публикации 20.10.2023 г.

Предложен метод построения обратной связи, обеспечивающей притяжение траекторий аффинной системы к состоянию равновесия и заданному многообразию. Искомая обратная связь находится в аналитической форме как решение вспомогательной задачи оптимального управления. Приведены достаточные условия существования оптимального управления. Показано применение метода к некоторым классам линейных и нелинейных систем. Библ. 10.

Ключевые слова: притяжение траекторий, устойчивость, достаточные условия оптимальности, синтез системы, существование оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0044466924020046, **EDN:** YKIQMM

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена вопросам обеспечения устойчивости аффинных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с аффинными по управляющим воздействиям правыми частями. Они широко используются в различных технических областях в качестве моделей управляемых объектов (см. [1], [2]). В фазовых пространствах аффинных систем могут находиться особые многообразия, которые вместе с любой точкой содержат все порождаемые управлениями траектории, проходящие через эту точку. Особые многообразия формируют разную «устойчивость» аффинных систем: в классическом понимании, по части переменных (см. [3]) или в форме притяжения траекторий к состоянию равновесия.

Тематически настоящая статья примыкает к публикациям [4], [5]. Новизну исследования составляют постановка основной задачи, ее формулировка в терминах вспомогательной задачи оптимального управления и полученные выводы. Условия вспомогательной задачи учитывают цель управления, возможность задания особого многообразия и дополнительно обеспечивают гладкость искомого управления на всем фазовом пространстве, за исключением состояния равновесия. В результате упрощается анализ задачи, поскольку исключаются из рассмотрения разрывные управления и сопутствующие им скользящие режимы (см. [6]).

2. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим в фазовом пространстве R^n систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор фазового состояния, $u \in \mathrm{R}^m$ – вектор управляющих воздействий, $\dot{x} = dx/dt$, $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ и $B : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{n\times m}$ – векторная и матричная функции с *гладкими* (непрерывными и дифференцируемыми) компонентами, $f(0) = 0$, $m \le n$. Решение $x = 0$ системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ назовем *состоянием равновесия*.

Пусть в фазовом пространстве векторным уравнением $s(x) = 0$ с гладкой функцией $s : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$, $p \le n$, задано многообразие M, содержащее состояние равновесия. Основная задача состоит в нахождении управления $u = u(x)$, обеспечивающего асимптотическое притяжение траекторий замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u(x), \;\; x(0) = x_0, \tag{2}$$

к состоянию равновесия и многообразию M для некоторого множества начальных состояний $x_0 \in \mathrm{R}^n$.

Поясним специфику основной задачи на простом примере аффинной системы

$$\dot{x}_1 = x_1 + u, \;\; \dot{x}_2 = 0, \;\; x_1(0) = x_{10}, \;\; x_2(0) = x_{20}$$

с произвольными начальными условиями. Легко видеть, что все траектории системы независимо от выбора управления находятся на прямой $x_2 = x_{20}$ фазовой плоскости. Если $x_{20} \neq 0$, то приблизить с помощью управления траекторию системы сколь угодно близко к состоянию равновесия (0, 0) невозможно. Примем за многообразие M координатную ось $x_2 = 0$ фазовой плоскости. Тогда одним из решений задачи будет управление $u(x_1, x_2) = -2x_1$, обеспечивающее асимптотическое притяжение траектории системы к состоянию равновесия по оси M из любого начального состояния $(x_{10}, 0) \in M$.

В связи с не единственностью решения основной задачи возникает вопрос о выборе наилучшего решения по некоторому заданному критерию. В приведенной ниже вспомогательной задаче в качестве такого критерия используется скорость убывания функции Ляпунова вдоль траектории системы.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Свяжем с основной задачей вспомогательную задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} J = \int_0^\infty \alpha V(x(t))dt \to \min, \\ \dot{x} = f(x) + B(x)u, \\ x(0) = x_0, \, x(\infty) = 0, \\ \alpha V(x) + \dot{V}(x,u) \geq 0, \;\; t \geq 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь α – заданный положительный параметр, $x(\infty)$ – предел функции $x(t)$ при $t \to \infty$,

$$V(x) = \mu\|x\|^2 + \nu\|s(x)\|^2, \, x \in \mathrm{R}^n, \tag{4}$$

есть скалярная положительно-определенная функция с постоянными положительными коэффициентами μ, ν,

$$\dot{V}(x,u) = V_x(x)'(f(x) + B(x)u), \;\; x \in \mathrm{R}^n, \;\; u \in \mathrm{R}^m, \tag{5}$$

есть производная V в силу системы (1). В формулах (4), (5) и далее все векторы столбцевые, норма векторов евклидова, штрих – знак транспонирования, V_x – градиент функции V.

Обозначим через $x(t), t \geq 0$, произвольное непрерывное кусочно-гладкое решение системы (1), соответствующее некоторому кусочно-непрерывному управлению $u(t), t \geq 0$. Пару $x(t), u(t)$ назовем *процессом*, если она определена на всей полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяет краевым условиям и смешанному ограничению (3). Вспомогательная задача состоит в нахождении оптимального процесса с наименьшим значением целевого функционала.

Далее предполагаем

$$\begin{gathered} s(0) = 0, \; \operatorname{rank} s_x(x) = p, \;\; x \in M, \\ B(x)'V_x(x) \neq 0, \;\; x \neq 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Строки матрицы s_x образованы градиентами координат $s_1, \ldots, s_p$ векторной функции s.

При $p < n$ первые два условия (6) и теорема о неявной функции (см., например, [7, 5], с. 298) гарантируют существование и единственность гладкого многообразия M в окрестности начала координат. Если $p = n$ и $s(x) = x$, то многообразие M совпадает с состоянием равновесия, и вспомогательная задача не исключает классической асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) при

$u = 0$. Последнее предположение (6) используется для построения управления $u(x)$ и подробно рассматривается в разд. 5.

Остановимся вкратце на смысле условий вспомогательной задачи (3). Функция $V(x)$ играет роль показателя близости фазовой точки x к состоянию равновесия и многообразию M. Целевое требование предполагает уменьшение показателя V на траекториях аффинной системы. Краевые условия отвечают цели управления в основной задаче. Смешанное ограничение определяет множество допустимых скоростей изменения показателя V в силу аффинной системы.

4. РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Воспользуемся достаточными условиями оптимальности (см. [8]). Представим (см. [5]) функционал J на произвольном фиксированном процессе $x(t)$, $u(t)$ в виде

$$J = \int_0^\infty \alpha V\left(x(t)\right)dt + \int_0^\infty \left(V\left(x(t)\right)\right)^\bullet dt - V\left(x(t)\right)\Big|_{t=0}^{t=\infty}. \tag{7}$$

Выполним во втором интеграле (7) дифференцирование по переменной t. Учитывая (3), (5), получим нижнюю оценку функционала

$$J = V\left(x_0\right) + \int_0^\infty \left(\alpha V\left(x(t)\right) + \dot V\left(x(t), u(t)\right)\right)dt \ge V\left(x_0\right). \tag{8}$$

На рассматриваемом процессе оценка (8) достижима, если подынтегральная функция равна нулю во всех точках $t \ge 0$ непрерывности управления $u(t)$. В свою очередь, для этого достаточно, чтобы пара $x(t)$, $u(t)$ в том же смысле удовлетворяла уравнению

$$\alpha V(x) + \dot V(x,u) = \alpha V(x) + V_x(x)'\left(f(x) + B(x)u\right) = 0. \tag{9}$$

Отсюда в силу последнего предположения (6) находим управление

$$u(x) = -\frac{\alpha V(x) + V_x(x)' f(x)}{\left\|B(x)' V_x(x)\right\|^2} B(x)' V_x(x),\ x \ne 0, \tag{10}$$

определенное и гладкое на всем фазовом пространстве R^n, кроме начала координат. Примем дополнительно $u(0) = 0$.

Пусть задача Коши (2) с управлением (10) имеет решение $x(t)$ на всей полуоси $t \ge 0.$ По построению, пара функций $x(t), u(x(t))$ непрерывна при $t \ge 0$ и тождественно удовлетворяет равенству (9) или, равносильно, – дифференциальному уравнению

$$\alpha V\left(x(t)\right) + \dot V\left(x(t), u\left(x(t)\right)\right) = \alpha V\left(x(t)\right) + \left(V\left(x(t)\right)\right)^\bullet = 0. \tag{11}$$

Решая последнее уравнение (11) с начальным условием $V(x(0)) = V(x_0)$, находим

$$V\left(x(t)\right) = V\left(x_0\right)e^{-\alpha t},\ t \ge 0.$$

Отсюда на основании (4) получим экспоненциальные оценки

$$\begin{gathered} \mu\left\|x(t)\right\|^2 \le V\left(x_0\right)e^{-\alpha t}, \\ \nu\left\|s\left(x(t)\right)\right\|^2 \le V\left(x_0\right)e^{-\alpha t},\ t \ge 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Из неравенств (12) вытекают предельные соотношения $x(\infty) = 0, s(x(\infty)) = 0$. Следовательно, пара $x(t), u(x(t))$ образует процесс вспомогательной задачи, и траектория $x(t)$ асимптотически притягивается к состоянию равновесия и многообразию M. Кроме того, оценка (8) и равенство (11) свидетельствуют об оптимальности процесса $x(t), u(x(t))$. Подведем итоги.

Теорема. *Если выполнены предположения* разд. 1 и 2, *то при любом* x_0 *оптимальное управление* (10) *вспомогательной задачи* (3) *существует и обеспечивает с оценками* (12) *асимптотическое притяжение оптимальной траектории к состоянию равновесия и многообразию* M.

Следствие 1. В условиях теоремы формулой (4) задана функция Ляпунова замкнутой системы (2).

Следствие 2. При $s(x) = x$ из оценок (12) вытекает экспоненциальная устойчивость тривиального решения замкнутой системы (2) для любых x_0.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) + ux,\ x(0) = x_0,$$

со скалярным управляющим воздействием u. При $B(x) = x,\ p = n,\ s(x) = x,\ V(x) = \frac{1}{2}x'x$ условия теоремы выполнены. По формуле (10) находим оптимальное управление

$$u(x) = -\frac{\alpha}{2} - \frac{x'f(x)}{x'x},\ x \neq 0.$$

Примем $u(0) = 0$. На основании следствия 2 теоремы замкнутая оптимальным управлением система имеет экспоненциально устойчивое тривиальное решение при любом x_0.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Согласно теореме для существования оптимального управления достаточно, чтобы данные основной и вспомогательной задач отвечали перечисленным в разд. 1 и 2 требованиям. Очевидно, наиболее ограничительными из них являются условия (6). Они заведомо выполняются, если многообразие M совпадает с состоянием равновесия, во всех точках фазового пространства матрица B имеет ранг n и градиент V_x равен нулю только в начале координат.

Укажем другие классы троек, образованных дифференциальными уравнениями и функциями s, V, которые удовлетворяют условиям теоремы. Примем

$$p = n - m,\ V(x) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|s(x)\|^2\right),\ x \in \mathrm{R}^n.$$

Для упрощения выкладок введем две прямоугольные матрицы $B \in \mathrm{R}^{n\times m}$ и $C \in \mathrm{R}^{n\times(n-m)}$ со свойствами

$$C'B = 0,\ B'C = 0,\ B'B = I,\ C'C = I, \tag{13}$$

где 0 и I – нулевые и единичные матрицы соответствующих размеров. Выберем, далее, произвольно гладкие векторные функции $f_1\colon \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$ и $f_2\colon \mathrm{R}^{n-m} \to \mathrm{R}^{n-m}$ с условием $f_1(0) = 0$ и $f_2(0) = 0$.

Покажем, что для тройки

$$\begin{gathered} \dot{x} = Bf_1(B'x) + Cf_2(C'x) + Bu, \\ s(x) = C'x,\ V(x) = \frac{1}{2}x'(I + CC')x \end{gathered} \tag{14}$$

условия теоремы верны. Действительно, переходя в соотношениях (14) к новым переменным $y \in \mathrm{R}^m$, $z \in \mathrm{R}^{n-m}$ по формуле

$$x = By + Cz, \tag{15}$$

получим

$$\begin{gathered} \dot{y} = f_1(y) + u,\ \dot{z} = f_2(z), \\ \tilde{s}(z) = z,\ \tilde{V}(y,z) = \frac{1}{2}y'y + z'z. \end{gathered} \tag{16}$$

В подпространстве $z = 0$ условия теоремы для тройки (16) справедливы. В соответствие с ее заключением найденное по формуле (10) управление

$$\tilde{u}(y) = -\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{y'f_1(y)}{y'y}\right)y,\ y \neq 0, \tag{17}$$

оптимально и обеспечивает в подпространстве $z = 0$ притяжение всех траекторий системы дифференциальных уравнений (16) к состоянию равновесия $y = 0, z = 0$. В силу обратимости преобразования (15) аналогичные утверждения имеют место в подпространстве $C'x = 0$ для тройки (14) и соответствующего (17) управления

$$u(x) = -\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{x'Bf_1(B'x)}{x'BB'x}\right)B'x,\ B'x \neq 0.$$

Замечание 1. Два последних условия (13) можно без потери общности заменить требованием линейной независимости столбцов матриц B и C.

Замечание 2. Управление (17) обеспечивает асимптотическую y-устойчивость (см. [3, 2]) тривиального решения системы дифференциальных уравнений (16) при $u = 0$, если устойчиво тривиальное решение подсистемы $\dot{z} = f_2(z)$.

6. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ

В данном разделе рассматриваются линейная и билинейная системы с отмеченными во введении особенностями. Показано, что с помощью теоремы можно организовать притяжение траекторий этих систем к состоянию равновесия на некоторых подпространствах фазового пространства.

6.1. Линейная стационарная система

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{18}$$

с постоянной матрицей $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ и постоянной матрицей $B \in \mathrm{R}^{n\times m}$, введенной в разд. 5. Допустим, ранг блочной матрицы $D = (B, AB, ..., A^{n-1}B)$ равен $m < n$, т.е. система (18) не отвечает критерию полной управляемости Калмана (см. [9], с. 43). Тогда система однородных алгебраических уравнений $c'D = 0$ имеет $n - m$ линейно независимых решений. Построим в линейной оболочке решений методом ортогонализации (см. [10], с. 233) систему $n - m$ ортонормированных векторов и составим из них матрицу $C \in \mathrm{R}^{n\times(n-m)}$. По построению, матрица C имеет ортонормированные столбцы и вместе с матрицей B удовлетворяет условиям (13) и равенствам $C'AB = 0, ..., C'A^{n-1}B = 0$.

Заменим в тройке (14) дифференциальные уравнения на уравнения (18) и выполним замену переменных (15). Используя свойства матриц B и C, получим

$$\begin{gathered}\dot{y} = B'ABy + B'AC\,z + u,\ \dot{z} = C'ACz,\\ \tilde{s}(z) = z,\ \tilde{V}(y,z) = \tfrac{1}{2}y'y + z'z.\end{gathered} \tag{19}$$

Легко убедиться, что при $z = 0$ для тройка (19) условия теоремы верны. Пользуясь аналогом формулы (10), находим оптимальное управление

$$\tilde{u}(y) = -\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{y'B'ABy}{y'y}\right)y,\ y \neq 0,$$

при котором все траектории системы дифференциальных уравнений (19), лежащие в подпространстве $z = 0$, притягиваются к состоянию равновесия $y = 0, z = 0$. Используя обратное (15) и тождественное преобразования

$$y = B'x,\ z = C'x,\ x = \left(BB' + CC'\right)x$$

легко сформулировать приведенные выводы в исходных координатах.

6.2. *Билинейная система*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = BAB'x + C\left(u_1B_1 + \ldots + u_mB_m\right)C'x. \tag{20}$$

Здесь A и $B_1,\ldots,B_m$ – постоянные квадратные матрицы порядков n и $n-m$ соответственно, B, C – прямоугольные матрицы со свойствами (13), $u_1,\ldots,u_m$ – координаты вектора u управляющих воздействий. Предположим дополнительно, что матрица $B(z) = (B_1z,\ldots,B_mz)$, $z \in \mathrm{R}^{n-m}$, удовлетворяет условию

$$B(z)'z \neq 0, \; z \neq 0. \tag{21}$$

Для выполнения (21) достаточно, например, чтобы при любом $z \neq 0$ нашелся столбец матрицы $B(z)$, не ортогональный z.

Пусть $x(t), u(t), t \geq 0,$ – произвольный фиксированный процесс системы (20) с начальным условием $x(0) = x_0$ и $B'x_0 = 0$. Уравнение (20) на рассматриваемом процессе становится тождественным по t равенством. Умножим это равенство слева на матрицу B'. Учитывая (13) и заданные начальные условия, получим

$$\left(B'x(t)\right)^{\bullet} = A\left(B'x(t)\right), \; B'x(0) = 0.$$

Данная однородная система дифференциальных уравнений с тривиальным начальным условием имеет единственное решение $B'x(t) = 0, t \geq 0$. В силу произвольности процесса это значит, что независимо от выбора управления каждая траектория билинейной системы, исходящая из любой точки подпространства $B'x = 0$, лежит в том же подпространстве.

Выполнив преобразование (15), приведем систему (20) и функции

$$s(x) = B'x\,, \; V(x) = \tfrac{1}{2}x'\left(I + BB'\right)x$$

к виду

$$\begin{gathered}\dot{y} = Ay, \; \dot{z} = B(z)u,\\ \tilde{s}(y) = y, \tilde{V}(y,z) = y'y + \tfrac{1}{2}z'z.\end{gathered} \tag{22}$$

При $y = 0$ тройка (22) в силу (21) соответствует условиям теоремы. По аналогичной (10) формуле находим оптимальное управление

$$\tilde{u}(z) = -\frac{\alpha z'z}{2\left\|B(z)'z\right\|^2}B(z)'z, \; z \neq 0. \tag{23}$$

Согласно теореме в подпространстве $y = 0$ все траектории замкнутой управлением (23) системы дифференциальных уравнений (22) притягиваются к состоянию равновесия $y = 0, z = 0$.

Как было отмечено ранее, в силу обратимости преобразования (15) полученные выводы можно сформулировать в первоначальных обозначениях.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен метод синтеза аффинной системы, траектории которой асимптотически притягиваются к состоянию равновесия и заданному многообразию. Искомое управление типа обратной связи найдено аналитически с помощью решения вспомогательной задачи оптимального управления. Показано применение метода к некоторым классам линейных и нелинейных аффинных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уткин В. И., Орлов Ю. В.* Системы управления с векторным реле // Автоматика и телемехан. 2019. № 9. С. 143–155. *Utkin V. I., Orlov Yu. V.* Control systems with vector relays // Automat. Remote Control. 2019. V. 80. N 9. P. 1671–1680.

2. *Уткин В. И.* Системы с переменной структурой: состояние, проблемы, перспективы // Автоматика и телемехан. 1983. № 9. С. 5–25.
3. *Воротников В. И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемехан. 2005. № 4. С. 3–59. *Vorotnikov V. I.* Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. N 4. P. 511–561.
4. *Ащепков Л. Т.* Аналитическое конструирование регулятора с амплитудным ограничением // Автоматика и телемехан. 2022. № 7. С. 49–58. *Ashchepkov L. T.* Analytical synthesis of an amplitude-constrained controller // Automat. Remote Control. 2022. V. 83. № 7. P. 1050–1058.
5. *Ащепков Л. Т.* Синтез оптимальной системы с устойчивыми режимами скольжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 5. С. 731–738. Ashchepkov L. T. Synthesis of an optimal system with stable sliding modes // Comput. Math. Math. Phys. 2023. V. 63. N 5. P. 743–750.
6. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. Т. 51(93). № 1. С. 99–128.
7. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.
8. *Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностр., 1969.
9. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.