ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 2, с. 220–224

УДК 519.65

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КЛАССИЧЕСКИХ СИНКОВ И ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ C_λ

В. Н. Пасечник[1, *]

[1]410012 Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия

*e-mail: kas.sy@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.05.2023 г.
Переработанный вариант 29.09.2023 г.
Принята к публикации 19.10.2023 г.

Рассмотрены свойства синк-приближений. Используемые ранее классические синк-аппроксимации давали плохое приближение, а новый оператор, обобщающий синк-аппроксимации, справляется с приближением этой функции лучше. Приведен график численной реализации эксперимента. Библ. 22. Фиг 2.

Ключевые слова: синк-аппроксимация, оператор интерполяции, приближение непрерывной функции, численный эксперимент, приближение синками, приближение оператором.

DOI: 10.31857/S0044466924020034, **EDN:** YKPOPD

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящается изучению свойств синк-приближений. Ранее они использовались в теореме отсчетов Уиттекера-Котельникова–Шеннона (см. [1]–[4]). Для развития теории кодирования сигналов Э. Борель и Э. Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции, сужение которой с оси на отрезок $[0,\pi]$ выглядит следующим образом:

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \tag{1}$$

На сегодняшний день достаточно тщательно изучены свойства синк-аппрок-симации аналитической функции на действительной оси, экспоненциально убывающей на бесконечности. В [3] доступен наиболее полный обзор результатов, достигнутых в этом направлении до 1993 г., и несколько важных применений синк-приближений.

Синк-приближения могут широко использоваться при построении различных численных методов в математической физике и при аппроксимациях функций как от одной, так и от нескольких переменных (см. [5], [6]) в теории квадратурных формул (см. [3]) и теории вейвлет-изменений или всплесков (см. [1], [2], [4]). В [7] изучаются изменения в синк приближений (1), с помощью которых могут быть аппроксимированы произвольные равномерно непрерывные функции, ограниченные на оси.

Результаты [8] предполагают, что при использовании классических синк-приближений (1) явление Уилбрахама–Гиббса возникает ближе к концу отрезка $[0,\pi]$.

До публикации работ [8], [9], насколько известно, приближения определенных классов аналитических функций (см. [3], [10]) на ограниченном отрезке или интервале с помощью оператора (1) применялась его композиция с конформным отображением. В [9] мы получаем верхнюю оценку наилучшего приближения непрерывных, исчезающих на конце отрезка $[0,\pi]$, функций с помощью линейных комбинаций синков.

Из результатов [11] видно, что при попытке аппроксимации негладких непрерывных функций операторными значениями (1) может возникнуть “резонанс”, приводящий к неограниченному увеличению погрешности аппроксимации по всему интервалу $(0,\pi)$. В той же работе [11] показано отсутствие равносходимости значений операторов (1) и рядов или интегралов Фурье в классе непрерывных функций.

Работы [12], [13] показывают различные изменения синк-аппроксимаций (1), которые позволяют аппроксимировать произвольные непрерывные функции на $[0,\pi]$. Основываясь на исследовании полноты системы синков (1) в [12] в пространствах $C[0,\pi]$ и $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$, можно сделать вывод, что попытки построить оператор в форме линейных комбинаций синков, которые допускают равномерную аппроксимацию произвольной непрерывной функции на отрезке, бесполезны. Работы [12], [13], дополнены новыми необходимыми и достаточным условиям равномерной сходимости синк-приближений (1) и некоторыми их изменениям на всем отрезке $[0,\pi]$.

Работа [14] используется для изучения приближенных свойств операторов интерполяции, которые построены по решениям задачи Коши для дифференциальных выражений второго порядка. Операторы, предложенные в [14], являются обобщением классических синк-приближений (1). В работе [15] многие приложения результатов [14] используются для изучения приближенных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей интерполяционных узлов, каждая строка которых состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n,\beta_n}$ с параметрами, которые зависят от n.

Начиная с хорошо известной работы Крамера [16], изучаются аналоги теорем отсчетов для операторов интерполяции Лагранжа в узлах из спектра задачи Штурма–Лиувилля.

Процессы интерполяции Лагранжа, построенные с помощью собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, тесно связаны с приближениями синк-аппроксимаций. Г. И. Натансон в [17] получил признак равномерной сходимости Дини–Липшица в интервале $(0,\pi)$, т.е. равномерно на любом компакте из $(0,\pi)$, процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля.

В проведенных исследованиях [18], [19] было показано, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма–Лиувилля (потенциала q, или констант h, H), приближенные свойства процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля могут сильно различаться. В [20] установлено существование функции, непрерывной на $[0,\pi]$, у которой процесс интерполяции Лагранжа–Штурма–Лиувилля неограниченно расходится почти всюду на $[0,\pi]$.

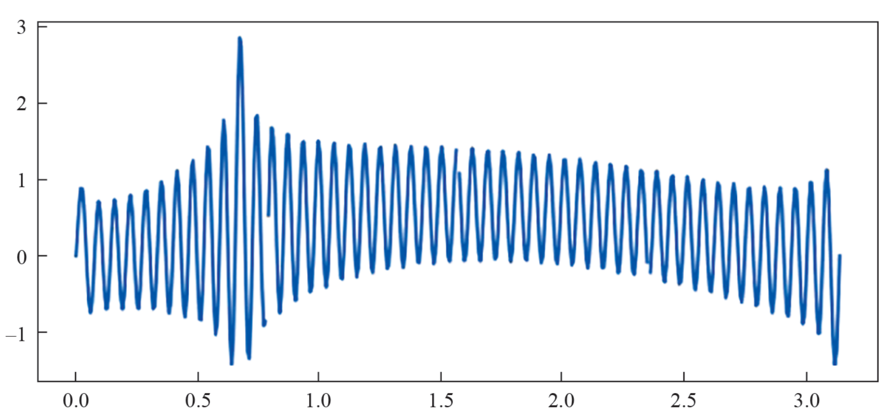
ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Суть эксперимента, приведенного в данной статье, заключается в том, чтобы показать, что для непрерывной функции

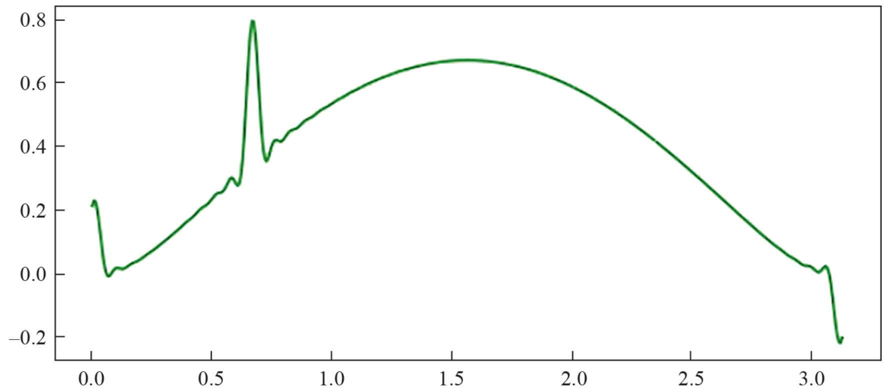
$$f(x) := \sin x e^{\frac{1}{x(x-\pi)}} + \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \cos nx \frac{x - \frac{(k_0+0.5)\pi}{n}}{\left| x - \frac{(k_0+0.5)\pi}{n} \right|} \tag{2}$$

классические синк-аппроксимации дают плохое приближение, а новый оператор

$$C_\lambda(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{matrix} s_{k+1,\lambda}(x) + 2s_{k,\lambda}(x) + \\ + s_{k-1,\lambda}(x) \end{matrix} \right) f(x_{k,\lambda}), \tag{3}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

обобщающий синк-аппроксимации, справляется с приближением этой функции лучше. Первое слагаемое в определении функции (2) есть функция, которую приближаем, второе-симуляция помех, которые мешают приближению синками. Но новый оператор (3) позволяет с ними справится.

Далее приведем график численной реализации эксперимента.

На фиг. 1 изображен график приближения функции (2) с помощью синк-аппроксимаций (1). На фиг. 2 изображен график приближения функции (2) оператором (3).Приведем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in (0,\pi)$ *и* $f \in C^1[0,\pi]$, *тогда существует последовательность непрерывных на отрезке* $[0,\pi]$ *функций* ψ_n, *норма в пространстве Чебышёва* $C[0,\pi]$ *которых меньше единицы* $\| \psi_n \|_{C[0,\pi]} < 1$, *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} L_n\left(f + \psi_n, x_0\right) = \infty.$$

Доказательство. Возьмем $x_0 \in (0,\pi)$, для любого $n \in N$ положим $k_0 = \left[\frac{nx_0}{\pi}\right]$,

$$\varphi_n(x) = \cos nx \frac{x - \frac{(k_0 + 0.5)\pi}{n}}{\left|x - \frac{(k_0 + 0.5)\pi}{n}\right|}.$$

Тогда для любого $n \in N$ справедливо соотношение

$$L_n\left(\varphi_n, x_0\right) = L_n\left(x_0\right),$$

где $L_n(x)$ – функция Лебега [21] интерполяционного процесса (1). Отсюда и [21, Теорема 1, формула 5] следует оценка

$$L_n(\varphi_n, x_0) \ge C_0 \left|\sin nx_0\right| \ln n. \tag{4}$$

Решая тригонометрические неравенства, убедимся, что для любого $x_0 \in (0,\pi)$ существует бесконечная последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой будут выполняться соотношения

$$\left|\sin n_k x_o\right| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}, k = 1,2,...$$

Таким образом, в силу (4), положив $\varphi_n = \varphi_n / \sqrt[n]{\ln n}$, для любой точки $x_0 \in (0,\pi)$ получим соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} L_n\left(\psi_n, x_0\right) = \infty.$$

Из [22, Теорема 1] следует, что значения оператора (1) равномерно внутри интервала $(0,\pi)$ приближают любую непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,\pi]$ функцию f (В том числе и функцию $f(x)=\sin x e^{\frac{1}{x(x-\pi)}}$.). Действительно, в силу формулы Лагранжа для непрерывно дифференцируемых функций справедлива оценка

$$\max_{0\le p\le n}\left|\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}' \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right)-2f\left(\frac{2\pi m}{n}\right)+f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p-2m}\right|\le$$

$$\le\max_{0\le p\le n}\left|\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}' \frac{\left|f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right)-f\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)-f\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right|}{p-2m}\right|=$$

$$=\frac{\|f'\|_{C[0,\pi]}}{n}O\left(\max_{0\le p\le n}\left|\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}' \frac{1}{p-2m}\right|\right)=\|f'\|_{C[0,\pi]}O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

где штрих у суммы означает отсутствие в сумме слагаемого со знаменателем равным нулю. Откуда следует условие критерия равномерной сходимости [22, Теорема 1]

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le p\le n}\left|\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}' \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right)-2f\left(\frac{2\pi m}{n}\right)+f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p-2m}\right|=0.$$

Теперь утверждение теоремы 1 вытекает из линейности оператора (1). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Нормы операторов (3) ограничены в совокупности (см. [14] из списка процитированных в статье источников). И, следовательно, по теореме Банаха–Штейнгауза с их помощью можно аппроксимировать равномерно внутри интервала $(0,\pi)$ произвольный элемент чебышёвского пространства $C[0,\pi]$.

Эти утверждения иллюстрируются численным экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
2. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков// УМН. 1998. С. 53–128.
3. *Stenger F.* Numerical Methods based on Sinc and analytic functions // Springer Ser. Comput. Math. 20 Springer, 1993.
4. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
5. *Livne O. E., Brandt A. E.* MuST: The multilevel sine transform // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 38. N 4. P. 1726–1738.
6. *Marwa M.* Tharwat Sinc approzimation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier Calcolo: a quarterly on numerical analysis and theory of computation. 2014. V. 51. N. 3. P. 465–484.
7. *Kivinukk A.* Tamberg G, Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approzimation properties // Sampl. Theory Signal Image Process. 2009. V. 8. N 1. P. 77–95.
8. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sine apprоrimation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Tmage Processing. 2008. V. 7. N 34. P. 263–270.

9. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sink-approximation on a finite interval // East J. Approximat. 2008. V. 14. N 2. P. 183–192.
10. *Mohsen A., El-Gamel M.* A Sine-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations // Z. angew. Matth. Phys. 2006. P. 1–11, https://doi.org/10.1007/s00033–006–5124–5.
11. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на (0, π) // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. N 4. С. 232–256.
12. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 5. С. 170–194.
13. *Трынии А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. высшю уч. заведений. Математика. 2016. № 3. С. 72–81.
14. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. С. 61–108.
15. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 6. С. 129–162.
16. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phus. 1959. V. 38. P. 68–72.
17. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учен. записки Лепинград, пед. ин-та. 1958. Т. 166. С. 213–219.
18. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функция задачи Штурма–Лиувилля// Изв. высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. Т. 9. № 460. С. 60–73.
19. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. № 4. С. 116–129.
20. *Трынии А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям Задачи Штурма–Лиувилля // Изв. высш. уч-ых заведений. Математика. 2010. № 11. С. 74–85.
21. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке// Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48. № 5. С. 1155–1166.
22. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. высш. уч-ых заведений. Математика. 2008. № 6. С. 66–78.