

УДК 519.63

УЛУЧШЕННАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ¹⁾

© 2024 г. П. А. Крутицкий^{1,*}, И. О. Резниченко^{1,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: biem@mail.ru

**e-mail: io.reznichenko@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 04.09.2023 г.

Переработанный вариант 04.09.2023 г.

Принята к публикации 15.10.2023 г.

Рассматривается потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца в трехмерном случае, а также потенциал простого слоя для уравнения Лапласа. Получена квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Квадратурная формула, предложенная в работе, дает значительно более высокую точность, чем известные формулы, что подтверждается численными тестами. Полученная квадратурная формула может использоваться при численном решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений. Библ. 17. Табл. 1.

Ключевые слова: потенциал простого слоя, нормальная производная, квадратурная формула.

DOI: 10.31857/S0044466924020021, **EDN:** YKRLKB

1. ВВЕДЕНИЕ

При численном решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца с использованием потенциала простого слоя необходимо иметь квадратурную формулу, обеспечивающую высокую точность вычисления потенциала в любой точке области, где решается краевая задача. Кроме того, надо иметь квадратурную формулу для прямого значения нормальной производной потенциала, которая используется при численном решении соответствующих граничных интегральных уравнений.

Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя (см. [1], гл. 2), основанные на численном интегрировании, не обеспечивают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности Γ , где задана плотность потенциала. Эти формулы стремятся к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, приближается к Γ . При этом сам потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве, в том числе во всех точках на поверхности Γ . Таким образом, стандартные квадратурные формулы не сохраняют важнейшее свойство потенциала, а именно, его ограниченность и непрерывность при переходе через Γ . В [2], [3] предложены квадратурные формулы, которые сохраняют указанное свойство потенциала простого слоя и обеспечивают его равномерную аппроксимацию вблизи Γ .

Квадратурные формулы для вычисления нормальной производной потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, применяющие численное интегрирование, предлагаются, например, в ([1], гл. 2). Квадратурная формула для нормальной производной потенциала простого слоя, основанная на аналитическом вычислении интегралов и обладающая более высокой точностью, предложена в [4]. В настоящей работе выводится новая квадратурная формула, улучшающая формулу из [4] за счет более точного учета элементов подынтегральной функции при аналитическом вычислении интегралов. Новая формула обеспечивает значительно более низкую погрешность, чем формула из [4], что подтверждается численными тестами.

В двумерном случае квадратурные формулы для потенциалов с плотностью, заданной на разомкнутых кривых и имеющей степенные особенности на концах кривых, предложены в [5]. Эти формулы могут

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Резниченко И.О. Московским центром фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Минобрнауки РФ (код проекта 075-15-2022-283).

применяться при численном решении краевых задач на плоскости, когда граница включает разомкнутые кривые. Такие задачи изучались в [6]–[11].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2 , ограничивающая объемно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2 , содержащая свои предельные точки (см. [12], гл. 14, § 1). Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$\begin{aligned} y &= (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \\ u &\in [0, A], \quad v \in [0, B]; \\ y_j(u, v) &\in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Кроме того, сложные поверхности можно разбить на несколько частей и для каждой части ввести свою параметризацию, тогда дальнейшие рассуждения справедливы для каждой такой части.

Введем N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m с шагом H на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, который отображается на поверхность Γ :

$$\begin{aligned} A &= Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \\ n &= 0, \dots, N-1; \quad v_m = (m + 1/2)H, \\ m &= 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Тем самым, прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков, и через (u_n, v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно (см. [12], гл. 14, § 1), что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно (см. [12], гл. 14, § 1–2), что

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))|.$$

Заметим, что если $|\eta(y(u, v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| \in C^1([0, A] \times [0, B]). \quad (3)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0 \quad \forall (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \quad (4)$$

Из условия (4) следует, что $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$, но условие (3) не следует.

Потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$ имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y) e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u, v)) \exp(ik|x-y(u, v)|)}{|x-y(u, v)|} |\eta(y(u, v))|, \quad (5)$$

где $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$, и для простоты константа $k \geq 0$; если же $k = 0$, то потенциал $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ переходит в гармонический потенциал $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ для уравнения Лапласа.

Пусть $\mathbf{n}_x = \eta(x) / |\eta(x)|$ — вектор единичной нормали в точке $x \in \Gamma$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= |\eta(x)|^{-1} (\eta(x), \nabla_x) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \\ &= \frac{1}{|\eta(x)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j)}{|x-y|}. \end{aligned}$$

Прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ в точке x имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{1}{|\eta(x)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2} \times \\ &\times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j)}{|x-y|} ds_y = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \times \int_0^A du \int_0^B dv \mu(y(u, v)) |\eta(y(u, v))| \times \\ &\times \exp(ik|x-y(u, v)|) \times (ik|x-y(u, v)|-1) \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x-y(u, v)|^3} = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \mu(y(u, v)) \times |\eta(y(u, v))| \times \exp(ik|x-y(u, v)|) \times \\ &\times (ik|x-y(u, v)|-1) \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u, v))}{|x-y(u, v)|^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Известно (см. [13], § 27.5), что прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в наших предположениях является непрерывной на Γ функцией. Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$\mu(y(u, v)) = \mu_{nm} + o(1)$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

Пусть x лежит в одном из узлов на Γ , т.е. $x = y(u_n^{\wedge}, v_m^{\wedge}) \in \Gamma$. Так же, как и в [2], можно показать, что при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H), \quad \exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H).$$

Константы в оценках функций, обозначенных как $O(h + H)$, не зависят от n, m и от расположения x в узлах Γ .

Следовательно, если точка x лежит в узле $y(u_n^{\wedge}, v_m^{\wedge})$ на Γ , то прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_n^{\wedge}, v_m^{\wedge}) \in \Gamma} &\approx \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \times \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (1 - ik|x - y(u_n, v_m)|) \times \\ &\times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv |\eta(y(u, v))| \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Двойной интеграл в (7) будем называть *каноническим* и при его вычислении будем различать 2 случая. В первом случае точка x лежит в области интегрирования, а во втором случае — нет.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА, КОГДА ТОЧКА x ЛЕЖИТ В ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данном случае интегрирование ведется по прямоугольничку с центром в точке (u_n, v_m) , которой отвечает точка $y(u_n, v_m) = x$ на поверхности Γ . Применяя формулу Тейлора с центром в точке (u_n, v_m) , находим

$$\begin{aligned} |y(u, v) - x|^2 &= |y(u, v) - y(u_n, v_m)|^2 \approx \sum_{j=1}^3 \left((y_j)'_u (u - u_n) + (y_j)'_v (v - v_m) \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\left((y_j)'_u \right)^2 (u - u_n)^2 + \left((y_j)'_v \right)^2 (v - v_m)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(y_j)'_u (y_j)'_v (u - u_n)(v - v_m) \right) = \alpha^2 (u - u_n)^2 + \beta^2 (v - v_m)^2 + 2\delta (u - u_n)(v - v_m), \\ \alpha^2 &= \sum_{j=1}^3 \left((y_j)'_u \right)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 \left((y_j)'_v \right)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v, \end{aligned}$$

где $(y_j)'_u$ и $(y_j)'_v$ берутся в точке (u_n, v_m) .

Заметим, что $\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 = |\eta(y)|^2$, согласно ([12], гл. 14, § 1), поэтому $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$ в силу условия (4).

С учетом (3) для всех возможных n, m , при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть разложена по формуле Тейлора с остаточным членом 1-го порядка

$$|\eta(y(u, v))| = |\eta(y(u_n, v_m))| + O(h + H). \quad (8)$$

В силу (8) канонический интеграл из (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv |\eta(y(u, v))| \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3} \approx \\ &\approx |\eta(y(u_n, v_m))| \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} dv \times \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, используя формулу Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано (см. [12], гл. 10, § 5.3), получаем

$$\begin{aligned} y_j - x_j &= (y_j)'_u (u - u_n) + (y_j)'_v (v - v_m) + \frac{1}{2} (y_j)''_{uu} (u - u_n)^2 + \frac{1}{2} (y_j)''_{vv} (v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv} \times \\ &\quad \times (u - u_n)(v - v_m) + o\left((u - u_n)^2 + (v - v_m)^2\right), \end{aligned}$$

производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m) .

Легко проверить (см. [12], гл. 14, § 1.2), что

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)'_v = 0,$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j - x_j) \approx \xi_1 (u - u_n)^2 + \xi_2 (v - v_m)^2 + \xi_3 (u - u_n)(v - v_m),$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)''_{uu}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)''_{vv}, \quad \xi_3 = \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j)''_{uv},$$

производные по u и v берутся в точке $(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}})$.

Из приведенных соотношений вытекает, что в рассматриваемом случае двойной интеграл в (9) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$:

$$\int_{u_{\hat{n}}-h/2}^{u_{\hat{n}}+h/2} du \int_{v_{\hat{m}}-H/2}^{v_{\hat{m}}+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x) (y_j - x_j)}{|x - y|^3} \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{dV (\xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV)}{(\alpha^2 U^2 + \beta^2 V^2 + 2\delta UV)^{3/2}} = \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}},$$

где $U = u - u_{\hat{n}}$, $V = v - v_{\hat{m}}$. Вычислим интеграл $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ в явном виде. Перейдя к полярным координатам $\rho = \sqrt{U^2 + V^2}$, $U = \rho \cos \phi$, $V = \rho \sin \phi$, мы преобразуем выражение под интегралом в сумму двух рациональных дробей. Применяя в получившихся двух интегралах замены $t = \operatorname{tg} \phi$ и $t = \operatorname{ctg} \phi$ соответственно, а затем сделав замену $z = t + \delta / \alpha^2$, мы приходим к табличным интегралам. В итоге получается явное выражение для $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$. Подробно процесс вывода интеграла $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ описан в работе [4]. Явное выражение для $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ имеет вид

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} = \frac{h}{\beta^3} \left[\begin{aligned} & -\frac{\xi_2 z}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \\ & + \xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2} \right| - \\ & -\frac{\xi_3 - 2\xi_2 \delta/\beta^2}{\sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} + \\ & + z \frac{\xi_2 (\delta/\beta^2)^2 + \xi_1 - \xi_3 \delta/\beta^2}{\left[(\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2 \right] \sqrt{z^2 + (\alpha/\beta)^2 - (\delta/\beta^2)^2}} \end{aligned} \right]_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2} -$$

$$- \frac{H}{\alpha^3} \left[\begin{aligned} & -\frac{\xi_1 z}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \\ & + \xi_1 \ln \left| z + \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2} \right| - \\ & -\frac{\xi_3 - 2\xi_1 \delta/\alpha^2}{\sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} + \\ & + z \frac{\xi_1 (\delta/\alpha^2)^2 + \xi_2 - \xi_3 \delta/\alpha^2}{\left[-(\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2 \right] \sqrt{z^2 - (\delta/\alpha^2)^2 + (\beta/\alpha)^2}} \end{aligned} \right]_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}.$$

Таким образом, интеграл $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ приближенно вычислен в явном виде.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА, КОГДА ТОЧКА x НЕ ЛЕЖИТ В ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть точка x не принадлежит кусочку поверхности Γ , на котором изменяется точка $y = y(u, v)$, когда $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u, v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m) , тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u (u - u_n) + (y_j)'_v (v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m) . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2),$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = r^2 + 2P(u - u_n) + \\ &+ 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U / \beta^2 + Q / \beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2 / \beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^3 \left((y_j)'_u \right)^2,$$

$$\beta^2 = \sum_{j=1}^3 \left((y_j)'_v \right)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по u и v берутся в точке $u = u_n$, $v = v_m$.

Можно показать (см. [12], гл. 14, § 1), что

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \quad (10)$$

Согласно условию (4), $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m , поэтому

$$\alpha^2 \beta^2 - \delta^2 > 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

В силу (3), для всех возможных n, m , при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть разложена в точке (u_n, v_m) по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (см. [12], гл. 10, § 5.3)

$$\begin{aligned}
|\eta(y(u, v))| &= \eta(y(u_n, v_m)) + |\eta'_u(u - u_n) + \eta'_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2})| = \\
&= |\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta'_u U + \eta'_v V + o(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2})|.
\end{aligned}
\quad (12)$$

Производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m) .

Выражения для $|\eta'_u|$ и $|\eta'_v|$ можно найти с помощью формулы (10), эти выражения имеют вид

$$|\eta'_u| = \frac{(\alpha^2)'_u \beta^2 + \alpha^2 (\beta^2)'_u - 2\delta\delta'_u}{2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \delta^2}}, \quad |\eta'_v| = \frac{(\alpha^2)'_v \beta^2 + \alpha^2 (\beta^2)'_v - 2\delta\delta'_v}{2\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \delta^2}}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
(\alpha^2)'_u &= 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)''_{uu}, \quad (\alpha^2)'_v = 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)''_{uv}, \\
(\beta^2)'_u &= 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_v (y_j)''_{uv}, \quad (\beta^2)'_v = 2\sum_{j=1}^3 (y_j)'_v (y_j)''_{vv}, \\
(\delta)'_u &= \sum_{j=1}^3 (y_j)''_{uu} (y_j)'_v + (y_j)'_u (y_j)''_{uv}, \quad (\delta)'_v = \sum_{j=1}^3 (y_j)''_{uv} (y_j)'_v + (y_j)'_u (y_j)''_{vv}.
\end{aligned}$$

Выражения для $|\eta'_u|$ и $|\eta'_v|$ можно также записать в виде

$$|\eta'_u| = \frac{(\eta, \eta'_u)}{|\eta|}, \quad |\eta'_v| = \frac{(\eta, \eta'_v)}{|\eta|}, \quad (14)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов, и

$$\begin{aligned}
(\eta_1)'_u &= (y_2)_{uu} (y_3)_v + (y_2)_u (y_3)_{uv} - (y_3)_{uu} (y_2)_v - (y_3)_u (y_2)_{uv}, \\
(\eta_2)'_u &= (y_3)_{uu} (y_1)_v + (y_3)_u (y_1)_{uv} - (y_1)_{uu} (y_3)_v - (y_1)_u (y_3)_{uv}, \\
(\eta_3)'_u &= (y_1)_{uu} (y_2)_v + (y_1)_u (y_2)_{uv} - (y_2)_{uu} (y_1)_v - (y_2)_u (y_1)_{uv}, \\
(\eta_1)'_v &= (y_2)_{uv} (y_3)_v + (y_2)_u (y_3)_{vv} - (y_3)_{uv} (y_2)_v - (y_3)_u (y_2)_{vv}, \\
(\eta_2)'_v &= (y_3)_{uv} (y_1)_v + (y_3)_u (y_1)_{vv} - (y_1)_{uv} (y_3)_v - (y_1)_u (y_3)_{vv}, \\
(\eta_3)'_v &= (y_1)_{uv} (y_2)_v + (y_1)_u (y_2)_{vv} - (y_2)_{uv} (y_1)_v - (y_2)_u (y_1)_{vv}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано

$$\begin{aligned}
y_j(u, v) - x_j &= r_j + (y_j)'_u (u - u_n) + (y_j)'_v (v - v_m) + \frac{1}{2} (y_j)''_{uu} (u - u_n)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} (y_j)''_{vv} (v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv} (u - u_n) \times (v - v_m) + o((u - u_n)^2 + (v - v_m)^2).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left| \eta(y(u, v)) \right| \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j(u, v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$ и

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) \left(\frac{1}{2} \left| \eta(y(u_n, v_m)) \right| (y_j)''_{uu} + \left| \eta'_u(y_j) \right'_u \right), \\ \xi_2 &= \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) \left(\frac{1}{2} \left| \eta(y(u_n, v_m)) \right| (y_j)''_{vv} + \left| \eta'_v(y_j) \right'_v \right), \\ \xi_3 &= \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) \left(\left| \eta(y(u_n, v_m)) \right| (y_j)''_{uv} + \left(\left| \eta'_u(y_j) \right'_v + \left| \eta'_v(y_j) \right'_u \right) \right), \\ \xi_4 &= \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) \left(\left| \eta(y(u_n, v_m)) \right| (y_j)'_u + \left| \eta'_u(y_j) \right'_u \right), \\ \xi_5 &= \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) \left(\left| \eta(y(u_n, v_m)) \right| (y_j)'_v + \left| \eta'_v(y_j) \right'_v \right), \\ R &= \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) \left| \eta(y(u_n, v_m)) \right| r_j. \end{aligned}$$

Все производные по u, v берутся в точке (u_n, v_m) . Из приведенных соотношений вытекает, что канонический интеграл из (7) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через $T_{nm}(x)$:

$$\begin{aligned} & \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{\left| \eta(y(u, v)) \right|}{\left| x - y(u, v) \right|^3} \times \sum_{j=1}^3 \eta_j(x) (y_j(u, v) - x_j) \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times \\ & \times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3 \times \left((V + \delta U / \beta^2 + Q / \beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2 / \beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2) / \beta^2 \right)^{3/2}} = T_{nm}(x). \end{aligned} \quad (15)$$

4.1. Вычисление интегралов по dV

Введем обозначения

$$\begin{aligned} z &= V + \delta U / \beta^2 + Q / \beta^2 = V + c, \\ c &= \delta U / \beta^2 + Q / \beta^2, \\ a &= -c^2 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2) / \beta^2 = -(\delta U + Q)^2 / \beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2) / \beta^2 = \\ &= \frac{1}{\beta^4} \left((\alpha^2 \beta^2 - \delta^2) U^2 + 2(P\beta^2 - \delta Q) U + r^2 \beta^2 - Q^2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В силу (11) $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$. Кроме того, отсюда следует, что $a \not\equiv 0$, поскольку a представлено квадратичным полиномом по U , в котором коэффициент при U^2 положителен: $(\alpha^2\beta^2 - \delta^2) / \beta^4 > 0$.

Покажем, что $a \geq 0$. Положим $\tilde{D}_j = (y_j)'_u U - (y_j)'_v c$, где c определено в (16), и рассмотрим преобразования с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (r_j + \tilde{D}_j)^2 &= \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j \tilde{D}_j + \tilde{D}_j^2) = r^2 + 2 \sum_{j=1}^3 r_j \tilde{D}_j + \sum_{j=1}^3 \tilde{D}_j^2 = \\ &= r^2 + 2PU - 2Qc + \alpha^2 U^2 + \beta^2 c^2 - 2\delta U c = \beta^2 \left(c^2 - 2 \frac{\delta U + Q}{\beta^2} c + \left(\frac{\delta U + Q}{\beta^2} \right)^2 \right) - \\ &\quad - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = \beta^2 \left(-c + \frac{\delta U + Q}{\beta^2} \right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \\ &\quad + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = -\frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = a\beta^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Как отмечено выше, $\beta^2 > 0$, поэтому, поделив полученное соотношение на β^2 , заключаем, что $a \geq 0$. Следовательно, квадратичный полином, обозначенный через a , неотрицательный.

Положим

$$\begin{aligned} b &= \xi_2 c^2 - \xi_5 c - \xi_3 U c + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2 = \\ &= U^2 \left(\xi_2 \frac{\delta^2}{\beta^4} + \xi_1 - \xi_3 \frac{\delta}{\beta^2} \right) + U \left(2\xi_2 \frac{\delta Q}{\beta^4} + \xi_4 - \xi_3 \frac{Q}{\beta^2} - \xi_5 \frac{\delta}{\beta^2} \right) + R - \frac{\xi_5 Q}{\beta^2} + \xi_2 \frac{Q^2}{\beta^4}, \\ z_{\pm} &= \pm H / 2 + c = \pm H / 2 + (\delta U + Q) / \beta^2. \end{aligned}$$

Применяя введенные обозначения, вычислим в (15) интеграл по V , переходя к переменной z :

$$\begin{aligned} &\int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\left(\left(V + \delta U / \beta^2 + Q / \beta^2 \right)^2 - (\delta U + Q)^2 / \beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2) / \beta^2 \right)^{3/2}} = \\ &= \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_2 (V + c - c)^2 + (\xi_3 U + \xi_5)(V + c - c) + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2}{\left((V + c)^2 + a \right)^{3/2}} = \\ &= \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{\xi_2 z^2 + (\xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c)z + b}{(z^2 + a)^{3/2}} = \\ &= \left(\left(\frac{b}{a} - \xi_2 \right) z - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c \right) \frac{1}{\sqrt{z^2 + a}} \Big|_{z_-}^{z_+} + \xi_2 \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \Big|_{z_-}^{z_+}, \end{aligned}$$

где использованы интегралы 1.2.43.17–1.2.43.19 из книги [14]. Заметим, что

$$\xi_2 \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln \left| z + \sqrt{z^2 + a} \right| \Big|_{z_-}^{z_+} = \xi_2 \beta \theta_{nm}(x),$$

где функция $\theta_{nm}(x)$ выведена в [2], [15] в явном виде. Интеграл в (15) можно записать в виде

$$T_{nm}(x) = \frac{1}{\beta^3} (\xi_2 \beta \theta_{nm}(x) + J(H) - J(-H)).$$

Поскольку функция $\theta_{nm}(x)$ дается в [2], [15], задача сводится к вычислению интеграла

$$\begin{aligned} J(\pm H) &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{(b/a - \xi_2)z_{\pm} - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{z_{\pm}^2 + a}} = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{(b/a - \xi_2)(\pm H/2 + c) - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{(\pm H/2 + c)^2 + a}}. \end{aligned}$$

Достаточно вычислить интеграл $J(H)$. Интеграл $J(-H)$ вычисляется по тем же формулам, что и интеграл $J(H)$, в которых H надо заменить на $-H$. Вычислим интеграл $J(H)$. Распишем величины, входящие в подынтегральную функцию, в виде многочленов по U :

$$a = C_2 U^2 + C_1 U + C_0,$$

$$C_2 = (\alpha^2 - \delta^2 / \beta^2) / \beta^2, \quad C_1 = (2P - 2\delta Q / \beta^2) / \beta^2, \quad C_0 = (r^2 - Q^2 / \beta^2) / \beta^2;$$

$$z_+^2 + a = B_2 U^2 + B_1 U + B_0,$$

$$B_2 = \alpha^2 / \beta^2, \quad B_1 = (H\delta + 2P) / \beta^2, \quad B_0 = H^2 / 4 + (HQ + r^2) / \beta^2;$$

$$b = A_2 U^2 + A_1 U + A_0,$$

$$A_2 = \xi_1 - \xi_3 \delta / \beta^2 + \xi_2 \delta^2 / \beta^4, \quad A_1 = \xi_4 - \xi_5 \delta / \beta^2 - \xi_3 Q / \beta^2 + 2\xi_2 \delta Q / \beta^4,$$

$$A_0 = R - \xi_5 Q / \beta^2 + \xi_2 Q^2 / \beta^4;$$

$$bz_+ = (A_2 U^2 + A_1 U + A_0) \times (\delta U / \beta^2 + H / 2 + Q / \beta^2) = E_3 U^3 + E_2 U^2 + E_1 U + E_0,$$

$$E_3 = A_2 \delta / \beta^2, \quad E_2 = A_2 (H / 2 + Q / \beta^2) + A_1 \delta / \beta^2,$$

$$E_1 = A_1 (H / 2 + Q / \beta^2) + A_0 \delta / \beta^2, \quad E_0 = A_0 (H / 2 + Q / \beta^2);$$

$$\xi_2 z_+ + \xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c = F_1 U + F_0, \quad F_1 = \xi_3 - \xi_2 \delta / \beta^2, \quad F_0 = \xi_5 - \xi_2 Q / \beta^2 + \xi_2 H / 2.$$

Применяя введенные обозначения, запишем интеграл $J(H)$ в виде

$$J(H) = J_1 - J_2,$$

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{E_3 U^3 + E_2 U^2 + E_1 U + E_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}},$$

$$J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{F_1 U + F_0}{\sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}.$$

4.2. Вычисление интегралов по dU

Используя деление многочленов и учитывая, что $C_2 > 0$ в силу (11), приведем интеграл J_1 к виду

$$J_1 = J_{11} + J_{12},$$

$$J_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{L_1 U + L_0}{\sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}},$$

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}, \quad (17)$$

где

$$L_1 = \frac{E_3}{C_2}, \quad L_0 = \frac{E_2 C_2 - E_3 C_1}{C_2^2}, \quad S_1 = E_1 - \frac{E_3 C_0}{C_2} - \frac{C_1(E_2 C_2 - E_3 C_1)}{C_2^2},$$

$$S_0 = E_0 - \frac{C_0(E_2 C_2 - E_3 C_1)}{C_2^2}.$$

Поскольку $a \geq 0$, получаем $z_+^2 + a = B_2 U^2 + B_1 U + B_0 \geq 0$, поэтому $B_1^2 - 4B_2 B_0 \leq 0$. Если $B_1^2 - 4B_2 B_0 = 0$ и $-B_1 / (2B_2) \in [-h/2, h/2]$, то в силу ([2], п. 2), ([15], п. 3) точка x лежит на том кусочке касательной плоскости, проведенной в точке $y(u_n, v_m)$, по которому идет интегрирование в каноническом интеграле после линейаризации $y(u, v)$ вблизи узла $y(u_n, v_m)$. Однако точка x не попадает на этот кусочек касательной плоскости, так как лежит в другом узле на Γ . Поэтому если $B_1^2 - 4B_2 B_0 = 0$, то $-B_1 / (2B_2) \notin [-h/2, h/2]$.

Поскольку $B_2 > 0$, интегралы J_{11} и J_2 находятся с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [16]:

$$J_{11} = \left(\frac{L_1}{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} + \left(L_0 - \frac{L_1 B_1}{2B_2} \right) \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \left| \frac{2B_2 U + B_1 + 2\sqrt{B_2} \times}{\times \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} \right| \right) \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2},$$

$$J_2 = \left(\frac{F_1}{B_2} \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0} + \left(F_0 - \frac{F_1 B_1}{2B_2} \right) \frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln \left| \frac{2B_2 U + B_1 + 2\sqrt{B_2} \times}{\times \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} \right| \right) \Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2},$$

Остается вычислить интеграл J_{12} . Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена $C_2 U^2 + C_1 U + C_0$, стоящего в знаменателе подынтегральной функции.

Первый случай: $C_1^2 - 4C_2 C_0 > 0$. Выше показано, что квадратичный полином, обозначенный как a — неотрицательный, следовательно, его дискриминант неположительный: $C_1^2 - 4C_2 C_0 \leq 0$, поэтому первый случай не реализуется.

Второй случай: $C_1^2 - 4C_2 C_0 = 0$. В этом случае $C_2 U^2 + C_1 U + C_0 = C_2 (U - U_1)^2$, где $U_1 = -C_1 / (2C_2)$ — корень многочлена. Применяя соотношение

$$\frac{S_1 U + S_0}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1 (U - U_1) + S_0 + U_1 S_1}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1}{U - U_1} + \frac{S_0 + U_1 S_1}{(U - U_1)^2},$$

получим

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_1 dU}{C_2 (U - U_1) \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}} + \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{(U - U_1)^2 \sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}}.$$

Либо $U_1 > h/2$, либо $U_1 < -h/2$. Случай $U_1 \in [-h/2, h/2]$ не реализуется, так как точка x лежит в узле, отличном от $y(u_n, v_m)$, и не попадает на маленький кусочек касательной плоскости вблизи точки $y(u_n, v_m)$, по которому ведется интегрирование в каноническом интеграле после линейаризации $y(u, v)$ около $y(u_n, v_m)$. Сделав замену $t = 1 / (U - U_1)$, находим (см. [17], ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5)

$$t_1 = \frac{2}{h - 2U_1}, \quad t_2 = -\frac{2}{h + 2U_1},$$

$$\begin{aligned}
J_{12} &= -\frac{S_1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t) dt}{\sqrt{(U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0)t^2 + (2B_2 U_1 + B_1)t + B_2}} - \\
&\quad - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t) t dt}{\sqrt{(U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0)t^2 + (2B_2 U_1 + B_1)t + B_2}} = \\
&= -\frac{S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{t dt}{\sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2}},
\end{aligned}$$

где $\omega_1 = 2B_2 U_1 + B_1$, $\omega_2 = U_1^2 B_2 + U_1 B_1 + B_0$. Как показано выше, $a \geq 0$, поэтому и $\omega_2 \geq 0$. Если $\omega_2 > 0$, то с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из книги [16] получаем

$$\begin{aligned}
J_{12}(t_2, t_1) &= \frac{-S_1 \operatorname{sgn}(C_1)}{C_2 \sqrt{\omega_2}} \ln \left| 2\omega_2 t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} \right| \Big|_{t_2}^{t_1} - \\
&\quad - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \left(\frac{1}{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega_1}{2\omega_2} \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \ln \left| 2\omega_2 t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2} \sqrt{\omega_2 t^2 + \omega_1 t + B_2} \right| \right) \Big|_{t_2}^{t_1}.
\end{aligned}$$

Если $\omega_2 = 0$, а $\omega_1 \neq 0$, то, пользуясь интегралами 1.2.18.5, 1.2.18.6 из книги [14], находим

$$J_{12}(t_2, t_1) = -\frac{S_1}{C_2} \frac{2}{\omega_1} \operatorname{sgn}(C_1) \sqrt{\omega_1 t + B_2} \Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \operatorname{sgn}(C_1) \frac{2(\omega_1 t - 2B_2)}{3\omega_1^2} \sqrt{\omega_1 t + B_2} \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Если $\omega_2 = 0$ и $\omega_1 = 0$, то

$$J_{12}(t_2, t_1) = -\frac{S_1}{C_2} \frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{\sqrt{B_2}} t \Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1 S_1}{C_2} \frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{2\sqrt{B_2}} t^2 \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Тем самым, во втором случае интеграл J_{12} вычислен явно.

Третий случай: $C_1^2 - 4C_2 C_0 < 0$. В этом случае многочлен $C_2 U^2 + C_1 U + C_0$ неприводимый. Рассмотрим различные варианты вычисления интеграла J_{12} из (17), воспользовавшись методом, предложенным в ([17], ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5, (7.75)) или в ([16], разд. 2.25).

Вариант 1. Если $B_1 = B_2 C_1 / C_2$, то в интеграле J_{12} достаточно сделать замену $U = t - C_1 / (2C_2)$. Пусть, кроме того,

$$t_1 = \frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 = -\frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 < t_1,$$

тогда

$$\begin{aligned}
J_{12} &= \int_{t_2}^{t_1} \frac{[S_1 t + (-S_1 C_1 / (2C_2) + S_0)] dt}{C_2 [t^2 + C_0 / C_2 - C_1^2 / (4C_2^2)] \sqrt{B_2 t^2 + B_0 - B_2 C_1^2 / (4C_2^2)}} = \\
&= \frac{1}{C_2} \left(\frac{S_1}{2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} + \left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{C_0}{C_2} - \frac{C_1^2}{4C_2^2} > 0, \quad \sigma_2 = B_0 - \frac{B_2 C_1^2}{4C_2^2} \geq 0.$$

Вводя обозначения

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2} \int_{t=t_2}^{t=t_1} \frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}},$$

$$J_{122} = \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{[t^2 + \sigma_1] \sqrt{t^2 + \sigma_2 / B_2}},$$

получим

$$J_{12} = J_{121} + J_{122}. \quad (18)$$

Используя табличный интеграл 2.246 из книги [16], находим интеграл J_{121} в явном виде.

1. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 > 0$, то $\sigma_2 \geq 0$ и

$$J_{121} = \frac{S_1}{C_2 \sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1 B_2 - \sigma_2}} \right) \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 < 0$, то $\sigma_2 > 0$ и

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2 \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \right| \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 = 0$, то $\sigma_2 > 0$ и

$$J_{121} = -\frac{S_1}{C_2 \sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Используя табличные интегралы 1.2.45.10, 1.2.43.17 и 1.2.11.10 из книги [14], находим интеграл J_{122} в явном виде.

1. Если $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_2 - B_2 \sigma_1 < 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2 / B_2)}} \times \ln \left| \frac{t \sqrt{\sigma_1 - \sigma_2 / B_2} + \sqrt{\sigma_1 (t^2 + \sigma_2 / B_2)}}{\sqrt{t^2 + \sigma_1}} \right| \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если $\sigma_2 - B_2 \sigma_1 > 0$, то $\sigma_2 > 0$ и

$$J_{122} = \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \times \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 (\sigma_2 / B_2 - \sigma_1)}} \operatorname{arctg} \frac{t \sqrt{\sigma_2 / B_2 - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1 (t^2 + \sigma_2 / B_2)}} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если $\sigma_1 - \sigma_2 / B_2 = 0$, то $\sigma_2 > 0$ и

$$J_{122} = \frac{1}{C_2 \sqrt{B_2}} \left(-\frac{S_1 C_1}{2C_2} + S_0 \right) \frac{t}{\sigma_1 \sqrt{t^2 + \sigma_1}} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

4. Если $\sigma_2 = 0$, то $B_1^2 - 4B_0B_2 = 0$ и $|B_1 / (2B_2)| > h / 2$. Поскольку $t = U + C_1 / (2C_2)$ и $B_1 = B_2C_1 / C_2$, то $\operatorname{sgn}(t) = \operatorname{sgn}(B_1)$ и

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}} \left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0 \right) \operatorname{sgn}(B_1) \frac{1}{2\sigma_1} \ln \frac{t^2}{|t^2 + \sigma_1|} \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Итак, в этом варианте интеграл J_{12} из (17) вычисляется явно по формуле (18).

Вариант 2. Если $B_1 \neq B_2C_1 / C_2$, то в интеграле J_{12} из (17) сделаем дробно-линейную подстановку

$$U = \frac{v_2 t + v_1}{1+t}, \quad t = \frac{v_1 - U}{U - v_2}, \quad dU = \frac{v_2 - v_1}{(1+t)^2} dt, \quad S_1 U + S_0 = \frac{(S_1 v_2 + S_0)t + (S_1 v_1 + S_0)}{1+t}.$$

Константы v_2 и v_1 выбираются таким образом, чтобы квадратичные полиномы в подынтегральной функции в интеграле J_{12} из (17) не имели членов первой степени относительно t . Можно показать (см. [17], ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5), что если $B_1 \neq B_2C_1 / C_2$, то такие константы всегда существуют, различны и являются корнями уравнения

$$z^2 + \frac{2(B_0 - B_2C_0 / C_2)}{B_1 - B_2C_1 / C_2} z + \frac{B_0C_1 / C_2 - B_1C_0 / C_2}{B_1 - B_2C_1 / C_2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$v_1 = \frac{-X_1 + \sqrt{X_1^2 - 4X_2}}{2}, \quad v_2 = \frac{-X_1 - \sqrt{X_1^2 - 4X_2}}{2},$$

где

$$X_1 = \frac{2(B_0 - B_2C_0 / C_2)}{B_1 - B_2C_1 / C_2}, \quad X_2 = \frac{B_0C_1 / C_2 - B_1C_0 / C_2}{B_1 - B_2C_1 / C_2}.$$

Квадратичные полиномы, стоящие в подынтегральной функции в интеграле J_{12} из (17), после перехода к переменной t принимают вид

$$U^2 + \frac{C_1}{C_2} U + \frac{C_0}{C_2} = \frac{v_2^2 + (C_1 / C_2)v_2 + C_0 / C_2}{(1+t)^2} \times \left(t^2 + \frac{v_1^2 + (C_1 / C_2)v_1 + C_0 / C_2}{v_2^2 + (C_1 / C_2)v_2 + C_0 / C_2} \right) = \frac{\Psi_1(t^2 + \Psi_2 / \Psi_1)}{(1+t)^2},$$

$$B_2 U^2 + B_1 U + B_0 = \frac{(B_2 v_2^2 + B_1 v_2 + B_0)t^2 + B_2 v_1^2 + B_1 v_1 + B_0}{(1+t)^2} = \frac{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}{(1+t)^2},$$

где $\Psi_1 = v_2^2 + (C_1 / C_2)v_2 + C_0 / C_2 > 0$, $\Psi_2 = v_1^2 + (C_1 / C_2)v_1 + C_0 / C_2 > 0$, $\Psi_3 = B_2 v_2^2 + B_1 v_2 + B_0$, $\Psi_4 = B_2 v_1^2 + B_1 v_1 + B_0$. Ранее было показано, что $B_2 U^2 + B_1 U + B_0 \geq 0$ при любом U , следовательно, этот квадратичный полином имеет не более одного вещественного корня, а также $\Psi_3 \geq 0$ и $\Psi_4 \geq 0$. Поскольку константы v_2 и v_1 всегда существуют и различны, Ψ_4 и Ψ_3 одновременно не обращаются в нуль.

Переходя к переменной t в интеграле J_{12} из (17), получаем

$$J_{12} = \frac{1}{C_2} \int_{t_2}^{t_1} \frac{(S_1 v_2 + S_0)t + S_1 v_1 + S_0}{(1+t)} \frac{(v_2 - v_1)}{(1+t)^2} \times \frac{(1+t)^2}{\Psi_1(t^2 + \Psi_2 / \Psi_1)} \frac{\sqrt{(1+t)^2}}{\sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}} dt =$$

$$= \frac{v_2 - v_1}{C_2 \Psi_1} \int_{t_2}^{t_1} \frac{(S_1 v_2 + S_0)t + S_1 v_1 + S_0}{(t^2 + \Psi_2 / \Psi_1) \sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}} \operatorname{sgn}(1+t) dt,$$

где

$$t_1 = \frac{v_1 - h/2}{h/2 - v_2}, \quad t_2 = \frac{v_1 + h/2}{-h/2 - v_2}.$$

Введем обозначение

$$J_{12}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{v_2 - v_1}{C_2 \Psi_1} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{(S_1 v_2 + S_0)t + S_1 v_1 + S_0}{(t^2 + \Psi_2 / \Psi_1) \sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}} dt,$$

тогда

$$J_{12} = \begin{cases} -J_{12}^*(t_2, t_1), & t_1 + 1 < 0, t_2 + 1 < 0 \Leftrightarrow t_1 < -1, t_2 < -1, \\ J_{12}^*(t_2, t_1), & t_1 + 1 > 0, t_2 + 1 > 0 \Leftrightarrow t_1 > -1, t_2 > -1, \\ -J_{12}^*(t_2, -1) + J_{12}^*(-1, t_1), & t_1 + 1 > 0, t_2 + 1 < 0 \Leftrightarrow t_1 > -1, t_2 < -1, \\ J_{12}^*(t_2, -1) - J_{12}^*(-1, t_1), & t_1 + 1 < 0, t_2 + 1 > 0 \Leftrightarrow t_1 < -1, t_2 > -1. \end{cases} \quad (19)$$

Интеграл $J_{12}^*(\tau_2, \tau_1)$ можно представить в виде

$$J_{12}^*(\tau_2, \tau_1) = J_{121}^*(\tau_2, \tau_1) + J_{122}^*(\tau_2, \tau_1), \quad (20)$$

где

$$J_{121}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{v_2 - v_1}{C_2 \Psi_1} \frac{S_1 v_2 + S_0}{2} \int_{t=\tau_2}^{t=\tau_1} \frac{dt^2}{(t^2 + \Psi_2 / \Psi_1) \sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}},$$

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \Psi_1} \int_{t=\tau_2}^{t=\tau_1} \frac{dt}{(t^2 + \Psi_2 / \Psi_1) \sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}}.$$

Пусть $\Psi_3 \neq 0$. Подынтегральная функция в $J_{121}^*(\tau_2, \tau_1)$ представляет собой линейную иррациональность относительно t^2 . Применяя табличный интеграл 2.246 из книги [16], находим интеграл $J_{121}^*(\tau_2, \tau_1)$ в явном виде.

1. Если $\Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1 - \Psi_4 > 0$, то

$$J_{121}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_2 + S_0)}{C_2 \Psi_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1 - \Psi_4}} \arctg \left(\frac{\sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}}{\sqrt{\Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1 - \Psi_4}} \right) \Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если $\Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1 - \Psi_4 < 0$, то $\Psi_4 > 0$ и

$$J_{121}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_2 + S_0)}{2C_2 \Psi_1} \frac{1}{\sqrt{\Psi_4 - \Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1}} \times \ln \left| \frac{\sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4} - \sqrt{\Psi_4 - \Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1}}{\sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4} + \sqrt{\Psi_4 - \Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1}} \right| \Bigg|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

3. Если $\Psi_2 \Psi_3 / \Psi_1 - \Psi_4 = 0$, то $\Psi_4 > 0$ и

$$J_{121}^*(\tau_2, \tau_1) = -\frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_2 + S_0)}{C_2 \Psi_1} \frac{1}{\sqrt{\Psi_3 t^2 + \Psi_4}} \Bigg|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

Пусть $\Psi_3 = 0$. Тогда $\Psi_4 \neq 0$ и

$$J_{121}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_2 + S_0)}{2C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_4}} \times \ln \left| t^2 + \psi_2 / \psi_1 \right|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

Пусть $\psi_3 \neq 0$. Используя табличные интегралы 1.2.43.17, 1.2.45.10 и 1.2.11.10 из книги [14], находим интеграл $J_{122}^*(\tau_2, \tau_1)$ в явном виде.

1. Если $\psi_4 > 0$ и $\psi_4 - \psi_3 \psi_2 / \psi_1 < 0$, то

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_3}} \times \frac{1}{\sqrt{\psi_2 / \psi_1 (\psi_2 / \psi_1 - \psi_4 / \psi_3)}} \times \\ \times \ln \left| \frac{t \sqrt{\psi_2 / \psi_1 - \psi_4 / \psi_3} + \sqrt{\psi_2 / \psi_1 (t^2 + \psi_4 / \psi_3)}}{\sqrt{t^2 + \psi_2 / \psi_1}} \right|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

2. Если $\psi_4 - \psi_3 \psi_2 / \psi_1 > 0$, то $\psi_4 > 0$ и

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_3}} \times \frac{1}{\sqrt{\psi_2 / \psi_1 (\psi_4 / \psi_3 - \psi_2 / \psi_1)}} \frac{t \sqrt{\psi_4 / \psi_3 - \psi_2 / \psi_1}}{\sqrt{\psi_2 / \psi_1 (t^2 + \psi_4 / \psi_3)}} \Big|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

3. Если $\psi_2 / \psi_1 - \psi_4 / \psi_3 = 0$, то $\psi_4 > 0$ и

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_3}} \frac{t}{\psi_2 / \psi_1 \sqrt{t^2 + \psi_2 / \psi_1}} \Big|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

4. Если $\psi_4 = 0$, то

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_3}} \times \int_{t=\tau_2}^{t=\tau_1} \operatorname{sgn}(t) \frac{dt}{[t^2 + \psi_2 / \psi_1] t},$$

и точка $t = 0$ на координатной оси t отвечает точке $U = -B_1 / (2B_2)$ на оси U . Как указано в начале п. 4.2, точка $-B_1 / (2B_2)$ не попадает в интервал интегрирования по переменной U , поэтому точка $t = 0$ не попадает в интервал интегрирования по переменной t . Следовательно,

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_3}} \times \operatorname{sgn}(\tau_1) \frac{1}{2\psi_2 / \psi_1} \ln \left| \frac{t^2}{t^2 + \psi_2 / \psi_1} \right|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

Пусть $\psi_3 = 0$. Тогда $\psi_4 \neq 0$ и

$$J_{122}^*(\tau_2, \tau_1) = \frac{(v_2 - v_1)(S_1 v_1 + S_0)}{C_2 \psi_1 \sqrt{\psi_4}} \sqrt{\frac{\psi_1}{\psi_2}} \operatorname{arctg} \left(t \sqrt{\frac{\psi_1}{\psi_2}} \right) \Big|_{\tau_2}^{\tau_1}.$$

Итак, в варианте 2 интеграл J_{12} из (17) вычисляется явно по формулам (19), (20).

5. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем основной результат этой работы.

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2 , ограничивающая объемно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2 , содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1) со свойствами (3), (4); и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$, а точка x расположена в одном из узлов на Γ . Тогда для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя (6) для уравнения Гельмгольца имеет место квадратурная формула

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_n, v_m) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi} \mu_{nm} \mathcal{J}_{nm} + \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N-1, m=M-1 \\ n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} \times \\ \times \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|) (1-ik|x-y(u_n, v_m)|) T_{nm}(x), \quad (21)$$

где интеграл $\mathcal{J}_{nm}$ вычислен в явном виде в п. 3, а интеграл $T_{nm}(x)$ вычислен в явном виде в п. 4.

На рассмотренных ниже тестовых примерах остаточный член в (21) ведет себя как $O(H+h)$ равномерно по всем x , лежащим в узлах сетки.

Результаты для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала получаются из приведенных результатов в частном случае $k=0$.

6. СТАНДАРТНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

Квадратурная формула (21) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя, используемой в инженерных расчетах (см. [1], гл. 2):

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(u_n, v_m) \in \Gamma} \approx \frac{1}{4\pi |\eta(x)|} \times \sum_{\substack{n=N-1, m=M-1 \\ n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} \times |\eta(y(u_n, v_m))| \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|) \times \\ \times (1-ik|x-y(u_n, v_m)|) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n, v_m) - x_j)}{|x-y(u_n, v_m)|^3} hH. \quad (22)$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (21) обнулением $\mathcal{J}_{nm}$ и заменой канонического интеграла $T_{nm}(x)$ на его следующее приближенное значение:

$$hH \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u_n, v_m) - x_j)}{|x-y(u_n, v_m)|^3}.$$

Обнуление интеграла $\mathcal{J}_{nm}$ можно обосновать следующим образом. Интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(u, v) - x_j)}{|x-y(u, v)|^3} \quad (23)$$

равен интегралу по кусочку поверхности Γ с центром в точке $x = y(u_n, v_m)$, а он, в свою очередь, приближенно равен интегралу от той же функции по кусочку касательной плоскости, проведенной в точке x . Вектор нормали η к поверхности в точке x будет и вектором нормали к касательной плоскости. На касательной плоскости вектор $(y(u, v) - x)$ ортогонален вектору нормали η , поэтому их скалярное произведение, стоящее в числителе в (23), тождественно равно нулю для всех u, v , а значит, и интеграл по кусочку касательной плоскости равен нулю. Поскольку этот интеграл приближенно равен интегралу $\mathcal{J}_{nm}$, умноженному на взятую со знаком минус длину вектора нормали η в точке x , то можно считать, что и интеграл $\mathcal{J}_{nm}$ приближенно равен нулю.

7. ЧИСЛЕННЫЕ ТЕСТЫ

Тестирование квадратурных формул для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями

$$y_1(u, v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u, v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u, v) = \cos v, \quad (24)$$

причем $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. В численных тестах используются явные формулы внутри и вне сферы из [2] для потенциалов простого слоя с заданной плотностью.

Согласно ([13], гл. 5, § 27, п. 7), прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности Γ можно найти по формуле

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-} \right].$$

Здесь поверхность Γ рассматривается как двусторонняя, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали $\mathbf{n}_x$, а через Γ^+ обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя на разных сторонах Γ . Отметим, что направление единичной нормали $\mathbf{n}_x$ совпадает с направлением нормали η , так как вектор $\mathbf{n}_x$ получается из η в результате нормировки. Пусть теперь Γ — единичная сфера, заданная параметризацией (24), тогда формулы (2) для нормали η определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит, Γ^- — внутренняя сторона единичной сферы, а Γ^+ — ее внешняя сторона.

В тестах точное прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в узловых точках сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (21), по формуле из [4] и по стандартной формуле (22). В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность по обеим формулам. Вычисления проводились для разных значений M и N . Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi / N$, $H = \pi / M$. Если $N / 2 = M = 25$, то $h = H \approx 0.13$; если $N / 2 = M = 50$, то $h = H \approx 0.063$; если $N / 2 = M = 100$, то $h = H \approx 0.031$. В табл. 1 для каждого теста приводится максимум абсолютной погрешности вычислений по всем узловым точкам сферы. В первой строке таблицы указаны значения N , M , в последующих строках — максимальные погрешности для стандартной формулы (22), для формулы из [4] и для улучшенной квадратурной формулы (21) в каждом тесте.

Тест 1 (для квадратурных формул в случае уравнения Лапласа). В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = 1$, тогда гармонический потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид

Таблица 1. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тестах 1–5

Номер теста	Квадратная формула	$M = N / 2 = 25$	$M = N / 2 = 50$	$M = N / 2 = 100$
1	стандартная формула	0.019	0.0097	0.0062
1	формула из [4]	0.0042	0.0024	0.0013
1	улучшенная формула	0.0028	0.0016	0.00084
2	стандартная формула	0.019	0.0097	0.0049
2	формула из [4]	0.00041	0.0001	2.6E-5
2	улучшенная формула	0.00032	8.3E-5	2.1E-5
3	стандартная формула	0.011	0.0089	0.0062
3	формула из [4]	0.0044	0.0025	0.0013
3	улучшенная формула	0.003	0.0016	0.00085
4	стандартная формула	0.019	0.0097	0.0062
4	формула из [4]	0.0041	0.0024	0.0013
4	улучшенная формула	0.0026	0.0015	0.00083
5	стандартная формула	0.011	0.0089	0.0062
5	формула из [4]	0.0044	0.0025	0.0013
5	улучшенная формула	0.003	0.0016	0.00085

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{|x|} & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} = \frac{1}{2}.$$

Тест 2 (для квадратурных формул в случае уравнения Лапласа). В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = \cos u \sin v$, тогда гармонический потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \text{если } |x| < 1, \\ \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2}, & \text{если } |x| > 1, \end{cases} \quad \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} = \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6},$$

где φ и ϑ — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с началом в центре сферы.

Тест 3 (для квадратурных формул в случае уравнения Лапласа). В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = \cos v$, тогда гармонический потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{\cos \vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} = \frac{\cos \vartheta}{6},$$

где ϑ — зенитный угол в сферических координатах с началом в центре сферы.

Тест 4 (для квадратурных формул в случае уравнения Гельмгольца). В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = k$, тогда потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} e^{ik} \frac{\sin(k|x|)}{|x|}, & \text{если } |x| < 1, \\ \sin k \frac{e^{ik|x|}}{|x|}, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} = -\frac{e^{ik} \sin k}{2} (k \operatorname{ctg} k - 2 + ik),$$

где $k = 1$.

Тест 5 (для квадратурных формул в случае уравнения Гельмгольца). В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = k^3 \cos v$, тогда потенциал простого слоя и прямое значение его нормальной производной имеют вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} (ik - 1) e^{ik} \frac{k|x| \cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos \vartheta, & \text{если } |x| < 1, \\ (k \cos k - \sin k) \frac{(ik|x| - 1) e^{ik|x|}}{|x|^2} \cos \vartheta, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{e^{ik} \cos \vartheta}{2} \left(\sin k \left(-ik^3 + 2k^2 + 4ik - 4 \right) + \cos k \left(-k^3 - 4ik^2 + 4k \right) \right),$$

где ϑ — зенитный угол в сферических координатах с началом в центре сферы, $k = 1$.

Результаты расчетов в приведенных тестовых примерах показывают, что улучшенная квадратурная формула (21) имеет первый порядок сходимости, как и формула из [4]. При этом погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле (21) в несколько раз меньше, чем погрешность вычислений по стандартной квадратурной формуле и в полтора раза меньше погрешности вычислений по формуле из работы [4]. Тем самым, улучшенная квадратурная формула обеспечивает значительно более высокую точность вычислений прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя.

Отметим, что в тестовых примерах погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле возрастает к полюсам сферы, которые являются особыми точками в силу выбранной параметризации (24). Вычисления по улучшенной квадратурной формуле (21) в тесте 2 показывают более высокую точность, так как плотность в потенциале простого слоя и прямое значение его нормальной производной обращаются в нуль на полюсах сферы. В то же время погрешность стандартной формулы достигает максимума на экваторе сферы, поэтому во втором тесте такого же эффекта для этой формулы не наблюдается.

Улучшенная квадратурная формула (21) может найти применение при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих на первом этапе решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов и граничных интегральных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. Крутицкий П. А., Федотова А. Д., Колыбасова В. В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.
3. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 44–58.
4. Крутицкий П. А., Резниченко И. О., Колыбасова В. В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 9. С. 1270–1288.
5. Крутицкий П. А., Колыбасова В. В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
6. Krutitskii P. A. The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits // Quarter. Appl. Math. 2009. V. 67. N 1. P. 73–92.
7. Krutitskii P. A. On the electric current from electrodes in a magnetized semiconductor film // IMA J. Appl. Math. 1998. V. 60. P. 285–297.
8. Krutitskii P. A. The Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation in a multiply connected domain with cuts // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V. 43. N 2. P. 325–341.
9. Крутицкий П. А. Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. ур-ния. 1997. Т. 33. № 9. С. 1181–1190.
10. Krutitskii P. A. The Neumann problem on wave propagation in a 2-D external domain with cuts // J. Math. Kyoto Univ. 1998. V. 38. N 3. P. 439–452.
11. Krutitskii P. A. The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1998. V. 17. № 2. P. 361–378.
12. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.
13. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981.
15. Крутицкий П. А., Федотова А. Д., Колыбасова В. В. О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трехмерном случае // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2019. № 112. 26 с.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
17. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть 1 и 2. М.: Физматлит, 1973.