

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.651

ОЦЕНКА QTT РАНГОВ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ
НА РАВНОМЕРНОЙ КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ¹⁾© 2024 г. А. В. Зыль^{1,2,*}, Н. Л. Замарашкин^{1, **}¹119333 Москва, ул. Губкина, 8, Ин-т вычисл. математики РАН, Россия²141701 Долгопрудный, М. о., Институтский переулок, 9,
Московский физико-технический институт, Россия

*e-mail: zyl.av@phystech.edu

** e-mail: nikolai.zamarashkin@gmail.com

Поступила в редакцию 10.07.2023 г.

Переработанный вариант 10.07.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

В работе доказываются оценки ε -рангов для ТТ-разложений тензоров, полученных путем тензоризации значений регулярной функции одной комплексной переменной на равномерной квадратной сетке на комплексной плоскости. Установлена связь точности приближения и геометрии области регулярности функции. Библ. 8. Фиг. 2.

Ключевые слова: тензорный поезд, QTT, оценка рангов ТТ-аппроксимаций, регулярные функции.

DOI: 10.31857/S0044466924020017, **EDN:** YKVVQO

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе получены оценки ε -рангов для ТТ-аппроксимаций тензоров, образующихся после тензоризации значений регулярной функции $f(z)$ одного комплексного переменного на равномерной сетке в квадратной области в $\mathbb{C}$. Техника доказательства следует работе [1], можно сказать, что результаты из [1] обобщаются на комплексный случай. Похожие вопросы также затрагивались в работах [2], [3], [4]. В разд. 2, 3 будут даны необходимые сведения о тензорах, ТТ-разложении и оптимальных полиномах, доказана лемма 1 об аппроксимации регулярной функции полиномами на квадрате в комплексной плоскости. В разд. 4 сформулирована и доказана оценка ε -рангов.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Тензоры являются естественным обобщением матриц на многомерный случай $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n^d}$. Число d называется порядком тензора, а n — его размерностью по соответствующей оси. Для обозначения элемента тензора будут использоваться индексы $(i_1, i_2, \dots, i_d)$. Индексы тензора можно группировать и преобразовывать, в Matlab это соответствует функции `reshape`. В дальнейшем потребуется понятие развертки тензора по измерению k $T_k \in \mathbb{C}^{(n_1 \dots n_k) \times (n_{k+1} \dots n_d)}$, для элементов которого справедливо

$$T_k(i, j) = \mathbf{T}(i_1, \dots, i_d), \quad \begin{aligned} i &= i_1 \cdot n^{k-1} + \dots + i_{k-1} \cdot n + i_k, \\ j &= i_{k+1} \cdot n^{d-k-1} + \dots + i_{d-1} \cdot n + i_d. \end{aligned}$$

Определение 2.1. ТТ-разложением d -мерного тензора $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n^d}$ называется его представление в виде

$$T(i_1, \dots, i_d) = G_1(i_1)G_2(i_2) \dots G_d(i_d). \quad (1)$$

Трехмерные тензоры G_k имеют размеры $r_{k-1} \times n \times r_k$, кроме случаев $k = 1$ и $k = d$, где они вырождаются в матрицы размеров $n_1 \times r_1$ и $r_{d-1} \times n_d$. Элементы $G_k(i_k)$ являются матрицами, взятыми как срезы трехмерных тензоров. Размеры r_k называются рангами ТТ-разложения.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта No 19-11-00338), Московского центра Фундаментальной и Прикладной Математики в ИВМ РАН (Соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2022-286).

Ключевым вопросом в численных расчетах является поиск ТТ-аппроксимации с малыми рангами, чтобы получить ускорение и выигрыш в памяти. В литературе существуют примеры оценок рангов для тензоров специфического вида или структуры. Однако, на практике часто предположения о структуре тензора весьма общие и не позволяют провести анализ. Для оценки ранга ТТ-аппроксимации введем понятие *ТТ ε -ранга тензора $\mathbf{T}$*

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\mathbf{T}) := \min_{\mathbf{S}: \|\mathbf{T} - \mathbf{S}\|_F \leq \varepsilon} \max_{k \in \{1, d-1\}} r_k(\mathbf{S}). \quad (2)$$

Другими словами мы смотрим на минимально возможный ранг оптимальной аппроксимации тензора с заданной точностью. Полезным результатом, который будет использоваться далее является теорема об аппроксимации из [5]:

Теорема 2.1. Для любого тензора $\mathbf{A} = [A(i_1, \dots, i_d)]$ существует ТТ-аппроксимация (1) $\mathbf{B} = [B(i_1, \dots, i_d)]$ с рангами r_k , такими что

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d-1} \varepsilon_k^2},$$

где ε_k определяется, как минимум

$$\varepsilon_k = \min_{\text{rank } B \leq r_k} \|A_k - B\|_F.$$

A_k — это матрица развертки тензора $\mathbf{A}$:

$$A_k = \mathbf{A}[i_1, \dots, i_k; i_{k+1}, \dots, i_d].$$

В статье будут оцениваться ε -ранги (2) тензоров, элементы которых являются значениям некоторой комплекснозначной функции. Пусть в некоторой области $\mathbb{C}$ задана квадратная сетка $N \times N$ с равномерным шагом по каждой оси и функция $f(z)$, которая является регулярной в области, содержащей сетку. Сформируем матрицу $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, где $A(i, j) = f(z_{i,j})$ и $z_{i,j}$ это узел сетки в естественной нумерации (i — номер строки сетки, j — номер узла в строке i). Матрицу A можно тензоризовать, превратив в тензор, пример такой процедуры приведен на фиг. 2. Условием тензоризации матрицы является совпадение размеров $n^d = N$. ТТ-формат полученного тензора мы далее будем называть QTT (Quantized Tensor Train).

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Определение 3.1. Пусть $C \subset \mathbb{C}$ компакт, монический полином с комплексными коэффициентами $P_{n,C}^*(z)$ будем называть *чебышевским полиномом множества C* , если он удовлетворяет равенству:

$$P_{n,C}^* = \underset{P_n}{\operatorname{argminmax}}_{z \in C} |P_n(z)|. \quad (3)$$

Здесь минимум берется по всевозможным полиномам $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ степени n с комплексными коэффициентами. Другими словами $P_{n,C}^*$ это полином с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля на C .

Известным является случай $C = [-1; 1] \subset \mathbb{R}$ и классические полиномы Чебышёва:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$T_n(x) = 2^{1-n} T_n'(x). \quad (5)$$

После продолжения в комплексную плоскость формула (4) приобретает вид

$$T_n(z) = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^n + \frac{1}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^n. \quad (6)$$

В формуле (6) выбирается одна из регулярных ветвей $\sqrt{z^2 - 1}$. Полином (5) будет единственным решением задачи (3) при $C = [-1; 1]$, согласно теореме об альтернансе. Нам потребуются некоторые свойства этих полиномов.

Определение 3.2. Чебышёвской сеткой назовем множество корней T_n ,

$$c_j = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} \cdot j\right) \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Определение 3.3. Эллипсами Бернштейна называется семейство эллипсов Γ_ρ , $\rho > 0$, с фокусами в ± 1 , которые получаются после отображения точек окружности $w = e^{i\varphi}\rho$ с помощью функции Жуковского

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi\right].$$

Эллипс Бернштейна Γ_ρ имеет полуоси a, b :

$$a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right), \quad \begin{aligned} a + b &= \rho, \\ a^2 - b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Лемма 3.1. Для любого $z \in \Gamma_\rho$ выполнено

$$|T_n(z)| \geq \frac{1}{2}\left[\rho^n - \frac{1}{\rho^n}\right].$$

Доказательство. Заметим, что для любого $z \in \Gamma_\rho$ выполнено

$$z^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} - \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right)^2.$$

Тогда, согласно формуле (6) имеем

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left[\rho^n e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho^n}e^{-i\varphi}\right].$$

Откуда сразу следует оценка из условия леммы.

Лемма 3.2. Длина контура эллипса Γ_ρ удовлетворяет неравенству $|\Gamma_\rho| \leq \pi(\rho + \rho^{-1})$.

Доказательство. Оценим контурный интеграл:

$$|\Gamma_\rho| = \int_{\Gamma_\rho} |dz| = \int_{S_\rho} \left| \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) dy \right| = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left| 1 - (\rho e^{i\varphi})^{-2} \right| \rho d\varphi \leq \frac{1}{2} (1 + \rho^{-2}) \rho \cdot 2\pi = \pi \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right),$$

где S_ρ — это сфера радиуса ρ с центром в нуле.

Далее под Q_1 будет подразумеваться квадрат в $\mathbb{C}$ с центром в нуле и длиной стороны 2 (см. фиг. 1).

$$Q_1 = \{z = x + iy | \max(|x|, |y|) \leq 1\} \subset \mathbb{C}. \quad (7)$$

Лемма 3.3. При $\rho_* = (1 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) / 2$ квадрат Q_1 касается вершинами эллипса Γ_{ρ_*} , см. фиг. 1.

Доказательство. Пусть a, b это полуоси Γ_ρ , точки эллипса можно параметризовать в виде:

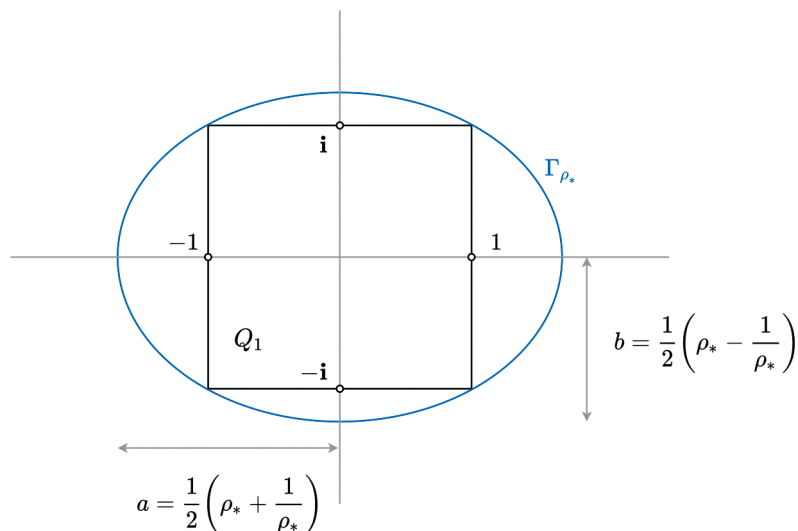
$$\begin{aligned} x(t) &= a(\rho) \cdot \cos t, \\ y(t) &= b(\rho) \cdot \sin t, \quad t \in [0; 2\pi]. \end{aligned}$$

Очевидно, что ρ_* достигается, когда углы квадрата Q_1 принадлежат эллипсу Γ_{ρ_*} . То есть существует $t_* \in [0; 2\pi]$, такое что $x(t_*) = y(t_*) = 1$. Решая систему относительно переменных t_* и ρ_* ,

$$\begin{aligned} x(t_*) &= 1, \\ y(t_*) &= 1, \end{aligned}$$

получаем

$$\rho_* = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \right) \approx 2.89.$$



Фиг. 1. Эллипс Γ_{ρ_*} касающийся квадрата Q из леммы 3.3.

Лемма 3.4. Пусть $\rho \geq \rho_{**} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, тогда расстояние между квадратом Q_1 и эллипсом Γ_ρ удовлетворяет неравенству:

$$\text{dist}(Q_1, \Gamma_\rho) \geq \frac{\rho - \rho^{-1}}{2} - \sqrt{2}.$$

Доказательство. Опишем вокруг единичного куба Q_1 окружность диаметром $\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Далее грубо оценим расстояние снизу, как разность меньшей полуоси Γ_ρ и описанной вокруг Q_1 окружности,

$$\text{dist}(Q_1, \Gamma_\rho) \geq b(\rho) - \sqrt{2} = \frac{\rho - \rho^{-1}}{2} - \sqrt{2}.$$

Заметим, что чтобы оценка была осмысленной, необходимо требовать неотрицательность правой части неравенства. Легко проверить, что это выполнено при $\rho \geq \rho_{**} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

В данной работе интерес составляет оценка $|P_{n, \text{int}\Gamma_\rho}^*(z)|$ при $z \in \text{int}\Gamma_\rho$. В [6], [7] исследуются оценки значения (3) для различных компактов. В частности, доказано утверждение леммы 3.1, оно будет использовано далее.

Теорема 3.1 (см. [6]). Пусть $C \subset \mathbb{C}$ это эллипс с фокусами в точках ± 1 и полуосями a, b . Пусть $P_n(z)$ является комплексным полиномом степени n , коэффициент при старшей степени которого равен единице. Тогда выполнено:

$$\max_{z \in C} |P_n(z)| \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n + \left(\frac{a-b}{2} \right)^n. \quad (8)$$

Причем равенство в (8) достигается лишь в случае $P_n \equiv T_n$ из (5).

Докажем лемму, необходимую для доказательства основной теоремы, отметим, что данная техника использовалась в [1].

Лемма 3.5. Пусть функция $f(z)$ регулярна в эллипсе Γ_ρ при $\rho > \rho_{**} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (см. 3)), причем $|f(z)| \leq M$ на Γ_ρ . Пусть $P_n(z)$ — полином Лагранжа степени n для $f(z)$ на чебышёвской сетке с $(n+1)$ узлом $\{c_0, \dots, c_n\}$. Тогда для всех точек из квадрата на комплексной плоскости $z \in Q_1 \subset \mathbb{C}$ выполнено следующее:

$$|f(z) - P_n(z)| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{\rho_*^{n+1} + \rho_*^{-n-1}}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} \cdot \frac{\rho + \rho^{-1}}{\frac{\rho - \rho^{-1}}{2} - \sqrt{2}}.$$

Доказательство. Полином Чебышёва $T_{n+1}(z)$ на $[-1;1]$ имеет вид

$$T_{n+1}(z) = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{n+1} + \frac{1}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^{n+1}. \quad (9)$$

Корнями $T_{n+1}(z)$ являются числа, составляющие чебышёвскую сетку,

$$c_j = \cos \left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{\pi}{n+1} \cdot j \right), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Выберем произвольное $z_* \in Q_1 \setminus \{c_0, \dots, c_n\}$, определим функцию

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z - z_*) \cdot \prod_{j=0}^n (z - c_j)}.$$

Заметим, что $F(z)$ имеет полюса первого порядка $\{z_*, c_0, \dots, c_n\}$ в области, ограниченной Γ_ρ . Применим теорему о вычетах для $F(z)$ на Γ_ρ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\rho} F(z) dz &= 2\pi i \left[\frac{f(z_*)}{\prod_{k=0}^n (z_* - c_k)} + \sum_{i=0}^n \frac{f(c_i)}{(c_i - z_*) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (c_i - c_j)} \right], \\ \prod_{k=0}^n (z_* - c_k) \int_{\Gamma_\rho} F(z) dz &= 2\pi i \left[f(z_*) - \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (z_* - c_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (c_i - c_j)} f(c_i) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что по определению $\{c_0, \dots, c_n\}$ выполнено

$$T_{n+1}(z) = 2^n \prod_{k=0}^n (z - c_k).$$

Интерполяционный полином Лагранжа функции f в чебышевских узлах $\{c_0, \dots, c_n\}$ имеет вид:

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (z - c_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (c_i - c_j)} f(c_i).$$

Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\prod_{k=0}^n (z_* - c_k) \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_*) \cdot \prod_{j=0}^n (z - c_j)} dz = 2\pi i \left[f(z_*) - \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (z_* - c_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (c_i - c_j)} f(c_i) \right],$$

$$T_{n+1}(z_*) \cdot \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_*)T_{n+1}(z)} = 2\pi i [f(z_*) - P_n(z_*)]. \quad (11)$$

Поскольку z_* принадлежит квадрату Q_1 , то z_* принадлежит и внутренности эллипса $\text{int}\Gamma_{\rho_*}$, который касается квадрата согласно лемме 3. Далее применим оценку максимума модуля многочлена на Γ_{ρ_*} , используя теорему 1 из [6] и принцип максимума:

$$|T_{n+1}(z_*)| \leq \max_{z \in Q} |T_{n+1}(z)| \leq \max_{z \in \Gamma_{\rho_*}} |T_{n+1}(z)| = 2^n \cdot \left[\left(\frac{a_* + b_*}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{a_* - b_*}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Заметим, что a_* и b_* являются константами и равны соответственно

$$a_* = \frac{1}{2} \left(\rho_* + \frac{1}{\rho_*} \right), \quad b_* = \frac{1}{2} \left(\rho_* - \frac{1}{\rho_*} \right).$$

Используя явно выражение для a_* и b_* , запишем

$$|T_{n+1}(z_*)| \leq \frac{1}{2} \cdot \left[\rho_*^{n+1} + \left(\frac{1}{\rho_*} \right)^{n+1} \right].$$

Из леммы 3.1:

$$|T_{n+1}(z)| \geq \frac{1}{2} \left(\rho^{n+1} - \frac{1}{\rho^{n+1}} \right) \quad z \in \Gamma_\rho.$$

Из леммы 3.2 и 3.4 получим:

$$|\Gamma_\rho| \leq \pi \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad \min_{z_* \in Q} |z - z_*| = \text{dist}(Q, \Gamma_\rho) \geq \frac{\rho - \rho^{-1}}{2} - \sqrt{2} \quad \text{при } z \in \Gamma_\rho.$$

Собирая воедино все полученные выше оценки и подставляя их в уравнение (11), для любого $z_* \in Q \setminus \{c_0, \dots, c_n\}$ имеем

$$\begin{aligned} |f(z_*) - P_n(z_*)| &= \frac{|T_{n+1}(z_*)|}{2\pi} \cdot \left| \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_*)T_{n+1}(z)} \right| \leq \frac{M}{4\pi} [\rho_*^{n+1} + \rho_*^{-n-1}] \cdot \int_{\Gamma_\rho} \frac{|dz|}{|z - z_*| \cdot |T_{n+1}(z)|} \leq \\ &\leq \frac{M}{4\pi} [\rho_*^{n+1} + \rho_*^{-n-1}] \cdot \frac{2}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} \cdot \int_{\Gamma_\rho} \frac{|dz|}{|z - z_*|} \leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\rho_*^{n+1} + \rho_*^{-n-1}}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} \cdot \frac{|\Gamma_\rho|}{\text{dist}(Q, \Gamma_\rho)} \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{\rho_*^{n+1} + \rho_*^{-n-1}}{\rho^{n+1} - \rho^{-n-1}} \cdot \frac{\rho + \rho^{-1}}{\frac{\rho - \rho^{-1}}{2} - \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. QTT ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГОКОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Введем равномерную сетку на квадрате $Q_1 \subset \mathbb{C}$, расположим вдоль вещественной оси квадрата m^d точек на равном расстоянии друг от друга, аналогично с мнимой осью, см. фиг. 2. Получаем двумерную сетку с m^{2d} узлами. Далее под обозначением i будет пониматься индекс в тензоре, а под $\mathbf{i}$ — мнимая единица. Все точки, входящие в сетку, можно естественным образом тензоризовать, сопоставив каждой мультииндексу. Узел сетки с мультииндексом $(i_1 j_1, \dots, i_d j_d)$ вычисляется как

$$z(i_1 j_1, \dots, i_d j_d) = -(1 + \mathbf{i}) + \left[\frac{(i_1 + \mathbf{i} \cdot j_1)m^{d-1} + (i_2 + \mathbf{i} \cdot j_2)m^{d-2} + \dots + (i_d + \mathbf{i} \cdot j_d)}{m^d} \right].$$

Заметим, что пара $i_k i_k$ соответствуют горизонтальной и вертикальной части, если отождествлять $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$.

Следуя обозначениям работ [8], [1], тензоризацией функции f в узлах равномерной сетки, будем называть тензор $\mathbf{T}_{m,d,Q}(f)$, составленный из значений $f(z(i_1 j_1, \dots, i_d j_d))$. Матрицей развертки тензора $\mathbf{T}_{m,d,Q}(f)$ по оси k будем называть матрицу

$$T_k(i_1 j_1, \dots, i_k j_k; i_{k+1} j_{k+1}, \dots, i_d j_d).$$

Определим открытую область $G = G(l, z_C, L) \subset \mathbb{C}$, см. фиг. 2, как сумму Минковского

$$G = Q(z_C, L) + B(l, 0),$$

где $Q(z_C, L)$ это квадрат, стороны которого параллельны осям $\mathbb{C}$, левый нижний угол совпадает с z_C , а длина стороны равна L . $B(l, 0)$ это открытый шар с радиусом l и центром в точке 0.

Теорема 4.1. Пусть на квадрате $Q(z_C, L)$ задана равномерная сетка с m^d отсчетов по каждой оси. Пусть функция $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ регулярна в области $G = Q(z_C, L) + B(l, 0)$, где $l > L/m$. Пусть также $|f(z)| \leq M$ при $z \in G$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, каждой матрицы развертки $T_k \in \mathbb{C}^{m^{2k} \times m^{2(d-k)}}$ тензора $\mathbf{T}_{m,d,Q(z_C, L)}(f)$ существует матрица $B_k \in \mathbb{C}^{m^{2k} \times m^{2(d-k)}}$ такая, что:

$$\|T_k - B_k\|_\infty < \varepsilon, \quad \text{rank}(B_k) \leq s_k + 1, \quad (12)$$

где

$$s_k = \left\lceil \log_{(\rho_k/\rho_{**})} \left(1 + 6 \cdot \frac{M}{\varepsilon} \right) \right\rceil, \quad \rho_k = \left(1 + \frac{2lm^k}{L} \right) + \sqrt{\left(1 + \frac{2lm^k}{L} \right)^2 - 1}. \quad (13)$$

$\rho_{**} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ — константа.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $k \in \overline{1, d}$. Определим мультииндексы

$$\begin{aligned} i &= i_1 m^{k-1} + \dots + i_k \in [0; m^k - 1] & \hat{i} &= i_{k+1} m^{d-k-1} + \dots + i_d \in [0; m^{d-k} - 1], \\ j &= j_1 m^{k-1} + \dots + j_k \in [0; m^k - 1] & \hat{j} &= j_{k+1} m^{d-k-1} + \dots + j_d \in [0; m^{d-k} - 1]. \end{aligned}$$

Паре (i, j) можно сопоставить число $i + \mathbf{i} \cdot j$, тогда данный комплексный вектор будет задавать “смещение” в квадрате $Q(z_C, L)$, указывая на подквадрат $Q_{i,j}$ (см. фиг. 2). Вектор $\hat{i} + \mathbf{i} \cdot \hat{j}$ задает смещение в выбранном подквадрате $Q_{i,j}$. Рисунок демонстрирует геометрический смысл матрицы развертки T_k тензора $\mathbf{T}_{m,d,Q(z_C, L)}$: в каждой строке матрицы T_k расположены все значения функции f на узлах сетки соответствующего подквадрата $Q_{i,j}$. Заметим, что длина стороны подквадрата равна $h = L \cdot m^{-k}$.

Построим взаимнооднозначное соответствие между подквадратом $z \in Q_{i,j}$ и единичным квадратом $w \in Q$ из (7):

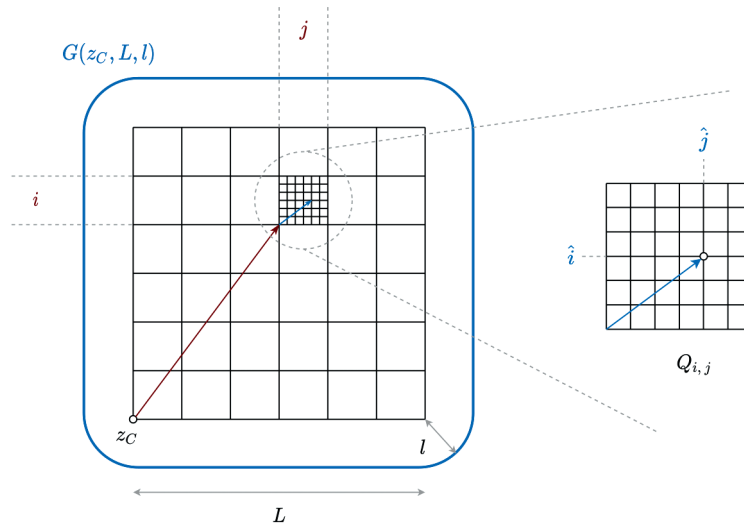
$$z(w) = \beta w + \alpha_{i,j} = \underbrace{\frac{h}{2} \cdot w}_{\text{смещение в } Q_{i,j}} + \underbrace{\left[z_C + (i + \mathbf{i} \cdot j)h + (1 + \mathbf{i})\frac{h}{2} \right]}_{\text{центр квадрата } Q_{i,j}}.$$

На $Q_{i,j}$ определим функцию

$$\begin{aligned} g_{(i,j)}(w) &= f(z(w)) = f(\beta w + \alpha_{i,j}), \\ w &\in B(R_k, 0) \subset \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $B(R, c)$ обозначает шар радиуса R с центром в точке $c \in \mathbb{C}$ и

$$R_k = \frac{h/2 + l}{h/2} = \frac{\frac{L}{2m^k} + l}{\frac{L}{2m^k}} = 1 + \frac{2m^k}{L} \cdot l.$$



Фиг. 2. Индекс (i, j) “указывает” на подквадрат $Q_{i,j}$ в тензоризованной сетке. Индекс $(\hat{i}, \hat{j})$ “указывает” на узел сетке в выбранном подквадрате.

$g_{(i,j)}$ корректно определена, т.е. при всех $w \in B(R_k, 0)$ выполнено $z(w) \in G$. Действительно, в определении R_k заложена половина стороны подквадрата $Q_{i,j}$ и расстояние l до границы области G . Поэтому при отображении $w \mapsto z$ число z останется в G . Геометрически $hR_k / 2$ это максимальный радиус окружности которую можно обвести вокруг центра любого подквадрата (i, j) , т.ч. она не вышла за пределы области G , где регулярна функция f .

Впишем в шар $B(R_k, 0)$ такой эллипс Бернштейна Γ_{ρ_k} , чтобы его большая полуось равнялась R_k ,

$$\frac{\rho_k + \rho_k^{-1}}{2} = R_k, \quad \rho_k = R_k + \sqrt{R_k^2 - 1}. \quad (15)$$

Заметим, что для любого k выполнено $\rho_k > \rho_{**}$. Тогда для $g_{(i,j)}(w)$ при $w \in Q_1$ выполнены все условия леммы 3.5. Действительно, поскольку линейное преобразование сохраняет регулярность, то $g_{(i,j)}(w)$ регулярна на $w \in \text{int}\Gamma_{\rho_k}$ и ограничена константой M . Значит, существует такой полином степени s_k , что для любого $w \in Q_1$ выполнено

$$\left| g_{(i,j)}(w) - \hat{P}_{s_k, (i,j)}(w) \right| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{\left[\rho_k^{s_k} + \rho_k^{-s_k} \right]}{\rho_k^{s_k} - \rho_k^{-s_k}} \cdot \frac{\rho_k + \rho_k^{-1}}{\frac{\rho_k - \rho_k^{-1}}{2} - \sqrt{2}}. \quad (16)$$

Оценим слагаемые в выражении (16). Поскольку $l > L / (2m)$, то

$$R_k = 1 + \frac{2m^k}{L} \cdot l > 1 + \frac{2m^k}{L} \cdot \frac{L}{m} = 1 + 2m^{k-1} > 3.$$

Поскольку $k \geq 1$, то выполнено $R_k > 2$. Преобразуем последний множитель в (16) с учетом равенства (15):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k - \rho_k^{-1}}{2} - \sqrt{2} &= \frac{\left(R_k + \sqrt{R_k^2 - 1} \right)^2 - 1}{2 \left(R_k + \sqrt{R_k^2 - 1} \right)} - \sqrt{2} = \frac{2 \left(R_k^2 + 2R_k \sqrt{R_k^2 - 1} - 2 \right)}{2 \left(R_k + \sqrt{R_k^2 - 1} \right)} - \sqrt{2} = \\ &= R_k - \sqrt{2} - \frac{1}{R_k + \sqrt{R_k^2 - 1}} \geq R_k - \sqrt{2} - \frac{1}{2R_k}. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом $\rho_k + \rho_k^{-1} = 2R_k$ получаем оценку

$$\frac{\rho_k + \rho_k^{-1}}{\frac{\rho_k - \rho_k^{-1}}{2} - \sqrt{2}} \leq \frac{2R_k}{R_k - \sqrt{2} - \frac{1}{2R_k}} = q(R_k) < q(3) = \frac{6}{3 - \sqrt{2} + 1/6} \approx 3.42 < 4. \quad (18)$$

Функция $q(R_k)$ в правой части (18) строго убывает при $R_k > 2$, можем оценить сверху величиной $q(2)$. Теперь оценим первый множитель в правой части (16) с учетом вида степени полинома s_k из условия теоремы

$$\frac{\rho_*^{s_k} + \rho_*^{-s_k}}{\rho_*^{s_k} - \rho_*^{-s_k}} \leq \frac{\rho_*^{s_k} + 1}{\rho_*^{s_k} - 1} \leq \frac{1 + \left(\frac{1}{\rho_*}\right)^{s_k}}{\left(\frac{\rho_k}{\rho_*}\right)^{s_k} - 1} \leq \frac{2}{\left(\frac{\rho_k}{\rho_*}\right)^{s_k} - 1} = \frac{2}{1 + \frac{6M}{\varepsilon} - 1} \leq \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (19)$$

Комбинируя результаты (18) и (19) в (16) получаем

$$\left| g_{(i,j)}(w) - \hat{P}_{s_k,(i,j)}(w) \right| \leq \frac{M}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\varepsilon}{3M} < \varepsilon. \quad (20)$$

Поддействуем отображением $w \leftrightarrow z = \beta w + \alpha_{(i,j)}$, тогда для любого $z \in Q_{i,j}$ выполнено

$$\left| f(z) - P_{s_k,(i,j)}(z) \right| < \varepsilon, \quad (21)$$

где

$$P_{s_k,(i,j)}(z) = \hat{P}_{s_k,(i,j)}(w(z)) = \hat{P}_{s_k,(i,j)}\left(\frac{1}{\beta}(z - \alpha_{i,j})\right).$$

На основе полиномов для каждого подквадрата Q_{ij} построим матрицу B_k и оценим ее ранг. Как говорилось ранее, каждая строка матрицы развертки $(T_k)_{(i,j)}$, где $i, j \in 0, m^k - 1$ суть значения f в узлах сетки подквадрата Q_{ij} . Для удобства обозначений будем отождествлять мультииндекс (i, j) с индексом v , который пробегает значения от 1 до $V = m^{2k}$, аналогично $(\hat{i}, \hat{j})$ с индексом b от 1 до $B = m^{2(d-k)}$. В новых обозначениях можно считать $\hat{P}_{s_k,(i,j)} \equiv \hat{P}_{s_k,v}$. Пусть $w_1, \dots, w_B$ это все узлы сетки $m^{d-k} \times m^{d-k}$ на единичном квадрате Q_1 . Составим матрицу W :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 & \dots & w_1^{s_k} \\ 1 & w_2 & w_2^2 & \dots & w_2^{s_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_B & w_B^2 & \dots & w_B^{s_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m^{2(d-k)} \times (s_k+1)},$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{s_k,(i,j)}(w) &\equiv \hat{P}_{s_k,v}(w) = a_{s_k,v} w^{s_k} + \\ &+ a_{s_k-1,v} w^{s_k-1} + \dots + a_{s_k-1,v} w + a_{s_k-1,v}. \end{aligned}$$

Тогда значения полинома $\hat{P}_{s_k,v}$ в узлах сетки выражаются как

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{s_k,v}(w_1) \\ \hat{P}_{s_k,v}(w_2) \\ \vdots \\ \hat{P}_{s_k,v}(w_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 & \dots & w_1^{s_k} \\ 1 & w_2 & w_2^2 & \dots & w_2^{s_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_B & w_B^2 & \dots & w_B^{s_k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{0,v} \\ a_{1,v} \\ \vdots \\ a_{s_k,v} \end{bmatrix} = W \cdot a_v \in \mathbb{C}^{m^{2(d-k)}}.$$

Значения всевозможных полиномов $\hat{P}_{s_k, \nu}$ при разных ν в узлах w_b на Q_1 представимы в виде

$$\hat{P}_k = \begin{bmatrix} \hat{P}_{s_k,1}(w_1) & \hat{P}_{s_k,2}(w_1) & \dots & \hat{P}_{s_k,V}(w_1) \\ \hat{P}_{s_k,1}(w_2) & \hat{P}_{s_k,2}(w_2) & \dots & \hat{P}_{s_k,V}(w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{P}_{s_k,1}(w_B) & \hat{P}_{s_k,2}(w_B) & \dots & \hat{P}_{s_k,V}(w_B) \end{bmatrix} = W \cdot \begin{bmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,V} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,V} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s_k,1} & a_{s_k,2} & \dots & a_{s_k,V} \end{bmatrix} = W \cdot A. \quad (22)$$

Где матрица $A \in \mathbb{C}^{(s_k+1) \times m^{2(d-k)}}$ составлена из коэффициентов полинома для каждого индекса $\nu = (i, j)$. Матрица $\hat{P}_k \in \mathbb{C}^{m^{2(d-k)} \times m^{2k}}$ содержит значения всех полиномов на всех узлах сетки $m^{d-k} \times m^{d-k}$ на Q_1 . По построению, $\hat{P}_{s_k, (i,j)}(z) = \hat{P}_{s_k, (i,j)}(w(z))$, поэтому матрица $P_k \in \mathbb{C}^{m^{2(d-k)} \times m^{2k}}$, состоящая из значений всевозможных полиномов $P_{s_k, \nu}(z)$ при различных ν на подквадратах Q_{ij} будет тождественно равна $\hat{P}_k$.

Положим $B_k = P_k$, тогда согласно (20) $\|T_k - B_k\|_\infty < \varepsilon$, при этом согласно (22) каждая строка B_k принадлежит линейной оболочке столбцов W , т.е. строчный ранг B_k не превышает $s_k + 1$, а значит, $\text{rank}(B_k) \leq s_k + 1$.

Следствие 4.1. Пусть функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ регулярна в области $G = Q(z_C, L) + B(0, l)$, где $l > L / m$ и ограничена $|f(z)| \leq M$ при $z \in G$. Тогда для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ выполнено:

$$\mathcal{R}_{\hat{\varepsilon}}(\mathbf{T}_{m,d,Q(z_C,L)}(f)) \leq \hat{s} + 1,$$

где

$$\hat{s} = \left\lceil \log_v \left(1 + 6 \cdot \frac{M m^d \sqrt{d-1}}{\hat{\varepsilon}} \right) \right\rceil, \quad v = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \approx 1.85.$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 4.1, зафиксируем

$$\varepsilon = \frac{\hat{\varepsilon}}{m^d \sqrt{d-1}}.$$

Заменим в оценке все ρ_k на минимальный из них, т.е. ρ_1 :

$$\rho_1 = \left(1 + \frac{2lm}{L} \right) + \sqrt{\left(1 + \frac{2lm}{L} \right)^2 - 1}.$$

Поскольку $l > L / m$, то $\rho_1 > 3 + 2\sqrt{2}$, совмещая это с явным видом $\rho_{**} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ получаем нижнюю оценку на ρ_k / ρ_{**}

$$\frac{\rho_k}{\rho_{**}} \geq \frac{\rho_1}{\rho_{**}} > \frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = v \approx 1.85.$$

Тогда ранги из теоремы 4.1 имеют вид

$$s_k = \left\lceil \log_{(\rho_k / \rho_{**})} \left(1 + 6 \cdot \frac{M}{\varepsilon} \right) \right\rceil \leq \left\lceil \log_v \left(1 + 6 \cdot \frac{M}{\varepsilon} \right) \right\rceil = \hat{s}.$$

Для матрицы развертки T_k тензора $\mathbf{T}_{m,d,Q(z_C,L)}(f)$ имеем:

$$\|T_k - B_k\|_\infty \leq \varepsilon,$$

$$\|T_k - B_k\|_F \leq \varepsilon \sqrt{m^d \cdot m^d} = \varepsilon m^d = \frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{d-1}}.$$

Теорема 2.1 (см. [5]) гарантирует существование такого тензорного ядра $\mathbf{B}$ такого, что

$$\left\| \mathbf{T}_{m,d,Q(z_C,L)}(f) - \mathbf{B} \right\|_F \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d-1} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{d-1}} \right)^2} \leq \hat{\varepsilon}.$$

Сравнивая результаты 4.1 с соответствующими в [1], видно, что при похожих предположениях для функции f ее QTT-разложение на двумерной сетке в $\mathbb{C}$ асимптотически будет иметь такие же ранги. Основное отличие в формулировках теорем это область регулярности функции f , в данной работе было показано, что чем “больше” область G (параметр l), тем меньше будут ранги матрицы развертки при той же точности аппроксимации. Применить технику доказательства из [1] во многом помог результат из [6], который позволил оценить значение T_{n+1} на квадрате Q_1 . При больших $l \gg L$, т.е. когда функция f регулярна в намного более обширной области, чем квадрат $Q(z_C, L)$ оценка ТТ-рангов при фиксированном ε имеет вид

$$\text{rank}(B_k) \sim \mathcal{O}\left(\frac{M(l)}{\ln l}\right).$$

Похожие оценки возможно получить для произвольных областей G , нежели рассмотренный тип в теореме 4.1. В будущем цель авторов получить оценки для случая многомерной сетки в $\mathbb{C}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Высоцкий Л.* О ТТ-рангах приближенных тензоризаций некоторых гладких функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. V. 61. N. 5. P. 750–760.
2. *Vysotsky L., Rakhuba M.* Tensor rank bounds and explicit qtt representations for the inverses of circulant matrices // Numerical Linear Algebra with Applications. 2023. V. 30. N. 3. e2461.
3. *Chertkov A., Oseledets I., Rakhuba M.* Robust discretization in quantized tensor train format for elliptic problems in two dimensions // arXiv: Numerical Analysis. 2016.
4. *Kazeev V., Khoromskij B.* Low-rank explicit qtt representation of the laplace operator and its inverse // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2012. V. 33. N. 3. P. 742–758.
5. *Oseledets I., Tyrtshnikov E.* TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and its Applications. 2010. V. 432. N. 1 P. 70–88.
6. *Munch N. J.* chebyshev theorem for ellipses in the complex plane // The American Mathematical Monthly. 2019. V. 126. N. 5. P. 430–436.
7. *Ransford T.* Capacity // Cambridge University Press. 1995. P. 127–160.
8. *Vysotsky L.* On tensor-train ranks of tensorized polynomials. Large-Scale Scientific Computing: 12th International Conference, LSSC2019, Sozopol, Bulgaria. P. 189–196.