

УДК 517.956.328:517.956.8;517.958:535.4

ЛАКУНЫ В СПЕКТРЕ ТОНКИХ ВОЛНОВОДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ СТЕНОК¹⁾

© 2024 г. С. А. Назаров

1190178 С.-Петербург, Большой проспект, В.О, 61, ИПМаш РАН, Россия

e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.

Переработанный вариант 15.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Исследуется строение спектров квантового и акустического волноводов, полученных из тонкого цилиндра присоединением периодического семейства мелких узлов. Получены асимптотические разложения собственных значений модельной задачи на ячейке периодичности, на основе которых выведены асимптотические формулы для положения и размеров лакун в спектрах соответствующих задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа. Найдены геометрические и интегральные характеристики волновода, обеспечивающие раскрытие нескольких спектральных лакун. Библ. 36. Фиг. 3.

Ключевые слова: квантовый и акустический волноводы, задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, периодическое возмущение тонкого цилиндра мелкими узлами, спектр, асимптотика собственных значений, спектральные сегменты и лакуны.

DOI: 10.31857/S0044466924010098, EDN: ZJLNPN

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть Ξ — область (фиг. 1а) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, совпадающая со связным цилиндром $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$ вне слоя $\Lambda_R = \{\xi = (\xi', \xi_d) : \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, |\xi_d| < R\}$ при некотором $R > 0$, однако $\Xi \neq \Omega$, т.е. стенки волновода Ξ обязательно локально деформированы. Сечение ω имеет компактное замыкание $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, а граница $\partial\Xi$ липшицева. Кроме того, Π^h — периодический, квантовый или акустический (см. [1] и [2] соответственно) волновод, образованный сдвигами $\mathfrak{W}^h(p) = \{x : (x', x_d - p) \in \bar{\omega}^h\}$ ячейки периодичности

$$\mathfrak{W}^h = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : \xi := h^{-1}x \in \Xi, |x_d| < 1/2\}, \quad (1)$$

т.е.

$$\overline{\Pi^h} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \overline{\mathfrak{W}^h(p)}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (2)$$

Масштабированием период сведен к единице, а значит, сделаны безразмерными декартовы системы координат x и ξ в \mathbb{R}^d , а также все геометрические параметры, в частности малый $h \in (0, h_0]$, причем величина $h_0 > 0$ зафиксирована так, что $2hR < 1$ и волновод Π^h имеет изображенный на фиг. 1б вид. Подобные формы можно обнаружить у линий высоковольтных передач с шарами-маркерами на проводах (предупреждение пилотам) или у деревянных и медных духовых инструментов (при закрытых клапанах). Список объектов можно расширить, придав размеру h порядок единицы и сделав период большим.

В тонком периодическом волноводе Π^h с периодически деформированными стенками рассмотрим спектральную задачу Дирихле или задачу Неймана:

$$-\Delta_\xi u^h(x) = \lambda^h u^h(x), \quad x \in \Pi^h, \quad (3)$$

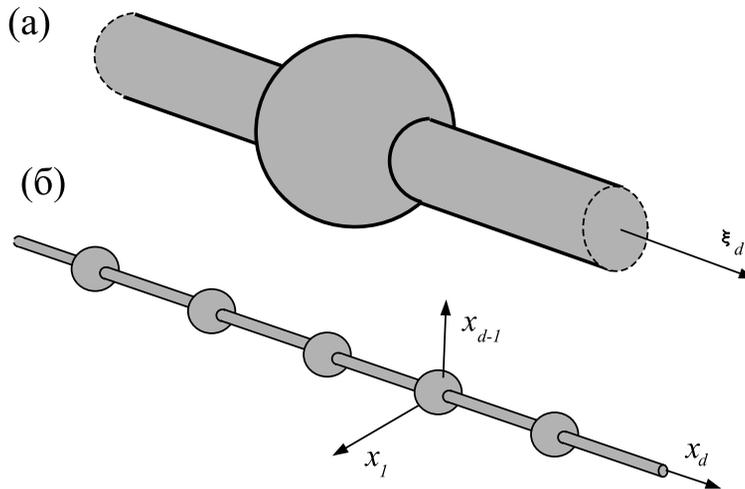
$$u^h(x) = 0 \text{ или } \partial_\nu u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi^h, \quad (4)$$

и ее вариационную формулировку (см. [3, 4])

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 22-11-00046).

$$(\nabla_x u^h, \nabla_x \psi^h)_{\Pi^h} = \lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall \psi^h \in H_K^1(\Pi^h). \tag{5}$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$ и $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, λ^h — спектральный параметр, ∂_ν — производная вдоль внешней нормали, определенная почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\Pi^h$, $(\cdot, \cdot)_{\Pi^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^h)$, а $H_D^1(\Pi^h) = H_0^1(\Pi^h)$ и $H_N^1(\Pi^h) = H^1(\Pi^h)$ — пространства Соболева, но в случае $K = D$ для функций u^h и ψ^h выполнено (устойчивое) условие Дирихле $(4)_D$. Условие Неймана $(4)_N$ является *естественным* (терминология [4]) и не включено в пространство $H_K^1(\Pi^h)$ при $K = N$.



Фиг. 1. Волновод с резонатором (а) и тонкий цилиндр с периодическим семейством узлов (б).

Билинейная форма из левой части интегрального тождества (5) симметрична, положительна и замкнута в $H_K^1(\Pi^h)$, и, следовательно, согласно [5, гл. 10] задача (5) (или (3), (4) в дифференциальной постановке) соотносится с положительным неограниченным самосопряженным оператором \mathcal{A}_K^h в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi^h)$. Ввиду отсутствия компактности у множества (2) спектр S_K^h оператора \mathcal{A}_K^h существенный. Известно (см. [6, 7, 8, 9] и др.), что

$$S_K^h = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{Kj}^h, \tag{6}$$

а спектральные сегменты

$$\mathcal{B}_{Kj}^h = \{\Lambda_{Kj}^h(\theta) | \theta \in [0, 2\pi]\} \tag{7}$$

определены по собственным значениям

$$\Lambda_{K1}^h(\theta) \leq \Lambda_{K2}^h(\theta) \leq \Lambda_{K3}^h(\theta) \leq \dots \leq \Lambda_{Kp}^h(\theta) \leq \dots \rightarrow +\infty \tag{8}$$

вспомогательной задачи на ячейке периодичности (1), полученной из задачи (3), (4) посредством преобразования Гельфанда [10] и зависящей от его двойственной переменной — параметра Флоке $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$-\Delta_x U^h(x; \theta) = \Lambda^h(\theta) U^h(x; \theta), \quad x \in \omega^h, \tag{9}$$

$$U^h(x', \frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} U^h(x', -\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{\partial U^h}{\partial x_d}(x', \frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{\partial U^h}{\partial x_d}(x', -\frac{1}{2}; \theta), \quad x' \in \omega^h, \tag{10}$$

$$U^h(x; \theta) = 0 \text{ или } \partial_\nu U^h(x; \theta) = 0, \quad x \in \partial\omega^h \setminus \bigcup_{\pm} \overline{\omega^h(\pm \frac{1}{2})}. \quad (11)$$

При этом i — мнимая единица, $\omega^h = \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \xi' = h^{-1}x' \in \omega\}$ — сечение тонкого конечного цилиндра $\Omega_\#^h = \omega^h \times (-1/2, 1/2) \subset \Omega^h = \omega^h \times \mathbb{R}$, $\omega^h(\pm 1/2) = \omega^h \times \{\pm 1/2\}$ — торцы ячейки, а вариационная постановка задачи (9)–(11) при $K = D, N$

$$(\nabla_x U^h, \nabla_x \Psi^h)_{\omega^h} = \Lambda^h(\theta)(U^h, \Psi^h)_{\omega^h} \quad \forall \Psi^h \in H_K^{1,0}(\omega^h), \quad (12)$$

осуществляется на пространстве $H_K^{1,0}(\omega^h)$ функций $U^h \in H^1(\omega^h)$, подчиненных условию Дирихле (11)_D в случае $K = D$ и первому условию квазипериодичности (10) при $K = N, D$. По-прежнему задаче (12) ставится в соответствие положительный самосопряженный оператор $A_K^h(\theta)$ в $L^2(\omega^h)$, однако по причине компактности вложения $H^1(\omega^h) \subset L^2(\omega^h)$ (область ω^h ограничена) теоремы 10.1.5 и 10.2.1 из [5] гарантируют, что спектр оператора $A_K^h(\theta)$ оказывается дискретным и образует последовательность (8) нормальных собственных значений задачи (12) или (9)–(10). Более того, функции

$$[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto \Lambda_{Kj}^h(\theta), \quad j \in \mathbb{N},$$

непрерывны и 2π -периодичны (см. [10, 11]), а значит, в самом деле \mathcal{B}_{Kj}^h — компактные связные множества на замкнутой положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Наконец,

$$\Lambda_{D1}^h(\theta) > \Lambda_{D1}^h(0) > 0 \text{ и } \Lambda_{N1}^h(\theta) > \Lambda_{N1}^h(0) = 0 \text{ при } \theta \in [-\pi, \pi], \theta \neq 0. \quad (13)$$

Собственные функции подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(U_{Kp}^h, U_{Kq}^h)_{\omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

где $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера.

Посредством асимптотического анализа собственных пар $\{\Lambda_{Kp}^h(\theta); U_{Kp}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (9), (10)_K в тонкой сингулярной области (см. [12, гл. 15, 16; 13; 14 и др.]) найдены геометрические характеристики (положение и размеры) спектральных сегментов (7) и условия раскрытия лакун между соседними сегментами \mathcal{B}_{Kj}^h и \mathcal{B}_{Kj+1}^h , т.е. непустоты интервала

$$\mathcal{G}_{Kj}^h = \left(\max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \Lambda_{Kj}^h(\theta), \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} \Lambda_{Kj+1}^h(\theta) \right). \quad (15)$$

Асимптотическое строение спектров задач Дирихле и Неймана различается существенно. Так, в силу формул (13) спектр S_N^h примыкает к началу координат, но, как станет понятно далее, спектр S_D^h удален на большое расстояние $O(h^{-2})$ от точки $\Lambda = 0$. В спектре задачи (3), (4)_N спектральные сегменты имеют длину $O(1)$ и между ними могут быть раскрыты лакуны шириной $O(h)$ (теорема 1). Спектральные сегменты \mathcal{B}_{Dj}^h , наоборот, обладают бесконечно малыми при $h \rightarrow +0$ длинами: порядка $e^{-\delta_j/h}$ в среднечастотном диапазоне и порядка h в высокочастотном. Соответственно ширина лакун (15) в спектре задачи Дирихле (3), (11)_D составляет $O(h^{-2})$ и $O(1)$ (теорема 2). Впрочем, в обоих случаях бывают исключения — некоторые лакуны закрываются или приобретают меньшие по порядку размеры.

Первостепенное значение в проведенном спектральном анализе приобретает явление пограничного слоя, описываемое задачами Неймана и Дирихле в бесконечной области Ξ на фиг. 1а (см. разд. 2 и разд. 4). В случае краевого условия Неймана дискретный спектр пуст, непрерывный — замкнутая положительная полуось и реализуется правильный пороговый резонанс кратности 1, однако в случае условий Дирихле известны примеры волноводов с непустым дискретным спектром и пороговыми резонансами разных качеств. Далее вскрыты три механизма раскрытия лакун, представленных в разд. 3 и разд. 5 с различной степенью детализации.

Механизм, наиболее сложный как в части формальных асимптотических конструкций, использующих разномасштабные разложения, так и в части их оправдания, требующего рассмотрения нескольких зон изменения переменной Флоке, представлен в разд. 3 на примере задачи Неймана (см. также п. 5, 3°, по поводу задачи Дирихле). Он позволяет изучить образование узких лакун вследствие распада узлов ферм дисперсионных кривых, т.е., в частности, анализирует иррегулярные возмущения спектральных

сегментов. Второй и третий механизмы целиком относятся к задаче Дирихле (см. п. 5, 1° и п. 5, 2°) и имеют дело с обратным, но регуляризованным процессом “схлопывания” спектрального сегмента в точку при $h \rightarrow +0$. Подобные эффекты возникают при наличии дискретного спектра или отсутствии правильного порогового резонанса в спектральной задаче Дирихле для оператора Лапласа в бесконечном волноводе Ξ , причем исчезающе малые сегменты чередуются с широкими лагунами. Следует признаться, что последствия возникновения пороговых резонансов (см. разд. 4 и п. 5, 3°) не исследованы досконально потому, что, с одной стороны, гипотетически их проявления весьма разнообразны, но с другой стороны, во многих случаях до сих пор неизвестны конкретные формы, для которых те или иные возможности реализуются в геометрически просто устроенных квантовых волноводах. Вместе с тем автор вполне уверен, что акустическим и квантовым волноводам присущи именно описанные три механизма раскрытия спектральных лагун при сингулярных периодических возмущениях их изначально цилиндрической формы.

2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА

Разрешимость и свойства решений задачи в волноводе Ξ (фиг. 1а)

$$-\Delta w(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Xi, \quad \partial_{\nu} w(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi, \quad (16)$$

изучены целиком (см. [9, гл. 5; 15; 2] по поводу общих формально самосопряженных эллиптических краевых задач и переложение результатов для оператора Лапласа, например, в [16]). Поэтому ограничимся перечислением специальных решений при $f = 0$ и $f = 1$, востребованных в следующем разделе при построении асимптотик.

Пространство решений однородной ($f = 0$) задачи (16) с полиномиальным ростом на бесконечности имеет размерность 2 (по числу выходов области Ξ на бесконечность) и натянута на функции w_0 и w_1 : постоянную $w_0 = 1$ и заданную своим разложением на бесконечности

$$w_1(\xi) = \tilde{w}_1(\xi) + \sum_{\pm} \chi_R^{\pm}(\xi_d) \left(\frac{\xi_d}{|\omega|} \pm m_{\Xi} \right). \quad (17)$$

Здесь $\tilde{w}_1 \in H^1(\Xi)$ — остаток, затухающий при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ с экспоненциальной скоростью, через $|\omega|$ обозначена $(d-1)$ -мерная площадь сечения ω цилиндра Ω , $\chi_R^{\pm} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ — срезающая функция,

$$\chi_R^{\pm}(\xi_d) = 1 \text{ при } \pm \xi_d > 2R, \quad \chi_R^{\pm}(\xi_d) = 0 \text{ при } \pm \xi_d < R, \quad 0 \leq \chi_R^{\pm} \leq 1, \quad (18)$$

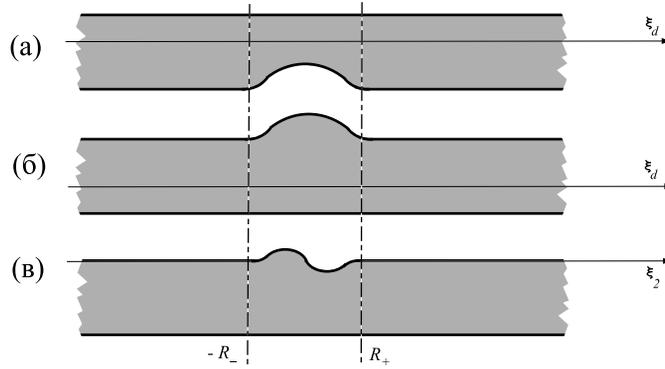
а m_{Ξ} — некоторая величина, зависящая от формы области Ξ в целом и являющаяся аналогом таких классических интегральных характеристик множеств в гармоническом анализе, как емкость и тензоры виртуальной массы и поляризации (см., например, [17]).

Решение задачи (16) при $f = 1$ обладает квадратичным ростом на бесконечности и представимо в виде

$$W(\xi) = \tilde{W}(\xi) - \frac{1}{2} \xi_d^2 + \sum_{\pm} \chi_R^{\pm}(\xi_d) (\pm M_{\Xi} \frac{\xi_d}{|\omega|} \pm \mathbf{m}_{\Xi}), \quad (19)$$

где $\tilde{W} \in H^1(\Xi)$ — затухающий остаток, M_{Ξ} — еще одна характеристика области Ξ , уже чисто геометрическая (см. предложение 1), а постоянная \mathbf{m}_{Ξ} далее востребована не будет.

Поясним строение неубывающих членов в формулах (17) и (19). Во-первых, одинаковые множители $|\omega|^{-1}$ при мономе ξ_d нужны для обращения в нуль потока гармонической функции w_1 на бесконечность (сумма интегралов по сечениям ω от производных $\pm \partial w_1 / \partial \xi_d$ при $\pm \xi_d > R$). Во-вторых, метод Фурье предопределяет при $\pm \xi_d > R$ у решения w_1 линейные составляющие $|\omega|^{-1} \xi_d - m_{\pm}$ с какими-то m_{\pm} , однако добавление к нему постоянной $w_0(m_{+} + m_{-}) / 2$ позволяет добиться представления (17) с общим коэффициентом $m_0 = (m_{-} - m_{+}) / 2$. Наконец, в разложении какого-либо решения задачи (16) с правой частью $f = 1$ появляются квадратные трехчлены $-\frac{1}{2} \xi_d^2 + a_{\pm}^1 \xi_d + a_{\pm}^0$ с некоторыми множителями a_{\pm}^q , но присоединение к ним линейной комбинации $c_0 w_0 + c_1 w_1$ с подходящими коэффициентами c_q придает функции W вид (19). Подчеркнем, что предложенный выбор поведения при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ фиксирует единственным образом решения w_1 и W , а значит, и характеристики m_{Ξ} и M_{Ξ} волновода Ξ , которые играют особую роль в асимптотическом анализе спектра задачи (3), (4). Обсудим свойства этих характеристик.



Фиг. 2. Цилиндры с утончением (а) и утолщением (б). Возмущение полосы при сохранении площади резонатора, отсеченного штрихпунктирными линиями (в).

Следующие две формулы проверены в [16] для волноводов более общего строения, однако ввиду их важности и для удобства читателя приведем сжатые доказательства. Обозначим через $\pm R_{\pm}$ минимальные величины, при которых (ср. фиг. 2)

$$\begin{aligned} & \{\xi \in \Xi : \xi_d \notin [-R_-, R_+]\} = \\ & = \{\xi \in \Omega : \xi_d \notin [-R_-, R_+]\} = \\ & = \omega \times ((-\infty, -R_-) \cup (R_+, +\infty)). \end{aligned} \tag{20}$$

Множество $\Theta = \{\xi \in \Xi : \xi_d \in (-R_-, R_+)\}$ называем резонатором волновода Ξ ; $|\Theta|$ — его d -мерный объем. Остальная часть (20) — два полубесконечных цилиндрических рукава $\Omega^{\pm} = \{\xi \in \Omega : \pm \xi_d > \pm R_{\pm}\}$. Соответственно мелкий узел Θ^h тонкой области ω^h получается сжатием множества Θ в h^{-1} раз.

Предложение 1. Верны соотношения

$$2m_{\Xi} > -(R_+ + R_-) |\omega|^{-1}, \tag{21}$$

$$2M_{\Xi} = |\Theta| -(R_+ + R_-) |\omega|. \tag{22}$$

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям в длинном ($T \rightarrow +\infty$) усеченном волноводе $\Xi_T = \{\xi \in \Xi : |\xi_d| < T\}$:

$$|\Theta| + (2T - R_+ - R_-) |\omega| = |\Xi_T| = - \int_{\Xi_T} \Delta_{\xi} W(\xi) d\xi = \sum_{\pm} \pm \int_{\omega} \frac{\partial W}{\partial \xi_d}(\xi', \pm T) d\xi' = 2(T |\omega| + M_{\Xi}) + o(1).$$

Отсюда вытекает соотношение (22). Теперь введем непрерывную функцию $w_{\#}$, совпадающую с w_1 на Θ , но равную $w_1(\xi) - |\omega|^{-1} (\xi_d \mp R_{\pm})$ на Ω^{\pm} . Она сохраняет гармоничность внутри Θ и Ω^{\pm} , а также обладает конечным интегралом Дирихле на этих множествах, поскольку стабилизируется при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ к постоянным $\pm(m_{\Xi} + |\omega|^{-1} R_{\pm})$. Вместе с тем у ее производной появились скачки

$$\left[\frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d} \right]_{\pm}(\xi') := \frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}(\xi', \pm R_{\pm} + 0) - \frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}(\xi', \pm R_{\pm} - 0) = -\frac{1}{|\omega|}$$

на сечениях $\omega(\pm R_{\pm})$. Таким образом, формулы Грина показывают, что

$$\begin{aligned} 0 < \|\nabla_{\xi} w_{\#}; L^2(\Xi)\|^2 &= \sum_{\pm} \mp \int_{\omega} w_{\#}(\xi', \pm R_{\pm}) \left[\frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d} \right]_{\pm}(\xi') d\xi' = \\ &= \sum_{\pm} \mp \int_{\omega} (w_1(\xi', \pm R_{\pm}) \left[\frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d} \right]_{\pm}(\xi', \pm R_{\pm}) - [w_{\#}](\xi', \pm R_{\pm}) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi', \pm R_{\pm})) d\xi' = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \mp \int_{\omega} (w_1(\xi', \pm T) \frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}(\xi', \pm T) - w_{\#}(\xi', \pm T) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi', \pm T)) d\xi' = 2m_{\Xi} + \frac{R_+ + R_-}{|\omega|}. \end{aligned}$$

Неравенство (21) также доказано.

Формула (22) позволяет легко вычислить величину M_{Ξ} , но формула (21) дает мало информации о величине m_{Ξ} . Обсудим специфические волноводы, изображенные на фиг. 2а и б.

(i) *Сужение участка волновода*: $\Xi \subset \Omega$ (фиг. 2а). Пусть $\Upsilon = \Omega \setminus \bar{\Xi} \neq \emptyset$ и $\Sigma = \partial\Upsilon \setminus \partial\Omega \subset \partial\Xi$. Заметим, что $M_{\Xi} = -\frac{1}{2} |\Upsilon|$ в силу равенства (22). Введем функцию

$$\widehat{w}_1(\xi) = w_1(\xi) - |\omega|^{-1} \xi_d. \tag{23}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{|\omega|} \int_{\Sigma} w_1(\xi) \partial_{\nu} \xi_d ds_{\xi} = \frac{1}{|\omega|^2} \int_{\Sigma} \xi_d \partial_{\nu} \xi_d ds_{\xi} - \frac{1}{|\omega|} \int_{\Sigma} \widehat{w}_1(\xi) \partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi) ds_{\xi} = \\ &= -\frac{|\Upsilon|}{|\omega|^2} - \|\nabla_{\xi} \widehat{w}_1; L^2(\Xi)\|^2 < 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь применена формула интегрирования по частям в областях Υ и Ξ , причем $\nabla_{\xi} \widehat{w}_1 \in L^2(\Xi)$ в силу определений (17) и (23), а ∂_{ν} — производная вдоль внутренней нормали для Υ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\Sigma} (w_1(\xi) \partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi) - \widehat{w}_1(\xi) \partial_{\nu} w_1(\xi)) ds_{\xi} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{\omega} (w_1(\xi) \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial \xi_d}(\xi) - \widehat{w}_1(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi)) \times |_{\xi_d = \pm T} d\xi' = -2m_{\Xi}. \end{aligned} \tag{25}$$

Сначала воспользовались тем, что $\partial_{\nu} w_1 = 0$ и $\partial_{\nu} \widehat{w}_1 = -\partial_{\nu} \xi_d$ на Σ , а затем применили формулу Грина в усеченном волноводе $\Xi_T = \{\xi \in \Xi : |\xi_d| < T\}$ и вычислили возникшие интегралы по удаленным ($|\xi_d| = T \rightarrow +\infty$) сечениям, подставив разложения функций w_1 и \widehat{w}_1 .

Соотношения (25) и (24) показывают, что $m_{\Xi} > 0$.

(ii) *Расширение участка волновода*: $\Omega \subset \Xi$ (фиг. 2б). Пусть $\Upsilon = \Xi \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$. При помощи равенства (22) находим $M_{\Xi} = \frac{1}{2} |\Upsilon| > 0$. Введем функцию \widehat{w}_1 , совпадающую с w_1 на Υ , но заданную равенством (23) на цилиндре Ω . Эта функция приобретает скачок $[w_1](\xi) = \xi_d$ на поверхности $\Sigma = \partial\Upsilon \setminus \partial\Xi \subset \partial\Omega$, но $[\partial_{\nu} w_1](\xi) = 0$ при $\xi \in \Sigma$ (скачки вычисляются в направлении обратном внешней нормали для тела Ξ). Сразу же получаем соотношение

$$I := \int_{\Sigma} [\widehat{w}_1](\xi) \partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi) ds_{\xi} = -\|\nabla_{\xi} w_1; L^2(\Upsilon)\|^2 - \|\nabla_{\xi} \widehat{w}_1; L^2(\Omega)\|^2 < 0.$$

Поскольку $\partial_{\nu} \xi_d = 0$ на Σ , аналогично выкладке (25) выводим цепочку равенств

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Sigma} ([\widehat{w}_1](\xi) \partial_{\nu} w_1(\xi) - w_1(\xi) [\partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi)]) ds_{\xi} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{\omega} (\widehat{w}_1(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi) - w_1(\xi) \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial \xi_d}(\xi)) |_{\xi_d = \pm T} d\xi' = 2m_{\Xi}. \end{aligned}$$

В итоге обнаруживаем, что, как и в ситуации (i), характеристики m_{Ξ} и M_{Ξ} имеют разные знаки и не обращаются в нуль.

При построении асимптотик в разд. 3 важную роль играют величины

$$N_{\Xi}^{\pm} = M_{\Xi} |\omega|^{-1} \pm m_{\Xi} |\omega|. \tag{26}$$

Предложение 2. 1) В силу предложения 1 справедливо неравенство

$$N_{\Xi}^+ > 2 |\omega|^{-1} |\Theta| - 4(R_+ + R_-),$$

т.е. $N_{\Xi}^+ > 0$ при фиксированной “ширине” $R_+ + R_-$ и большом объеме $|\Xi|$ волновода Ξ .

2) В ситуациях (i) и (ii) (фиг. 2а и б) величина N_{Ξ}^- отрицательна и положительна соответственно, но существуют такие волноводы Ξ , что $N_{\Xi}^- = 0$.

К сожалению, для произвольной формы резонатора Θ знаки величин N_{Ξ}^{\pm} неизвестны. Они непрерывно изменяются при регулярной вариации поверхности [11, гл. 6, 5], и поэтому действительно $N_{\Xi}^{-} = 0$ у волноводов Ξ каких-то конкретных форм. Пример области Ξ , для которой $N_{\Xi}^{+} \leq 0$, не найден.

Замечание 1. Пусть $d = 2$ и $\Omega = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in (-1, 0), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ — единичная полоса, т.е. ω — отрезок единичной длины. Придадим ее стороне пологое локальное возмущение:

$$\Xi^{\varepsilon} = \{\xi : \xi_2 \in \mathbb{R}, -1 < \xi_1 < \varepsilon H(\xi_2)\}. \tag{27}$$

При этом ε — малый положительный параметр, а профильная функция $H \in C_c^{\infty}(-R, R)$ обладает нулевым средним (см. фиг. 2в) и, значит,

$$M_{\Xi^{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} H(\xi_2) d\xi_2 = 0.$$

Асимптотику при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения w_1^{ε} однородной задачи (16) в регулярно возмущенной полосе (27) (см. [11, гл. 6,5]) ищем в виде

$$w_1^{\varepsilon}(\xi) = \xi_2 + \varepsilon w_1'(\xi) + \varepsilon^2 w_1''(\xi) + \dots \tag{28}$$

Поскольку

$$\partial_{\nu^{\varepsilon}} = (1 + \varepsilon^2 | \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) |^2)^2 \times (\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2})$$

на искривленной стенке волновода, для поправочного члена w_1' получаем задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi} w_1'(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Xi, \\ \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) &= g'(\xi_2) := \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2), \\ \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(-1, \xi_2) &= 0, \quad \xi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{29}$$

Заметив, что $g' \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} g'(\xi_2) d\xi_2 = 0$, находим ограниченное решение задачи Неймана (29)

$$w_1'(\xi) = \tilde{w}_1'(\xi) + \sum_{\pm} \pm \chi_R^{\pm}(\xi_2) m', \tag{30}$$

а коэффициент m' вычисляем следующим образом:

$$\begin{aligned} 2m' &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{-1}^0 w_1'(\xi_1, \pm T) d\xi_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{-1}^0 (w_1'(\xi) \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_2}(\xi)) |_{\xi_2 = \pm T} d\xi_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi_2 \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} \xi_2 g'(\xi_2) d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} \xi_2 \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) d\xi_2 = - \int_{\mathbb{R}} H(\xi_2) d\xi_2 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Найдем третий член анзаца (28). При учете формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(\varepsilon H(\xi_2), \xi_2) &= \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) + \varepsilon H(\xi_2) \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \xi_1^2}(0, \xi_2) + O(\varepsilon^2) = \\ &= g'(\xi_2) - \varepsilon H(\xi_2) \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \xi_2^2}(0, \xi_2) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

обнаруживаем, что правая часть условия Неймана в задаче

$$-\Delta_{\xi} w_1''(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad \frac{\partial w_1''}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) = g''(\xi_2), \quad \frac{\partial w_1''}{\partial \xi_1}(-1, \xi_2) = 0, \quad \xi_2 \in \mathbb{R},$$

принимает вид

$$g''(\xi_2) = \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_2}(0, \xi_2) + H(\xi_2) \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \xi_2^2}(0, \xi_2) = \frac{d}{d\xi_2}(H(\xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2)).$$

Функция $g'' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ обладает нулевым средним, а коэффициент m'' в аналогичном (30) разложении ограниченного решения w'' вычисляется по формуле (ср. выкладку (31))

$$\begin{aligned} 2m'' &= \int_{\mathbb{R}} \xi_2 g''(\xi_2) d\xi_2 = - \int_{\mathbb{R}} H(\xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_2}(0, \xi_2) d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} g'(\xi_2) w_1'(0, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} w_1'(0, \xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) d\xi_2 = \| \nabla_{\xi} w_1'; L^2(\Omega) \|^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при пологом возмущении полосы, не изменяющем объем волновода, для величин (26) выполнены соотношения $\pm N_{\pm \varepsilon}^{\pm} \geq c_H \varepsilon^2$, $c_H > 0$.

Подчеркнем, что приемы, разработанные в [18, 19], позволяют построить нетривиальный профиль $H^\varepsilon(\xi_2) = H(\xi_2) + O(\varepsilon)$ деформированной стенки волновода (27), при котором $N_{\pm \varepsilon}^- = 0$.

3. СПЕКТР АКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Алгоритм построения асимптотики собственных пар $\{\Lambda^h(\theta); U^h(\cdot; \theta)\}$ задачи Неймана (9)–(11) N разработан в полной мере (см. [12, гл. 15, 16; 20; 14; 21; 22] и др.). В частности, известно, что главные члены асимптотических анзацев

$$\Lambda^h(\theta) = \Lambda^0(\theta) + h\Lambda^1(\theta) + \dots, \tag{32}$$

$$U^h(x; \theta) = v^0(x_d; \theta) + hv^1(x_d; \theta) + h^2(v''(x_d; \theta) + V(\xi', x_d; \theta)) + \dots, \tag{33}$$

в которых многие ингредиенты далее востребованы не будут, а многоточие замещает младшие члены, “не замечают” малое локальное возмущение тонкой области \mathfrak{w}^h и удовлетворяют следующей задаче для обыкновенного дифференциального по переменной $z = x_d$ уравнения на оси цилиндра $| \frac{h}{\#} :$

$$\begin{aligned} -\partial_z^2 v^0(z; \theta) &= \Lambda^0(\theta) v^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ v^0(\frac{1}{2}; \theta) &= e^{i\theta} v^0(-\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{dv^0}{dz}(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{dv^0}{dz}(-\frac{1}{2}; \theta). \end{aligned} \tag{34}$$

Следовательно,

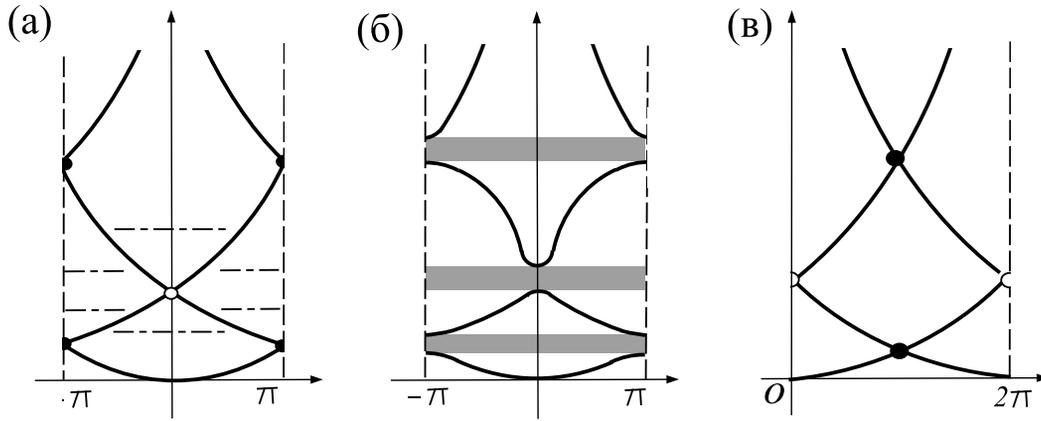
$$\begin{aligned} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) &= (\theta \pm \pi(2p + (1 \mp 1)))^2, \\ v_{p\pm}^0(z; \theta) &= e^{iz(\theta \pm \pi(2p + (1 \mp 1)))}, \\ p \in \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Соответствующие дисперсионные кривые, составляющие бесконечную ферму шириной 2π , изображены на фиг. 3а.

При нахождении поправочного члена анзаца (32) приходится учитывать малые возмущения формы ячейки \mathfrak{w}^h , для чего применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [23; 24; 12, гл. 2] и др.), и в качестве внутреннего, приемлемого в непосредственной близости от узла $\Theta^h \subset \mathfrak{w}^h$, разложения возьмем линейную комбинацию с неизвестными коэффициентами

$$\begin{aligned} U_{p\pm}^h(x; \theta) &= v_{p\pm}^0(0; \theta) + h(\partial_z v_{p\pm}^0(0; \theta) | \omega | w_1(\xi) + b_{p\pm}^1(\theta)) + \\ &+ h^2(b_{p\pm}''(\theta) + a_{p\pm}''(\theta) | \omega | w_1(\xi) + \Lambda_{p\pm}^0(\theta) W(\xi)) + \dots \end{aligned} \tag{36}$$

Анзац (33) интерпретируем как внутренние разложения (их два — на отрезках $(0, 1/2)$ и $(-1/2, 0)$), к которым следует применить формулу Тейлора



Фиг. 3. Фермы дисперсионных кривых (а) и (в) предельной задачи при разных определениях параметра Флоке. Узлы помечены значками \circ и \bullet , но масштаб в вертикальном направлении не соблюден. Ферма дисперсионных кривых исходной задачи (б), а лакуны — проекции тонированных прямоугольников на ось ординат. Вспомогательные штрихпунктирные линии (а).

$$v_{p\pm}^0(z; \theta) = 1 + iz(\theta \pm \pi(2p + (1 \mp 1))) - \Lambda_{p\pm}^0(\theta) \frac{z^2}{2} + O(|z|^3). \tag{37}$$

В формуле (37) были приняты во внимание явные выражения (35), но в сумме (36) — только в последнем слагаемом.

Произведем сращивание принятых разложений в промежуточных зонах $\pm z \sim \sqrt{h}$ и обнаружим, что в силу представления (17) решения w_1 задачи (16) слагаемые порядка единицы уже согласованы, а согласование слагаемых порядка h приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} b_{p\pm}'(\theta) + \partial_z v_{p\pm}^0(0, \theta) | \omega | m_{\Xi} &= v_{p\pm}'(+0; \vartheta), \\ b_{p\pm}'(\theta) - \partial_z v_{p\pm}^0(0, \theta) | \omega | m_{\Xi} &= v_{p\pm}'(-0; \vartheta), \end{aligned}$$

которые превращаем в условие скачка решения

$$[v_{p\pm}'(\theta)] := v_{p\pm}'(+0; \vartheta) - v_{p\pm}'(-0; \vartheta) = 2m_{\Xi} | \omega | \partial_z v_{p\pm}^0(0; \theta). \tag{38}$$

При сращивании разложений на уровне h^2 нужно учесть формулы (37) и (36), (19). Слагаемые порядка $z^2 = h^2 \xi_d^2$ оказываются согласованными автоматически, а согласование слагаемых порядка $hz = h^2 \xi_d$ порождает соотношения

$$\begin{aligned} \partial_z v_{p\pm}'(+0; \theta) &= a_{p\pm}'' + M_{\Xi} | \omega |^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}^0(0; \theta), \\ \partial_z v_{p\pm}'(-0; \theta) &= a_{p\pm}'' - M_{\Xi} | \omega |^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}^0(0; \theta). \end{aligned}$$

В итоге выводим условие скачка производной решения

$$[\partial_z v_{p\pm}'(\theta)] := \partial_z v_{p\pm}'(+0; \theta) - \partial_z v_{p\pm}'(-0; \theta) = 2M_{\Xi} | \omega |^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}^0(0; \theta), \tag{39}$$

замыкающее задачу для поправочных членов анзацев (32) и (33):

$$\begin{aligned} -\partial_z^2 v_{p\pm}'(z; \theta) - \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}'(z; \theta) &= \Lambda_{p\pm}'(\theta) v_{p\pm}^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}), \\ v_{p\pm}'(\frac{1}{2}; \theta) &= e^{i\theta} v_{p\pm}'(-\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{dv_{p\pm}'}{dz}(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{dv_{p\pm}'}{dz}(-\frac{1}{2}; \theta). \end{aligned} \tag{40}$$

Если $\Lambda_{p\pm}'(\theta)$ — простое собственное значение, то выполнение (единственного) условия разрешимости задачи (38)–(40)

$$\begin{aligned} \Lambda'_{p\pm}(\theta) &= \Lambda'_{p\pm}(\theta) \int_{-1/2}^{1/2} |v_{p\pm}^0(z;\theta)|^2 dz = - \int_{-1/2}^{1/2} v_{p\pm}^0(z;\theta)(\partial_z^2 v'_{p\pm}(z;\theta) + \Lambda_{p\pm}^0(\theta)v'_{p\pm}(z;\theta))dz = \\ &= \sum_{\alpha=\pm} \alpha \left(\overline{v_{p\pm}^0(0;\theta)} \partial_z v'_{p\pm}(\alpha 0;\theta) - \overline{\partial_z v_{p\pm}^0(0;\theta)} v'_{p\pm}(\alpha 0;\theta) \right) = \\ &= M_{\Xi} |\omega|^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) |v_{p\pm}^0(0;\theta)|^2 - 2m_{\Xi} |\omega| |\partial_z v_{p\pm}^0(0;\theta)|^2 \end{aligned}$$

влечет за собой формулу для поправочного слагаемого анзаца (32)

$$\Lambda'_{p\pm}(\theta) = 2N_{\Xi}^{-} \Lambda_{p\pm}^0(\theta). \tag{41}$$

Соотношение (41) показывает, что в зависимости от знака величины N_{Ξ}^{-} (см. определение (26), а также предложение 2 и замечание 1) участки дисперсионных кривых между точками их пересечений и изломов, помеченных значками \circ и половинками значков \bullet на фиг. 3а, сдвигаются вверх или вниз на фиг. 3б. Нижняя дисперсионная дуга также деформируется, но точка $(\theta, \Lambda) = (0, 0)$ остается неподвижной по причине последнего сомножителя в правой части (41). Вместе с тем поведение кривых около самих узлов

$$\begin{aligned} P_{\circ}^q &= (0, 4\pi^2 q^2) \text{ и } P_{\bullet}^q = (\pm\pi, \pi^2(2q-1)^2), \\ q &\in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{42}$$

(напоминаем, что 2π -периодичность отождествляет точки $\pm\pi$), требует более тщательного анализа хотя бы потому, что собственные значения

$$\begin{aligned} \Lambda_{p+}^0(0) &= \Lambda_{(p-1)-}^0(0) \text{ и } \Lambda_{p+}^0(\pi) = \Lambda_{(p-1)-}^0(-\pi), \\ p &\in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{43}$$

двукратные. Подчеркнем, что узлы (42), заданные разными выражениями, по сути не отличаются один от другого — это нетрудно усмотреть на фиг. 3в, где новая ферма, полученная допустимой заменой параметра Флоке $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto O_- = \theta - \pi \in [-\pi, \pi]$, содержит целые значки \bullet , но рассеченные значки \circ .

Следуя [25] (см. также [26, 27, 19] и др.), согласованно с формулой (42) введем “быструю” переменную Флоке

$$t_{\circ} = h^{-1}\theta \text{ или } t_{\bullet} = h^{-1}(\theta \mp \pi).$$

Рассмотрим узлы P_{\circ}^q на оси ординат — узлы P_{\bullet}^q обрабатываются по той же схеме (см. замечание 2 и ср. [25], где была использована именно “ферма” на фиг. 3в). Индекс \circ по возможности не пишем.

Общее решение задачи (34) с параметром $\Lambda^{q0} = 4\pi^2 q^2$ (новое обозначение) принимает вид

$$v^{q0}(z) = a_{+}^q e^{+i2\pi qz} + a_{-}^q e^{-i2\pi qz}. \tag{44}$$

В окрестности каждого из узлов у задачи (9)–(11)_N имеется пара собственных значений, для которых примем асимптотические анзацы

$$\Lambda_{\alpha}^{qh}(t) = \Lambda^{q0} + h\Lambda_{\alpha}^{q'}(t) + \tilde{\Lambda}_{\alpha}^{qh}(t), \quad \alpha = \pm. \tag{45}$$

Внешние разложения для соответствующих собственных функций $U_{\pm}^{hq}(\cdot; t)$ ищем в виде

$$U_{\alpha}^{qh}(\cdot; t) = v_{\alpha}^{q0}(z; t) + hv_{\alpha}^{q'}(z; t) + \dots, \quad \alpha = \pm, \tag{46}$$

где v_{α}^{q0} — линейная комбинация (44) с неизвестным столбцом коэффициентов $a^{q\alpha}(t) = (a_{+}^{q\alpha}(t), a_{-}^{q\alpha}(t))$. Выражение (36) с понятными изменениями по-прежнему выберем как внутреннее разложение около мелкого узла G^h . В результате для поправочных членов анзацев (45) и (46) выводим уравнение

$$-\partial_z^2 v_{\alpha}^{q'}(z; t) - \Lambda^{q0} v_{\alpha}^{q'}(z; t) = \Lambda_{\alpha}^{q'}(t) v_{\alpha}^{q0}(z; t), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}), \tag{47}$$

с полученными прежним способом условиями скачков

$$\begin{aligned} [v_{\alpha}^{q'}(t)] &= 2m_{\Xi} |\omega| |\partial_z v_{\alpha}^{q0}(0; t), \\ [\partial_z v_{\pm}^{q'}(t)] &= 2M_{\Xi} |\omega|^{-1} \Lambda^{q0} v_{\alpha}^{q0}(0; t). \end{aligned} \tag{48}$$

При $\theta = 0$ условия квазипериодичности (10) становятся обычными условиями периодичности, однако ввиду малого возмущения параметра Флоке $\theta = ht$ и формулы $e^{iht} = 1 + iht + O(h^2)$ они теперь оказываются неоднородными:

$$v_{\alpha}^{q'}\left(\frac{1}{2}; t\right) - v_{\alpha}^{q'}\left(-\frac{1}{2}; t\right) = -itv_{\alpha}^{q0}\left(-\frac{1}{2}; t\right), \quad \frac{dv_{\alpha}^{q'}}{dz}\left(\frac{1}{2}; t\right) - \frac{dv_{\alpha}^{q'}}{dz}\left(-\frac{1}{2}; t\right) = -it \frac{dv_{\alpha}^{q0}}{dz}\left(-\frac{1}{2}; t\right). \quad (49)$$

Поскольку собственное значение Λ^{q0} двукратное, у задачи (47)–(49) появляются два условия разрешимости, которые при помощи формулы Грина, а также неоднородных точечных условий превращаем в систему двух ($\alpha = \pm$) алгебраических уравнений для столбца $a^{q\pm}(t)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha}^{q'}(t)a_{\pm}^{q\alpha}(t) &= \Lambda_{\alpha}^{q'}(t) \int_{-1/2}^{1/2} e^{\pm i2\pi qz} v_{\alpha}^{q0}(z; t) dz = - \int_{-1/2}^{1/2} e^{\pm i2\pi qz} \left(\partial_z^2 v_{\alpha}^{q'}(z; t) + \Lambda^{q0} v_{\alpha}^{q'}(z; t) \right) dz = \\ &= \left(v_{\alpha}^{q'}(z; t) \partial_z e^{\pm i2\pi qz} - \partial_z v_{\alpha}^{q'}(z; t) e^{\pm i2\pi qz} \right) \Big|_{z=-1/2}^{1/2} - \left(v_{\alpha}^{q'}(z; t) \partial_z e^{\pm i2\pi qz} - \partial_z v_{\alpha}^{q'}(z; t) e^{\pm i2\pi qz} \right) \Big|_{z=0}^{+0} = \\ &= \mp 2\pi q t (a_{+}^{q\alpha} + a_{-}^{q\alpha}) - 2\pi q t (a_{+}^{q\alpha} - a_{-}^{q\alpha}) \mp 2\Lambda^{q0} m_{\pm} | \omega | (a_{+}^{q\alpha} - a_{-}^{q\alpha}) + 2\Lambda^{q0} M_{\pm} | \omega |^{-1} (a_{+}^{q\alpha} + a_{-}^{q\alpha}). \end{aligned}$$

с матрицей

$$\mathcal{M}^q(t) = \begin{pmatrix} -4\pi q t + 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} - m_{\pm} | \omega |) & 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} + m_{\pm} | \omega |) \\ 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} + m_{\pm} | \omega |) & 4\pi q t + 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} - m_{\pm} | \omega |) \end{pmatrix},$$

собственные значения которой имеют вид

$$\Lambda_{\alpha}^{q'}(t) = 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} - m_{\pm} | \omega |) + \alpha \Lambda^{q0} \sqrt{t^2 + 4(M_{\pm} | \omega |^{-1} + m_{\pm} | \omega |)^2}, \quad (50)$$

$$\alpha = \pm.$$

Эта формула содержит обе величины (26), причем предположение $N_{\pm}^{\pm} \neq 0$ показывает, что

$$\min_{t \in \mathbb{R}} (\Lambda^{q0} + h\Lambda_{+}^{q'}(t)) = \Lambda^{q0} (1 + 2h(N_{\pm}^{-} + |N_{\pm}^{+}|)) > \Lambda^{q0} (1 + 2h(N_{\pm}^{-} - |N_{\pm}^{+}|)) = \max_{t \in \mathbb{R}} (\Lambda^{q0} + h\Lambda_{-}^{q'}(t)).$$

В итоге видим, что вблизи узла P_{∞}^q две пересекающиеся предельные дисперсионные кривые (см. формулу (42) и фиг. 3а) распадаются и согласно определению (15) раскрывают лакуну \mathcal{G}_{2q}^h при малом $h > 0$ так, как указано на фиг. 3б для случая $q = 1$. При $N_{\pm}^{\pm} = 0$ такой вывод сделать нельзя, поскольку согласно (50) графики функций $t \mapsto \Lambda^{q0} + h\Lambda_{\pm}^{q'}(t)$ остаются пересекающимися прямыми, а их общая точка пересечения сдвигается вдоль оси ординат по закону (41).

Замечание 2. Узлу P_{∞}^q и соответствующему собственному значению

$$\Lambda_{\bullet}^{q0} = \Lambda_{q-1+}^0(\pi) = \Lambda_{q-2-}^0(-\pi) = \pi^2(2q-1)^2, \quad (51)$$

$$q \in \mathbb{N},$$

из списка (43) отвечают следующие две собственные функции предельной задачи (34):

$$v_{\bullet+}^q(z) := v_{q-1+}^0(z) = e^{+i(2q-1)z},$$

$$v_{\bullet-}^q(z) := v_{q-2-}^0(z) = e^{+i(2q-1)z}.$$

Повторение вычислений показывает, что выражение (50) для поправочного члена анзаца (45) сохраняется, но содержит новый множитель (51).

Сформулируем результат проведенного асимптотического анализа, а затем прокомментируем процедуру обоснования асимптотических формул.

Теорема 1. Пусть $N_{\pm}^{\pm} \neq 0$ (см. формулы (26), (17), (19) и предложение 2). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные h_k и C_k , что при $h \in (0, h_k]$ в спектре (6) оператора задачи (3), (4) N раскрыта лакуна

$$\mathcal{G}_{Nk}^h \supset [\pi^2 k^2 (1 + 2h(N_{\pm}^{-} - |N_{\pm}^{+}|)) + C_k h^2, \pi^2 k^2 (1 + 2h(N_{\pm}^{-} + |N_{\pm}^{+}|)) - C_k h^2].$$

шириной $4\pi^2 k^2 |N_{\Xi}^+| h + O(h^2)$. При $h \rightarrow +0$ количество раскрытых лагун (15) неограниченно возрастает, а соседние \mathcal{G}_{Nk}^h и \mathcal{G}_{Nk+2}^h отделены одна от другой спектральным сегментом \mathcal{B}_{Nk+1}^h с длиной $O(\pi^2(2k+1))$.

Обоснование индивидуальных асимптотик собственных пар $\{\Lambda_{Np}^h(\theta); U_{Np}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (9)–(11)_N, т.е. вывод оценок асимптотических остатков в представлении (32) собственного значения и в подходящим образом “склеенных” разложениях (33) и (36) собственной функции (см. [24; 12, гл. 2] и др.) проводится по стандартной, неоднократно опубликованной и подробно прокомментированной схеме, включающей применение леммы о “почти собственных” значениях и векторах (см. [28]), а также проверке утверждения о сходимости

$$\Lambda_{Nk}^h(\theta) \rightarrow \Lambda_k^h(\theta) \text{ при } h \rightarrow +0.$$

Реализация этих элементов схемы для рассмотренной задачи Неймана не встречает сколь-нибудь заметных затруднений (ср. [14, 16]). Осложнения возникают при асимптотическом анализе спектральных сегментов и лагун: для оправдания асимптотики концевых точек интервалов (15) нужны равномерные относительно параметра $\theta \in [-\pi, \pi]$ оценки. В [18] и [19] предложено несколько подходов к преодолению препятствий. Каждый из них вполне доступен в рассматриваемой задаче (например, достаточно проверить простой факт: для пар $\{\theta, \Lambda\}$, взятых со штрихпунктирных линий на фиг. 3в и удаленных от предельных дисперсионных кривых, задача (9)–(11)_N однозначно разрешима). Вместе с тем их исполнение достаточно громоздко, но в значительной степени повторяет уже публиковавшиеся рассуждения и выкладки. Избегая крупных заимствований, воспроизведем в п. 5, 1° лишь наиболее краткий из способов вывода равномерных по параметру Флоке оценок асимптотических остатков в представлениях собственных значений.

4. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

Спектр \wp квантового волновода Ξ (фиг. 1а), описываемого задачей Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta w(\xi) &= \mu w(\xi), \quad \xi \in \Xi, \\ w(\xi) &= 0, \quad \xi \in \partial\Xi, \end{aligned} \quad (52)$$

исследован полностью (см., например, обширный список литературы в [1]). Сообщим сведения, используемые в следующем разделе.

Непрерывный спектр \wp_c оператора задачи (52) — луч $[\mu_+, +\infty)$, точка отсечки которого $\mu_+ > 0$ — первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta_{\xi}$ на сечении ω цилиндра Ω ; соответствующую собственную функцию V нормируем в пространстве Лебега $L^2(\omega)$.

В ситуации (i) (фиг. 2а) дискретный спектр $\wp_d \subset (0, \mu_+)$ пустой (следствие неравенства Фридрихса: первое собственное значение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа $-\Delta_{\xi}$ на резонаторе $\Theta \subsetneq \omega \times (-R_-, R_+)$ превосходит μ_+), но в ситуации (ii) (фиг. 2б) в \wp_d есть хотя бы одна точка. Более того, размерность $\#\wp_d(R)$ дискретного спектра волновода $\Xi(R) = \Omega \cup \Theta(R)$ с увеличивающимся резонатором $\Theta(R) = \{\xi : R^{-1}\xi \in \Theta\}$ неограниченно возрастает при $R \rightarrow +\infty$ (см. [29]). Ввиду устойчивости собственных значений внутри дискретного спектра его насыщение может происходить исключительно вследствие отщепления собственных значений от точки отсечки μ_+ непрерывного спектра, которое обязательно сопровождается возникновением порогового резонанса (см. [30, 14, 31] и др.). Сам пороговый резонанс случается тогда, когда у задачи (52) с параметром $\mu = \mu_+$ имеется ограниченное решение

$$W_0(\xi) = \widetilde{W}_0(\xi) + \sum_{\pm} \chi_R^{\pm}(\xi_d) K_{\pm} V(\xi'), \quad (53)$$

где помимо привлечения собственной функции $V \in H_0^1(\omega)$ и коэффициентов $K_{\pm} \in \mathbb{R}$ обозначения вполне аналогичны использованным в формуле (17), в частности, χ_R^{\pm} — срезки (18). Если $K_{\pm} = 0$ и функция (53) затухает на бесконечности, то $\{\mu_+; w_+\} \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Xi)$ — истинная собственная пара задачи (52). Если же $|K_+|^2 + |K_-|^2 > 0$ и функция (53) только стабилизируется при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$, то пороговый резонанс называется *правильным* (терминология из [31]). Как неоднократно отмечалось в предшествующих публикациях (см., например, [13; 14; 12, гл. 16]) и станет понятно в разд. 5, отсутствие или наличие порогового

резонанса, а также его качество существенно влияют на асимптотическое строение спектра задачи (9), (10).

Пороговый резонанс заведомо отсутствует для волновода на фиг. 2а, т.е. в ситуации (i) (см. достаточное условие из [32] или первый критерий в [33]). Пример волновода $\Xi(R)$ с раздувающимся резонатором показывает, что существует такая положительная неограниченная монотонно возрастающая последовательность $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, что в волноводах $\Xi(R_j)$ реализуются пороговые резонансы. Другой способ образования резонанса состоит в возмущении прямого цилиндра $\Xi^0 = \Omega = \omega \times \mathbb{R}$, для которого наличие простого правильного порогового резонанса очевидно: нужное решение (53) имеет вид $w_{\dagger}(\xi) = V(\xi')$ и $K_{\pm} = 1$. Именно, в [31] разработана процедура поиска такой профильной функции $H \in C_c^\infty(\partial\Omega)$ (ср. замечание 1), что при малом $\varepsilon > 0$ деформация стенки $\partial\Xi^0 = \partial\omega \times \mathbb{R}$ вдоль нормали на величину $\varepsilon H(\xi)$ порождает правильный пороговый резонанс или делает точку отсечки μ_{\dagger} собственным значением задачи (52) в Ξ^ε . Вместе с тем следует подчеркнуть, что пороговый резонанс в задаче Дирихле — явление редкое и неустойчивое, т.е. ситуация общего положения — его отсутствие.

При зеркальной симметрии цилиндра Ω и резонатора G относительно гиперплоскости $\{\xi : \xi_1 = 0\}$ можно превратить порог μ_{\dagger} в собственное значение задачи (52) в $\Xi(R)$ при раздутии резонатора путем постановки искуственных условий Дирихле на рассекающей поверхности $\Gamma(R) = \{\xi \in \Xi(R) : \xi_1 = 0\}$ (см. [34]), которые сдвигают вверх точку отсечки $\mu_{\dagger}^+ > \mu_{\dagger}$, а увеличение размера R резонатора $\Theta(R)$ отцепляет от точки μ_{\dagger}^+ собственные значения задачи Дирихле в верхней половине волновода $\Xi^+(R) = \{\xi \in \Xi(R) : \xi_1 > 0\}$ и спускает их вниз до нуля при $R \rightarrow +\infty$. Таким образом, они многократно пересекают исходную точку отсечки μ_{\dagger} , а нечетное продолжение соответствующих собственных функций $V^+(\cdot; R) \in H_0^1(\Xi^+(R))$ через $\Gamma(R)$ порождает собственные пары $\{\mu_{\dagger}; V(\cdot; R)\}$ в исходном волноводе $\Xi(R)$. Разумеется, при богатой геометрической симметрии сечения ω точку отсечки μ_{\dagger} можно сделать кратным собственным значением, т.е. придать пороговому резонансу любую заданную наперед кратность.

Кратность *правильного* порогового резонанса не может превосходить двух, т.к. в разложении незатухающего решения (53) фигурирует лишь пара коэффициентов K_+ и K_- . К сожалению, до сих пор не опубликован пример квантового волновода с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность, у которого реализуется правильный пороговый резонанс с кратностью 2, т.е. у задачи (52) есть решения (53) с векторами коэффициентов $(K_+, K_-) = (1, 0)$ и $(K_+, K_-) = (0, 1)$. Отметим, что у задачи Неймана пороговый резонанс в точке $\mu_{\dagger} = 0$ всегда имеет кратность 1 и является правильным, что и породило возникшие в разд. 3 асимптотические анзацы. В [35] приведен акустический волновод довольно причудливой формы, у которого на втором простом пороге внутри непрерывного спектра возникает двукратный правильный пороговый резонанс, однако соответствующие конструкции непригодны для условий Дирихле.

Если правильный пороговый резонанс отсутствует, то у задачи (52) появляются два ($\alpha = \pm$) решения с линейным ростом в рукавах Ω^+ и Ω^- , а именно

$$W_{\dagger\alpha}(\xi) = \widetilde{W}_{\dagger\alpha}(\xi) + V(\xi')(\chi_R^\alpha(\xi_d)(\alpha\xi_d) + \sum_{\pm} \chi_R^\pm(\xi_d)K_{\alpha\pm}). \tag{54}$$

Матрица K , составленная из (вещественных) коэффициентов $K_{\alpha\pm}$ разложений (54) и имеющая размер 2×2 , симметричная (см. [36]). Если же правильный пороговый простой (его кратность равна 1), то в дополнение к ограниченному решению (53) у задачи (52) есть решение с таким поведением на бесконечности:

$$W_{\dagger 1}(\xi) = \widetilde{W}_{\dagger 1}(\xi) + \sum_{\pm} \chi_R^\pm(\xi_d) (\pm K_{\pm}^1 \xi_d + K_{\pm}^0) V(\xi'), \tag{55}$$

Коэффициенты разложений (55) и (53) подчинены связям

$$\begin{aligned} K_+ K_+^1 + K_- K_-^1 &= 0, \\ K_+ K_+^0 + K_- K_-^0 &= 0, \end{aligned} \tag{56}$$

причем первая возникает по необходимости (проверяется применением формулы Грина в усеченном волноводе Ξ_T и предельным переходом $T \rightarrow +\infty$; ср. разд. 2), а последняя достигается прибавлением слагаемого $SW_{\dagger 0}$ с подходящим множителем S и фиксирует функцию $W_{\dagger 1}$.

Подчеркнем, что размерность пространства решений с полиномиальным ростом на бесконечности у однородной задача (52) на пороге $\mu = \mu_{\dagger}$ равна двум (количество выходов на бесконечность у Ξ), т.е.

во всех рассмотренных ситуациях указан базис в этом пространстве. К сожалению, из-за того, что $\mu_{\dagger} > 0$ в уравнении Гельмгольца из задачи Дирихле (52), для коэффициентов представлений указанных специальных решений недоступны сколь-нибудь полезные интегральные формулы, похожие на полученные в разд. 2 для задачи Неймана (16), в которой $\mu_{\dagger} = 0$ в уравнении Лапласа. Таким образом, асимптотические конструкции в разд. 5 носят условный характер.

5. СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОГО КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА

Как упоминалось, асимптотическое строение спектра задачи Дирихле (9)–(11)_D существенно зависит от того, есть ли дискретный спектр у задачи (52) в бесконечном квантовом волноводе Ξ и возникает ли у нее пороговый резонанс. Разберем несколько ситуаций, упомянутых в разд. 4.

5.1. Точки дискретного спектра

Пусть дискретный спектр задачи (52) состоит из точек

$$\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_J \quad (57)$$

на интервале $(0, \mu_{\dagger})$. Согласно [14] (см. также [13] и [12, гл. 16]), в этом случае формальная асимптотика собственных пар задачи (9)–(11)_D выглядит просто:

$$\begin{aligned} \Lambda_p^h(\theta) &= h^{-2}\mu_p + \tilde{\Lambda}_p^h(\theta), \\ U_p^h(x; \theta) &= h^{-d/2}\chi(x_d)w_p(\xi) + \tilde{U}_p^h(x; \theta), \\ p &= 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $w_p \in H_0^1(\Xi)$ — собственная функция задачи (52), отвечающая ее собственному значению μ_p , а $\chi \in C_c^\infty(-1/2, 1/2)$, равная единице при $|x_d| \leq 1/4$. Благодаря экспоненциальному затуханию функций w_p при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ результаты из [14; 12, гл. 16], а также упоминавшаяся в конце разд. 3 лемма о “почти собственных” значениях и векторах (см. [28]) позволяет при фиксированном параметре Флоке установить оценки для асимптотических остатков в представлениях (58)

$$\begin{aligned} |\tilde{\Lambda}_p^h(\theta)| &\leq c_p(\theta)e^{-\delta_p/h}, \\ \|\tilde{U}_p^h(\cdot; \theta); L^2(\Pi^h)\| &\leq c_p(\theta)e^{-\delta_p/h}, \\ p &= 1, \dots, J, \end{aligned} \quad (59)$$

где δ_p — некоторые положительные показатели. Выбрать общий для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ множитель C_p в оценках (59) позволяет следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть $\Lambda_p^h(\theta) \leq h^{-2}(\mu - t)$ при некоторых $p \in \mathbb{N}$, $t > 0$ и $\theta \in [-\pi, \pi]$. Тогда найдутся такие положительные и не зависящие от параметра θ числа β_t , h_t и c_t , что при $h \in (0, h_t]$ для нормированной в пространстве $L^2(\Pi^h)$ собственной функции $U_p^h(\cdot; \theta) \in H_0^{1,0}(\mathfrak{w}^h)$ задачи (9)–(11)_D верна весовая оценка

$$h^2 \|e^{\beta_t x_d} \nabla_x U_p^h(\cdot; \theta); L^2(\Pi^h)\|^2 + \|e^{\beta_t x_d} U_p^h(\cdot; \theta); L^2(\Pi^h)\| \leq c_t. \quad (60)$$

Доказательство. Индексы p , t и параметр θ не пишем. Введем кусочно-гладкую непрерывную весовую функцию \mathcal{R}_β^h , равную $e^{\beta|x_d|/h}$ при $|x_d| \in [hR, 1/4]$, $e^{\beta/4h}$ при $|x_d| \geq 1/4$ и $e^{\beta R}$ на мелком узле $\Theta^h = \{x \in \mathfrak{w}^h : |x_d| < hR\}$. Заметим, что

$$\nabla_x \mathcal{R}_\beta^h(x) = 0 \text{ при } |x_d| \notin [hR, 1/4] \text{ и } \mathcal{R}_\beta^h(x)^{-1} |\nabla_x \mathcal{R}_\beta^h(x)| \leq \beta h^{-1}. \quad (61)$$

В интегральное тождество (12) подставим пробную функцию $\Psi^h = \mathcal{R}_\beta^h U_\beta^h$, где $U_\beta^h = \mathcal{R}_\beta^h U_p^h(\cdot; \theta)$. Условия квазипериодичности сохраняются потому, что весовая функция \mathcal{R}_β^h приобретает одинаковые

постоянные значения около торцов $\omega^h(\pm 1/2)$ ячейки \mathfrak{w}^h . После неоднократного коммутирования оператор-градиента с весовой функцией приходим к равенству

$$\| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 - \| \mathcal{U}_\beta^h (\mathcal{R}_\beta^h)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 = \Lambda^h \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2.$$

Отсюда при учете условия нормировки (14), формул (61) и неравенства Фридрикса

$$\| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h(\cdot, x_d); L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 \geq \mu h^{-2} \| \mathcal{U}_\beta^h(\cdot, x_d); L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2,$$

проинтегрированного по $|x_d| \in (hR, 1/2)$, выводим оценку

$$\begin{aligned} \Lambda^h e^{\beta R} &\geq \Lambda^h e^{\beta R} \| U^h; L^2(\Theta^h) \|^2 = \Lambda^h \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\Theta^h) \|^2 = \\ &= \| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 - \| \mathcal{U}_\beta^h (\mathcal{R}_\beta^h)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h \setminus \Theta^h) \|^2 - \\ &\quad - \Lambda^h(\theta) \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h \setminus \Theta^h) \|^2 \geq \| \partial_{x_d} \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 + \\ &\quad + \tau \| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 + h^{-2} \{ (1 - \tau) \mu - h^2 \Lambda^h - \beta \} \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h \setminus \Theta^h) \|^2. \end{aligned} \tag{62}$$

В силу условия, наложенного на собственное значение, видим, что левая часть соотношения (62) не превосходит $h^{-2} \mu e^{\beta R}$. Числа $\tau = \tau_l > 0$, $\beta = \beta_l > 0$ и $h_l > 0$ берем настолько малыми, чтобы множитель, выделенный фигурными скобками в последней строке формулы (62), был положителен при $h \in (0, h_l]$. Для проверки неравенства (60) осталось сделать несложные преобразования, причем при оценивании нормы производной $\partial_{x_2} U^h$ еще раз применить формулы (61). Предложение доказано.

Убедимся в равномерной относительно параметра $\theta \in [-\pi, \pi]$ ограниченности множителя $c_p(\theta)$ из оценок (59). Благодаря установленному экспоненциальному затуханию собственных функций максимизационный принцип (см., например, [5, теорема 10.2.2])

$$\Lambda_p^h(\theta) = \max_{\mathcal{E}_p^h(\theta) \Psi^h \in \mathcal{E}_p^h(\theta) \setminus \{0\}} \inf_{\Psi^h \in \mathcal{E}_p^h(\theta) \setminus \{0\}} \frac{\| \nabla_x \Psi^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2}{\| \Psi^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2}, \tag{63}$$

$p \in \mathbb{N}$,

в котором $\mathcal{E}_p^h(\theta)$ — любое подпространство в $H_0^{1,0}(\mathfrak{w}^h)$ с коразмерностью $p - 1$, позволяет доказать неравенство с общей для всех $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$ мажорантой

$$\begin{aligned} | \Lambda_p^h(\theta_1) - \Lambda_p^h(\theta_2) | &\leq c_p e^{-\delta_p/h}, \\ \delta_p &> 0. \end{aligned} \tag{64}$$

В самом деле, согласно предложению 3 и условиям ортогональности и нормировки (14), произведения $\chi U_1^h(\cdot; \theta_1), \dots, \chi U_p^h(\cdot; \theta_1)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\chi U_j^h(\cdot; \theta_1), \chi U_k^h(\cdot; \theta_1))_{\mathfrak{w}^h} &= \delta_{j,k} + O(e^{-\delta_k/h} + e^{-\delta_k/h}), \\ j, k &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Следовательно, эти произведения остаются линейно независимыми. В итоге каждое подпространство $\mathcal{E}_p^h(\theta_2)$ из (63) содержит нетривиальную линейную комбинацию

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{E}_p^h(\theta_2)}^h(x) &= \sum_{j=1}^p C_j^j \chi(x_d) U_k^h(x; \theta_1), \\ \sum_{j=1}^p | C_j^j |^2 &= 1, \end{aligned}$$

которая попадает в пространство $H_0^{1,\theta_2}(\mathfrak{w}^h)$ при любом параметре θ_2 , так как согласно определению срезающей функции χ указанные произведения обращаются в нуль около торцов $\mathfrak{w}^h(\pm 1/2)$ ячейки \mathfrak{w}^h и потому удовлетворяют условиям квазипериодичности (11) при любом θ . Наконец, весовая оценка (60) позволяет обработать дробь Рэлея из формулы (63) и получить соотношение

$$\Lambda_p^h(\theta) \leq \max_{\varepsilon_p^h(\theta)} \frac{\|\nabla_x \Psi_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^h; L^2(\mathfrak{w}^h)\|^2}{\|\Psi_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^h; L^2(\mathfrak{w}^h)\|^2} \leq \max_{\varepsilon_p^h(\theta)} \frac{\sum_{j=1}^p \Lambda_j^h(\theta_1) |C_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^j|^2 + c_p^+ e^{-\delta_p/h}}{\sum_{j=1}^p |C_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^j|^2 - c_p^- e^{-\delta_p/h}} \leq \Lambda_p^h(\theta_1) + C_p e^{-\delta_p/h}.$$

Поменяв ролями параметры θ_2 и θ_1 , приходим к неравенству (64), которое вместе с первой оценкой (59) обеспечивает первую часть формулируемой ниже теоремы 2.

5.2. Пороговый резонанс отсутствует

В силу результата из [14] (см. также [13; 12, гл. 16] по поводу общих краевых задач) в указанном случае предельными краевыми условиями в точке $z = 0$ оказываются условия Дирихле. Поэтому примем следующие асимптотические анзацы для собственных пар задачи (9)–(11)_D:

$$\Lambda^h(\theta) = h^{-2}\mu + \kappa^0 + h\kappa'(\theta) + \tilde{\Lambda}^h(\theta), \tag{65}$$

$$U^h(\theta) = v^0(z; \theta)V(\xi') + hv'(z; \theta)V(\xi') + \dots \tag{66}$$

Как упоминалось, функция v удовлетворяет условиям

$$v^0(\pm 0; \theta) = 0, \tag{67}$$

но функции v' разрешено иметь скачок в точке $z = 0$. При этом в качестве внутреннего разложения около узла Θ^h возьмем линейную комбинацию решений (54) задачи (52)

$$U^h(\theta) = hW_+(\xi)\partial_z v^0(+0; \theta) - hW_-(\xi)\partial_z v^0(-0; \theta) + \dots \tag{68}$$

Подстановка анзацев (65) и (66) в равенства (9)–(11)_D на ячейке \mathfrak{w}^h и ее границе вне ядра Θ^h дает соотношения

$$-\partial_z^2 v^0(z; \theta) = \kappa^0 v^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}), \tag{69}$$

$$v^0(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} v^0(-\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{dv^0}{dz}(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{dv^0}{dz}(-\frac{1}{2}; \theta), \tag{70}$$

а решениями задачи (69), (70), (67) служат такие пары $\{\kappa_q^0; v_q^0\}$ при $q \in \mathbb{N}$:

$$\kappa_q^0 = \pi^2 q^2, v_q^0(z; \theta) = \sin(\pi q z) \text{ при } z \in (0, \frac{1}{2}), \quad v_q^0(z; \theta) = (-1)^q e^{-i\theta} \sin(\pi q z) \text{ при } z \in (-\frac{1}{2}, 0).$$

Зависимость собственных функций v_q^0 от переменной Флоке фиктивная — она устраняется естественным переходом к задаче Дирихле на интервале $(0, 1) \ni z$.

Поправочные члены анзацев определяются из уравнения

$$-\partial_z^2 v'_q(z; \theta) - \kappa_q^0 v'_q(z; \theta) = \kappa'_q v_q^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}),$$

с прежними условиями квазипериодичности (70) и неоднородными условиями Дирихле, проистекающими от согласования внешних разложений (66) с внутренним (68) при учете представлений (54) решений W_{\pm} задачи (52), а именно

$$v'_q(\pm 0; \theta) = \sum_{\alpha=\pm} \alpha K_{\alpha\pm} \partial_z v_q^0(\alpha 0; \theta). \tag{71}$$

Как обычно, условие разрешимости сформированной задачи, единственное в силу простоты собственного значения, вместе с соотношениями (70) и (71) обеспечивают формулу

$$\begin{aligned} \kappa'_q(\theta) &= \kappa'_q(\theta) \int_{-1/2}^{1/2} |v_q^0(z; \theta)|^2 dz = - \int_{-1/2}^{1/2} v_q^0(z; \theta) \left(\partial_z^2 v'_q(z; \theta) + \kappa_q v'_q(z; \theta) \right) dz = \\ &= \sum_{\pm} \mp v'_q(\pm 0; \theta) \overline{\partial_z v_q^0(\pm 0; \theta)} = -\pi^2 q^2 (K_{++}^2 - K_{--}^2 + 2(-1)^q K_{+-} \cos \theta) \end{aligned} \tag{72}$$

для поправочного члена порядка h в анзаце (65). Оценка $|\tilde{\Lambda}_q^h| \leq c_q(\theta)h^2$ асимптотического остатка в анзаце обеспечена, например, результатами из [14], а равномерная относительно $\theta \in [-\pi, \pi]$ ограниченность множителя $c_q(\theta)$ проверяется при помощи подходов из [18] или [16].

Сформулируем утверждение, заканчивающее асимптотический анализ из этого и предыдущего пунктов.

Теорема 2. Пусть дискретный спектр задачи (52) состоит из точек (57) и у нее отсутствует пороговый резонанс.

1. При $j = 1, \dots, J$ и $h \in (0, h_j]$ сегменты $\mathcal{B}_{D_j}^h$ в спектре задачи (9)–(11)_D содержатся в отрезках $[h^{-2}(\mu_j - c_j e^{-\delta_j}), h^{-2}(\mu_j + c_j e^{-\delta_j})]$. Здесь h_j, δ_j и c_j — некоторые положительные числа. Если $\mu_j < \mu_{j+1}$ (например, $j = 1$), то между сегментами $\mathcal{B}_{D_j}^h$ и $\mathcal{B}_{D_{j+1}}^h$ раскрыта спектральная лакуна $\mathcal{G}_{D_j}^h$ шириной $h^{-2}(\mu_{j+1} - \mu_j) + O(e^{\min\{\delta_j, \delta_{j+1}\}/h})$.

2. При $j = J + q$ и $q \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные числа h_q и c_q , что при $h \in (0, h_q]$ справедливо включение $\mathcal{B}_{D_j}^h \subset [h^{-2}(\mu_{\pm} + \pi^2 q^2(1 - 2hK_{+-})) - c_q h^2, h^{-2}(\mu_{\pm} + \pi^2 q^2(1 + 2hK_{+-})) + c_q h^2]$, где $\mu_{\pm} > 0$ — точка отсечки непрерывного спектра задачи (52), а $K_{+-} = K_{-+}$ — коэффициент в разложениях (54) ее решений W_{\pm} . Между соседними сегментами $\mathcal{B}_{D_j}^h$ и $\mathcal{B}_{D_{j+1}}^h$ раскрыта спектральная лакуна $\mathcal{G}_{D_j}^h$ шириной $\pi^2(2q + 1)(1 - 4hK_{+-}) + O(h^2)$.

3. Лакуна $\mathcal{G}_{D_j}^h$ раскрыта наверняка и имеет ширину $h^{-2}(\mu_{\pm} - \mu_j) + \pi^2(1 - 2hK_{+-}) + O(h^2)$.

Замечание 3. 1. Если $\mu_j = \dots = \mu_{j+\rho_j-1}$ — собственное значение задачи (52) с кратностью $\rho_j > 1$, то осталось неизвестным, раскрыты или нет лакуны между спектральными сегментами $\mathcal{B}_{D_j}^h, \dots, \mathcal{B}_{D_{j+\rho_j-1}}^h$.

В случае симметрии волновода Ξ относительно плоскостей $\{\xi : \xi_k = 0\}, k \in \{1, \dots, d - 1\}$, несколько сегментов совпадают и лакун между ними, разумеется, нет. В общей ситуации для ответа на вопрос о раскрытии лакун нужно построить младшие асимптотические члены собственных значений (8) задачи (9)–(11)_D, которые (члены) привлекают характеристики волновода Ξ , отличающиеся от введенных в разд. 4, и потому в данной статье не вычисляются, хотя соответствующие итерационные процессы известны (см., например, [12]).

2. Если $\mu_{j+1} = \mu_{\pm}$ — собственное значение оператора задачи (52), вкрапленное в его непрерывный спектр \wp_c , но правильный пороговый резонанс отсутствует, то в спектре (6) задачи (9)–(11)_D появляется сегмент $\mathcal{B}_{D_{j+1}}^h \subset [h^{-2}\mu_{\pm} - c_{\pm} h, h^{-2}\mu_{\pm} + c_{\pm} h]$ с некоторым числом $c_{\pm} > 0$. Первое утверждение теоремы 2 сохраняется полностью, во втором нужно сделать замену $j \mapsto j + 1$, а вместо одной лакуны в третьем утверждении обнаруживаются две лакуны $\mathcal{G}_{D_j}^h$ и $\mathcal{G}_{D_{j+1}}^h$, у которых ширина равна $O(h^{-2}(\mu_{\pm} - \mu_j))$ и $O(h^2)$ соответственно.

3. Согласно формуле (72), диагональные элементы $K_{\pm\pm}$ матрицы K коэффициентов представлений (54) определяют положение сегментов $\mathcal{B}_{D_{j+q}}^h$, а антидиагональные элементы $K_{+-} = K_{-+}$ — их размеры. В случае $K_{\pm\mp} = 0$ длина сегментов уменьшается по крайней мере до $O(h^2)$.

5.3. Простой правильный пороговый резонанс

Пусть у задачи (52) с параметром $\mu = \mu_{\pm}$ имеются решения (54) и (55), но захваченных волн нет, т.е. точка отсечки не является собственным значением. Тогда асимптотические анзацы (65) и (66) для собственных пар задачи (9)–(11)_D остаются прежними. Для главных асимптотических членов κ^0 и v^0 по-прежнему верны уравнения (69) и условия квазипериодичности (70), однако процедура срашивания обеспечивает новые условия скачков в точке $z = 0$. Именно, согласование внутреннего разложения

$$\begin{aligned}
 U^h(x; \theta) &= c_0 W_{+0}(\xi) + h(c_1 W_{+1}(\xi) + c'_0 W_{+0}(\xi)) + \dots = \\
 &= c_0 K_{\pm} + h(c_1 (\pm K_{\pm}^1 \xi_d + K_{\pm}^0) + c'_0 K_{\pm}) + \dots \text{ при } \pm \xi_d \gg R
 \end{aligned}$$

с внешними разложениями (66), к главным членам которых применена формула Тейлора

$$\begin{aligned}
 v^0(z; \theta) &= v^0(\pm 0; \theta) + z \partial_z v^0(\pm 0; \theta) + \frac{z^2}{2} \partial_z^2 v^0(\pm 0; \theta) + O(|z|^3) = \\
 &= v^0(\pm 0; \theta) + h \xi_d \partial_z v^0(\pm 0; \theta) + h^2 \frac{\xi_d^2}{2} \partial_z^2 v^0(\pm 0; \theta) + O(h^3 |\xi_d|^3),
 \end{aligned}$$

после исключения неизвестных коэффициентов c_0 и c_1 приводит к таким равенствам:

$$\begin{aligned}
 K_- v^0(+0; \theta) &= K_+ v^0(-0; \theta), \\
 K_-^1 \partial_z v^0(+0; \theta) + K_+^1 \partial_z v^0(-0; \theta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{73}$$

Оба коэффициента K_{\pm} не могут обратиться в нуль, так как по предположению решение (53) не попадает в пространство $H_0^1(\Xi)$. Если

$$K_+ = 0, K_- \neq 0 \quad \text{или} \quad K_- = 0, K_+ \neq 0,$$

то соответственно $K_-^1 = 0, K_+^1 \neq 0$ или $K_+^1 = 0, K_-^1 \neq 0$ в согласии с первой связью (56). Следовательно, условия сопряжения (73) распадаются и, превращаясь в краевые условия

$$v^0(+0; \theta) = 0, \partial_z v^0(-0; \theta) = 0 \quad \text{или} \quad v^0(-0; \theta) = 0, \partial_z v^0(+0; \theta) = 0,$$

делают задачу (69), (70), (73) с вещественным параметром Флоке формально самосопряженной, а дисперсионные кривые в этой задаче — прямыми отрезками $\kappa = \pi^2(q = 1/2)^2, q \in \mathbb{N}$. В итоге, как и при отсутствии порогового резонанса, спектр (6) исходной задачи (9)–(11) D на тонкой ячейке периодичности ϖ^h состоит из коротких сегментов (7), разделенных широкими лагунами (15). Вычисление размеров сегментов и лагун почти дословно повторяет выкладки из п. 3, 2°, — воспроизводить их не будем.

Обратимся теперь к ситуации

$$K_{\pm} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{k} = \frac{K_+}{K_-} = -\frac{K_-^1}{K_+^1} \tag{74}$$

и перепишем условия сопряжения (73) следующим образом:

$$v^0(+0; \theta) = \mathbf{k} v^0(-0; \theta), \quad \mathbf{k} \partial_z v^0(+0; \theta) = \partial_z v^0(-0; \theta). \tag{75}$$

Задача (69), (70), (75) с параметром Флоке $\theta \in [-\pi, \pi]$ по-прежнему формально самосопряженная, а ее дисперсионные кривые $\kappa = \kappa(\theta)$ находятся из трансцендентного уравнения:

$$\cos \sqrt{\kappa} = \frac{2\mathbf{k}}{1 + \mathbf{k}^2} \cos \theta. \tag{76}$$

В случае $\mathbf{k} = 1$ соотношения (75) превращаются в условия непрерывности, а решения уравнения (76) заданы первой формулой (35), т.е. ферма дисперсионных кривых принимает тот же вид, что и на фиг. 3а. При $\mathbf{k} \neq 1$ ферма искажается, а простые выражения (42) для ее узлов пропадают. Несмотря на то, что в целом изучение расщепления узлов искаженной фермы требует применения той же асимптотической процедуры, что и в разд. 3, отсутствие необходимой информации о кратных собственных значениях и специальных решениях (55), (54) (ср. выражения (41)–(43) и предложения 1, 2 в случае условий Неймана) делает доступные результаты условными, а финальные формулы — излишне громоздкими и потому бесполезными. Впрочем, имеется один случай $\mathbf{k} = -1$ в формуле (74), для которого выкладки и результаты мало отличаются от представленных в разд. 3. При этом требуемое соотношение $K_+ = -K_-$

реализуется, например, тогда, когда правильный пороговый резонанс возникает в задаче Дирихле на уполовиненном волноводе $\{\xi \in \Xi : \xi_d > 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Exner P., Kovarik H.* Quantum waveguides. Theoretical and Mathematical Physics. Cham: Springer, 2015.
2. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
6. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 3. New York: Academic Press Inc., 1980.
7. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Т. 171. Ленинград: Наука, 1985. 122 с.
8. *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
9. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
10. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
12. *Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenevski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991 (англ. перевод: *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
13. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестник ЛГУ. Серия 1. 1982. Вып. 2. № 7. С. 65–68.
14. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
15. *Назаров С. А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
16. *Назаров С. А.* Об одномерных асимптотических моделях тонких решеток Неймана // Сибирск. матем. журнал. 2023. Т. 64. № 2. С. 362–382.
17. *Полюа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
18. *Гомес Д., Назаров С. А., Ориве-Иллеря Р., Перес М.-Е.* Замечания об обосновании асимптотики спектра цилиндрических волноводов с периодическими сингулярными возмущениями границы и коэффициентов // Проблемы матем. анализа. Вып. 111. Новосибирск, 2021. С. 43–65.
19. *Gómez D., Nazarov S. A., Orive-Illera R., Pérez-Martinez M.-E.* Spectral gaps in a double-periodic perforated Neumann waveguide // Asymptotic Analysis. 2023. V. 131. P. 385–441.
20. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
21. *Panassenko G.* Multi-scale modelling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005.
22. *Post O.* Spectral analysis on graph-like spaces. Lecture Notes in Mathematics, 2039. Heidelberg: Springer, 2012.
23. *Ван-Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
24. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
25. *Назаров С. А.* Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 5. С. 764–786.
26. *Назаров С. А.* Асимптотика спектральных лакун в регулярно возмущенном периодическом волноводе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2013. Вып. 2. № 7. С. 54–63.
27. *Борисов Д. И., Панкрашкин К. В.* Открытие лакун и расщепление краев зон для волноводов, соединенных периодической системой малых окон // Матем. заметки. 2013. Т. 93. № 5. С. 665–683.
28. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.

29. *Jones D. S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
30. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. No. 2. P. 533–559.
31. *Назаров С. А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
32. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. of Math. Anal. and Appl. 2017. V. 449. No. 1. P. 907–925.
33. *Бахарев Ф. Л., Назаров С. А.* Критерии наличия и отсутствия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов // Алгебра и анализ. 2020. Т. 32. № 6. С. 1–23.
34. *Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
35. *Назаров С. А.* Волновод с двойным пороговым резонансом на простом пороге // Матем. сборник. 2020. Т. 211. № 8. С. 20–67.
36. *Korolkov A. I., Nazarov S. A., Shanin A. V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. No. 10. P. 1245–1260.