

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.968

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОМЕННЫХ СТЕНОК:  
ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В УРАВНЕНИИ МАГНИТОДИНАМИКИ**

© 2024 г. Л. А. Калякин<sup>1,\*</sup>, Е. Г. Екомасов<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>450077 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия

<sup>2</sup>450077 Уфа, ул. Заки Валиди, 32, Уфимский университет науки и технологий, Россия

\*e-mail: klenru@mail.ru

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.

Переработанный вариант 19.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных, моделирующее движение доменной стенки при учете внешних магнитных полей и затухания. В случае постоянных коэффициентов уравнение имеет набор тривиальных решений — равновесий. Исследуются решения в виде простых (бегущих) волн, которые соответствуют динамическому переходу из одного равновесия в другое. Перечислены возможные типы волн, устойчивых в линейном приближении. Указан рецепт вычисления скорости таких волн. Библ. 26. Фиг. 8.

**Ключевые слова:** нелинейное дифференциальное уравнение, равновесие, простая волна, фазовая траектория, доменная стенка.

**DOI:** 10.31857/S0044466924010087, **EDN:** ZJNKUN

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе под простой волной понимается функция со специфической зависимостью от переменных:  $\phi(x,t) = \Phi(x - vt)$ . При  $v = \text{const}$  функция  $\Phi(s)$  от аргумента  $s = x - vt$  интерпретируется как волна, бегущая по оси  $x$  со скоростью  $v$ . Отыскание решений в такой форме дает один из способов редукции задач к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для приложений интерес представляют простые волны, которые на фазовой плоскости  $(\Phi, \dot{\Phi})$  соответствуют траекториям, соединяющим неподвижные точки. Они связываются с описанием динамического перехода от одного равновесия к другому. Для уравнения sine-Gordon  $\phi_{tt} + \phi_{xx} + \sin\phi \cos\phi = 0$  примером такой волны является кинк:

$$\Phi_0(s) = 2 \arctan \exp(s\Lambda), \quad \Lambda = 1 / \sqrt{1 - v^2}. \tag{1}$$

В простейшей модели магнитодинамики для постоянного по величине вектора намагниченности (при отсутствии внешних магнитных полей и затухания) эта функция описывает динамический переход между равновесиями  $0$  и  $\pi$  и интерпретируется как доменная стенка (см. [1]); иногда используется термин “доменная граница” (ДГ). Скорость такой волны может быть любой в интервале  $0 < v < 1$ . При учете внешних магнитных полей и затухания модельное уравнение выглядит сложнее из-за дополнительных слагаемых с коэффициентами  $w, h, \alpha$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin\phi \cos\phi + w \sin\phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = h, \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{R}. \tag{2}$$

В случае  $w, \alpha = \text{const} \neq 0, h = 0$  тот же кинк (1) будет решением уравнения (2), но только при одной скорости  $v = v_0$ , определяемой соотношением  $\alpha v_0 / \sqrt{1 - v_0^2} = w$  (см. [2]).

В настоящей работе анализируется уравнение (2) в общем случае  $w, h, \alpha = \text{const} \neq 0$ . Из соображений симметрии коэффициенты  $w, h = \text{const} \geq 0$  можно считать неотрицательными. Коэффициент затухания  $\alpha = \text{const} > 0$  положительный по физическому смыслу. Целью работы является выявление всевозможных простых волн, бегущих от одного равновесия к другому. Важным свойством выделяемых здесь

решений является их устойчивость в линейном приближении. Это позволяет обнаружить такие волны в численных расчетах и связать с динамикой доменных границ в реальных физических экспериментах.

В представленном виде уравнение (2) было выведено из системы Ландау–Лифшица (см. [1; 2]) для описания одномерной динамики одиночной 180-градусной доменной границы в кристалле редкоземельного ортоферрита. Параметры  $w$  и  $h$  связаны с внешним магнитным полем,  $\alpha > 0$  — безразмерный параметр затухания. Коэффициенты  $w, h = \text{const} \neq 0$  получаются постоянными и отличными от нуля в случае, когда они соответствуют двум разным компонентами внешнего поля, одна из которых постоянна, а вторая меняется линейно по времени. Это бывает, например, в высокотемпературной магнитной фазе ортоферритов для ДГ ас-типа (см. [1; 2]).

В случае  $h = 0$  задача о ДГ в рамках модели (2) исследована довольно полно как аналитическими (см. [2–5]), так и численными методами (см. [6; 7]). Учет влияния параметра  $h \neq 0$  был проведен только для однородно намагниченного магнетика (см. [8–10]), влияние на динамику ДГ не исследовалось. Отметим, что уравнение (2) возникает также в модели джозефсоновских контактов, где слагаемое с  $h \neq 0$  играет существенную роль (см. [11]). Таким образом, исследование влияния параметра  $p$  на динамику простых волн в модели (2) представляет интерес для разных задач.

Использование простых волн дает эффективный способ аналитического исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Общеизвестным образом в этом направлении является работа Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) (см. [12]). К настоящему времени имеется много похожих результатов о простых волнах для уравнений параболического типа, которые возникают при математическом моделировании в биологии и в химии (в частности, в теории горения) (см. [13–16]). Многочисленные примеры из биологии приведены в монографии Стрижевского [17]. Этот подход применим и к гиперболическим уравнениям. Мы продемонстрируем его на конкретном уравнении (2), которое имеет прикладной интерес.

## 2. УТОЧНЕНИЕ ЗАДАЧИ

### 2.1. Равновесия

Уравнение (2) может иметь тривиальные решения — равновесия  $\phi \equiv \Phi_{eq} = \text{const}$ . Это будут корни тригонометрического уравнения

$$F(\phi) \equiv \sin \phi \cos \phi + w \sin \phi = h. \tag{3}$$

На промежутке периода  $2\pi$  таких равновесий может быть не больше четырех, как это видно на фиг. 1. Мы ограничимся случаем простых корней:  $0 < \Phi_0 < \Phi_0^+ < \Phi_1 < \Phi_1^+ < 2\pi + \Phi_0$ . Очевидно, все остальные равновесия получаются сдвигами на  $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$

На множестве параметров в квадранте  $w \geq 0, h \geq 0$  выделим подобласти, которые отличаются числом равновесий на периоде  $2\pi$ . Формулы для границ выписываются через положительные экстремумы функции  $F(\phi)$ . Первый экстремум в точке

$$\phi_0(w) = \text{Arccos} \left[ \frac{1}{4} [-w + \sqrt{w + 8}] \right], \quad 0 \leq \phi_0 < \pi / 2,$$

существует всегда; второй экстремум в точке

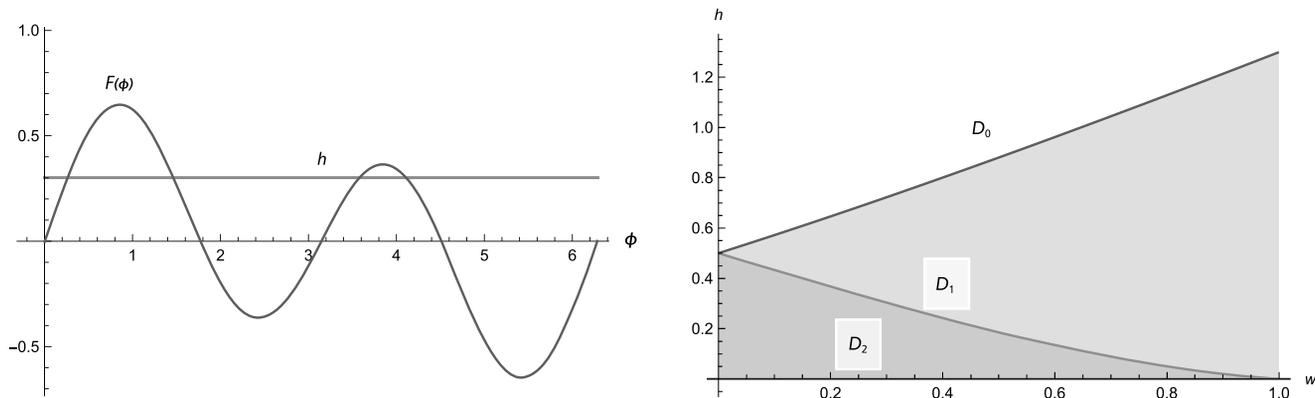
$$\phi_1(w) = \text{Arccos} \left[ -\frac{1}{4} [w + \sqrt{w + 8}] \right], \quad \pi \leq \phi_1 < 3\pi / 2,$$

существует только при  $w < 1$ . Значения  $F$  в этих экстремумах определяют пару функций от параметра  $w$ :  $M_k(w) = F(\phi_k(w)), k = 0, 1$ . Учитывая соотношения в экстремумах  $F(\phi_k) = \sin^3 \phi_k / \cos \phi_k$  и  $|\cos \phi_1| > \cos \phi_0$  получаем неравенство  $0 < M_1(w) < M_0(w)$  на промежутке  $0 \leq w < 1$ .

**Утверждение 1.** 1) Для параметров из области  $D_0 = \{w, h : h > M_0(w)\}$  равновесия отсутствуют.

2) Для параметров из области  $D_1 = \{w, h : M_1(w) < h < M_0(w), h > 0\}$  существует пара равновесий  $0 < \Phi_0 < \Phi_0^+ < \pi$ .

3) Для параметров из области  $D_2 = \{w, h : 0 < h < M_1(w), w < 1\}$  существует четыре равновесия:  $0 < \Phi_0 < \Phi_0^+ < \Phi_1 < \Phi_1^+ < 2\pi + \Phi_0$ .



Фиг. 1. Число корней зависит от соотношений параметров  $w, h$ .

### 2.2. Устойчивость равновесий в линейном приближении

В ситуации общего положения (по параметрам  $w, h$ ) равновесия являются простыми корнями уравнения (3). Вопрос устойчивости в линейном приближении, как обычно, сводится к анализу линеаризованного уравнения. В данном случае это будет уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F'(\Phi_{eq})\varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{R}.$$

Имея в виду разложение Фурье, достаточно проанализировать частные решения вида  $\varphi = \exp(i\lambda x + \mu t)$  при разных  $\lambda \in \mathcal{R}$ . Такая функция будет решением при связи:  $2\mu = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4F'(\Phi_{eq}) - 4\lambda^2}$ . Значение производной  $F'(\Phi_{eq}) \neq 0$  в точках  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  будет положительным, а в точках  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_1^+$  будет отрицательным. В первом случае показатель  $\mu$  будет иметь отрицательную действительную часть при всех  $\lambda$  и решение стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Во втором случае для  $\lambda^2 < -F'(\Phi_{eq})$  решение экспоненциально растет по  $t$ . Таким образом, имеет место следующее

**Утверждение 2.** Если корни уравнения (3) простые, то при  $\alpha > 0$  равновесия  $F_0$  и  $F_1$  будут устойчивы в линейном приближении, а равновесия  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_1^+$  неустойчивы.

В случае однородных возмущений (не зависящих от пространственной переменной  $x$ ) утверждение 2 характеризует устойчивость равновесий для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \sin \phi \cos \phi + w \sin \phi + \alpha \frac{d\phi}{dt} = h, \quad t > 0. \tag{4}$$

### 2.3. Постановка задачи

Для магнитодинамики интерес представляют решения уравнения (2), которые соответствуют переходу из одного равновесия в другое. Они выделяются краевыми условиями на бесконечности

$$\phi(x, t) \rightarrow \Phi_- \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad \phi(x, t) \rightarrow \Phi_+ \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

в предположении, что предельные значения  $\Phi_{\pm}$  являются корнями уравнения (3). Целью настоящей работы является отыскание для задачи (2),(5) решений в виде простой волны. Требуется указать возможные типы волн, условия их существования и скорость в зависимости от исходных параметров  $h, w, \alpha$ . Начальные условия не ставятся. Проблема стабилизации каких-либо решений к простой волне в стиле работ [12, 18, 19] здесь не обсуждается.

## 3. УРАВНЕНИЕ ПРОСТОЙ ВОЛНЫ

Для волны с “досветовой” скоростью  $0 < v < 1$  решение удобно искать в виде  $\phi(x, t) = \Phi(s)$  с аргументом  $s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}$ . Ее отыскание сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} - \sin\Phi \cos\Phi - w \sin\Phi + \gamma \frac{d\Phi}{ds} = -h, \quad \gamma = \frac{\alpha v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (6)$$

Уравнение дополняется краевыми условиями, которые соответствуют выходу на соответствующие равновесия:

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi_- \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_+ \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

Получается задача, похожая на спектральную: требуется найти функцию  $\Phi(s)$  и коэффициент  $\gamma$  (или, что то же, скорость  $v$ ). В общей ситуации при произвольных  $\Phi_{\pm}$  такая задача неразрешима. В настоящей работе выясняется, что постановка правильных краевых условий зависит от параметров  $w, h$ .

Основные результаты опираются на исследование деформации фазового портрета уравнения (5) при изменении коэффициента эффективной диссипации  $\gamma$ . Подходящие решения соответствуют фазовым траекториям — сепаратрисам, которые соединяют пару неподвижных точек. Константа сдвига по независимой переменной  $s$  не учитывается, поскольку не играет роли в рассматриваемой задаче.

В случае  $h = 0$  решение, найденное Звездиным в виде кинка (1), соответствует сепаратрисе из  $0$  в  $\pi$ . Симметричная сепаратриса из  $2\pi$  в  $\pi$  дает второе решение — антикинк  $2\pi - \Phi_0(s)$ . Другие решения отличаются на  $2\pi n$  и не представляют интереса.

В случае  $h \neq 0$  возможности значительно расширяются. Однако в отличие от результатов Звездина [2] явных представлений решений через элементарные функции при  $h \neq 0$  получить не удается. Здесь приводятся только теоремы существования и указывается рецепт для вычисления скорости.

Уравнения (4) и (5) похожи и имеют одинаковые равновесия. Однако свойства их неподвижных точек по устойчивости различаются, как это видно из сравнения соответствующих характеристических уравнений.

**Утверждение 3.** *Если корни уравнения (3) простые, то для дифференциального уравнения (5) равновесия  $F_1$  и  $F_1$  будут неустойчивы (неподвижные точки имеют тип седла), а равновесия  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_1^+$  будут асимптотически устойчивы (неподвижные точки имеют тип фокус либо узел).*

#### 4. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

При отсутствии диссипации, когда  $\gamma = 0$ , уравнение (5) описывает маятник с постоянным моментом  $h$  и для него выписывается первый интеграл<sup>1</sup>

$$I(\Phi, \dot{\Phi}) = (\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2} \cos 2\Phi + 2w \cos \Phi + 2h\Phi, \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{ds}. \quad (7)$$

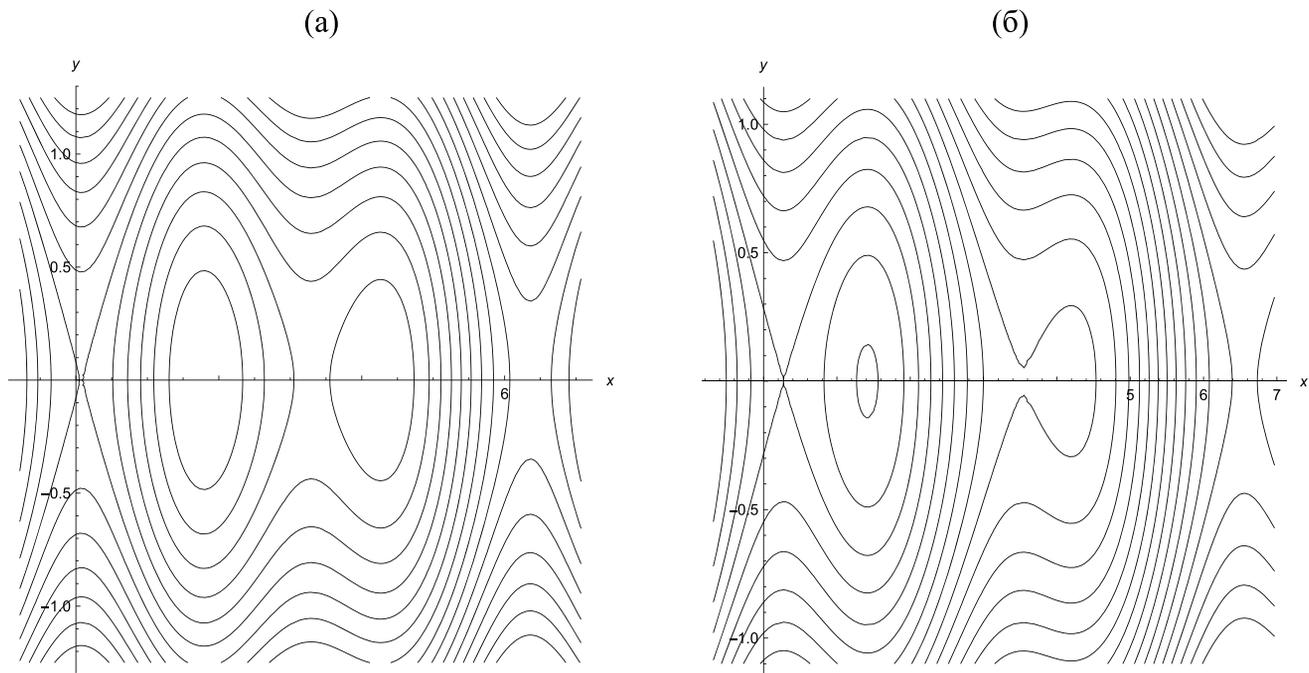
Линии уровня функции  $I(\Phi, \dot{\Phi})$  представляют собой фазовые траектории. Картина фазового портрета зависит от параметров  $w, h$ . При наличии четырех неподвижных точек на периоде, когда  $(w, h) \in D_2$ , возможны два топологически различных варианта. Отличия показаны на фиг. 2: незамкнутые траектории, уходящие на бесконечность, либо отделяют седловые точки  $F_0, F_1$ , либо не отделяют. Ниже будет показано, что два случая различаются посредством первых интегралов в седловых точках:  $I(\Phi_0, 0)$  и  $I(\Phi_1, 0)$ . Равновесие  $\Phi_0 + 2\pi$  всегда отделено незамкнутыми траекториями от  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ .

Для изображения фазового портрета будем использовать плоскость; при учете диссипации это удобнее цилиндра. Если  $\gamma > 0$ , то неподвижные точки остаются на месте, а остальные траектории смещаются (фиг. 3). Направление смещения можно понять из соотношения, которое вытекает из уравнения (5):

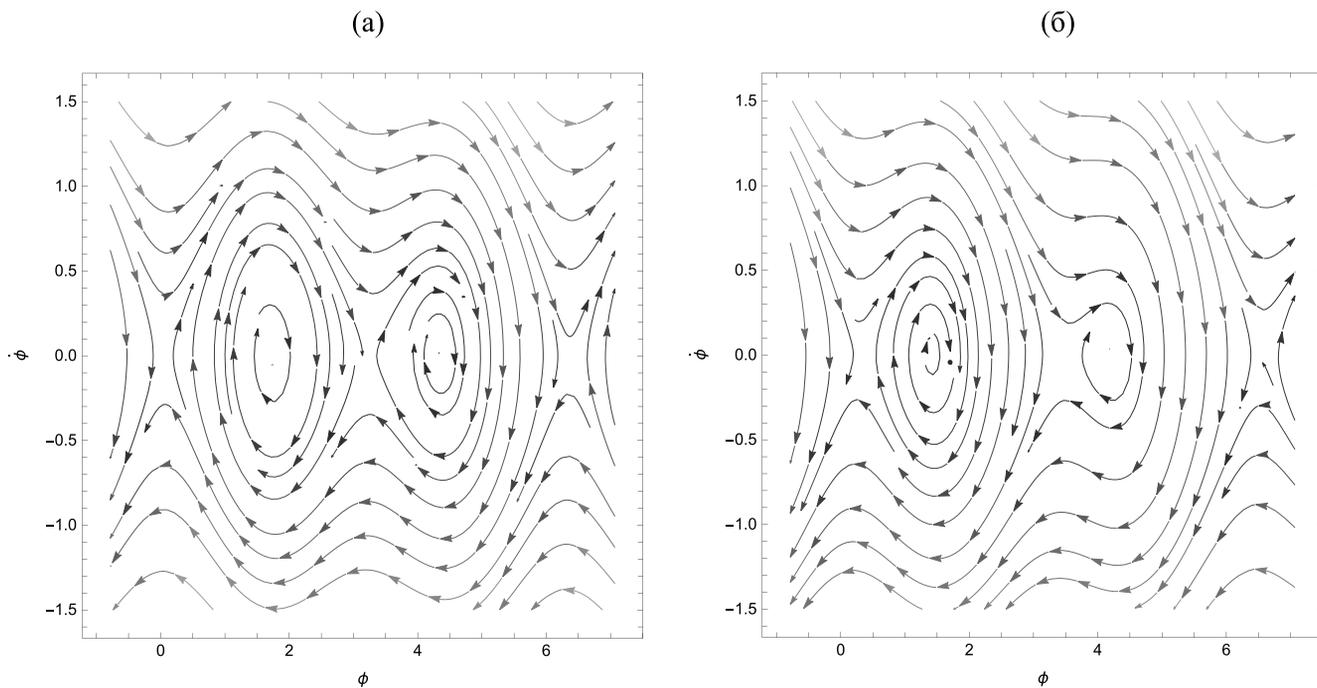
$$\frac{d}{ds} I(\Phi, \dot{\Phi}) = -2\gamma \dot{\Phi}^2. \quad (8)$$

Как видим, функция  $I(\Phi, \dot{\Phi})$  вдоль траектории убывает. Следовательно любая траектория пересекает линии уровня бездиссипативной системы. Для наших целей важны траектории, выходящие из седловых точек. С ростом  $\gamma$  они почти всегда входят в устойчивые равновесия  $\Phi_0^+ + 2\pi n, \Phi_1^+ + 2\pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ). При вариации коэффициента  $\gamma$  может случиться попадание на значение  $\gamma_*(w, h)$ , при котором траектория, вышедшая из седла, входит в другое седло. На этих траекториях реализуются решения в виде искомого простых волн. Наличие подходящих траекторий (и соответствующих решений) зависит от

<sup>1</sup> Обратим внимание, что первый интеграл не является периодической функцией по  $\Phi$ .

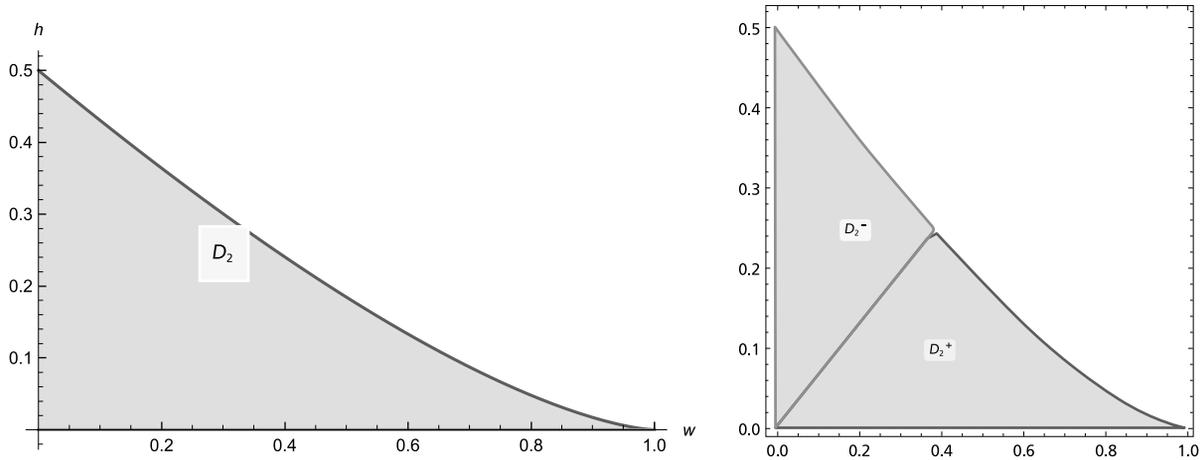


**Фиг. 2.** Структура фазового портрета уравнения простой волны при отсутствии диссипации  $\gamma = 0$  зависит от соотношения параметров  $h, \omega$ : (а) — для  $h = 0.1, \omega = 0.3$ , (б) — для  $h = 0.3, \omega = 0.15$ .



**Фиг. 3.** Структура фазового портрета уравнения простой волны зависит от параметров  $\gamma, h, w$ : (а) — для  $\gamma = 0.05, h = 0.1, w = 0.3$ , (б) — для  $\gamma = 0.07, h = 0.3, w = 0.15$ .

параметров  $w, h$ . Для  $(w, h) \in D_0$  таких траекторий не бывает, поскольку нет неподвижных точек. Наиболее богатые возможности появляются для  $w, h$  из области  $D_2$ , когда существуют четыре неподвижные точки на периоде.



**Фиг. 4.** Область параметров  $D_2$  разбита на подобласти  $D_2^-$  и  $D_2^+$ . Граница раздела в асимптотическом приближении — прямая  $w = h\pi / 2$ .

### 5. ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

На множестве параметров  $w, h > 0$  выделим области, для которых фазовые портреты бездиссипативного уравнения (при  $\gamma = 0$ ) отличаются по своей структуре. Для  $(w, h) \in D_1$  структура фазового портрета довольно проста и не меняется при изменении этих параметров. В случае  $(w, h) \in D_2$  структура фазового портрета меняется, как это видно на фиг. 2. Область  $D_2$  делится на две подобласти  $D_2^+$  и  $D_2^-$  (фиг. 4). Граница раздела определяется равенством первых интегралов, вычисленных в седловых точках:  $I(\Phi_0, 0) = I(\Phi_1, 0)$ . Это соотношение описывает кривую в плоскости параметров, поскольку равновесия  $\Phi_0(w, h)$  и  $\Phi_1(w, h)$  зависят от  $(w, h)$ . Соответствующие подобласти определяются неравенствами

$$D_2^+ = \{(w, h) \in D_2 : I(\Phi_0, 0) > I(\Phi_1, 0)\},$$

$$D_2^- = \{(w, h) \in D_2 : I(\Phi_0, 0) < I(\Phi_1, 0)\}.$$

Отличия в структуре фазовых портретов описаны с следующим утверждением.

**Лемма 1.** Для параметров из области  $D_2^+$  сепаратрисная петля из седловой точки  $(\Phi_0, 0)$  охватывает седловую точку  $(\Phi_1, 0)$ . Для параметров из области  $D_2^-$  седловая точка  $(\Phi_1, 0)$  находится вне петли из седловой точки  $(\Phi_0, 0)$ .

**Доказательство.** Значения первого интеграла в седловой точке и на сепаратрисах совпадают. Равенство первых интегралов означает, что седловые точки соединены сепаратрисами. Если при изменении параметров  $h, w$  равенство нарушается, то происходит разрыв сепаратрис у одной точки и образование петли у другой. Возможные сценарии можно усмотреть на фиг. 2. Окончание доказательства следует из монотонности первого интеграла в направлении, трансверсальном к линиям уровня.

Граница раздела областей  $D_2^\pm$  на плоскости параметров  $w, h$  описывается уравнением

$$\frac{1}{2} \cos 2\Phi_0 + 2w \cos \Phi_0 + 2h\Phi_0 = \frac{1}{2} \cos 2\Phi_1 + 2w \cos \Phi_1 + 2h\Phi_1$$

с учетом зависимости равновесий  $\Phi_0(w, h)$  и  $\Phi_1(w, h)$  от  $w, h$ . Это уравнение можно представить в упрощенной (приближенной) форме, используя асимптотику при  $h \rightarrow 0$ .

**Лемма 2.** Граница раздела областей  $D_2^\pm$  имеет асимптотику

$$w = \frac{\pi}{2}h + \mathcal{O}(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Сначала вычисляется асимптотика соответствующих корней уравнения  $F(\Phi) \equiv \sin \Phi \cos \Phi + w \sin \Phi = h$ :

$$\Phi_0(w, h) = \sum_{n=1}^{\infty} h^n \phi_{0,n}(w), \quad \Phi_1(w, h) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \phi_{1,n}(w), \quad h \rightarrow 0. \tag{9}$$

Коэффициенты рядов вычисляются по рекуррентным формулам, например в первой поправке  $\phi_{0,1} = 1 / (1 + w)$ ,  $\phi_{1,1} = 1 / (1 - w)$ . На основе этих формул вычисляется асимптотика первых интегралов:

$$I(\Phi_0(w, h), 0) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n J_{0,n}(w), \quad I(\Phi_1(w, h), 0) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n J_{1,n}(w), \quad h \rightarrow 0.$$

Коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам, например

$$J_{0,0} = \frac{1}{2} + 2w, J_{0,1} = 0; \quad J_{1,0} = \frac{1}{2} - 2w, J_{1,1} = 2\pi.$$

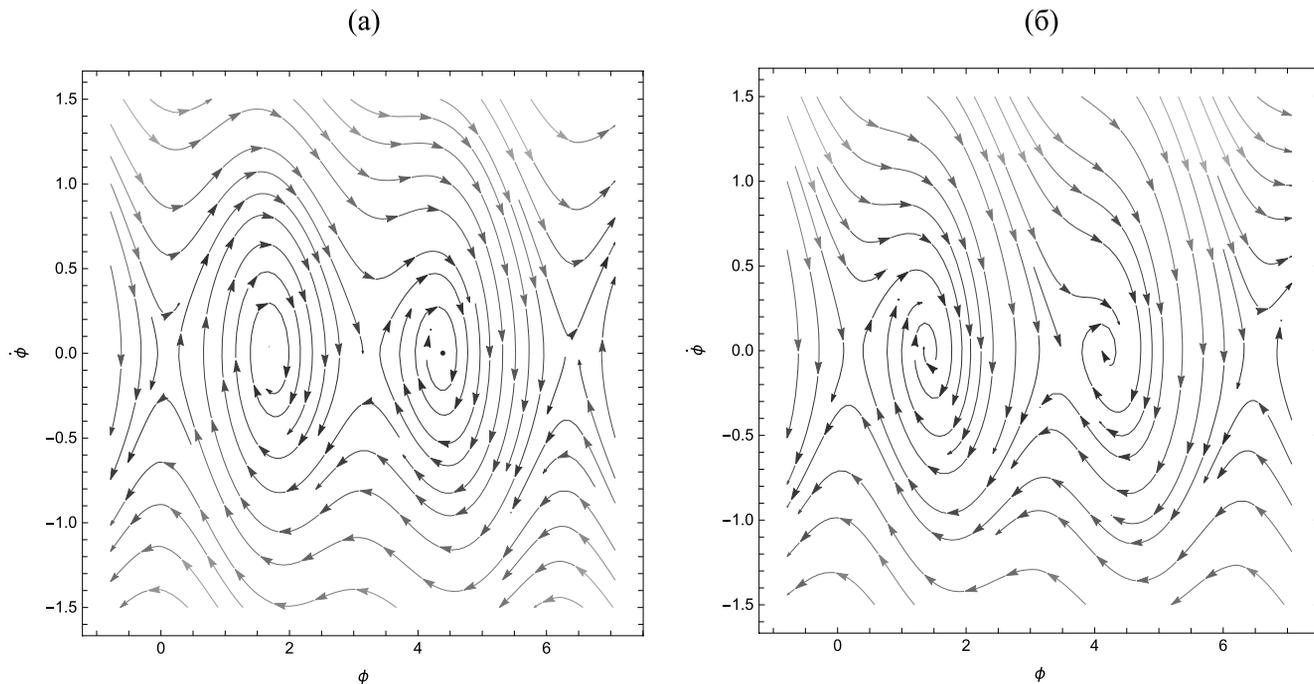
Подстановка этих рядов в уравнение  $I(\Phi_0, 0) = I(\Phi_1, 0)$  позволяет найти асимптотическое решения относительно  $w$  как функции от  $h$ :

$$w(h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n w_n, \quad h \rightarrow 0.$$

Для первых коэффициентов получаем выражения  $w_0 = 0, w_1 = \pi / 2$ , что доказывает лемму.

### 6. СЕПАРАТРИСЫ СЕДЛО–СЕДЛО

Для уравнения (5) рассмотрим на фазовой плоскости тройку ближайших неподвижных точек типа седла с координатами  $0 < \Phi_0 < \Phi_1 < \Phi_0 + 2\pi$ . При наличии диссипации, когда  $\gamma > 0$ , сепаратрисы в общем случае не связывают между собой разные седла; они уходят в устойчивые неподвижные точки типа фокус или узел. Однако бывают исключительные (критические) значения параметра  $\gamma$ , при которых сепаратриса, выходящая из одного седла, входит в другое. Этот факт легко понять, рассматривая деформацию фазового портрета (или векторного поля) при росте параметра  $\gamma$  (фиг. 5). Ниже приводятся формальные доказательства такого свойства. Естественно, что критические значения  $\gamma$  зависят от параметров  $w, h$ . Термины “выходит” и “входит” соответствуют асимптотике решения при  $s \rightarrow -\infty$  и при  $s \rightarrow +\infty$  соответственно.



Фиг. 5. В сравнении с фиг. 3 фазовый поток уравнения простой волны сжимается с ростом коэффициента диссипации  $\gamma$ : (а) — для  $\gamma = 0.15, h = 0.1, w = 0.25$ , (б) — для  $\gamma = 0.33, h = 0.3, \omega = 0.15$ .

**Теорема 1.** 1) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_1 \cup D_2$  существует значение коэффициента диссипации  $\gamma_1 = \gamma_1(w, h)$ , при котором сепаратриса из седла  $2\pi + \Phi_0$  монотонно входит в седло  $\Phi_0$ .

2) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_2$  существует значение коэффициента диссипации  $\gamma_2 = \gamma_2(w, h)$ , при котором сепаратриса из седла  $2\pi + \Phi_0$  монотонно входит в седло  $\Phi_1$ .

3) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_2^+$  существует значение коэффициента диссипации  $\gamma_2^+ = \gamma_2^+(w, h)$ , при котором сепаратриса из седла  $\Phi_0$  монотонно входит в седло  $\Phi_1$ .

4) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_2^-$  существует значение коэффициента диссипации  $\gamma_2^- = \gamma_2^-(w, h)$ , при котором сепаратриса из седла  $\Phi_1$  монотонно входит в седло  $\Phi_0$ .

Монотонность означает отличную от нуля производную  $\dot{\Phi}(s) \neq 0$  на всей траектории  $-\infty < s < +\infty$ .

**Доказательство** во всех случаях схоже и будет дано для первого случая. На фазовой плоскости с координатами  $x = \Phi, y = \dot{\Phi}$  фазовые траектории автономного уравнения (5) касаются векторного поля

$$\dot{x} = y, \dot{y} = \sin x \cos x + w \sin x - h - \gamma y.$$

Рассмотрим семейство, зависящее от  $\gamma$ , сепаратрисных траекторий, которые выходят из седловой точки  $(2\pi + \Phi_0, 0)$  в нижнюю полуплоскость  $y < 0$ . Запишем их в виде интегральных кривых  $y = Y(x; \gamma)$  соответствующего уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x + w \sin x - h}{y} - \gamma. \tag{10}$$

Начальная точка  $(2\pi + \Phi_0, 0)$  является особой. Тем не менее функция  $Y(x; \gamma)$  непрерывна по параметру  $\gamma$ , поскольку вектор, касательный к сепаратрисе, непрерывен по  $\gamma$  в начальной точке в силу уравнения (10).

В точках фиксированной кривой  $y = Y(x; \gamma_1)$  поле направлений, соответствующее параметру  $\gamma \neq \gamma_1$ , отличается от касательного. Отличие на величину  $-(\gamma - \gamma_1)y$  содержится во второй компоненте. При  $\gamma > \gamma_1$  в нижней полуплоскости  $y < 0$  это отличие описывает поворот вектора направо по ходу движения по “временной” переменной  $s$ . Поэтому при увеличении  $\gamma$  фазовая кривая  $y = Y(x; \gamma)$ , фиксированная условием при  $s \rightarrow -\infty$ , смещается вправо и не пересекает кривую с меньшим значением  $\gamma$ .

Обозначим через  $y_0(\gamma) = Y(\Phi_0; \gamma)$  координату  $y$  точки пересечения рассматриваемой сепаратрисы с прямой  $x = \Phi_0$ . При  $\gamma = 0$  имеет место первый интеграл (6). Записанный в форме

$$I(x, y) \equiv y^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + 2w \cos x + 2hx = \text{const},$$

он позволяет вычислить значение  $y_0(0) = -2h\pi < 0$ . Из предыдущего рассуждения следует, что функция  $y_0(\gamma)$  монотонно растет при увеличении  $\gamma$ . По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра эта функция непрерывна, пока остается отрицательной (вне неподвижной точки).

Промежуток определения функции  $y_0(\gamma)$  ограничен, поскольку при достаточно больших  $\gamma$  траектория  $y = Y(x; \gamma)$  не пересекает прямую  $x = \Phi_0$ . Для доказательства заметим, что для векторного поля в достаточно малой окрестности седловой точки  $0 < x - \Phi_0 < \delta, y < 0$  компонента  $\dot{y} = \sin x \cos x + w \sin x - h > 0$  положительна. Направление касательной к фазовой кривой определяется производной, которая оказывается отрицательной в нижней полуплоскости и оценивается сверху в силу уравнения (9):  $dy/dx < -\gamma$  равномерно в полосе  $0 < x - \Phi_0 < \delta, y < 0$ . Пересечение бездиссипативной траектории  $y = Y(x; 0)$  с границей полосы  $x - \Phi_0 = \delta$  определяет точку  $(\Phi_0 + \delta, y_\delta)$  с координатой  $y_\delta = Y(\delta; 0) < 0$ . Эта точка соединена с неподвижной точкой  $(\Phi_0, 0)$  посредством прямой  $y = (x - \Phi_0)y_\delta / \delta$ . Если параметр  $\gamma$  берется достаточно большой  $\gamma > -y_\delta / \delta$ , то направление этой прямой мажорирует направления касательных к фазовым траекториям  $y = Y(x; \gamma)$  для всех точек в треугольнике  $0 < x - \Phi_0 < \delta, (x - \Phi_0)y_\delta / \delta < y < 0$ . Поскольку при  $\gamma > 0$  траектория пересекает границу  $y_\delta < Y(\delta; \gamma) < 0$ , то для больших  $\gamma > -y_\delta / \delta$  траектория остается в треугольнике до выхода через верхнюю границу  $y = 0$ .

Теперь остается сделать заключение для функции  $y_0(\gamma)$ , которая непрерывна, ограничена нулем сверху, монотонно растет и определена на конечном промежутке. Граница промежутка (предельное значение  $g_1$ ) определяется как предел обратной к  $g_0(\gamma)$  монотонной функции  $\gamma = \gamma(y_0)$  при  $y_0 \rightarrow 0$ . При этом значении параметра  $\gamma = \gamma_1$  сепаратриса из седла  $(2\pi + \Phi_0, 0)$  входит в седло  $(\Phi_0, 0)$ . Значение  $\gamma_1 = \gamma_1(h, w)$  зависит от параметров  $(h, w)$  посредством равновесия  $\Phi_0 = \Phi_0(h, w)$  и траектории  $y = Y(x; \gamma; h, w)$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Для уравнения (5) с  $h > 0$  существуют сепаратрисы из седел с координатами  $\Phi_0 + 2\pi l$  при  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , которые в бездиссипативной системе ( $\gamma = 0$ ) уходят на бесконечность (фиг. 2). При увеличении коэффициента  $\gamma > 0$  происходит деформация сепаратрис, и при критических значениях  $g_n$  они по очереди входят в разные равновесия, расположенные левее на оси  $\Phi$ . Аналогичная ситуация с равновесиями  $\Phi_1 + 2\pi l$  при параметрах  $(w, h) \in D_2^-$ . В интерпретации магнитодинамики такие траектории соответствуют вращению вектора намагниченности с последующей стабилизацией. При  $h = 0$  таких траекторий (с вращением) не бывает.

## 7. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

### 7.1. Существование

Результаты о существовании сепаратрисных траекторий из седла в седло позволяют сформулировать условия существования соответствующих простых волн  $\phi(x, t) = \Phi(s)$ ,  $s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}$ . Для разных наборов исходных параметров  $w, h, \alpha$  существуют разные типы волн, которые отличаются условиями на бесконечностях при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Для разных волн скорости различны; они определяются из алгебраических уравнений

$$\alpha v / \sqrt{1 - v^2} = \gamma(w, h). \quad (11)$$

Правая часть здесь представляет коэффициент эффективной диссипации простой волны для уравнения (5), который вычисляется из требования вхождения сепаратрисы из седла в седло. Существование таких  $\gamma(w, h)$  доказано в теореме 1, переформулировка которой приведена ниже.

**Теорема 2.** 1) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_1 \cup D_2$  существует простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия  $2\pi + \Phi_0$  в равновесие  $\Phi_0$ :

$\Phi(s) \rightarrow 2\pi + \Phi_0$  при  $s \rightarrow -\infty$ ,  $\Phi(s) \rightarrow \Phi_0$  при  $s \rightarrow +\infty$ . Скорость волны определяется из уравнения (10) при  $\gamma = \gamma_1(w, h)$ .

2) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_2$  существуют простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия  $2\pi + \Phi_0$  в равновесие  $\Phi_1$ :

$$\Phi(s) \rightarrow 2\pi + \Phi_0 \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_1 \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

Скорость волны определяется из уравнения (10) при  $\gamma = \gamma_2(w, h)$ .

3) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_2^+$  существует простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия  $\Phi_0$  в равновесие  $\Phi_1$ :

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi_0 \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_1 \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

Скорость волны определяется из уравнения (10) при  $\gamma = \gamma_2^+(w, h)$ .

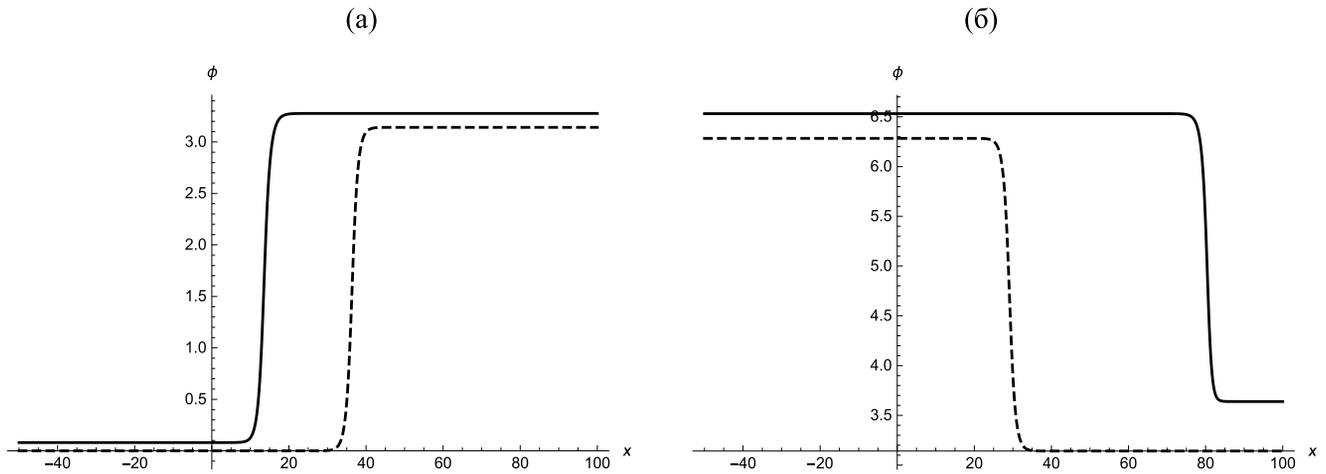
4) Для любой пары параметров  $(w, h) \in D_2^-$  существует простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия  $\Phi_1$  в равновесие  $\Phi_0$ :

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi_1 \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_0 \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

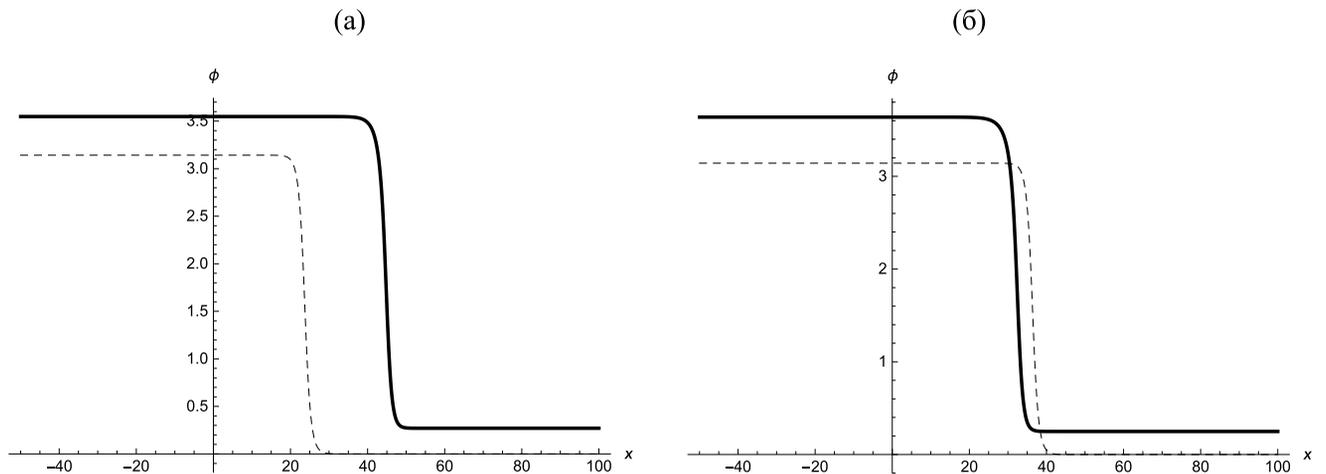
Скорость волны определяется из уравнения (10) при  $\gamma = \gamma_2^-(w, h)$ .

В качестве иллюстрации на фиг. 6, 7 приведены результаты численных экспериментов с уравнением (2) на большом промежутке  $-L < x < L$  при параметрах  $w, h, \alpha \approx 1$ . Начальные данные берутся соответствующие кинку (1) либо антикинку. Краевые условия соответствуют равновесиям. Сплошная линия представляет график решения в далекий момент времени  $T \approx L$ . Штриховая линия соответствует решению в случае  $h = 0$ , когда скорость волны  $v = v_0$  определяется по формуле Звездина  $\alpha v_0 / \sqrt{1 - v_0^2} = w$ . При  $h \neq 0$  скорость волны значительно отличается от  $v_0$ . Отличия сохраняются при малых  $\alpha, h, \omega$ .

Для случая волны из  $\Phi_1$  в  $\Phi_0$  при параметрах  $(w, h) \in D_2^-$  решения при  $h = 0$  не существует. Штриховая линия на фиг. 7 соответствует сдвигу начальной волны на расстояние  $v_0 T$  и приведена для сравнения скоростей.



**Фиг. 6.** Волны в  $\Phi_1$  при большой диссипации  $\alpha = 1$ , соответствующие параметрам из разных областей  $D_2^+$ : (а) — для  $w = 0.25$ ,  $h = 0.1$ , (б) — для  $w = 0.25$ ,  $h = 0.3$ .



**Фиг. 7.** Волны из  $\Phi_1$  в  $\Phi_0$  при большой диссипации  $\alpha = 1$ , параметры  $(w, h)$  из области  $D_2^-$ : (а) — для  $w = 0.16$ ,  $h = 0.3$ , (б) — для  $w = 0.25$ ,  $h = 0.3$ .

Отметим, что начальные данные могут быть не согласованы с используемыми краевыми условиями и даже отличаться от кинка. Несмотря на это, решение быстро стабилизируется к волне с используемыми значениями на краях. Вопрос об области притяжения к той или иной волне (т.е. о множестве начальных данных) остается открытым. Для диссипативных волн в параболических уравнениях эта проблема была решена в [12; 18; 19].

### 7.2. Устойчивость по линейному приближению

Устойчивость волны  $\phi(x, t) = \Phi(s), s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}$  понимается как устойчивость решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения (2) в линейном приближении. Линейное приближение означает, что при анализе возмущенного решения

$$\phi(x, t) = \Phi(s) + \tilde{\phi}(s, t)[1 + o(1)], \quad s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}, \quad |\tilde{\phi}(s, t)| \ll 1,$$

малая поправка  $\tilde{\phi}(s, t)$  определяется из линеаризованного уравнения с нулевыми условиями на бесконечности и с ненулевыми начальными данными. Имея в виду метод разделения переменных, можно ограничиться анализом поправки специального вида  $\tilde{\phi}(s, t) = \exp(\mu t)\varphi(s), \mu = \text{const}$ . Это приводит к спектральной задаче на оси  $-\infty < s < +\infty$  по определению  $\varphi(s)$  и  $\mu$ :

$$\mathbb{L}_\mu \varphi \equiv \left[ -\frac{d^2}{ds^2} - \left( \gamma + 2\mu \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) \frac{d}{ds} + Q(s) \right] \varphi = -(\mu^2 + \alpha\mu) \varphi.$$

Здесь  $Q(s) = F'(\Phi(s)) = \cos 2\Phi(s) + w \cos \Phi(s)$ . Спектральная задача приводится к самосопряженной форме заменой функции

$$\varphi(s) = \exp \left( -\frac{1}{2} \left[ \gamma + 2\mu \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right] s \right) \psi(s).$$

При этом уравнение приобретает вид

$$L\psi \equiv \left[ -\frac{d^2}{ds^2} + [Q(s) + \frac{\gamma^2}{4}] \right] \psi = \frac{1}{1-v^2} \lambda \psi, \quad -\infty < s < +\infty,$$

где  $\lambda = -(\mu^2 + \alpha\mu)$ . Поскольку  $2\mu = [-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda}]$ , то опасность для устойчивости представляют значения  $\lambda < 0$ , при которых встречаются  $\mu > 0$ , из-за чего поправка  $\tilde{\varphi}(s, t)$  оказывается экспоненциально растущей по времени. Таким образом, устойчивость в линейном приближении идентифицируется с отсутствием спектра на левой полуоси  $\lambda < 0$  для самосопряженного оператора  $L$ . Подобные задачи (типа Штурма–Лиувилля) хорошо исследованы в общем случае.

В рассматриваемой задаче производная исходного решения  $\Phi'(s)$  удовлетворяет линейаризованному однородному уравнению:  $\mathbb{L}_0 \Phi'(s) = 0$ . Поэтому для  $\psi_0(s) \equiv \exp(\gamma s / 2) \Phi'(s)$  выполняется соотношение  $L\psi_0(s) = 0$ . Это будет собственная функция оператора  $L$ , соответствующая нулевому собственному значению, если еще выполнены краевые условия  $\psi_0(s) \equiv \exp(\gamma s / 2) \Phi'(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \pm\infty$ .

Очевидно, краевое условие при  $s \rightarrow -\infty$  выполняется. Поведение производной  $\Phi'(s)$  на переднем фронте при  $s \rightarrow +\infty$  играет принципиальную роль в обосновании устойчивости. Для уравнения простой волны (5) асимптотика решения при входе траектории в равновесии  $\Phi_+$  имеет вид

$$\Phi(s) = \Phi_+ + \mathcal{O}(\exp(vs)), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Соответственно,  $\Phi'(s) = \mathcal{O}(\exp(vs)), s \rightarrow +\infty$ . Показатель  $v$  берется из характеристического уравнения  $v^2 + \gamma v - Q_+ = 0$ , где  $Q_+ = F'(\Phi_+)$ . В случае седла величина  $Q_+ > 0$  положительна и входящая траектория единственна с показателем  $v = [-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4Q_+}] / 2$ . В случае узла выполняется неравенство  $-\gamma^2 < 4Q_+ < 0$  и все траектории (в окрестности) входят в узел. При этом почти на всех траекториях асимптотика соответствует общему решению линейаризованного уравнения с наибольшим показателем  $v = [-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4Q_+}] / 2$ . Только на одной исключительной траектории асимптотика соответствует частному решению с наименьшим показателем  $v = [-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4Q_+}] / 2$ .

Из полученной таким образом оценки для производной  $\Phi'(s)$  следует, что  $\psi_0(s)$  будет собственной функцией оператора  $L$ , если траектория либо входит в седло, либо входит в узел по исключительному направлению (см. также [17, с. 126]). Точка спектра  $\lambda = 0$  будет простой, поскольку второе (линейно независимое к  $\psi_0$ ) решение уравнения  $L\psi = 0$  экспоненциально растет при  $s \rightarrow +\infty$ .

Наличие других собственных значений  $\lambda < 0$  зависит от нулей функции  $\psi_0(s)$ . Если  $\psi_0(s)$  не имеет нулей при  $-\infty < s < +\infty$ , то собственных значений на левой полуоси  $\lambda < 0$  нет. Доказательство от противного: если при  $\lambda < 0$  существует собственная функция  $\psi_\lambda(s)$ , то в силу ортогональности к  $\psi_0(s)$  она обязана иметь нуль<sup>2</sup> в конечной точке  $s_\lambda \in (-\infty, +\infty)$ . Рассуждения, аналогичные теореме Штурма о решениях  $\psi_0(s), \psi_\lambda(s)$  на промежутке  $(-\infty, s_\lambda)$ , приводят к противоречию.

Отсутствие нулей у  $\psi_0(s)$  соответствует монотонности  $\Phi'(s)$ . В итоге приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** *Монотонные решения уравнения (5), которые соответствуют сепаратрисам из седла в седло, представляют собой простые волны для уравнения (2), устойчивые в линейном приближении.*

<sup>2</sup> Более одного нуля с конечными значениями координаты не бывает по теореме Штурма.

**Замечание.** При  $(w, h) \in D_2^+$  существуют такие значения  $\gamma$ , что сепаратриса из седла  $\Phi_0$  (либо из  $2\pi + \Phi_0$ ) в седло  $\Phi_1$  оказывается немонотонной: фазовая траектория пересекает ось  $\Phi$ , где обращается в нуль производная. Волна с соответствующей скоростью будет неустойчива.

### 7.3. Скорость

Вычисление скорости волны при заданных параметрах  $(w, h)$  сводится к нахождению подходящего значения эффективной диссипации  $\gamma = \gamma(h, w)$ . Это значение определяется требованием вхождения сепаратрисы из седла в седло. По сути, здесь сформулирована нелинейная спектральная задача. Ее можно решать приближенно численными методами.

Фазовая траектория представляет собой интегральную кривую уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x + \omega^2 \sin x - h}{y} - \gamma. \quad (11)$$

Искомая траектория выходит из особой точки (седла), что неудобно при использовании стандартных численных методов. Поэтому начальную точку  $(x_0, y_0)$  следует брать вблизи сепаратрисы вне особой точки. Практически реализуемый вариант: точка  $(x_0, y_0)$  берется на касательной к сепаратрисе вблизи исходного седла. Затем в уравнении (11) подбирается коэффициент  $\gamma$ , при котором интегральная кривая проходит вблизи другого седла. Фактически это приближенный способ решения спектральной задачи.

**Замечание.** Для волн, бегущих из  $\Phi_0 + 2\pi$  и из  $\Phi_1$  в различные равновесия (левее на оси  $\Phi$ ), существует иерархия скоростей. В силу (7) деформация сепаратрис увеличивается с ростом  $\gamma$ . Поэтому с учетом уравнения для скорости (10) можно сделать вывод: чем короче траектория волны (чем меньше вращается вектор намагниченности), тем выше ее скорость.

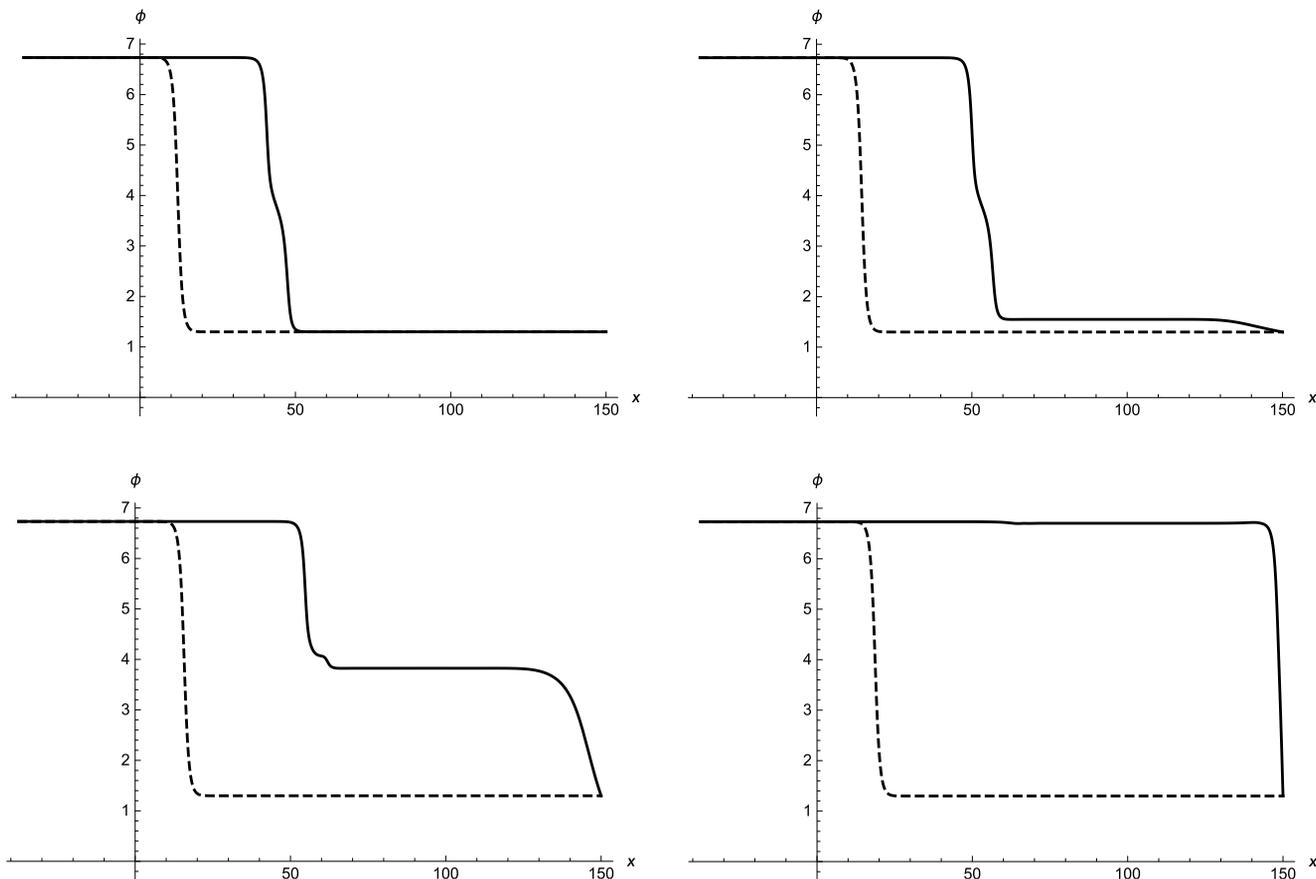
## 8. ТРАЕКТОРИИ СЕДЛО–УЗЕЛ

На фазовом портрете уравнения простой волны (5) при  $\gamma > 0$  всегда присутствуют устойчивые неподвижные точки  $\Phi_0^+, \Phi_1^+$  типа фокус или узел (фиг. 5). Фазовые траектории из седел в такие точки существуют почти при всех значениях  $\gamma > 0$ . Они определяют простые волны с соответствующими скоростями. Однако для исходного уравнения в частных производных (2) однородные состояния  $\phi \equiv \Phi_0^+$  и  $\phi \equiv \Phi_1^+$  неустойчивы. Эта неустойчивость проявляется и на простой волне. Как правило, такие волны неустойчивы в линейном приближении из-за немонотонности, и они практически не обнаруживаются в численных экспериментах.

Свойство монотонности волны необходимо для устойчивости. Для обсуждаемого случая это бывает, когда неподвижная точка, в которую входит фазовая траектория, оказывается узлом. Условие узла накладывает ограничения на коэффициент эффективной диссипации (а следовательно, на скорость волны):  $\gamma^2 \geq -4F'(\Phi_n^+) > 0 (n = 0, 1)$ . Как было показано выше, устойчивость волны из седла в узел бывает при тех  $\gamma$ , для которых траектория из седла входит в узел по исключительному направлению (см. также [17, с. 126]). Именно это свойство обеспечивает применимость результатов спектральной теории. В общем случае (при произвольном значении  $\gamma$ ) траектория не будет исключительной, и устойчивость соответствующего решения не гарантируется.

В случае  $h = 0$  одна из таких волн найдена Звездиным (см. [2]) в явной форме (1); скорость определяется из соотношения  $\gamma = w$ . Для параметра  $w \in (0, 1)$  решение  $\Phi_0(s)$  соответствует траектории из седла в седло. Поэтому найденная скорость единственна, и указанная волна устойчива. При  $1 < w < 2$  из асимптотики явного решения (1) видно, что оно соответствует траектории из седла в узел по исключительному направлению. Таким образом, в этом случае волна Звездина остается устойчивой. При  $w \geq 2$  формула Звездина (1) сохраняется, но соответствующая траектория не является исключительной и поэтому устойчивость волн не гарантируется. Не гарантируется устойчивость и при  $1 < w < 2$  для волн с неподходящей скоростью, когда  $\gamma \neq w$ . Но в этом случае нет и явной формулы для решения.

В случае  $h > 0$  для уравнения простой волны с параметрами  $(w, h) \in D_1 \cup D_2$  имеется одно либо два равновесия  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_1^+$  на периоде, которые будут узлами при соответствующих ограничениях на  $\gamma$ . Существует много подходящих  $\gamma$ , при которых траектории из седел  $\Phi_0, \Phi_1$  и  $\Phi_0 + 2\pi$  входят в эти узлы. Возможные варианты можно усмотреть из картины деформации фазового портрета при изменении  $\gamma$ . Таким образом, существует много простых волн со стабилизацией в равновесиях  $\Phi_0^+$  либо  $\Phi_1^+$  при  $s \rightarrow +\infty$ . Однако явные формулы отсутствуют, и устойчивость какой-либо из таких волн не установлена. Аналогичная ситуация в равновесиях, сдвинутых на  $2\pi n$ .



**Фиг. 8.** Эволюция волны на траектории седло-узел при параметрах  $\alpha = 1, h = 0.5, w = 0.25$ , в моменты  $t = 55, 60, 65, 77$ . Со временем передний фронт волны, соответствующий узлу, отрывается от неустойчивого равновесия, и решение выходит на устойчивое состояние  $\Phi_0 + 2\pi$ . Пунктирная линия – сдвиг начальной волны на  $v_0 t$  приведена для сравнения скоростей.

В численных экспериментах ситуация с неустойчивой волной из седла в узел похожа на ту, что случается в задаче для (параболического) уравнения КПП. Эти волны обнаруживаются численно. Для уравнения (2) такая волна со временем (медленно) разрушается и решение выходит на устойчивое однородное состояние (фиг. 8). Краевое условие на переднем фронте (при  $x = L$ ), используемое в численном эксперименте, не удерживает процесс отрыва. Этот эффект наблюдается, например, в случае Звездина при  $h = 0, w \geq 2$ . Отметим, что для уравнения КПП разрушения подобной волны не наблюдается вовсе. Правдоподобное объяснение эффекта затягивания устойчивости приведено в [17, с. 127]. В качестве аргумента приводится факт конечности промежутка по  $x$ , используемого в численных расчетах.

Фиг. 8. Эволюция волны на траектории седло-узел при параметрах  $\alpha = 1, h = 0.5, w = 0.25$  в моменты  $t = 55, 60, 65, 77$ . Со временем передний фронт волны, соответствующий узлу, отрывается от неустойчивого равновесия и решение выходит на устойчивое состояние  $\Phi_0 + 2\pi$ . Пунктирная линия — сдвиг начальной волны на  $v_0 t$ , приведена для сравнения скоростей.

### 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для уравнения (2) найдены разного типа устойчивые простые волны, структура и скорость которых зависит от параметров  $w, h, \alpha$ . Указан способ вычисления скорости. Новые результаты связаны с выявлением роли параметра  $h$ . Во-первых, наличие  $h \neq 0$  приводит к смещению равновесий от значений  $0$  и  $\pi$ . При малых  $h$  это смещение невелико, как видно из асимптотики (8):  $\Phi_0(h) = \mathcal{O}(h), \Phi_1(h) = \pi + \mathcal{O}(h), h \rightarrow 0$ . Более важным является появление волны из  $\Phi_1$  в  $\Phi_0$ , аналога которой не существует при  $h = 0$ . Более того, при параметрах  $(w, h) \in D_2^-$  все возможные волны оказываются типа антикинк. Они соответствуют сепаратрисам в нижней полуплоскости  $\dot{\Phi} < 0$ . В интерпретации магнитодинамики этот факт

свидетельствует о нарушении симметрии с появлением предпочтительного направления поворота вектора намагниченности.

Полученные результаты могут быть использованы при планировании, проведении и интерпретации одномерной динамики доменных границ (ДГ) в редкоземельных ортоферритах. Эти магнетики с 60-х гг. XX в. привлекают внимание многочисленных исследователей в области физики магнитных явлений обилием открытых в них эффектов и возможностями практического применения (см. [1; 2; 20–23]). Не потеряли они своей актуальности и сейчас, т.к. получены тонкие пленки и нанокристаллы из этих материалов (см. [24; 25]). Например, в них наблюдается лоренц-инвариантная динамика ДГ, что позволяет исследовать экспериментально релятивистские эффекты (см. [1; 21]). Долгое время иттриевый ортоферрит был рекордсменом по максимальной скорости движения ДГ в магнитных материалах — 20 км/с. В настоящее время в  $Mn_2Au$  эту скорость даже повысили до 40 км/с (см. [26]). Такие скорости движения ДГ очень интересны при увеличении быстродействия электронных устройств. Однако пока большинство теоретических работ по динамике ДГ проведены в предположении малых величин скоростей, магнитных и электрических полей, без учета возможного изменения структуры динамической ДГ. Теория, представленная в настоящей работе, позволяет выйти за рамки этих приближений. Также она представляет большой интерес для планирования новых экспериментов по одномерной динамике ДГ, т.к. предсказывает новые возможности для управления величиной стационарной скорости ДГ с помощью переменного магнитного поля, конкурирующего с постоянным внешним магнитным полем, направленным ему перпендикулярно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar'yakhtar V. G., Chetkin M. V., Ivanov B. A., Gadetskii S. N.* Dynamics of topological magnetic solitons. Springer Tracts in Modern Physics (STMP) V. 129, 1994.
2. *Zvezdin A. K.* Dynamics of domain walls in weak ferromagnets // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 10. С. 605–610. arXiv preprint arXiv:1703.01502 (2017).
3. *Гареева З. В., Чен С. М.* Сверхбыстрая динамика доменных границ в антиферромагнетиках и ферромагнетиках с температурами компенсации магнитного и углового моментов (мини-обзор) // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. Вып. 4. С. 250–262. DOI: 10.31857/S1234567821160084
4. *Калякин Л. А.* Возмущение простой волны в системе с диссипацией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. Вып. 4. С. 553–566. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13730>
5. *Kalyakin L. A.* Perturbation of a Simple Wave in a Domain Wall Model // Proceed. of the Steklov Inst. of Math. 2023. V. 321. Suppl. 1. P. S90–S100.
6. *Шапаева Т. Б., Муртазин Р. Р., Екомасов Е. Г.* Динамика доменной границы под действием импульсного и градиентного магнитных полей в редкоземельных ортоферритах // Изв. РАН. Сер. физ. 2014. Т. 78. № 2. С. 155–158. DOI: 10.7868/S0367676514020264
7. *Шапаева Т. Б., Юмагузин А. Р., Курбатова Ю. Н., Вахитов Р. М.* Влияние параметров управляющего импульса магнитного поля на динамику доменной границы // Физика металлов и металловедение. 2022. Т. 123. № 3. С. 284–290. DOI: 10.31857/S0015323022030111
8. *Зvezdin A. K., Muxin A. A.* Новые нелинейные динамические эффекты в антиферромагнетиках // Краткие сообщения по физике. ФИАН. 1981. № 12. С. 10–15.
9. *Зvezdin A. K., Zvezdin K. A.* Классические и квантовые эффекты в динамике мезоскопического магнита индуцированные спиновым током // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. Вып. 4 (10). С. 879–885.
10. *Kim T. H., Gruenberg P., Han S. H., Cho B. K.* Field-driven dynamics and time-resolved measurement of Dzyaloshinskii-Moriya torque in canted antiferromagnet  $YFeO_3$  // Sci. Rep. 2017. V. 7. P. 4515. DOI: 10.1038/s41598-017-04883-3
11. *Ustinov A. V., Coqui C., Kemp A., Zolotaryuk Y., Salerno M.* Ratchetlike dynamics of fluxons in annular Josephson junctions driven by biharmonic microwave fields // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. No. 8. 087001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.087001
12. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастаньем вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Матем., мех. Т. 1. Вып. 6. 1937. С. 1–25.
13. *Fischer R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 355–369.
14. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

15. Зельдович Я. Б., Баренблат Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
16. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
17. Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
18. Канель Я. И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения // Матем. сб. 1962. Т. 59. № 101 (дополнительный). С. 245–288.
19. Uchiyama K. The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time // J. Math. Kyoto Univ. 1978. V. 18. No. 3. P. 453–508.
20. Kim K. J., Kim S. K., Hirata Y., Oh S. H., Tono T., Kim D. H., Okuno T., Ham W. S., Kim S., Go G., Tserkovnyak Y., Tsukamoto A., Moriyama T., Lee K. J., Ono T. Fast domain wall motion in the vicinity of the angular momentum compensation temperature of ferrimagnets // Nature Materials. 2017. V. 16. No. 12. P. 1187–1192. DOI: 10.1038/nmat4990
21. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Четкин М. В. Динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках // УФН. 1985. Т. 146. С. 417–458.
22. Konishi S., Miyama T., Ikeda K. Domain wall velocity in orthoferrites // J. Appl. Phys. Lett. 1975. V. 22. P. 258–259.
23. Шамсутдинов М. А., Ломакина И. Ю., Назаров В. Н., Харисов А. Т. Ферро- и антиферродинамика. М.: Наука, 2009. 455 с.
24. Mittova I. Ya., Perov N. S., Alekhina Yu. A., Mittova V. O., Nguyen A. T., Kopeychenko E. I., Sladkopevtsev B. V. Size and magnetic characteristics of YFeO<sub>3</sub> nanocrystals // Inorganic Materials. 2022. V. 58. No. 3. P. 271–277. DOI: 10.1134/S0020168522030116
25. Оглобличев В. В., Изюров В. И., Пискунов Ю. В., Смольников А. Г., Садыков С. А., Чупраков А. Ф., Дубинин С. С., Наумов С. В., Носов А. П. Неоднородное магнитное состояние тонких пленок YFeO<sub>3</sub> по данным ЯМР-спектроскопии // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. Вып. 1. С. 24–30. DOI: 10.31857/S1234567821130061
26. Otxoa R. M., Atxitia U., Roy P. E., Chubykalo-Fesenko O. Giant localised spin-Peltier effect due to ultrafast domain wall motion in antiferromagnetic metals // Commun. Phys. 2020. V. 3. P. 31. DOI: 10.1038/s42005-020-0296-4.