ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 1, с. 77–93

УДК 517.95

ЗАДАЧА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ[1)]

© 2024 г. Р. В. Бризицкий[1,2,*], А. А. Дончак[2,**]

[1]690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

[2]690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ, Россия

[*]e-mail: mlnwizard@mail.ru

[**]e-mail: geliadonchak@mail.ru

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.
Переработанный вариант 11.09.2023 г.
Принята к публикации 16.09.2023 г.

Исследуется задача мультипликативного управления для уравнения реакции–диффузии, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а также от пространственных переменных. Роль мультипликативных управлений играют коэффициенты диффузии и массобмена. Доказывается разрешимость экстремальной задачи, для конкретного коэффициента реакции выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем устанавливается свойство релейности мультипликативного и распределенного управлений, а также выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных реше ний относительно малых возмущений как функционалов качества, так и одной из заданных функций краевой задачи. Библ. 36.

Ключевые слова: нелинейная модель реакции–диффузии, глобальная разрешимость, принцип максимума, задача мультипликативного управления, система оптимальности, свойство релейности управлений, принцип bang–bang, оценки локальной устойчивости.

DOI: 10.31857/S0044466924010077, **EDN:** ZJXXWC

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Поиск эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах остается важной прикладной задачей на протяжении многих лет. Значимый вклад в эти исследования вносит качественный анализ решений краевых и экстремальных задач для моделей тепломассопереноса. В первую очередь отметим работы [1–7], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для моделей тепломассопереноса в приближении Буссинеска. Статьи [8–14] по исследованию моделей реакции–диффузии–конвекции с зависимыми от решения младшими коэффициентами занимают промежуточное место между работами в рамках приближения Буссинеска и его обобщением. Здесь же отметим статьи [15–19], в которых исследованы близкие модели сложного теплообмена.

В работах [20–27] исследованы краевые и экстремальные задачи для моделей тепломассопереноса, обобщающих приближение Буссинеска. Можно надеяться, что в рамках моделей с наименьшим числом упрощающих предположений могут быть реализованы более реалистичные механизмы управления. Также отметим статьи [28–31] по исследованию усложненных моделей гидродинамики, учитывающих в т.ч. реологию.

В настоящей статье исследуется задача мультипликативного управления для уравнения реакции–диффузии, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а также от пространственных переменных. Роль мультипликативных управлений играют зависящие от пространственных переменных коэффициенты реакции и массобмена в уравнении и граничном условии модели. Основной акцент делается на качественном анализе свойств решений рассматриваемой экстремальной задачи, обладающей повышенной нелинейностью. При этом отсутствие конвекции не упрощает исследование данной задачи, но позволяет установить его новые свойства.

[1)] Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00) и при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-946).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N, рассматривается следующая краевая задача:

$$-\mathrm{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi / \partial n + \alpha(\mathbf{x})\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь φ — концентрация загрязняющего вещества, $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент диффузии, f — объемная плотность внешних источников, $k = k(\varphi,\mathbf{x})$ — коэффициент реакции, где $\mathbf{x} \in \Omega$, $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ — коэффициент массобмена. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях $f, \lambda, k, \alpha, \chi$ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

Глобальная разрешимость и единственность решения задачи 1 вытекает из результатов [9] для монотонной нелинейности $k(\varphi, \mathbf{x})\varphi$. Также отметим работу [14], в которой доказана глобальная разрешимость близкой краевой задачи с двумя нелинейностями: $k(\varphi, \mathbf{x})\varphi$ в уравнении и $\alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi$ в граничном условии. Поскольку мы используем операторную конструкцию k, обобщающую зависимость четвертой степени от концентрации φ, то это ближе к [9]. В настоящей работе для задачи 1 доказывается разрешимость задачи управления с мультипликативными управлениями λ и α и распределенным управление f. При этом требования на гладкость управления λ снижены, например, по сравнению с [26] и близкими работами.

При $k(\varphi) = æ\varphi^4$, где $æ$ — размерный параметр, для задачи управления выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем для двухпараметрической задачи управления, не использующей регуляризацию, установлено, что управления α и f удовлетворяют свойству релейности, иначе, для них справедлив принцип bang–bang. При работе с управлением α используется принцип максимума для концентрации φ, установленный в [13]. Для управления f, применяя подход [19], основанный на результатах [32], устанавливается строгое свойство релейности (см. подробнее в [14; 19]). Отметим, что для модели (1), (2) данный подход применим из-за отсутствия конвекции.

В заключительном разделе с использованием системы оптимальности для двухпараметрической задачи мультипликативного управления выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функциий ψ.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При анализе краевой задачи и задач управления будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}, |\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(D)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_N}$.

Введем пространство тестовых функций для концентрации вещества

$$\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$$

и функциональные множества $L_+^p(D) = \{k \in L^p(D) : k \ge 0\}, p \ge 3/2$,

$$H_{\lambda_0}^s(\Omega) = \{h \in L^\infty(\Omega) \cap H^s(\Omega) \cap L_+^\infty(\Gamma_N) : h \ge \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}, s > 1/2,$$

$$\mathcal{H}_{\lambda_0}^r(\Omega) = \{h \in H^r(\Omega) : h \ge \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}, r > 3/2.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N $\left(\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing\right)$, при этом поверхностная мера meas $\Gamma_D > 0$ и граница $\partial\Gamma_D$ участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых или является n-угольником;

(ii) $\lambda \in \mathcal{H}_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 1/2$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\alpha \in L_+^2(\Gamma_N)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$;

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v,\cdot) \in L_+^p(\Omega)$ для некоторого $p \ge 3/2$, не зависящего от v, и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \le r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1,\cdot) - k(v_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \le L\|v_1 - v_2\|_{L^6(\Omega)} \quad \forall v_1, v_2 \in B_r,$$

где константа L зависит от r, но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) нелинейность $k(\varphi,\cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \text{ для всех } \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega);$$

(v) функция $k(\varphi,\cdot)$ ограничена в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, такие, что

$$\| k(\varphi,\cdot) \|_{L^p(\Omega)} \leq A_1 \| \varphi \|_{1,\Omega}^r + B_1 \text{ для всех } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ при } p \geq 3/2,\ r \geq 0.$$

Отметим, что условия (iii)–(v) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geq 3/2$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции, как от концентрации φ, так и от пространственных переменных. Например,

$$k = \varphi^4 \text{ в подобласти } Q \subset \Omega \text{ и } k = k_0(x) \in L_+^{3/2}(\Omega \setminus \overline{Q}) \text{ в } \Omega \setminus \overline{Q}.$$

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\| \varphi \|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \| \varphi \|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q \leq 4$ и компактно при $q < 4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ (и его сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N \subset \Gamma$) с константой $\tilde{C}_q$, зависящей от q и Γ_N, справедлива оценка

$$\| \varphi \|_{L^q(\Gamma_N)} \leq \tilde{C}_q \| \varphi \|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{4}$$

Справедлива следующая техническая лемма (см. [33]).

Лемма 2.1. *При выполнении условий* (i), (ii) $k_0 \in L_+^p(\Omega), p \geq 3/2$, $\lambda \in H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$ *и* $\alpha \in L_+^2(\Gamma_N)$ *существуют положительные константы* C_1, δ_0, δ_1, γ_p, γ_1 *и* γ_2, *зависящие от* $|$ *или от* $|$ *и* p, *такие, что имеют место следующие соотношения:*

$$|(\lambda \nabla h, \nabla \eta)| \leq C_1 \| \lambda \|_{s,\Omega} \| h \|_{1,\Omega} \| \eta \|_{1,\Omega}, \ |(k_0 h, \eta)| \leq \gamma_p \| k_0 \|_{L^p(\Omega)} \| h \|_{1,\Omega} \| \eta \|_{1,\Omega}, \tag{5}$$

$$|(\chi, \varphi)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_1 \| \chi \|_{\Gamma_N} \| \varphi \|_{1,\Omega}, \ |(\lambda \alpha \varphi, \eta)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2 \| \lambda \|_{s,\Omega} \| \alpha \|_{\Gamma_N} \| \varphi \|_{1,\Omega} \| \eta \|_{1,\Omega} \ \forall \varphi, \eta \in H^1(\Omega), \tag{6}$$

$$(\lambda \nabla h, \nabla h) \geq \lambda_* \| h \|_{1,\Omega}^2 \quad \forall h \in \mathcal{T}, \lambda_* \equiv \delta_1 \lambda_0. \tag{7}$$

Из второй оценки в (5) вытекает следующее неравенство для функции $k(\varphi,\cdot)$, удовлетворяющей условию (iv):

$$|((k(\varphi_1,\cdot) - k(\varphi_2,\cdot))\varphi, \eta)| \leq \gamma_p L \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{L^6(\Omega)} \| \varphi \|_{1,\Omega} \| \eta \|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \eta \in H^1(\Omega). \tag{8}$$

Умножим уравнение (1) на $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулу Грина. Учитывая (2), получим

$$(\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) + (\lambda \alpha \varphi, h)_{\Gamma_N} = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}, \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{9}$$

Определение 2.1. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (9), назовем *слабым решением задачи* 1.

Для доказательства разрешимости задачи 1 используется следующая лемма (см. [33]).

Лемма 2.2. *Пусть выполняются условия* (i). *Тогда для любой функции* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ *существует функция* $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$, *такая, что* $\varphi_0 = \psi$ *на* Γ_D, *и с некоторой константой* C_Γ, *зависящей от* Ω *и* Γ_D, *справедлива оценка* $\| \varphi_0 \|_{1,\Omega} \leq C_\Gamma \| \psi \|_{1/2,\Gamma_D}$.

Из результатов [9], [14] вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *При выполнении условий* (i)–(v) *существует единственное слабое решение* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи* 1, *для которого справедлива оценка*

$$\| \varphi \|_{1,\Omega} \leq M_\varphi \equiv C_* M + C_\Gamma \| \psi \|_{1/2,\Gamma_D}, \tag{10}$$

где C_Γ — константа из леммы 1.2, и

$$M \equiv \| f \|_{\Omega} + \gamma_1 \| \chi \|_{\Gamma_N} + C_\Gamma \| \lambda \|_{L^\infty(\Omega)} \| \psi \|_{1/2,\Gamma_D} + \\ + C_\Gamma \left(\gamma_p \left(A_1 C_\Gamma^r \| \psi \|_{1/2,\Gamma_D}^r + B_1 \right) + \tilde{C}_4^2 \| \lambda \|_{L^\infty(\Gamma_N)} \| \alpha \|_{\Gamma_N} \right) \| \psi \|_{1/2,\Gamma_D}. \tag{11}$$

Пусть в дополнение к (i)—(v) выполняется следующее условие:

(vi) $\psi_{\min} \le \psi \le \psi_{\max}$ п.в. на Γ_D, $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ и $\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max}$ п.в. в Ω, $\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}$ и $\chi_{\min} \le \chi \le \chi_{\max}$ п.в. на Γ_N.

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$, $\chi_{\min}$, $\chi_{\max}$ — неотрицательные числа, а $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ и $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ — положительные числа.

Кроме того, будем считать, что коэффициент реакции k удовлетворяет условию

(vii) $k = k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, при этом функциональные уравнения относительно M_1 и m_1:

$$k_1(M_1)M_1 = f_{\max} \quad \text{и} \quad k_1(m_1)m_1 = f_{\min}, \tag{12}$$

имеют хотя бы по одному решению.

Положим

$$M = \max\{\psi_{\max}, \chi_{\max} / \lambda_{\min}\alpha_{\min}, M_1\}, \; m = \min\{\psi_{\min}, \chi_{\min} / \lambda_{\max}\alpha_{\max}, m_1\}. \tag{13}$$

Справедлива следующая теорема (см. [13]).

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (i)—(vii). *Тогда для решения* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи* 1 *выполняется следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \le \varphi \le M \text{ п.в. в } \Omega. \tag{14}$$

Здесь константы m и M определены в (13), где M_1 — минимальный корень первого уравнения в (12) и ,m_1 — максимальный корень второго уравнения в (12).

Замечание 2.1. Для степенных коэффициентов реакции $k_1(\varphi) = \varphi^2$, $k_2(\varphi) = \varphi^2 |\varphi|$ и $k_3(\varphi) = \varphi^4$ из работ [9—11 и 15; 16], образующих монотонные нелинейности $k_i(\varphi)\varphi$, $i = 1,2,3$, параметры m_1 и M_1 легко вычисляются.

3. ЗАДАЧА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом разделе исследуется задача управления для системы (1), (2) с двумя мультипликативными управлениями λ, α и распределенным управлением f.

Предположим, что λ, α и f могут изменяться в подмножествах K_1, K_2 K_1, K_2 и K_3 соответственно, которые удовлетворяют следующему условию:

(j) $K_1 \subset H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s \ge 7/6$, $K_2 \subset L^2_+(\Gamma_N)$ и $K_3 \subset L^2(\Omega)$ — непустые выпуклые замкнутые множества.

Пусть в дополнение к (iii)—(v) коэффициент реакции $k(\varphi,\cdot)$ удовлетворяет условию

(viii) для любых $w_1, w_2 \in B_r = \{w \in H^1(\Omega) : \| w \|_{1,\Omega} \le r\}$ справедлива оценка

$$\| k(w_1,\cdot) - k(w_2,\cdot) \|_{L^{6/5}(\Omega)} \le L_1 \| w_1 - w_2 \|^r_{L^5(\Omega)}, \; r > 0,$$

где L_1 — константа, зависящая от r, но не зависящая от w_1, w_2.

Несложно проверить, что $k(\varphi) = \varphi^4$ удовлетворяет условию (viii) так же, как и условиям (iii)—(v).

Введем функциональное пространство $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, положим $u = (\lambda, \alpha, f)$, $K = K_1 \times K_2 \times K_3$ и введем оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h \rangle = (\lambda \nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) + (\lambda\alpha\varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T},$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D),$$

и перепишем слабую формулировку (9) задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\varphi, u) = 0$.

Пусть $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ — слабополунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу мультипликативного управления:

$$J(\varphi,u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \| \lambda \|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_2}{2} \| \alpha \|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_3}{2} \| f \|^2_{\Omega} \to \inf,$$
$$F(\varphi,u) = 0, (\varphi,u) \in H^1(\Omega) \times K, s \geq 7/6. \tag{15}$$

Через

$$Z_{ad} = \{(\varphi,u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi,u) = 0, J(\varphi,u) < \infty\}$$

обозначим множество допустимых пар для задачи (15).

Пусть в дополнение к (j) выполняются условия:

(jj) множество K_1 ограничено в $L^\infty(\Omega)$ и $L^\infty(\Gamma_N)$;

(jjj) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1,2,3$, и множество K_1 ограничено по норме $H^s(\Omega)$, $s \geq 7/6$, а множества K_2 и K_3 ограничены в своих нормах или $\propto_i > 0$, $i = 0,1,2,3$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества (см. [33]):

$$I_1(\varphi) = \| \varphi - \varphi^d \|^2_Q = \int_Q | \varphi - \varphi^d |^2 \, dx, \; I_2(\varphi) = \| \varphi - \varphi^d \|^2_{1,Q}. \tag{16}$$

Здесь функция $\varphi^d \in L^2(Q)$ имеет смысл концентрации вещества, измеренной в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(v) *и* (j)–(jjj). *Пусть* $I : X \to \mathbb{R}$ — *слабополунепрерывный снизу функционал и* $Z_{ad} \neq 0$. *Тогда существует хотя бы одно решение* $(x,u) \in X \times K$ *задачи управления* (15).

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, u_m) = (\varphi_m, \lambda_m, \alpha_m, f_m) \in Z_{ad}$ — минимизирующая последовательность, для которой справедливо равенство

$$\lim_{m \to \infty} J(\varphi_m, u_m) = \inf_{(\varphi,u) \in Z_{ad}} J(\varphi,u) \equiv J^*.$$

Из условий (jj), (jjj) и теоремы 2.1 следует, что выполняются оценки

$$\| \lambda_m \|_{L^\infty(\Omega)} + \| \lambda_m \|_{L^\infty(\Gamma_N)} + \| \lambda_m \|_{s,\Omega} \leq c_1, \; s \geq 7/6,$$
$$\| \alpha_m \|_{\Gamma_N} \leq c_2, \; \| f_m \|_{\Omega} \leq c_3, \; \| \varphi_m \|_{1,\Omega} \leq c_4, \tag{17}$$

где константы c_1, c_2, c_3 и v_4 не зависят от m.

Из оценки (17) и условия (j) вытекает существование слабых пределов $\lambda^* \in K_1$, $\alpha^* \in K_2$, $f^* \in K_3$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей соответственно $\{\lambda_m\}$, $\{\alpha_m\}$, $\{f_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. С учетом этого при $m \to \infty$ имеем

$$\varphi_m \to \varphi^* \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^s(\Omega), s < 6,$$
$$\varphi_m |_{\Gamma_N} \to \varphi^* |_{\Gamma_N} \text{ слабо в } H^{1/2}(\Gamma_N) \text{ и сильно в } L^q(\Gamma_N), q < 4,$$
$$f_m \to f^* \text{ слабо в } L^2(\Omega), \; \alpha_m \to \alpha^* \text{ слабо в } L^2(\Gamma_N),$$
$$\lambda_m \to \lambda^* \text{ слабо в } H^r(\Omega) \text{ и сильно в } L^6(\Omega), r \geq 7/6,$$
$$\lambda_m |_{\Gamma_N} \to \lambda^* |_{\Gamma_N} \text{ слабо в } H^{r-1/2}(\Gamma_N) \text{ и сильно в } L^4(\Gamma_N). \tag{18}$$

Ясно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$, т.е. что

$$(\lambda^* \nabla \varphi^*, \nabla h) + (k(\varphi^*, \cdot)\varphi^*, h) + (\lambda^* \alpha^* \varphi^*, h)_{\Gamma_N} = (f^*, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \; \forall h \in \mathcal{T}. \tag{19}$$

При этом пара (φ_m, u_m) удовлетворяет равенству

$$(\lambda_m \nabla \varphi_m, \nabla h) + (k(\varphi_m, \cdot)\varphi_m, h) + (\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} = (f_m, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \; \forall h \in \mathcal{T}. \tag{20}$$

Перейдем в (20) к пределу при $m \to \infty$. Из (18) следует, что все линейные слагаемые в (20) переходят в соответствующие слагаемые в (19). Поэтому перейдем к нелинейным слагаемым, начиная с $(k(\varphi_m, \cdot)\varphi_m, h)$. Рассуждая как в [9], получаем, что

$$|(k(\varphi_m,\cdot)\varphi_m - k(\varphi^*,\cdot)\varphi^*, h)| \to 0 \text{ при } m \to \infty \ \forall h \in \mathcal{T}.$$

Рассмотрим далее нелинейные слагаемые, содержащие мультипликативные управления. Для $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) - (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h). \tag{21}$$

Поскольку $\lambda^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то в силу (18) получаем, что

$$(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h) \to 0 \text{ при } m \to \infty \ \forall h \in \mathcal{T}. \tag{22}$$

Используя последовательность $\{h_n\} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, сходящуюся к h в $H^{-1}(\Omega)$, для первого слагаемого в (21) получаем равенство

$$((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h_n) + ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla(h - h_n)). \tag{23}$$

В силу равномерной ограниченности величин $\| \lambda_m - \lambda^* \|_{L^\infty(\Omega)}$ и $\| \nabla\varphi_m \|_\Omega$ по m существует такой номер $N = N(\varepsilon, h)$, что для второго слагаемого в (23) справедливо неравенство

$$|((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla(h - h_n))| \le$$
$$\le \| \lambda_m - \lambda^* \|_{L^\infty(\Omega)} \| \nabla\varphi_m \|_\Omega \| \nabla(h - h_n) \|_\Omega \le \varepsilon/2, \quad n \ge N,\ m \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Из равномерной ограниченности величин $\| \nabla h_n \|_{L^\infty(\Omega)}$ по n и $\| \nabla\varphi_m \|_\Omega$ по m и из (18) следует существование такого номера $M = M(\varepsilon, h)$, что для первого слагаемого в (23) справедливо неравенство

$$|((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h_n)| \le$$
$$\le \| \lambda_m - \lambda^* \|_\Omega \| \nabla\varphi_m \|_\Omega \| \nabla h_n \|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon/2, \quad m \ge M,\ n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Тогда из (23)–(25) вытекает, что

$$((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) \to 0 \text{ при } m \to \infty \ \forall h \in \mathcal{T}. \tag{26}$$

В таком случае $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$. Отсюда с учетом (22) заключаем, что

$$(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) \text{ при } m \to \infty \ \forall h \in \mathcal{T}. \tag{27}$$

Для нелинейного слагаемого $(\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N}$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} - (\lambda^* \alpha^* \varphi^*, h)_{\Gamma_N} =$$
$$= ((\lambda_m - \lambda^*)\alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} + (\lambda^* \alpha_m(\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N} + (\lambda^*(\alpha_m - \alpha^*)\varphi^*, h)_{\Gamma_N}. \tag{28}$$

Поскольку $\lambda^* \varphi^* h \in L^2(\Gamma_N)$, то для третьего слагаемого в правой части (28) имеем

$$(\alpha_m - \alpha^*, \lambda^* \varphi^* h)_{\Gamma_N} \to 0 \text{ при } m \to \infty \ \forall h \in \mathcal{T}. \tag{29}$$

Используя $\{h_n\}$, для второго слагаемого получаем

$$(\lambda^* \alpha_m(\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N} = (\lambda^* \alpha_m(\varphi_m - \varphi^*), h_n)_{\Gamma_N} + (\lambda^* \alpha_m(\varphi_m - \varphi^*), h - h_n)_{\Gamma_N} \ \forall m, n \in N. \tag{30}$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\| \alpha_m \|_{\Gamma_N}$ и $\| \varphi_m - \varphi^* \|_{L^4(\Gamma_N)}$, существует такое число $N = N(\varepsilon, h)$, с которым для второго слагаемого в (30) выполняется неравенство

$$|(\lambda^* \alpha_m(\varphi_m - \varphi^*), h - h_n)_{\Gamma_N}| \le$$
$$\le \| \lambda^* \|_{L^\infty(\Gamma_N)} \| \alpha_m \|_{\Gamma_N} \| \varphi_m - \varphi^* \|_{L^4(\Gamma_N)} \| h_n - h \|_{L^4(\Gamma_N)} \le \varepsilon/2, \quad n \ge N,\ m \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

В силу равномерной ограниченности по m и n соответственно величин $\| \alpha_m \|_{L^2(\Gamma_N)}$ и $\| h_n \|_{L^6(\Gamma_N)}$, существует число $M = M(\varepsilon, h)$, с которым первое слагаемое в (30) удовлетворяет неравенству

$$|(\lambda^*\alpha_m(\varphi_m-\varphi^*),h_n)_{\Gamma_N}|\le\|\lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)}\|\alpha_m\|_{\Gamma_N}\|\varphi_m-\varphi^*\|_{L^3(\Gamma_N)}\|h_n\|_{L^6(\Gamma_N)}\le\varepsilon/2,\ m\ge M,\ n\in\mathbb{N}. \quad (32)$$

Тогда из (31) и (32) вытекает, что

$$|(\lambda^*\alpha_m(\varphi_m-\varphi^*),h)_{\Gamma_N}|\to 0 \text{ при } m\to\infty\ \forall h\in\mathcal{T}. \quad (33)$$

Аналогично для первого слагаемого в (28) справедливо равенство

$$((\lambda_m-\lambda^*)\alpha_m\varphi_m,h)_{\Gamma_N}=((\lambda_m-\lambda^*)\alpha_m\varphi_m,h_n)_{\Gamma_N}+((\lambda_m-\lambda^*)\alpha_m\varphi_m,h-h_n)_{\Gamma_N}. \quad (34)$$

В силу равномерной ограниченности по m и n соответственно величин $\|\alpha_m\|_{L^2(\Gamma_N)}$ и $\|h_n\|_{L^\infty(\Gamma_N)}$, существует число $M=M(\varepsilon,h)$, с которым первое слагаемое в (34) удовлетворяет неравенству

$$|((\lambda_m-\lambda^*)\alpha_m\varphi_m,h_n)_{\Gamma_N}|\le$$

$$\le\|\lambda_m-\lambda^*\|_{L^4(\Gamma_N)}\|\alpha_m\|_{\Gamma_N}\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}\|h_n\|_{L^\infty(\Gamma_N)}\le\varepsilon/2,\ m\ge M,\ n\in\mathbb{N}. \quad (35)$$

В силу равномерной ограниченности по m и n соответственно величин $\|\lambda_m-\lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)}$, $\|\alpha_m\|_{L^2(\Gamma_N)}$ и $\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}$, существует число $N=N(\varepsilon,h)$, с которым первое слагаемое в (34) удовлетворяет неравенству

$$|((\lambda_m-\lambda^*)\alpha_m\varphi_m,h)_{\Gamma_N}|\le$$

$$\le\|\lambda_m-\lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)}\|\alpha_m\|_{\Gamma_N}\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}\|h-h_n\|_{L^4(\Gamma_N)}\le\varepsilon/2,\ m\ge N,\ m\in\mathbb{N}. \quad (36)$$

Из (35) и (36) вытекает, что

$$|(\lambda_m\alpha_m\varphi_m,h)_{\Gamma_N}-(\lambda^*\alpha_m\varphi_m,h)_{\Gamma_N}|\to 0 \text{ при } m\to\infty\ \forall h\in\mathcal{T}. \quad (37)$$

В таком случае из (29), (33) и (37) заключаем, что

$$|(\lambda_m\alpha_m\varphi_m,h)_{\Gamma_N}-(\lambda^*\alpha^*\varphi^*,h)_{\Gamma_N}|\to 0 \text{ при } m\to\infty\ \forall h\in\mathcal{T}.$$

Поскольку функционал J слабополунепрерывен снизу на $H^1(\Omega)\times K$, тогда из (17) следует, что $J(\varphi^*,u^*)=J^*$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Отметим, что требования на гладкость λ уменьшены по сравнению с [26], но остаются высокими, поскольку управления λ и α мультипликативно входят в граничное условие на Γ_N. Для сравнения при условии Дирихле можно ограничиться тем, что $\lambda\in H^s(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, $s>1/2$ (см. [34]).

Замечание 3.2. Ясно, что все функционалы качества из (16) удовлетворяют условиям теоремы 3.1.

4. СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ И ПРИНЦИП BANG–BANG

В этом разделе и далее будем считать, что $k=æ\varphi^4$, где æ — размерный параметр. Через $Y^*=\mathcal{T}\times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ обозначим двойственное пространство к пространству Y, введенному в разд. 3.

Легко показать, что производная Фреше оператора $F:H^1(\Omega)\times K\to Y$ по φ в каждой точке $(\hat\varphi,\hat u)=(\hat\varphi,\hat\lambda,\hat\alpha,\hat f)$ является линейным непрерывным оператором $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u):X\to Y$, отображающим каждый элемент $\tau\in X$ в элемент $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u)\tau=(\hat y_1,\hat y_2)\in Y$.

Здесь элементы $\hat y_1\in\mathcal{T}^*$, $\hat y_2\in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются следующими соотношениями:

$$\langle\hat y_1,\tau\rangle=(\hat\lambda\nabla\tau,\nabla h)+5æ(\hat\varphi^4\tau,h)+(\hat\lambda\hat\alpha\tau,h)_{\Gamma_N}\quad\forall h\in\mathcal{T},\ \hat y_2=\tau|_{\Gamma_D}. \quad (38)$$

Через $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u)^*:Y^*\to H^1(\Omega)^*$ обозначим оператор, сопряженный с оператором $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u)$.

В соответствии с общей теорией гладковыпуклых экстремальных задач (см. [35]) введем элемент $y^*=(\theta,\zeta)\in Y^*=T\times H^{-1/2}(\Gamma_D)$, на который будем ссылаться как на сопряженное состояние, и определим Лагранжиан $\mathcal{L}:H^1(\Omega)\times K\times Y^*\to\mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi,u,y^*) = J(\varphi,u) + \langle y^*, F(\varphi,u)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv J(\varphi,u) +$$
$$+\langle F_1(\varphi,u),\theta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle\zeta, F_2(\varphi)\rangle_{1/2,\Gamma_D}. \tag{39}$$

Из лемм 2.1, 2.2 и теоремы Лакса–Мильграма вытекает, что для любой пары $(f_0,\psi_0)\in T^*\times H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau\in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat\lambda\nabla\tau,\nabla h) + 5æ(\hat\varphi^4\tau,h) + (\hat\lambda\hat\alpha\tau,h)_{\Gamma_N} = \langle f_0,h\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} \quad \forall h\in\mathcal{T},\ \tau|_{\Gamma_D} = \psi_0. \tag{40}$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u): X\to Y$ — изоморфизм, а из гл. 6 [33] вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (i), (ii) *и* (j)–(jjj), *при этом* $k = æ\varphi^4$ *и элемент* $(\hat\varphi,\hat u)\in H^1(\Omega)\times K$ *является локальным минимумом задачи* (15). *Предположим также, что функционал качества* $I: H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию* φ *в точке* $\hat\varphi$. *Тогда*

1) *существует ненулевой множитель Лагранжа* $y^* = (\theta,\zeta)\in Y^*$ *такой, что имеет место уравнение Эйлера–Лагранжа* $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u)^* y^* = -J'_\varphi(\hat\varphi,\hat u)$ â *в* $H^1(\Omega)^*$, *эквивалентное соотношению*

$$(\hat\lambda\nabla\tau,\nabla\theta) + 5æ(\hat\varphi^4\tau,\theta) + (\hat\lambda\hat\alpha\tau,\theta)_{\Gamma_N} + \langle\zeta,\tau\rangle_{1/2,\Gamma_D} = -(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi),\tau\rangle\ \forall\tau\in H^1(\Omega), \tag{41}$$

2) *выполняется принцип минимума* $L(\hat\varphi,\hat u,y^*)\le L(\hat\varphi,u,y^*)\ \ \forall u\in K$, *эквивалентный неравенствам*

$$\mu_1(\hat\lambda,\lambda-\hat\lambda)_{s,\Omega} + ((\lambda-\hat\lambda)\nabla\hat\varphi,\nabla\theta) + ((\lambda-\hat\lambda)\hat\alpha\hat\varphi,\theta)_{\Gamma_N} \ge 0\ \forall\lambda\in K_1, \tag{42}$$

$$\mu_2(\hat\alpha,\alpha-\hat\alpha)_{\Gamma_N} + (\hat\lambda(\alpha-\hat\alpha)\hat\varphi,\theta)_{\Gamma_N} \ge 0\ \ \forall\alpha\in K_2, \tag{43}$$

$$\mu_3(\hat f, f-\hat f) - (f-\hat f,\theta)\ge 0\ \ \forall f\in K_3. \tag{44}$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа (41), неравенства (42)–(44) и слабая формулировка (9) задачи 1 представляют собой систему оптимальности для задачи управления (15).

С использованием системы оптимальности, в большей степени принципа минимума, установим свойство релейности управлений α и f для задачи управления, отвечающей функционалу качества $I_1(\varphi)$ из (16) и в случае, когда $k(\varphi) = æ\varphi^4$, $\lambda\equiv\text{const}>0$:

$$J(\varphi)\equiv\mu_0\,\|\varphi-\varphi^d\|_Q^2\to\inf,\ F(\varphi,(\alpha,f)) = 0,\ (\varphi,(\alpha,f))\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_3. \tag{45}$$

Пусть выполняется условие

(j') $\alpha_{\min}\le\alpha\le\alpha_{\max}$ п.в. на Γ_N для всех $\alpha\in K_2$ и $f_{\min}\le f\le f_{\max}$ п.в. в Ω для всех $f\in K_3$.

Здесь $\alpha_{\min},\alpha_{\max}, f_{\min}, f_{\max}$ — положительные числа.

Для задачи (45) неравенства (43), (44) принимают следующий вид:

$$((\alpha-\hat\alpha)\hat\varphi,\theta)_{\Gamma_N}\ge 0\ \ \forall\alpha\in K_2, \tag{46}$$

$$-(f-\hat f,\theta)\ge 0\ \ \forall f\in K_3. \tag{47}$$

Из (46), (47) несложно получить (например, методом от противного) неравенства

$$(\alpha-\hat\alpha)\hat\varphi\theta\ge 0 \text{ п.в. на } \Gamma_N\ \ \forall\alpha\in K_2,\ -(f-\hat f)\theta\ge 0 \text{ п.в.в } \Omega\ \ \forall f\in K_3.$$

Если справедлив принцип максимума и минимума для концентрации φ, то из него вытекает неравенство $\varphi\ge m$ на Γ_N. С учетом этого из последних неравенств получаем следующий принцип минимума для экстремальной задачи (45):

$$(\alpha-\hat\alpha)\theta\ge 0 \text{ п.в. на } \Gamma_N\ \ \forall\alpha\in K_2, \tag{48}$$

$$-(f-\hat f)\theta\ge 0 \text{ п.в. в } \Omega\ \ \forall f\in K_3. \tag{49}$$

Из неравенств (48), (49) вытекает, что оптимальные управления $\alpha(x)$ и $f(x)$ задачи (45) могут принимать, в зависимости от знака множителя Лагранжа $\theta(x)$, только максимальные и минимальные значения $\alpha_{\max}$, $\alpha_{\min}$ и $f_{\max}$, $f_{\min}$ соответственно.

В таком случае говорят, что оптимальные управления α и f удовлетворяют *свойству релейности*, иначе, для этих управлений справедлив *принцип bang–bang*. Другими словами, подобное поведение оптимального управления интерпретируют как переключение между двумя состояниями или скачки из одного состояния в другое.

Если не удается исключить ситуацию, когда $\theta = 0$ на некоторых подмножествах $D_0 \subset \Omega$ и $\Gamma_N^0 \subset \Gamma_N$ положительной меры, которая приводит к неопределенности, в рамках которой управления f и α на указанных подмножествах могут как перескочить из одного граничного значения в другое, так и не совершать такой скачок (см. (48), (49)), тогда свойство релейности называют *нестрогим*.

Покажем, что для управления f справедлив *строгий* принцип bang–bang, при котором указанная выше неопределенность не возникает. Для этого достаточно показать, что $\theta \neq 0$ п.в. в Ω.

Из уравнения Эйлера–Лагранжа (41) при $I(\varphi) = I_1(\varphi)$ приходим к равенству

$$-\Delta\theta + 5æ\lambda^{-1}\hat{\varphi}^4\theta = -\lambda^{-1}\mu_0(\hat{\varphi} - \varphi_d) \text{ п.в. в } \Omega. \tag{50}$$

Из (50) вытекает, что если $\hat{\varphi} \neq \varphi_d$ п.в. в Ω, то $\theta \neq 0$ п.в. в Ω. В таком случае говорят, что имеет место *строгое* свойство релейности.

Если $\varphi = \varphi^d$ в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$ положительной меры, то из уравнения (50) вытекает, что

$$-\Delta\theta + \tilde{k}\theta = 0 \text{ п.в. в } Q,\ \ \tilde{k} = 5æ\lambda^{-1}\hat{\varphi}^4 \in L^{3/2}(\Omega). \tag{51}$$

В то же время, если $\theta = 0$ п.в. в $Q_0 \subset Q \subset \Omega$, $\mu(Q_0) > 0$, то $\theta = 0$ п.в. в Ω, что вытекает из свойства единственности продолжения для эллиптических уравнений (см. [19], [32]). Но равенство $\theta = 0$ п.в. в Ω противоречит теореме 4.1. Таким образом, $\theta \neq 0$ п.в. в Ω.

Из вышесказанного следует, что для управления f справедлив *строгий* принцип bang–bang или управление f удовлетворяет *строгому* свойству релейности. Здесь же отметим работы [14]–[18], посвященные исследованию свойства релейности оптимального управления.

5. СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Нашей дальнейшей целью является анализ единственности и устойчивости (оптимальных) решений задачи (15) только с двумя мультипликативными управлениями λ и α. При этом требования на функцию λ будут более жесткими.

Будем считать, что вместо (j) и (jjj) выполняются условия

(j$_0$) $K_1 \subset H^r_{\lambda_0}(\Omega)$, $r \geq 3/2$, и $K_2 \subset L^2_+(\Gamma_N)$ — непустые выпуклые замкнутые множества;

(jjj$_0$) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1,2$, и множество $K = K_1 \times K_2$ ограничено или $\mu_i > 0$, $i = 0,1,2$, и функционал I ограничен снизу.

Вместо (15) будем рассматривать следующую задачу управления:

$$J(\varphi,u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_2}{2}\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} \to \inf,$$
$$F(\varphi,u) = 0, (\varphi,u) \in H^1(\Omega)\times K, u = (\lambda,\alpha), s > 3/2. \tag{52}$$

Замечание 5.1. Ясно, что для задачи (52) как для частного случая задачи (15), но при более жестких условиях на управление λ, справедливы соответствующие аналоги теорем 3.1 и 4.1.

Далее нам понадобятся дополнительные свойства оптимальных решений задачи (52). Чтобы их получить, вместе с исходной задачей управления (52), рассмотрим возмущенную задачу

$$\tilde{J}(\varphi,u) \equiv \frac{\mu_0}{2}\tilde{I}(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_2}{2}\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} \to \inf, s > 3/2,$$
$$F(\varphi,u) = 0,\ (\varphi,u) \in H^1(\Omega)\times K, \tag{53}$$

заменив функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ в (52) возмущенным функционалом $\tilde{I} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Пусть $(\varphi_i,u_i) = (\varphi_i,\lambda_i,\alpha_i) \in H^1(\Omega)\times K$ — решения задачи (52) при $i = 1$ и решение задачи (53) при $i = 2$. Из теорем 3.1 и 2.1 вытекает, что для управлений (λ_i,α_i) и состояния φ_i справедливы следующие оценки:

$$\|\lambda_i\|_{s,\Omega} \leq C_\lambda, \|\alpha_i\|_{\Gamma_N} \leq C_\alpha, \|\varphi_i\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi. \tag{54}$$

Здесь C_λ и C_α — положительные константы, а константа M_φ определена в (10).

Через $y_i^* \equiv (\theta_i, \zeta_i)$, $i = 1,2$, обозначим нетривиальные множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i) задачи (52). В силу теоремы 4.1 указанные множители определяются однозначно и удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda_i \nabla\tau, \nabla\theta_i) + 5\kappa(\varphi_i^4\tau, \theta_i) + (\lambda_i\alpha_i\tau, \theta_i)_{\Gamma_N} + \langle\zeta_i, \tau\rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0 / 2)\langle I'_\varphi(\varphi_i), \tau\rangle \ \forall\tau \in H^1(\Omega). \tag{55}$$

Положим

$$v_i = \lambda_i\alpha_i, i = 1,2, \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha = \alpha_1 - \alpha_2, v = v_1 - v_2 = \lambda\alpha_1 + \lambda_2\alpha = \lambda_1\alpha + \lambda\alpha_2,$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2,\ \psi = \psi_1 - \psi_2,\ \theta = \theta_1 - \theta_2,\ \zeta = \zeta_1 - \zeta_2. \tag{56}$$

Первым из важных свойств представленных оптимальных решений является алгебраическое неравенство, показывающее связь разностей (56) и производных Фреше функционалов $I(\varphi)$ и $\tilde{I}(\varphi)$ в точках φ_1 и φ_2. Этот факт отражен в следующей теореме.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* (i), (ii) *и* (j_0), (jjj_0), $k(\varphi) = \kappa\varphi^4$, *и пусть функционалы* I *и* $\tilde{I}$ *непрерывно дифференцируемы по* φ. *Пусть тройки* $(\varphi_1, \lambda_1, \alpha_1)$ *и* $(\varphi_2, \lambda_2, \alpha_2) \in H^1(\Omega) \times K$ *являются решениями соответственно задач* (52) *и* (53), *и пусть* $y_i^* = (\theta_i, \zeta_i) \in Y^*$, $i = 1,2$, *— множители Лагранжа, соответствующие решениям* $\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i$, $i = 1,2$. *Тогда для разностей* φ, λ, α *и* θ, ζ, *определенных в* (56), *справедливо следующее неравенство:*

$$(\mu_0 / 2)\langle I_{\varphi'}(\varphi_1) - \tilde{I}_{\varphi'}(\varphi_2), \varphi\rangle + \langle\zeta, \psi\rangle_{\Gamma_D} + \mu_1 \|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \mu_2 \|\alpha\|^2_{\Gamma_N} \le A \equiv$$

$$\equiv -\kappa[(k_1\varphi, \theta) + 5(k_2\varphi^2, \theta_2)] - (\lambda\nabla\varphi, \nabla(\theta_1 + \theta_2)) - (\lambda\alpha, \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2)_{\Gamma_N}. \tag{57}$$

Доказательство. Вычтем равенство (9) при $k(\varphi) = \kappa\varphi^4$, записанное для (φ_2, u_2), из (9) при $k(\varphi) = \kappa\varphi^4$, записанного для (φ_1, u_1). Учитывая соотношения

$$\varphi_1^5 - \varphi_2^5 = (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1^4 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2^3 + \varphi_2^4) \equiv k_0\varphi, k_0 = \varphi_1^4 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2^3 + \varphi_2^4 \ge 0,$$

$$(\lambda_1\nabla\varphi_1, \nabla h) - (\lambda_2\nabla\varphi_2, \nabla h) = (\lambda_1\nabla\varphi, \nabla h) + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla h),$$

$$(v_1\varphi_1, h)_{\Gamma_N} - (v_2\varphi_2, h)_{\Gamma_N} = (v_1, \varphi h)_{\Gamma_N} + (v, \varphi_2 h)_{\Gamma_N}, v_i = \lambda_i\alpha_i, v = v_1 - v_2, i = 1,2,$$

приходим к равенству

$$(\lambda_1\nabla\varphi, \nabla h) + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla h)_{\Gamma_N} + \kappa(k_0\varphi, h) + (v_1, \varphi h)_{\Gamma_N} + (v, \varphi_2 h)_{\Gamma_N} = 0 \ \forall h \in \mathcal{T}. \tag{58}$$

Положим далее $h = \theta$ в (58). Будем иметь

$$(\lambda_1\nabla\varphi, \nabla\theta) + (\lambda\varphi_2, \theta) + \kappa(k_0\varphi, \theta) + (v_1, \varphi\theta)_{\Gamma_N} + (v, \varphi_2\theta)_{\Gamma_N} = 0. \tag{59}$$

Вычитая (55) при $i = 2$ из (55) при $i = 1$, с учетом соотношений

$$(\varphi_1^4\tau, \theta_1) - (\varphi_2^4\tau, \theta_2) = (\varphi_1^4\tau, \theta) + ((\varphi_1^4 - \varphi_2^4)\tau, \theta_2) = (\varphi_1^4\tau, \theta) + ((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi\tau, \theta_2),$$

$$(\lambda_1\nabla\tau, \nabla\theta_1) - (\lambda_2\nabla\tau, \nabla\theta_2) = (\lambda\nabla\tau, \nabla\theta_1) + (\lambda_2\nabla\tau, \nabla\theta),$$

$$(v_1\tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - (v_2\tau, \theta_2)_{\Gamma_N} = (v, \tau\theta_1)_{\Gamma_N} + (v_2\tau, \theta)_{\Gamma_N},$$

получим

$$(\lambda\nabla\tau, \nabla\theta_1) + (\lambda_2\nabla\tau, \nabla\theta) + 5\kappa(\varphi_1^4\tau, \theta) + 5\kappa((\varphi_1^4 - \varphi_2^4)\tau, \theta_2) +$$

$$+(v\tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + (v_2\tau, \theta)_{\Gamma_N} + \langle\zeta, h\rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0 / 2)\langle I'_\varphi(\varphi) - I'_\varphi(\varphi_2), \tau\rangle \ \forall\tau \in H^1(\Omega). \tag{60}$$

Подставляя $\tau = \varphi$ в (60), получим

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla\theta_1) + (\lambda_2\nabla\varphi, \nabla\theta) + 5\kappa(\varphi_1^4\varphi, \theta) + 5\kappa((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi^2, \theta_2) +$$

$$+(\nu\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N} + (\nu_2\varphi,\theta)_{\Gamma_N} + \langle\zeta,\psi\rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2),\varphi\rangle. \tag{61}$$

Вычитая (59) из (61), с учетом соотношений

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1) + (\lambda_2\nabla\varphi,\nabla\theta) - (\lambda_1\nabla\varphi,\nabla\theta) - (\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta) =$$

$$= (\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1) - (\lambda\nabla\varphi_1,\nabla\theta) = -(\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta) - (\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1) + (\lambda\nabla\varphi,\nabla(\theta_1+\theta_2)),$$

$$(\nu,\varphi\theta_1)_{\Gamma_N} + (\nu_2\varphi,\theta)_{\Gamma_N} - (\nu_1,\varphi\theta)_{\Gamma_N} - (\nu,\varphi_2\theta)_{\Gamma_N} =$$

$$= (\nu,\varphi\theta_1)_{\Gamma_N} - (\nu,\varphi_1\theta)_{\Gamma_N} = -(\nu,\varphi_2\theta)_{\Gamma_N} - (\nu,\varphi\theta_1)_{\Gamma_N} + (\nu\varphi,\theta_1+\theta_2)_{\Gamma_N},$$

$$5\kappa(\varphi_1^4\varphi,\theta) + 5\kappa((\varphi_1+\varphi_2)(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi^2,\theta_2) - \kappa(k_0\varphi,\theta) = \kappa(k_1\varphi,\theta) + 5\kappa(k_2\varphi^2,\theta_2),$$

$$k_1 \equiv 4\varphi_1^4 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^4,\ k_2 \equiv (\varphi_1+\varphi_2)(\varphi_1^2+\varphi_2^2), \tag{62}$$

получаем следующее равенство:

$$\kappa(k_1\varphi,\theta) + 5\kappa(k_2\varphi^2,\theta_2) - (\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta) - (\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1) + (\lambda\nabla\varphi,\nabla(\theta_1+\theta_2)) -$$

$$-(\nu,\varphi_2\theta)_{\Gamma_N} - (\nu,\varphi\theta_1)_{\Gamma_N} + (\nu\varphi,\theta_1+\theta_2)_{\Gamma_N} + \langle\zeta,\psi\rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2),\varphi\rangle. \tag{63}$$

Положим $\lambda = \lambda_2$ в неравенстве (42), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\alpha} = \alpha_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$ и $\theta = \theta_1$. С учетом обозначений (56) получим

$$-\mu_1(\lambda_1,\lambda)_{s,\Omega} - (\lambda\nabla\varphi_1,\nabla\theta_1) - (\lambda\alpha_1\varphi_1,\theta_1)_{\Gamma_N} \ge 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_1$ в неравенстве (42), записанном для $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\alpha} = \alpha_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$ и $\theta = \theta_2$, получим

$$\mu_1(\lambda_2,\lambda)_{s,\Omega} + (\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta_2) + (\lambda\alpha_2\varphi_2,\theta_2)_{\Gamma_N} \ge 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к следующей оценке:

$$-(\lambda\nabla\varphi_1,\nabla\theta_1) + (\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta_2) - (\lambda\alpha_1\varphi_1,\theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda\alpha_2\varphi_2,\theta_2)_{\Gamma_N} \ge \mu_1\|\lambda\|^2_{s,\Omega}. \tag{64}$$

Положим $\alpha = \alpha_2$ в неравенстве (43), записанном при $\hat{\alpha} = \alpha_1$, $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$ и $\theta = \theta_1$. С учетом обозначений (56) выводим

$$-\mu_2(\alpha_1,\alpha)_{\Gamma_N} - (\lambda_1\alpha\varphi_1,\theta_1)_{\Gamma_N} \ge 0.$$

Полагая $\alpha = \alpha_1$ в (43), записанном для $\hat{\alpha} = \alpha_2$, $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$ и $\theta = \theta_2$, получим

$$\mu_2(\alpha_2,\alpha)_{\Gamma_N} + (\lambda_2\alpha\varphi_2,\theta_2)_{\Gamma_N} \ge 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке

$$-(\lambda_1\alpha\varphi_1,\theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2\alpha\varphi_2,\theta_2)_{\Gamma_N} \ge \mu_2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N}. \tag{65}$$

В свою очередь, складывая (64) и (65) и рассуждая как в [26], получаем

$$-(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1) - (\lambda\nabla\varphi_2,\nabla\theta) - (\nu,\varphi\theta_1)_{\Gamma_N} - (\nu,\varphi_2\theta)_{\Gamma_N} \ge$$

$$\ge \mu_1\|\lambda\|^2_{s,\Omega} + \mu_2\|\alpha\|^2_{\Gamma_N} + (\lambda\alpha,\varphi_1\theta_1+\varphi_2\theta_2)_{\Gamma_N}. \tag{66}$$

Наконец, с учетом (66) из (63) мы выводим основное неравенство (57). Теорема доказана.

В заключение раздела выведем оценку нормы разности φ через соответствующие нормы разностей управлений λ, α и возмущенной функции ψ. Для этого обратимся к равенству (58), в дополнение к (56) полагая

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0, \tag{67}$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2 \in \mathcal{T}$, $\varphi_0 = \varphi_0^1 - \varphi_0^2 \in H^1(\Omega)$.

Из леммы 2.2 и линейности оператора частичного следа $\gamma|_{\Gamma_D}$ вытекает

$$\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \le C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}. \tag{68}$$

Используя представление (67) и полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (58), получим

$$(\lambda_1 \nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + \kappa(k_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) + (v_1\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} = -(\lambda_1\nabla\varphi_0, \nabla\tilde{\varphi}) - (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\tilde{\varphi})_{\Gamma_N} -$$
$$-(v_1\varphi_0, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} - \kappa(k_0\varphi_0, \tilde{\varphi}) - (v, \varphi_2\tilde{\varphi})_{\Gamma_N}. \tag{69}$$

Поскольку $k_0 \in L_+^p(\Omega)$, $p \ge 3/2$, $v_1 = \alpha_1\lambda_1 \ge 0$ на Γ_N, то, применяя лемму 2.1, с учетом оценок (54) и обозначений (56) из (69) приходим к оценке

$$\lambda_* \|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega} \le C_1 C_\lambda C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + C_1 M_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} +$$
$$+ 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \gamma_2 M_\varphi (C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + C_\alpha \|\lambda\|_{s,\Omega}) =$$
$$= C_\Gamma (C_1 C_\lambda + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + M_\varphi (C_1 + \gamma_2 C_\alpha) \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_2 M_\varphi C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N}.$$

С учетом (68) оценка для нормы разности φ будет иметь вид

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \le \omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D},$$
$$\omega_1 = C_* M_\varphi (C_1 + \gamma_2 C_\alpha), \ \omega_2 = \gamma_2 C_* C_\lambda M_\varphi,$$
$$\omega_3 = C_* C_\Gamma (C_1 C_\lambda + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 + \lambda_*). \tag{70}$$

6. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Используя теорему 5.1, выведем в данном разделе оценки локальной устойчивости оптимальных решений задачи (52) для конкретных функционалов качества.

Рассмотрим следующую задачу управления:

$$J(\varphi, u) = (\mu_0/2)\|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 + (\mu_1/2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\mu_2/2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \to \inf,$$
$$F(\varphi, u) = 0, (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, s > 3/2, \tag{71}$$

отвечающую функционалу качества $I_1(\varphi)$.

Через $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times K$ обозначим решение задачи (71), отвечающее заданным функциям $\varphi^d = \varphi_1^d \in L^2(Q)$ и $\psi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, а через $(\varphi_2, u_2) \in H^1(\Omega) \times K$ обозначим решение задачи (71), отвечающее возмущенным функциям $\tilde{\varphi}^d \equiv \varphi_2^d \in L^2(Q)$ и $\psi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$.

В дополнение к (56) положим $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$. В случае задачи (71) справедливо равенство

$$\langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi\rangle = 2(\varphi - \varphi^d, \varphi)_Q = 2(\|\varphi\|_Q^2 - (\varphi, \varphi^d)_Q). \tag{72}$$

С учетом (72) неравенство (57) и соотношения (55), (19) для множителей Лагранжа θ_i, ζ_i, отвечающих решениям $(\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i)$, $i = 1,2$, принимают следующий вид:

$$\mu_0(\|\varphi\|_Q^2 - (\varphi, \varphi^d)_Q) + \langle\zeta, \psi\rangle_{\Gamma_D} + \mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \le$$
$$A \equiv -\kappa((k_1\varphi, \theta) + 5(k_2\varphi^2, \theta_2)) - (\lambda\nabla\varphi, \nabla(\theta_1 + \theta_2)) - (\lambda\alpha, \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2)_{\Gamma_N}, \tag{73}$$

$$(\lambda_i\nabla\tau, \nabla\theta_i) + 5\kappa(\varphi_i^4\tau, \theta_i) + (\lambda_i\alpha_i\tau, \theta_i)_{\Gamma_N} + \langle\zeta_i, h\rangle_{\Gamma_D} =$$
$$= -\mu_0(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q \ \ \forall\tau \in H^1(\Omega). \tag{74}$$

Справедлива оценка

$$|(\varphi_i - \varphi_i^d, \theta_i)_Q| \le M_\varphi^0 \|\theta_i\|_{1,\Omega},\ M_\varphi^0 \equiv M_\varphi + \max(\|\varphi_1^d\|_Q, \|\varphi_2^d\|_Q). \tag{75}$$

Полагая $\tau = \theta_i$ в (74), с учетом (75) выводим

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \le \mu_0 C_* M_\varphi^0,\ C_* = \lambda_*^{-1}. \tag{76}$$

С помощью оценки (70) и неравенств леммы 2.1 оценим слагаемые, входящие в выражение (73) для A, через нормы разностей λ, α и ψ. Начнем со второго слагаемого. С учетом обозначений (62) получим

$$5|(k_2\varphi^2, \theta_2)| \le 5|(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi^2, \theta_2)| \le 20\mu_0 C_6^6 C_* M_\varphi^3 M_\varphi^0 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \le$$
$$\le 60\mu_0 C_6^6 C_* M_\varphi^3 M_\varphi^0 (\omega_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2),$$
$$|(\lambda\alpha, \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2)_{\Gamma_N}| \le \mu_0\gamma_2 C_* M_\varphi M_\varphi^0 (\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2),$$
$$|(\lambda\nabla\varphi, \nabla(\theta_1 + \theta_2))| \le 2\mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} (\omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \le$$
$$\le \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 [(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2]. \tag{77}$$

Далее выведем аналогичную оценку для первого слагаемого в выражении для A, оценив норму разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$ через нормы разностей λ, α и ψ.

Положим далее $\tau = \theta$ в соотношении (60), записанном для $I_1(\varphi)$. Получим

$$(\lambda_2\nabla\theta, \nabla\theta) + 5\kappa(\varphi_1^4\theta, \theta) + (v_2\theta, \theta)_{\Gamma_N} =$$
$$= -(\lambda\nabla\theta, \nabla\theta_1) - 5\kappa((\varphi_1^4 - \varphi_2^4)\theta, \theta_2) - (v\theta, \theta_1)_{\Gamma_N} - \mu_0(\varphi - \varphi^d, \theta)_Q. \tag{78}$$

Учитывая, что

$$v = \lambda_1\alpha_1 - \lambda_2\alpha_2 = \lambda\alpha_1 + \alpha\lambda_2,$$

из (78) приходим к неравенству

$$\lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} \le \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} +$$
$$+20\mu_0\kappa C_6^6 M_\varphi C_* M_\varphi^0 \|\varphi\|_{1,\Omega} + \mu_0\gamma_2 C_* M_\varphi^0 (C_\alpha \|\lambda\|_{s,\Omega} + C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N}) + \mu_0(C_2 \|\varphi\|_{1,\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \le$$
$$\le \mu_0[(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\|\varphi\|_{1,\Omega} + C_* M_\varphi^0 (C_1 + \gamma_2 C_\alpha)\|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_2 C_* M_\varphi^0 C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \|\varphi^d\|_Q]. \tag{79}$$

С учетом неравенства (70) из (79) получаем следующую оценку для $\|\theta\|_{1,\Omega}$:

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \le \mu_0(\kappa_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \kappa_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \kappa_4 \|\varphi^d\|_Q). \tag{80}$$

Здесь

$$\kappa_1 = C_*[(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\omega_1 + C_* M_\varphi^0 (C_1 + \gamma_2 C_\alpha)],$$
$$\kappa_2 = C_*[(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\omega_2 + \gamma_2 C_* M_\varphi^0 C_\lambda],$$
$$\kappa_3 = C_*(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\omega_3,\ \kappa_4 = C_*. \tag{81}$$

Наконец, используя (80), с учетом обозначений (62) мы можем оценить первое слагаемое в выражении для A в (73):

$$|(k_1\varphi, \theta)| \le |((4\varphi_1^4 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^4)\varphi, \theta)| \le$$
$$8\mu_0 C_6^6 M_\varphi^4 (\omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D})(\kappa_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \kappa_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \kappa_4 \|\varphi^d\|_Q) \le$$
$$\le 8\mu_0 C_6^6 M_\varphi^4 [(\omega_1\kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2\kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] +$$
$$+8\mu_0 C_6^6 M_\varphi^4 [(\omega_3\kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2]. \tag{82}$$

С учетом (77) и (82) для A из (73) получаем оценку

$$|A| \le \mu_0(\eta_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \eta_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \eta_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \eta_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \tag{83}$$

Здесь положительные константы η_1, η_2, η_3 и η_4, зависящие от величин M_φ и M_φ^0, определяются следующим образом:

$$\eta_1^2 = 8\kappa C_6^6 M_\varphi^3(7.5C_* M_\varphi^0 \omega_1^2 + M_\varphi(\omega_1\kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)) + C_* M_\varphi^0(\gamma_2 M_\varphi + C_1(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)),$$

$$\eta_2^2 = 8\kappa C_6^6 M_\varphi^3(7.5C_* M_\varphi^0 \omega_2^2 + M_\varphi(\omega_2\kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)) + C_* M_\varphi^0(\gamma_2 M_\varphi + C_1\omega_2),$$

$$\eta_3^2 = 8\kappa C_6^6 M_\varphi^3(7.5C_* M_\varphi^0 \omega_3^2 + M_\varphi(\omega_3\kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)) + C_1 C_* M_\varphi^0 \omega_3, \eta_4^2 = 12\kappa C_6^6 M_\varphi^4 \kappa_4^2. \tag{84}$$

Для того чтобы оценить слагаемое $\langle\zeta,\psi\rangle_{\Gamma_D}$, запишем равенство (61) для функционала $I_1(\varphi)$ в виде

$$\langle\zeta,\psi\rangle_{\Gamma_D} = -(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1) - (\lambda_2\nabla\varphi,\nabla\theta) - 5\kappa(\varphi_1^4\varphi,\theta) - 5\kappa((\varphi_1+\varphi_2)(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi^2,\theta_2) -$$
$$-(\nu\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N} - (\nu_2\varphi,\theta)_{\Gamma_N} - \mu_0(\varphi-\varphi^d,\varphi)_Q. \tag{85}$$

Рассуждая как и выше, последовательно оценим слагаемые в правой части (85). Справедливы следующие неравенства:

$$|(\lambda\nabla\varphi,\nabla\theta_1)| \le \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \le$$
$$\le \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0[(\omega_1 + 0.5\omega_2 + 0.5\omega_3)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\omega_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + 0.5\omega_3\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2],$$
$$|(\lambda_2\nabla\varphi,\nabla\theta)| \le$$
$$\le \mu_0 C_1 C_\lambda(\omega_1\|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D})(\kappa_1\|\lambda\|_{s,\Omega} + \kappa_2\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \kappa_3\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \kappa_4\|\varphi^d\|_Q) \le$$
$$\le \mu_0 C_1 C_\lambda[(\omega_1\kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2\kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] +$$
$$+\mu_0 C_1 C_\lambda[(\omega_3\kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2\|\varphi^d\|_Q^2],$$
$$|5\kappa(\varphi_1^4\varphi,\theta)| \le 5\mu_0\kappa C_6^6 M_\varphi^4[(\omega_1\kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2\kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] +$$
$$+5\mu_0\kappa C_6^6 M_\varphi^4[(\omega_3\kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2\|\varphi^d\|_Q^2],$$
$$|5\kappa((\varphi_1+\varphi_2)(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi^2,\theta_2)| \le 60\mu_0\kappa C_6^6 C_* M_\varphi^0 M_\varphi^3(\omega_1^2\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2),$$
$$|(\nu\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}| = |((\lambda\alpha_1 + \alpha\lambda_2)\varphi,\theta_1)_{\Gamma_N}| \le \mu_0\gamma_2 C_* M_\varphi^0(C_\alpha\|\lambda\|_{s,\Omega} + C_\lambda\|\alpha\|_{\Gamma_N})\|\varphi\|_{1,\Omega} \le$$
$$\le \mu_0\gamma_2 C_* M_\varphi^0(C_\alpha\|\lambda\|_{s,\Omega} + C_\lambda\|\alpha\|_{\Gamma_N})(\omega_1\|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \le$$
$$\le \mu_0\gamma_2 C_* M_\varphi^0[(C_\alpha\omega_1 + C_\alpha + 0.5\omega_1^2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (C_\lambda\omega_2 + C_\lambda + 0.5\omega_2^2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2],$$
$$|(\nu_2\varphi,\theta)_{\Gamma_N}| = |(\lambda_2\alpha_2\varphi,\theta)_{\Gamma_N}| \le \gamma_2 C_\lambda C_\alpha\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\theta\|_{1,\Omega} \le$$
$$\le \mu_0\gamma_2 C_\lambda C_\alpha[(\omega_1\kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2\kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 +$$
$$+(\omega_3\kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2\|\varphi^d\|_Q^2],$$
$$|\mu_0(\varphi-\varphi^d,\varphi)_Q| \le \mu_0(1.5C_2^2\|\varphi\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi^d\|_Q^2) \le$$
$$\le \mu_0\left(4.5C_2^2(\omega_1^2\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2) + 0.5\|\varphi^d\|_Q^2\right). \tag{86}$$

Из неравенств (86) приходим к оценке

$$|\langle\zeta,\psi\rangle_{\Gamma_D}| \le \mu_0(\xi_1^2\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \xi_2^2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \xi_3^2\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \xi_4^2\|\varphi^d\|_Q^2). \tag{87}$$

Здесь положительные константы ξ_i, $i = 1,2,3,4$, определяются формулами

$$\xi_1^2 = (\omega_1\kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)(C_1C_\lambda + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha) +$$
$$+C_* M_\varphi^0[C_1(\omega_1 + 0.5\omega_2 + 0.5\omega_3) + 60\kappa C_6^6\omega_1^2 M_\varphi^3 + \gamma_2(C_\alpha\omega_1 + C_\alpha + 0.5\omega_1^2)] + 4.5C_2^2\omega_1^2,$$
$$\xi_2^2 = (\omega_2\kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)(C_1C_\lambda + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha) +$$
$$+C_* M_\varphi^0[0.5C_1\omega_2 + 60\kappa C_6^6\omega_2^2 M_\varphi^3 + \gamma_2(C_\lambda\omega_2 + C_\lambda + 0.5\omega_2^2)] + 4.5C_2^2\omega_2^2,$$
$$\xi_3^2 = (\omega_3\kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)(C_1C_\lambda + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha) + C_* M_\varphi^0(0.5\omega_3 + 60\kappa C_6^6 M_\varphi^3\omega_3^2 + \gamma_2\omega_3^2) + 4.5C_2^2\omega_3^2,$$
$$\xi_4^2 = 1.5C_\lambda(C_1 + \gamma_2 C_\alpha)\kappa_4^2 + 7.5\kappa C_6^6\kappa_4^2 + 0.5. \tag{88}$$

Пусть исходные данные задачи (71) удовлетворяют условиям

$$(\eta_1^2 + \xi_1^2)\mu_0 \le (1-\varepsilon_1)\mu_1,\ (\eta_2^2 + \xi_2^2)\mu_0 \le (1-\varepsilon_2)\mu_2,\ \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in (0,1). \tag{89}$$

С учетом (89) из (73) выводим

$$\mu_0 \|\varphi\|_Q^2 \le \mu_0(\varphi,\varphi^d)_Q - \varepsilon_1\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2\mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + C_* M_\varphi^0(0.5\omega_3 + 60\kappa C_6^6 M_\varphi^3\omega_3^2 + \gamma_2\omega_3^2) + 4.5C_2^2\omega_3^2, \tag{90}$$

Отбрасывая неположительное слагаемое $-\varepsilon_1\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2\mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2$ в правой части (90), получаем

$$\|\varphi\|_Q^2 \le \|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q + (\eta_3^2 + \xi_3^2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + (\eta_4^2 + \xi_4^2)\|\varphi^d\|_Q^2 . \tag{91}$$

Решив квадратичное относительно $\|\varphi\|_Q$ неравенство (91), выводим оценку

$$\|\varphi\|_Q \le (\eta_4 + \xi_4 + 1)\|\varphi^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} .$$

Поскольку $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$ и $\psi = \psi_1 - \psi_2$, то последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Q \le (\eta_4 + \xi_4 + 1)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3)\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D} . \tag{92}$$

В случае, когда $Q = \Omega$, неравенство (92) имеет смысл $L^2(\Omega)$-оценки устойчивости компоненты $\hat\varphi$ решения $(\hat\varphi,\hat\lambda,\hat\alpha)$ задачи (71) относительно малых возмущений функций $\varphi^d \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$.

Если $\varphi_1^d = \varphi_2^d$ и $\psi_1 = \psi_2$, то из неравенства (92) вытекает, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в Q. Тогда из (90) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ вытекает, что $\lambda = 0$ в Ω и $\alpha = 0$ на Γ_N, а из (70) при $\lambda = 0$ и $\alpha = 0$ получаем, что $\varphi = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω. В таком случае при выполнении условия (89) решение задачи (71) единственно.

В общем случае, когда $\varphi_1^d \ne \varphi_2^d$, с помощью неравенства

$$\|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q \le \|\varphi\|_Q^2 + (1/4)\|\varphi^d\|_Q^2,$$

вытекающего из неравенства Юнга, из (90) выводим, что

$$\varepsilon_1\mu_1\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon_2\mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \le (\mu_0/4)\|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0(\eta_4^2 + \xi_4^2)\|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0(\eta_3^2 + \xi_3^2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 . \tag{93}$$

Из формулы (93) вытекают следующие оценки устойчивости, которые мы запишем в обозначениях (56):

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{s,\Omega} \le \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_1\mu_1)}\Big[(0.5 + (\eta_4 + \xi_4))\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3)\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D}\Big], \tag{94}$$

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \le \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_2\mu_2)}\Big[(0.5 + (\eta_4 + \xi_4))\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3)\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D}\Big]. \tag{95}$$

Из оценок (94), (95) и (70) вытекает, что

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega} \le \Big(\omega_1\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_1\mu_1)} + \omega_2\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_2\mu_2)}\Big)\Big[(0.5 + (\eta_4 + \xi_4))\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q +$$
$$+(\eta_3 + \xi_3)\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D}\Big] + \omega_3\|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2,\Gamma_D}, \tag{96}$$

где параметры η_i и ξ_i, $i = 1,2,3,4$, и параметры ω_j, $j = 1,2,3$, определены соответственно в (70), (84) и (88).

Сформулируем один из основных результатов статьи в виде следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются условия* (i), (ii), (j_0), (jjj_0) *и* (89), $k(\varphi) = \kappa\varphi^4$. *Пусть* $(\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i) \in H^1(\Omega) \times K$ *— решения задачи* (71)*, отвечающие заданным функциям* $\varphi_i^d \in L^2(\Omega)$ *и* ψ_i, $i = 1,2$, *и исходные данные задачи* (71) *или параметры* μ_0, μ_1, μ_2 *удовлетворяют условиям* (89)*. Тогда справедливы оценки устойчивости* (94)–(96).

В заключение отметим, что вывод оценок устойчивости оптимального управления, учитывающих возмущение граничной функции ψ, существенно сложнее вывода аналогичных оценок, отвечающих выбору ψ в качестве управления (см. [8]). В последнем случае отношение двойственности $\langle\zeta,\psi\rangle_{\Gamma_D}$ легко оценивается через квадрат нормы $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$ с использованием соответствующего принципа минимума из системы оптимальности. Также отметим, что при доказательстве разрешимости экстремальной задачи и выводе оценок устойчивости ее оптимальных решений используются некоторые технические приемы работ [9, 26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ito K., Kunish K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inv. Probl. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. *Alekseev G. V., Tereshko D. A.* On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid // J. Inv. Ill-Posed Probl. 1998. V. 9. P. 521–562.
3. *Nguyen P. A., Raymond J.-P.* Control problems for convection–diffusion–reaction with control localized on manifolds // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2001. V. 6. P. 467–488.
4. *Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции–диффузии–реакции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
5. *Nguyen P. A., Raymond J.-P.* Pointwise control of the Boussinesq system // Systems Control Lett. 2011. V. 60. No. 4. P. 249–255.
6. *Короткий А. И., Ковтунов Д. А.* Оптимальное управление тепловой конвекцией // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 103–112.
7. *Короткий А. И., Литвиненко А. Л.* Разрешимость одной смешанной краевой задачи для стационарной модели реакции-конвекции-диффузии // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 106–120.
8. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции при условии Дирихле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 12. С. 2042–2053.
9. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения реакции–диффузии–конвекции с сильной нелинейностью // Дифференц. ура-ния. 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
10. *Brizitskii R. V., Saritskaya Z. Y.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2018. V. 9. P. 821–834.
11. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
12. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Задача граничного управления для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2139–2152.
13. *Alekseev G. V. Brizitskii R. V.* Analysis of the boundary value and control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection equation // Журнал СФУ. Сер. матем. и физ. 2021. Т. 14. № 4. С. 452–462.
14. *Бризицкий Р. В., Быстрова В. С., Сарицкая Ж. Ю.* Теоретический анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 5. С. 615–629.
15. *Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat. 2018. V. 57. P. 290–298.
16. *Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. No. 2. P. 737–744.
17. *Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D.* Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat. 2019. V. 75. P. 262–269.
18. *Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady–state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.

19. *Чеботарев А. Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
20. *Lorca S. A., Boldrini J. L.* Stationary solutions for generalized Boussinesq models // J. Dif. Eq. 1996. V. 124. P. 389–406.
21. *Belmiloudi A.* Robin-type boundary control problems for the nonlinear Boussinesq type equations // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 273. P. 428–456.
22. *Bermudez A., Munoz-Sola R., Vazquez R.* Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 368. P. 444–468.
23. *Барановский Е. С.* Задача оптимального управления с обратной связью для сетевой модели движения вязкой жидкости // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 1. С. 31–47.
24. *Барановский Е. С.* Задача оптимального стартового управления для двумерных уравнений Буссинеска // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86. № 2. С. 3–24.
25. *Барановский Е. С.* Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43.
26. *Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu.* Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model // J. Dyn. Contr. Sys. 2021. V. 27. No. 2. P. 379–402.
27. *Alekseev G. V., Brizitskii R. V.* Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients // Symmetry 14. 2022. V. 12. Article ID2580.
28. *Ruzicka M., Shelukhin V., dos Santos M. M.* Steady flows of Cosserat-Bingham fluids // Math. Meth. Appl. Sc. 2017. V. 40. P. 2746–2761.
29. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids // J. Math. Fluid Mech. 2019. V. 21. № 1.
30. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость нестационарных уравнений трехмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 4. С. 147–204.
31. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Стационарные решения краевой задачи для уравнений баротропного течения многокомпонентных сред // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19. № 2. С. 959–971.
32. *Wolf T. H.* A property of measure in R^n and an application to unique continuation // Geomet. and Function. Anal. 1992. V. 2. No. 2. P. 225–284.
33. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 412 с.
34. *Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н., Масловская А. Г.* Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 9. С. 1537–1552.
35. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научн. книга, 1999. 352 с.
36. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.