
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.857

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛИ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ¹⁾

© 2024 г. К. С. Бормотин^{1,*}

¹681013 Комсомольск-на-Амуре, пр-т Ленина, 27,
Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Россия

*e-mail: cvmi@knastu.ru

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.

Переработанный вариант 28.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Для численного решения задач оптимального управления в процессах формообразования элементов конструкций в ползучести рассматривается метод динамического программирования. Предлагается реализация разработанного метода в комплексе программ конечно-элементного анализа. Приводится анализ устойчивости данного метода. Библ. 25. Фиг. 7.

Ключевые слова: задачи оптимального управления, формообразование, метод динамического программирования, метод конечных элементов, ползучесть.

DOI: 10.31857/S0044466924010066, **EDN:** ZJYLKT

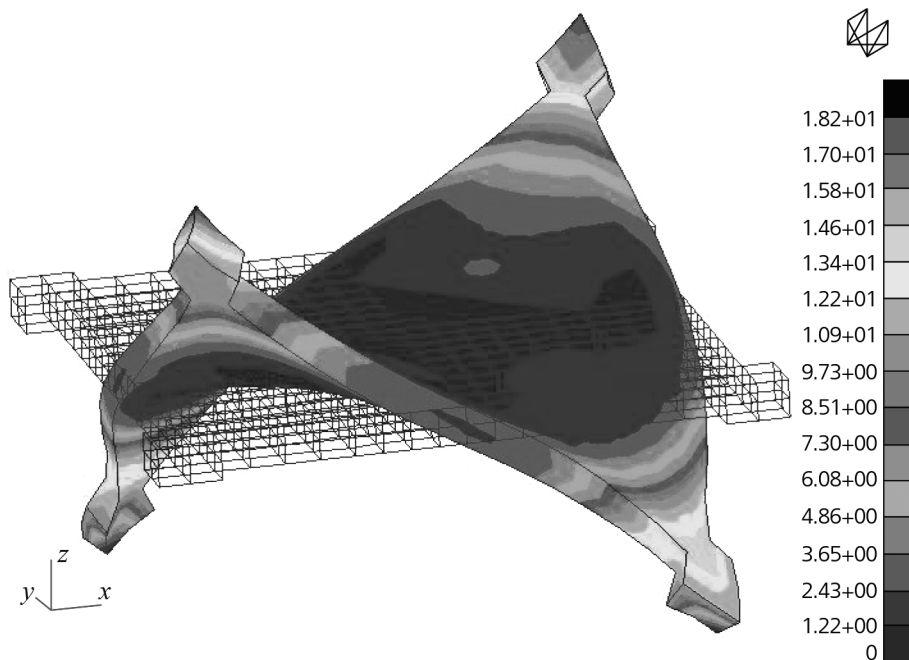
ВВЕДЕНИЕ

В технологиях формообразования монолитных деталей могут использоваться медленные высокотемпературные режимы деформирования (см. [1–5]). Данные режимы в ползучести позволяют управлять повреждаемостью за счет выбора кинематической схемы деформирования и сберегать ресурс изделий на стадии изготовления. В результате возникает задача о нахождении оптимального пути деформирования, приводящего за заданное время к заданным остаточным деформациям при наименьшей поврежденности (см. [6]).

Актуальна оптимизация кинематических схем для оборудования с числовым программным управлением, в частности для реконфигурируемого стержневого пуансона (матрицы) (см. [7; 8]). Формующая поверхность как пуансона, так и матрицы, образованная двумя системами соосно расположенных стержней, позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей из листов различной конфигурации. Современные изделия, получаемые путем формообразования, могут иметь сложную внутреннюю гравюру, вырезы, ребра жесткости и обладать такими свойствами как анизотропия, разное сопротивление растяжению и сжатию (см. [9; 10]). В этом случае для определения оптимальных условий процесса формирования геометрии заготовок актуальны численные методы. В предлагаемом методе, основанном на методе динамического программирования в отличие от [11], допустимое пространство решений задач оптимального управления включает немонотонные траектории деформирования, учитывающие частичную разгрузку.

С помощью разработанного численного метода определяются рациональные кинематические режимы формования заготовок, которые сравниваются с известными аналитическими решениями для идеальных пластин и оболочек (см. [6; 12]). При анализе алгоритма численного решения задач оптимального управления рассматривается проблема устойчивости и определяется зависимость решения от характера дробления шагов разностной схемы.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-11-00165).



Фиг. 1. Деформированная конфигурация пластинки и распределение значений работы рассеяния.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Пусть $V \subset R^3$ — область деформируемого тела с границей S . Поверхность с заданными кинематическими условиями обозначается через S^* ($S^* \subset S$). Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$ вектор перемещений деформируемого тела.

Математическая формулировка задачи формообразования в условиях ползучести с учетом малых деформаций, но больших перемещений и поворотов (общая Лагранжева формулировка, см. [13]) представляется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом

$$J(\dot{u}) = a(\dot{u}, \dot{u}) \text{ при } \dot{u}|_{S^*} = \dot{u}^*, \quad (1.1)$$

где $\dot{u}^*$ — заданные скорости перемещений в момент времени t ; $t \in [0, T]$ — время деформирования тела под нагрузкой; потенциальная форма определяется в виде $a(\dot{u}, \delta \dot{u}) = \int_V [\partial E(\dot{u}_{i,j}) / \partial \dot{u}_{i,j}] \delta \dot{u}_{i,j} dV$, где $E(\dot{u}_{i,j}) = (1/2) c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \eta_{pl} + (1/2) \sigma_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}$, c_{ijpl} — компоненты тензора упругих констант, $\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} u_{p,j} + u_{p,i} \dot{u}_{p,j})$ — компоненты скоростей деформаций, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; η_{pl} — компоненты скоростей деформаций ползучести, определяемые по закону установившейся ползучести (см. [13]):

$$\eta_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (1.2)$$

s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ — эффективное напряжение (интенсивность напряжений), B, n — константы материала; точкой сверху обозначены скорости перемещений $\dot{u}_i$, $i, j, p, l = 1, 2, 3$.

Компоненты скорости второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа определяются соотношениями

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijpl} (\dot{\epsilon}_{pl} - \eta_{pl}).$$

Таким образом, математическая формулировка задачи оптимального управления включает уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (1.1), и функционал оптимизации:

$$A = \max_V \int_0^T \sigma_{ij} \eta_{ij} dt \rightarrow \inf. \quad (1.3)$$

Данный функционал представляет максимальное значение работы рассеяния и характеризует параметр поврежденности (см. [14]).

В качестве функций управления принимаются перемещения $u(t) = f(t)u^*$, заданные на границе S^* , а в качестве функции состояния — перемещения, деформации, напряжения в теле V . Таким образом, определив некоторое решение u^* обратной задачи (см. [15]), решается задача поиска оптимальной функции $f(t)$.

В случае весьма тонкой пластинки, прогибы которой могут во много раз превысить ее толщину, задача сводится к нахождению прогиба w гибкой мембраны [16]. В этом случае деформации и скорости деформаций соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}, \\ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2}\dot{w}_{,\alpha}w_{,\beta} + \frac{1}{2}w_{,\alpha}\dot{w}_{,\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Известно, что для пластин в случае малых прогибов оптимальное деформирование происходит по линейному закону $w(t) = \frac{t}{T}w^*$, а в случае больших прогибов оптимальное деформирование происходит по нелинейному закону $w(t) = \sqrt{\frac{t}{T}}w^*$, где w^* — прогиб в конечный момент времени (см. [6; 12]).

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛЕЙ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Применяя основные процедуры метода конечных элементов к вариационному уравнению с функционалом (1.1), строятся дискретные уравнения задачи деформирования (см. [13; 17])

$${}^{t+dt}K^{(r-1)}\Delta U^{(r)} = {}^{t+dt}R^{(r-1)}, \quad (2.1)$$

где ${}^{t+dt}K^{(r-1)}$ — симметричная матрица касательной жесткости, ${}^{t+dt}R^{(r-1)}$ — вектор внутренних и внешних сил, $\Delta U^{(r)}$ — узловые приращения перемещений. Верхние индексы величины $t + dt$ указывают значение времени нагружения, для которого она вычисляется. Верхние индексы величины $(r - 1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона—Рафсона.

Наряду с дискретизацией по параметру t , вызванной решением нелинейных задач механики методом конечных элементов, для приближенного решения задачи оптимального управления вводится дополнительная сетка: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Учитывая дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (2.1) при условии $dt \leq \tau = t_{k+1} - t_k$, минимизируемый функционал (1.3) заменяется формулой

$$A = \max_V \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \eta_{ij} dt = \max_V \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{t=t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^c \rightarrow \inf, \quad (2.2)$$

где $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ — компоненты приращений деформаций ползучести, вычисленные методом конечных элементов. В данном случае дискретная задача оптимального управления будет включать дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (2.1) и минимизируемый функционал (2.2). В такой постановке строится функция Беллмана и задача решается методом динамического программирования (см. [18; 19]).

Решение задачи оптимизации траекторий деформирования рассматривается на примере формообразования квадратной пластинки с выступами толщиной 12 мм и длиной стороны 180 мм. Выступы

необходимы для расчета остаточной формы пластинки с двойной кривизной (см. [20]). Таким образом, находится прогиб пластинки, моделирующий кручение (см. [20]) в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки (значения максимальных перемещений в углах — 80 мм). Данная величина прогиба выбрана с целью уменьшения сопротивления пластинки изгибу и сведения задачи к нахождению прогиба гибкой мембраны (см. [16]). Для более полного анализа рассматривается объемная постановка задачи (фиг. 1) с 8-узловыми изопараметрическими шестигранными конечными элементами с трилинейной аппроксимацией функций. При вычислениях в системе MSC.Marc подключаются дополнительные параметры, улучшающие характеристики сдвига (или изгиба) и описывающие несжимаемое поведение материала путем использования альтернативной функции интерполяции и альтернативной процедуры интегрирования (см. [21]). Количество элементов в модели определено в соответствии с проведенным ранее анализом (см. [20]) и обеспечивает достаточную точность при относительно небольшом времени расчета.

В расчетах деформирования пластины используются характеристики материала АК4–1Т (алюминиевого сплава) (см. [20; 22]). В соответствии с этими данными, материал изотропен с параметрами упругости: модуль Юнга $E=7000 \text{ кГ/мм}^2$, коэффициент Пуассона $\nu=0.4$. При температуре $T=200^\circ\text{C}$ стадия установившейся ползучести при сжатии и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициентов. В данном случае для упрощения вывода условий сходимости метода динамического программирования в задачах оптимального формообразования принимается описание закона ползучести в течение 260 ч с одинаковыми коэффициентами при сжатии и растяжении: $B = 2.5 \cdot 10^{-15} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} (\text{час})^{-1}$, $n = 8$.

При решении аддитивных задач применяется алгоритм, основное содержание которого состоит в формулировке правил последовательного сжатия множества конкурентоспособных вариантов (см. [18; 19]). Алгоритм представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге которого производится исключение некоторого множества вариантов, о котором в процессе работы алгоритма становится известным, что он не содержит оптимального варианта.

Для разработки алгоритма оптимизации при деформировании заготовки в качестве управляющих параметров вводится вектор-функция перемещений узловых точек тела на границе S^* в виде $\mathbf{U}_z(t) = f(t)\mathbf{U}_z^*$, где $\mathbf{U}_z^*$ — решение обратной задачи с линейной функцией $f(t)$ (см. [15]), обеспечивающее необходимую остаточную форму панели. В этом случае строится сетка в пространстве (t, z) . Шаг по аргументу t задан и равен $\tau = t_{k+1} - t_k$, по переменной z — Δz . Узлы сетки обозначим через $P_g(k)$. Индекс k означает номер гиперплоскости Σ_k при заданном значении t , а индекс g означает номер узла в гиперплоскости Σ_k . Каждые два узла, лежащие в гиперплоскостях $P_q(k)$ и $P_g(k+1)$, соединены отрезками, длины этих отрезков обозначаются $l_{qg}(k) = f_k(P_q(k), P_g(k+1))$ (см. [18]).

В результате таких операций можно получить граф, в котором роль вершин играют узлы $P_g(k)$, и вместо исходной задачи будет рассматриваться задача поиска на этом графе кратчайшего пути, соединяющего гиперплоскости Σ_0 и Σ_N . Обозначая через $l_q(k)$ ломаную кратчайшей длины, соединяющую узел $P_q(k)$ с гиперплоскостью Σ_0 , можно прийти к рекуррентному соотношению (см. [18])

$$l_g(k+1) = \min_q \{l_q(k) + l_{qg}(k)\}.$$

Минимум берется по тем номерам q , для которых узлы лежат в допустимой области G_k и принадлежат гиперплоскости Σ_k .

Для программной реализации метода динамического программирования и построения функции $\mathbf{U}_z(t) = f(t)\mathbf{U}_z^*$ предлагается следующий способ задания граничных условий для рассматриваемой сетки при решении задач (2.1). Шаги метода динамического программирования вычисляются по формуле

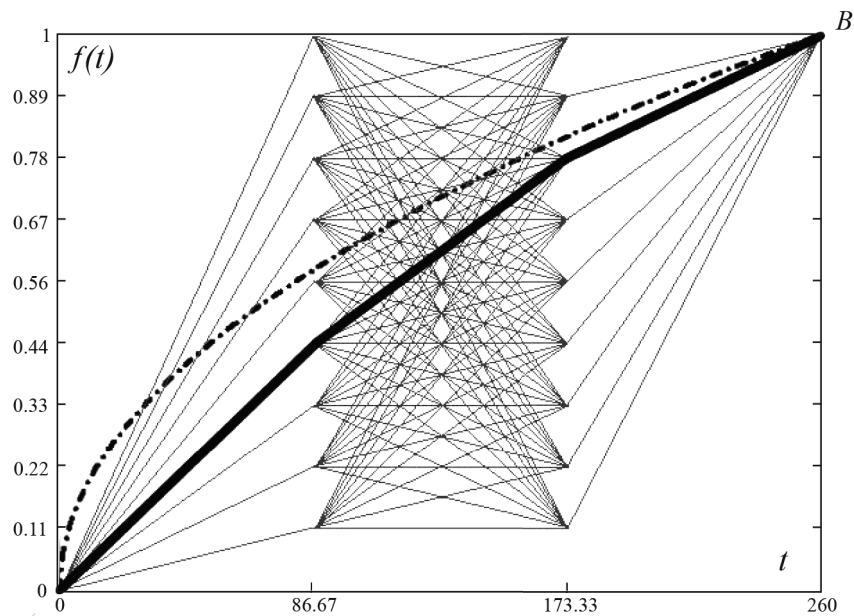
$$\tau = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_0 = 0, \quad \Delta z = \frac{\mathbf{U}_z^*}{M}. \quad (2.3)$$

На каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$ при решении задачи уравнениями (2.1) задаются граничные условия на перемещения $\Delta \mathbf{U}_z$ по следующему алгоритму:

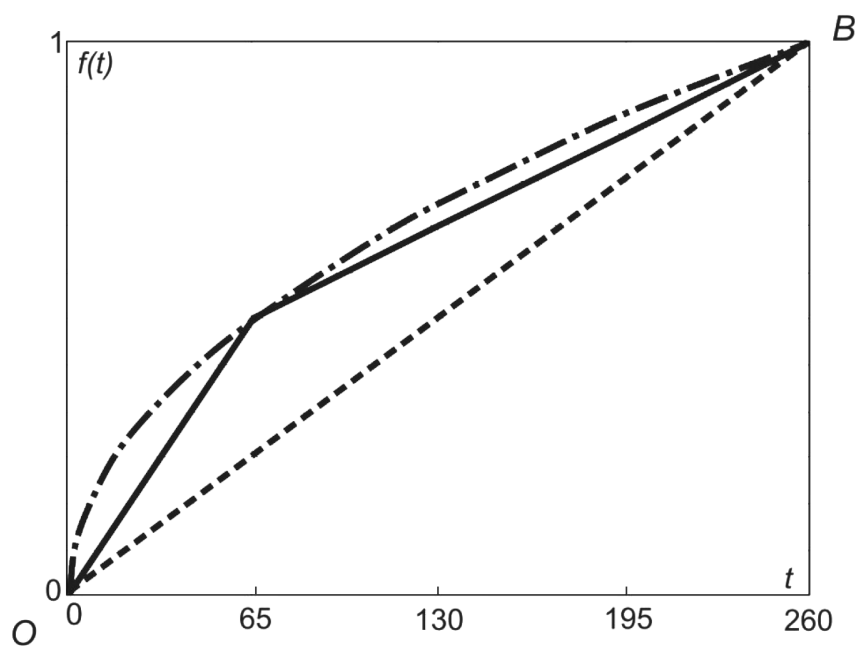
$$\Delta t_{\text{step}} = \xi_k \tau,$$

$$\Delta \mathbf{U}_z = (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \frac{\Delta z}{\tau} dt, \text{ пока } \Delta t_{\text{step}} \leq t + dt, \text{ иначе } k = k + 1 \text{ и повторное выполнение операций.}$$

Граничные условия на всех интервалах $[t_{k-1}, t_k]$ могут быть представлены с помощью системы параметров



Фиг. 2. Траектория деформирования пластинки при $N = 3$, $M = 9$.

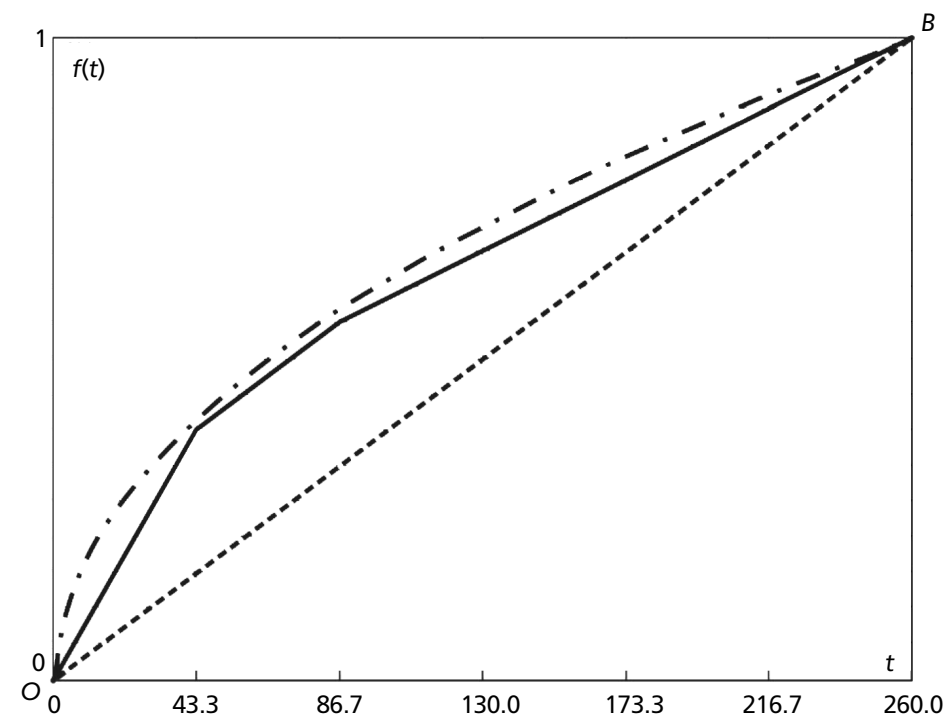


Фиг. 3. Траектория деформирования пластинки при $N = 4$, $M = 12$.

$$[\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2; \dots; \xi_N, \zeta_N],$$

где ξ_k могут принимать значения $0, 1, \dots, N$ (при условии $\xi_k > \xi_{k-1}$), а ζ_k — значения $0, 1, \dots, M$.

Вычисления рекуррентных соотношений выполняются путем построения итераций с различными системами параметров и решения уравнений (2.1) в системе MSC.Marc (см. [21]). Ввод граничных условий и вывод значения критерия оптимизации выполняется с помощью разработанных пользовательских программ.



Фиг. 4. Траектория деформирования пластинки при $N = 6$, $M = 18$.

Численное решение задачи оптимизации траектории деформирования сводится к перебору вариантов при каждом параметре t_k . Набор вариантов функции $f(t)$ задается ломаными линиями, проходящими от точки O к точке B (фиг. 2). В результате оптимальное решение, полученное методом динамического программирования при $N=3$, $M=9$, $N=4$, $M=12$ и $N=6$, $M=18$ (фиг. 2–4), приближается к аналитической кривой и не совпадает с линейной функцией (жирная кривая — численные результаты, штрихпунктирная кривая — аналитические данные для больших прогибов пластины, см. [6; 12]). Вычисленное максимальное значение работы рассеяния в пластинке по аналитической траектории в случае больших прогибов оказывается меньшим по сравнению со всеми возможными траекториями, определенными методом динамического программирования.

При значительном увеличении N наблюдается расхождение от аналитических кривых.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть сетка Q_m характеризуется шагом τ_m по временной переменной и шагом Δz_m по пространственной переменной. Последовательность сеток такова, что $\tau_m \rightarrow 0$, $\Delta z_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Каждой сетке Q_m можно поставить в соответствие конечное множество траекторий $\{f(t, m)\}$, построенных с помощью элементарной операции (см. [18; 19]). Данные траектории представляют собой ломаные, которые проходят через узлы, лежащие на гиперплоскостях $\sum_k (t = k\tau_m)$. С помощью метода динамического программирования можно определить ломаную, соединяющую начальную и конечную точки и имеющую минимальную длину. Под длиной понимается величина диссипируемой работы (2.2)

$$A(f(t, m)) = \max_V \sum_{k=0}^{N_m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \eta_{ij} dt,$$

где $N_m = T / \tau_m$, $t_k = k\tau_m$.

Обозначим

$$\Delta_m = |A(f(t, m)) - A^0|, \quad (3.1)$$

где диссипируемая работа A^0 определяется по оптимальной криволинейной траектории $f(t)$, а A — по оптимальной ломаной траектории $f(t, m)$, найденной с помощью метода динамического программирования.

Согласно лемме из [18], если $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, то траектория деформирования $f(t, m)$ сходится слабо к оптимальной $f(t)$.

При известном потенциале скоростей ползучести можно записать (см. [23])

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Тогда, если удельная мощность рассеянной при ползучести энергии $W = W(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \eta_{ij}$ есть однородная функция напряжений степени $n+1$, то $\Phi(\sigma_{ij}) = \frac{1}{n+1} W(\sigma_{ij})$ (см. [23]).

Отсюда следуют и обратные соотношения

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}.$$

В этом случае можно определить $U(\eta_{ij}) = \frac{n}{n+1} W(\eta_{ij})$ (см. [24]). Условие устойчивости в малом эквивалентно условию выпуклости функций $W(\sigma_{ij})$ и $W(\eta_{ij})$ (см. [6]).

В силу выпуклости закона выполняется неравенство для любых двух путей деформирования η_{ij}, η_{ij}^0 (см. [19]):

$$W^0 - W \geq \frac{n+1}{n} \sigma_{ij} (\eta_{ij}^0 - \eta_{ij}) \quad \text{или} \quad W - W^0 \leq \frac{n+1}{n} \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0).$$

Далее будем обозначать с помощью индекса «0» все величины, относящиеся к оптимальному пути деформирования, тогда $W - W^0 \geq 0$ и разница диссипируемой работы примет вид

$$A - A^0 = \max_V \int_0^T (W - W^0) dt = \max_V \int_0^T (\sigma_{ij} \eta_{ij} - \sigma_{ij}^0 \eta_{ij}^0) dt \leq \frac{n+1}{n} \max_V \int_0^T \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dt.$$

Таким образом, (3.1) примет вид

$$\Delta_m \leq \frac{n+1}{n} \max_V \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dt \right| \leq \frac{n+1}{n} \max_V \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dt \right|. \quad (3.2)$$

Считая, что изменения объема на установившейся стадии ползучести не происходит, т.е. $\eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33} = 0$ (см. [23]), тензор скорости деформаций ползучести может рассматриваться как девиатор скорости деформаций ползучести. Так как гидростатическое напряжение работы не совершает, то тензор напряжений может быть заменен девиатором тензора. В этом случае мощность рассеяния энергии при ползучести может быть представлена в виде $W = s_{ij} \eta_{ij}$.

Представим мощность удельной рассеянной при ползучести энергии в виде (см. [6])

$$W = \sigma_e \eta_e, \quad (3.3)$$

где интенсивность скоростей деформаций ползучести $\eta_e = \sqrt{\frac{2}{3} \eta_{ij} \eta_{ij}}$.

Умножим (1.2) на s_{ij} и свернем: $W = B \sigma_e^{n+1}$. Сравнивая с (3.3), получим $\eta_e = B \sigma_e^n$, откуда $\eta_{ij} = B \sigma_e^n \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}}$ совпадает с (1.2). Тогда $s_{ij} \eta_{ij} = \sigma_e \eta_e$ продифференцируем по η_{kl} :

$$s_{kl} + \eta_{ij} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \eta_{kl}} = \sigma_e \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}} + \eta_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial \eta_{kl}} = \sigma_e \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}} + \eta_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \eta_{kl}}, \quad \text{но} \quad \eta_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}} = \eta_{ij}.$$

Откуда получим $s_{kl} = \sigma_e \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}}$. Но $\sigma_e = B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}}$, тогда $s_{kl} = B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}} = \frac{2}{3} B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}-1} \eta_{kl}$. Таким образом, напряжения определяются по скоростям деформаций ползучести с помощью соотношения

$$s_{ij} = \frac{2}{3} B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}-1} \eta_{ij}. \quad (3.4)$$

Для оценки Δ_m в (3.2), будет использоваться модель гибкой мембраны, для которой скорости деформаций определяются по (1.4). Мембрана толщиной h занимает в плоскости $x_1 O x_2$ область S . Примем такие же допущения, как и в [6]:

1) если время деформирования велико, то компонентами скоростей упругих деформаций можно пренебречь, таким образом, принимаем $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$;

2) при деформировании тонких пластин остаточная форма в основном определяется прогибом w , так как перемещения u_α в плоскости пластин много меньше w .

Пусть искомым прогиб имеет вид

$$w(t, x_1, x_2) = f(t) w^*(x_1, x_2). \quad (3.5)$$

Тогда в силу указанных предположений и (1.4) $\eta_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2} \dot{w}_{,\alpha} w_{,\beta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} \dot{w}_{,\beta} = \dot{f} f \left(w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* \right)$. Используя (3.4) с учетом $\eta_e = \dot{f} \sqrt{\frac{2}{3} w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^*}$, найдем напряжения

$$\begin{aligned} s_{\gamma\lambda} &= \frac{2}{3} B^{-\frac{1}{n}} (\dot{f} f)^{\frac{1-n}{n}} \times \\ &\times \dot{f} f \left(\frac{2}{3} w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* \right)^{\frac{1-n}{2n}} \left(w_{,\gamma}^* w_{,\lambda}^* \right) = \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1+n}{2n}} B^{-\frac{1}{n}} (\dot{f} f)^{\frac{1}{n}} \frac{\left(w_{,\gamma}^* w_{,\lambda}^* \right)}{\left(w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* \right)^{\frac{n-1}{2n}}} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2). \end{aligned}$$

В этом случае (3.2) примет вид

$$\Delta_m \leq \frac{n+1}{n} \max_S h \times \sum_{k=0}^{N_m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{f} f - \dot{f}^0 f^0) s_{\alpha\beta} w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* dt \right| = C \sum_{k=0}^{N_m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{f} f - \dot{f}^0 f^0) (\dot{f} f)^{\frac{1}{n}} dt \right|, \quad (3.6)$$

где $C = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1+n}{2n}} \frac{n+1}{n} B^{-\frac{1}{n}} h \max_S \left| \left(w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* w_{,\alpha}^* w_{,\beta}^* \right)^{\frac{n+1}{2n}} \right|$.

Отрезки, соединяющие точки с соседних гиперповерхностей, описываются уравнениями $f(t) = f(t_k) + \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\tau_m} (t - t_k)$, тогда $\dot{f}(t) = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\tau_m}$.

Обозначив значения функций в моменты времени $f(t_k) = f_k$, можно записать $\dot{f}(t) = \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_m}$ и $\dot{f} f = \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_m} f_{k+1}$. Положим, что $f_k = f_k^0 + \Delta f_k$, тогда

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_m} f_{k+1} \right| = \left| \frac{f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1} - f_k^0 - \Delta f_k}{\tau_m} (f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{f_{k+1}^0 - f_k^0}{\tau_m} (f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1}) \right| + \left| \frac{\Delta f_{k+1} - \Delta f_k}{\tau_m} (f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau_m} \left| (f_{k+1}^0 - f_k^0) f_{k+1}^0 \right| + \frac{1}{\tau_m} \left| (f_{k+1}^0 - f_k^0) \Delta f_{k+1} \right| + \frac{1}{\tau_m} \left| (\Delta f_{k+1} - \Delta f_k) f_{k+1}^0 \right| + \frac{1}{\tau_m} \left| (\Delta f_{k+1} - \Delta f_k) \Delta f_{k+1} \right| \leq \\ &\leq \frac{a}{\tau_m} + \frac{b}{\tau_m} \Delta z_m + \frac{c}{\tau_m} \Delta z_m + \frac{d}{\tau_m} \Delta z_m^2 = \frac{1}{\tau_m} (a + e \Delta z_m + d \Delta z_m^2), \end{aligned}$$

где использованы обозначения $|\Delta f_{k+1} - \Delta f_k| \leq \Delta z_m$, $|\Delta f_k| \leq \frac{1}{2} \Delta z_m$, $a = \max_t |(f^0_{k+1} - f^0_k) f^0_{k+1}|$,

$$b = \max_t \frac{1}{2} |f^0_{k+1} - f^0_k|, \quad c = \max_t |f^0_{k+1}|, \quad d = \frac{1}{2}, \quad e = b + c.$$

Аналогично оценим выражение

$$\begin{aligned} |\ddot{f} - \dot{f}^0 f^0| &= \left| \frac{f^0_{k+1} + \Delta f_{k+1} - f^0_k - \Delta f_k}{\tau_m} \times (f^0_{k+1} + \Delta f_{k+1}) - \frac{f^0_{k+1} - f^0_k}{\tau_m} f^0_{k+1} \right| = \\ &= \left| \frac{f^0_{k+1} - f^0_k}{\tau_m} \Delta f_{k+1} + \frac{\Delta f_{k+1} - \Delta f_k}{\tau_m} \times (f^0_{k+1} + \Delta f_{k+1}) \right| \leq \frac{1}{\tau_m} \times (b \Delta z_m + c \Delta z_m + d \Delta z_m^2) = \\ &= \frac{1}{\tau_m} (e \Delta z_m + d \Delta z_m^2). \end{aligned}$$

Тогда для подынтегрального выражения (3.6) будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \left| (\ddot{f} - \dot{f}^0 f^0) (\ddot{f})^{\frac{1}{n}} \right| &\leq \frac{1}{\tau_m} (e \Delta z_m + d \Delta z_m^2) \times \left[\frac{1}{\tau_m} (a + e \Delta z_m + d \Delta z_m^2) \right]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1}{\tau_m} \mu_m \left[\frac{1}{\tau_m} (a + \mu_m) \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\tau_m^{\frac{n+1}{n}}} \left[(a \mu_m^n + \mu_m^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

где $\mu_m = e \Delta z_m + d \Delta z_m^2$.

В результате (3.2) примет вид

$$\Delta_m \leq C N_m \tau_m \frac{1}{\tau_m^{\frac{n+1}{n}}} \left[(a \mu_m^n + \mu_m^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}} = C T \frac{1}{\tau_m^{\frac{n+1}{n}}} \left[(a \mu_m^n + \mu_m^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.7)$$

Сравнивая функцию оптимального деформирования, полученного аналитически в случае больших прогибов, с (3.5), найдем $f^0(t) = \sqrt{\frac{t}{T}}$. Используя разложение в ряд Тейлора, ограничиваясь членами

первого порядка, можно получить $f^0(t_{k+1}) \approx f^0(t_k) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{T}} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx f^0(t_k) + \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

В этом случае коэффициенты могут быть заданы значениями

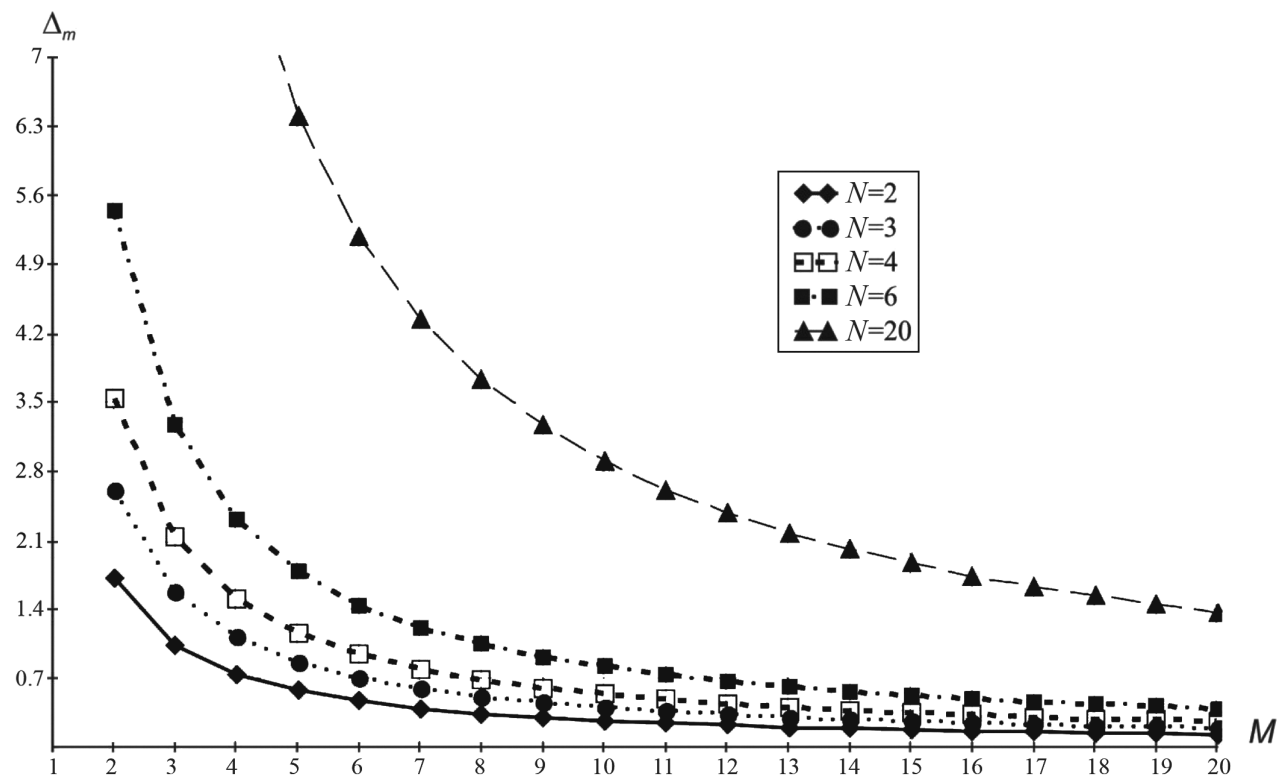
$$a = \frac{1}{2\sqrt{N}}, \quad b = \frac{1}{4\sqrt{N}}, \quad c = 1, \quad e = \frac{1}{4\sqrt{N}} + 1.$$

Таким образом, для сходимости решения задачи, полученного методом динамического программирования, к точному достаточно, чтобы шаги по пространственной и временной переменным удовлетворяли условию

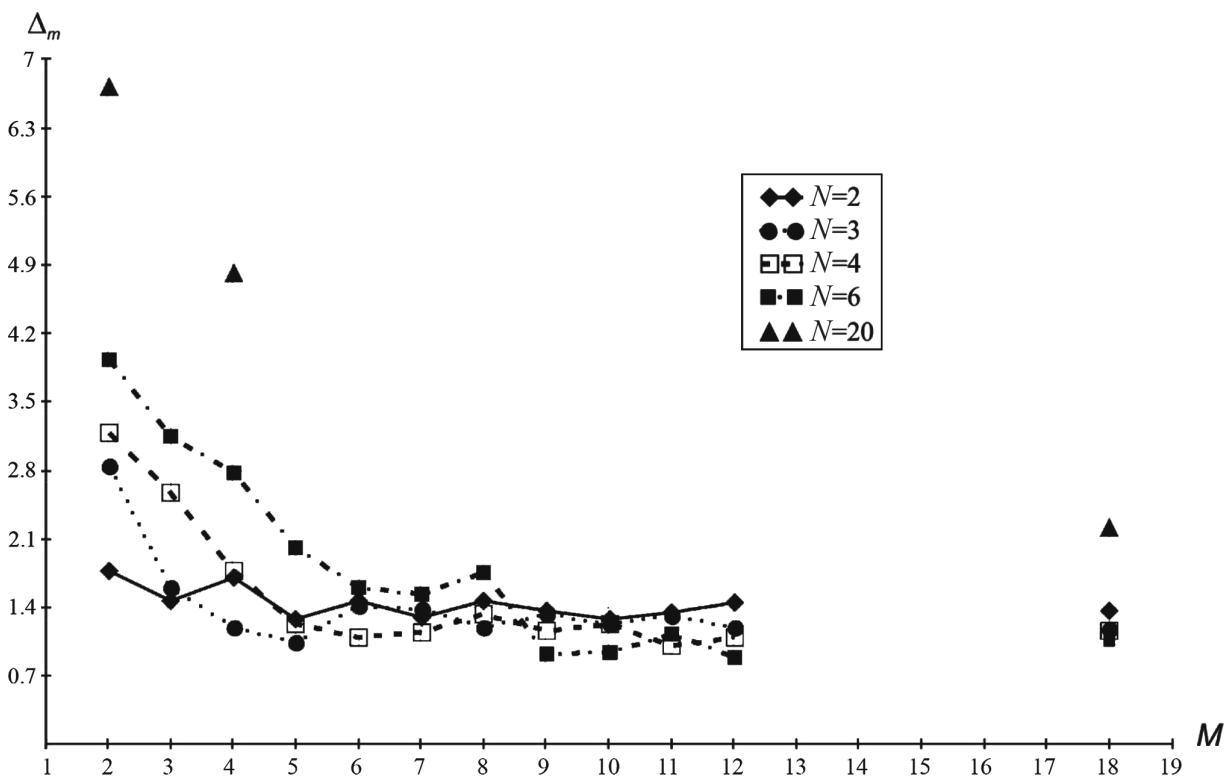
$$a(e \Delta z_m + d \Delta z_m^2)^n + (e \Delta z_m + d \Delta z_m^2)^{n+1} = \rho \tau_m^{n+1+\varepsilon}, \quad (3.8)$$

где ρ, ε — произвольные положительные постоянные.

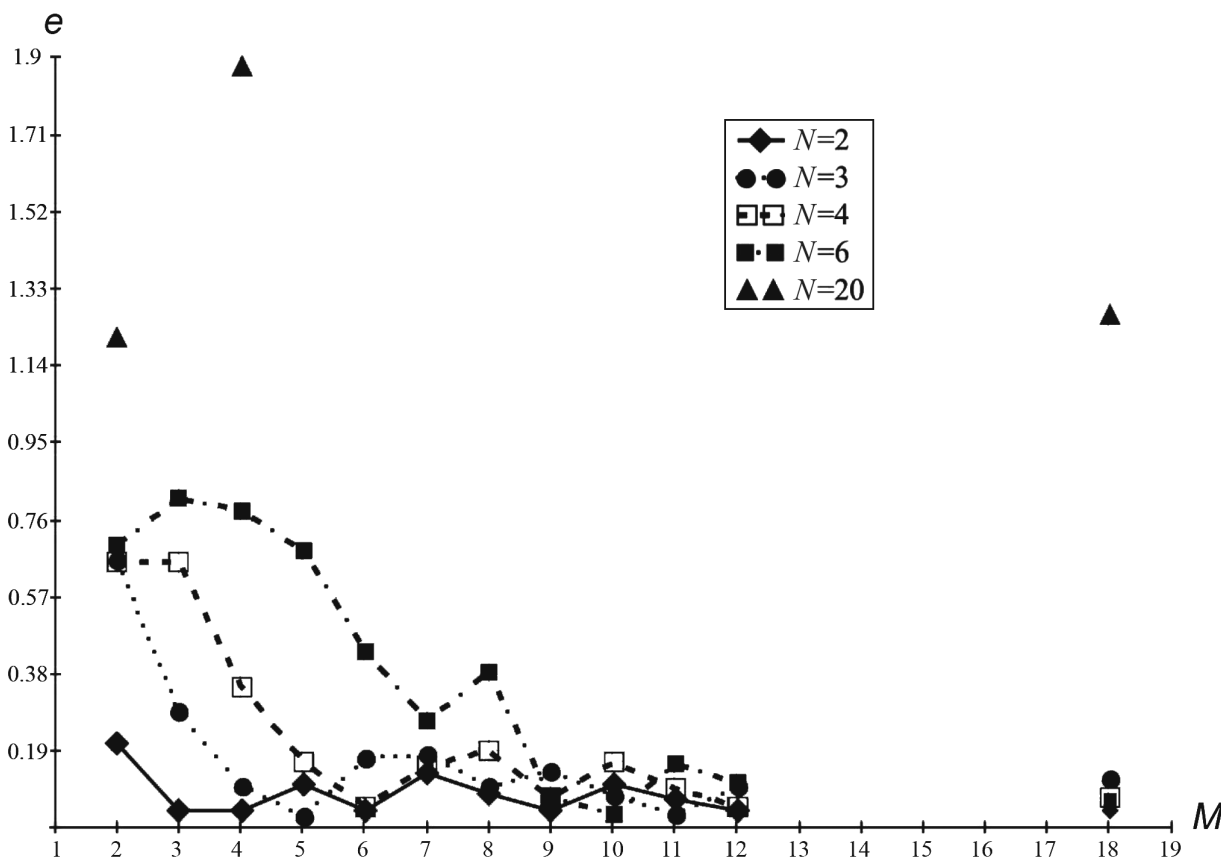
Графики изменения величины Δ_m , вычисленной по формуле (3.7), в зависимости от значений шагов по пространственной и временной переменным, определенных по N, M в (2.3), представлены на фиг. 5. Константа C в (3.7) выбрана при условии совпадения аналитических и численных значений Δ_m при $N=2$.



Фиг. 5. Изменение Δ_m в зависимости от N , M по формуле (3.7).



Фиг. 6. Численные результаты изменения Δ_m в зависимости от N , M .

Фиг. 7. Численные результаты изменения e в зависимости от N, M .

По результатам численного решения методом динамического программирования задачи оптимального деформирования пластинки (фиг. 1) с разными значениями N, M вычислены значения Δ_m по (3.1)

$$\text{и } e = \left(\sum_{k=0}^{N-1} (f(t_k, m) - f^0(t_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ которые представлены на фиг. 6, 7.}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен анализ сходимости метода динамического программирования для задач оптимального формообразования в ползучести и получены аналитические зависимости влияния величин шагов пространственной и временной переменных на сходимость. Численные и аналитические данные о сходимости метода оптимизации с различными размерами сеток демонстрируют качественное совпадение. Различие этих данных увеличивается при уменьшении шага по времени, что может быть вызвано выбором максимальных коэффициентов, не зависящих от времени, а также исключением в аналитическом варианте скоростей деформаций упругости (см. [6]). Таким образом, для обеспечения устойчивого решения задачи необходимо учитывать соотношения между пространственной и временной переменными (3.8).

Разработанный метод оптимизации уменьшает объем вычислений в сравнении с перебором всевозможных путей деформирования, т.к. в процессе расчета исключаются неоптимальные траектории. Несмотря на это, незначительное увеличение параметров метода, в частности, размерности, приводит к требованию значительных вычислительных ресурсов. С учетом развития вычислительных технологий разработанный метод позволяет на стадии подготовки производства оптимизировать параметры технологического процесса, в частности, для формообразования деталей в реконфигурируемом стержневом пуансоне определить оптимальную систему траекторий деформирования для разных точек пластины при учете разносопротивляемости и анизотропии в ползучести (см. [25]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикл. механ. и техн. физ. 2010. Т. 51. № 4. С. 155–165.
2. Горев Б. В., Клопотов И. Д., Раевская Г. А., Соснин О. В. К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести // Прикл. механ. и техн. физ. 1980. № 5. С. 185–191.
3. Huang Lin, Wan Min, Chi Cailou, Ji Xiusheng. FEM analysis of spring-backs in age forming of aluminum alloy plates // Chinese J. of Aeronautics. 2007. V. 20. P. 564–569.
4. Lihua Z., Jianguo L., Minghui H. Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets // Adv. Sci. Lett. 2013. V. 19. No. 1. P. 75–79.
5. Ribeiro F. C., Marinho E. P., Inforzato D. J., Costa P. R., Batalha G. F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // J. of Achievements in Materials and Manufacturing Engineer. 2010. V. 43. No. 1.
6. Цвелодуб И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
7. Соснин О. В., Шубин И. А., Горев Б. В., Раевская Г. А. Способ формообразования деталей двойной крутизны и устройство для его осуществления. А.с. 1147471 СССР // Б.И. 1985. № 12.
8. Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G. A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Procedia CIRP. 2014. V. 17. P. 853–858.
9. Банищикова И. А. Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // Прикл. механ. и техн. физ. 2020. Т. 61. № 1. С. 102–117.
10. Соснин О. В. Об анизотропной ползучести материалов // Прикл. механ. и техн. физ. 1965. № 6. С. 99–104.
11. Бормотин К. С., Вин Аунг. Метод динамического программирования в задачах оптимального деформирования панели в режиме ползучести // Вычисл. методы и программирование. 2018. Т. 19. С. 470–478.
12. Бормотин К. С., Олейников А. И. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикл. механ. и техн. физ. 2012. Т. 53. № 5. С. 136–146.
13. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
14. Соснин О. В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // Прикл. механ. и техн. физ. 2010. Т. 51. № 4. С. 188–197.
15. Бормотин К. С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 145–153.
16. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.
17. Wriggers P. Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006.
18. Муссеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
19. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
20. Коробейников С. Н., Олейников А. И., Горев Б. В., Бормотин К. С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование: новые вычисл. технологии. 2008. Т. 9. № 1. С. 346–365.
21. Marc 2021, Vol A: Theory and User Information, <http://hexagon.com/products/marc/product/marc>.
22. Соснин О. В., Горев Б. В., Рубанов В. В. Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Сб. тр. НИИВТа № 117. Новосибирск: Новосиб. ин-т инженеров вод. трансп. 1976. С. 78–88.
23. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
24. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Гостехиздат, 1960.
25. Бормотин К. С., Кривенко А. А. Численная оптимизация кинематической схемы многоточечного формообразования панелей в условиях ползучести // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2022. № 5. С. 150–163.