

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.954

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ $\mathbb{Z}$ -ОБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. С. Л. Скороходов^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

Поступила в редакцию 13.04.2023 г.

Переработанный вариант 18.06.2023 г.

Принята к публикации 10.07.2023 г.

Для задачи конформного отображения полуплоскости на $\mathbb{Z}$ -образную область с произвольной геометрией разработан метод эффективного нахождения параметров интеграла Кристоффеля–Шварца, т.е. прообразов вершин и предынтегрального множителя. Особое внимание уделено случаю кроудинга прообразов, когда традиционные методы интегрирования сталкиваются со значительными трудностями. Для этого вводится понятие кластера, определяются его центр и все подынтегральные биномы с прообразами из этого кластера разлагаются в быстросходящийся ряд по однородной схеме. Возникающие интегралы далее сводятся к одинарному или двойному ряду по гипергеометрическим функциям Гаусса $F(a, b; c; q)$. Использование формул аналитического продолжения для $F(a, b; c; q)$ в окрестность точки $q = 1$ и численно устойчивых рекуррентных соотношений позволило обеспечить быструю сходимость полученных разложений. Построенные разложения оказываются также весьма эффективными при выборе начальных приближений прообразов в итерационном методе Ньютона. Использование старших членов этих разложений позволяет выразить приближения для прообразов в явном виде через элементарные функции, а последующие итерации обеспечивают быструю сходимость алгоритма. После нахождения параметров в интеграле искомое отображение строится в виде комбинации степенных разложений в прообразах, регулярных разложений в прообразе центра симметрии, в виде ряда Лорана в полукольце и в виде специальных рядов в окрестности прообразов торцевых отрезков. Численные результаты показали высокую эффективность разработанного метода, особенно в случае сильного кроудинга прообразов. Библ. 30. Фиг. 7.

Ключевые слова: конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, кроудинг прообразов, гипергеометрические функции Гаусса, формулы аналитического продолжения, асимптотики параметров, $\mathbb{Z}$ -образная область.

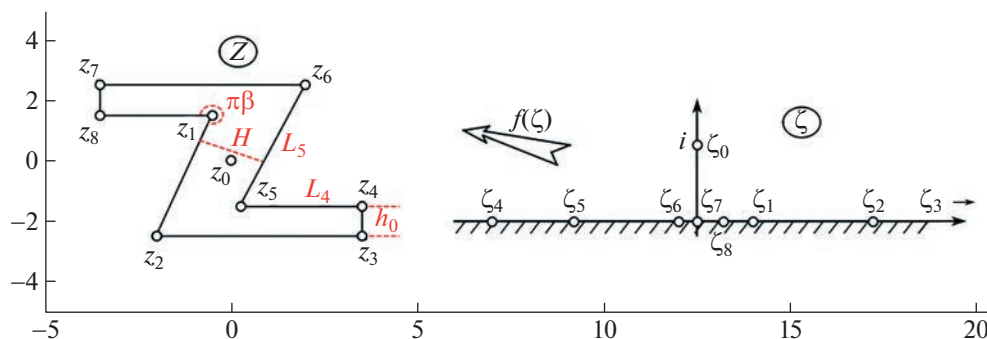
DOI: 10.31857/S0044466923120256, EDN: BWPFIE

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачу конформного отображения $f(\zeta)$ полуплоскости или круга на многоугольник решает интеграл Кристоффеля–Шварца (далее ИКШ), однако основная трудность при этом состоит в нахождении параметров этого интеграла, т.е. прообразов вершин ζ_k и предынтегрального множителя (см. [1–9]). Зависимость этих величин от длин сторон L_k и углов многоугольника является сильно нелинейной, причем некоторые из прообразов могут меняться экспоненциально быстро или медленно, а некоторые — степенным образом.

Особые трудности при этом возникают в ситуации кроудинга, когда ряд прообразов ζ_k сбивается в тесную группу, и расстояние между соседними прообразами в группе становится чрезвычайно малым (см. [4, 7, 10–13]), а таких групп может быть несколько.

Основные уравнения для нахождения прообразов в ИКШ возникают при интегрировании по отрезкам $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ производной искомого отображения $f'(\zeta)$ и сравнении этих интегралов I_k с заданными длинами L_k сторон многоугольника. Для вычисления I_k часто используют либо квадратуры Гаусса (см. [4, 14, 5, 9]), либо квадратуры Гаусса–Якоби (см. [15–17]), либо другие специальные методы (см. [18, 19]). Однако все указанные подходы в ситуации сильного кроудинга не позволяют с нужной точностью определить параметры ИКШ, и эта проблема остается далекой от надежного решения.



Фиг. 1. Отображение полуплоскости на $\mathbb{Z}$ -образную область.

Существенный прогресс в преодолении отмеченных трудностей достигнут в недавних работах [20–23]. В этих исследованиях решена проблема аналитического продолжения функции Лауричеллы произвольного числа переменных; формулы продолжения применены к решению проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца. Благодаря такому подходу ситуация кроудинга в этих работах является эффективно разрешимой.

Отметим также работу [24], в которой отображение $\mathbb{L}$ -образной области построено в явном аналитическом виде. Возникающий здесь кроудинг вблизи двух точек $\zeta = \pm 1$ эффективно разрешается с помощью техники гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; z)$ и искомое отображение представлено в виде быстроходящихся рядов.

Необходимо также отметить, что попытка отображения области $\mathbb{Z}$ частного вида была предпринята в [25], где входящий угол был равен лишь $3\pi/2$, горизонтальные стороны полагались бесконечными, а толщины вертикальной и горизонтальных полочек были равными. Однако отображение области и решение на его основе задачи кручения стержня такого $\mathbb{Z}$ -образного сечения содержат принципиальные ошибки в приведенной эпюре напряжений.

В настоящей работе рассмотрена задача построения конформного отображения симметричной $\mathbb{Z}$ -образной области с произвольными геометрическими характеристиками (см. фиг. 1a). Здесь возникает ситуация кроудинга четырех прообразов вблизи точки $\zeta = 0$ и четырех прообразов вблизи $\zeta = \infty$. Для преодоления указанных трудностей при вычислении необходимых интегралов I_k вводится понятие кластера, т.е. объединение прообразов ζ_k , входящих в одну компактную группу. Каждый из соответствующих биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$ с прообразами из этого кластера разлагается в специальный ряд, и такие ряды перемножаются. В результате интеграл I_k представлен в виде разложения по функциям Гаусса $F(a, b; c; q)$, для которых использование формул аналитического продолжения в окрестность точки $q = 1$ и рекуррентных соотношений по параметрам a , b и c позволяет вычислить I_k с высокой точностью.

Выбор начального приближения прообразов $\zeta_k^{(0)}$ для итерационного метода Ньютона является важной и трудной задачей, поскольку сходимость итераций сильно зависит от значений $\zeta_k^{(0)}$. В работе [13] такие приближения строятся на основе развитой в [26] теории конформного отображения сингулярно деформируемых областей и получения адекватных асимптотик прообразов. В настоящей работе приближения прообразов $\zeta_k^{(0)}$ также определяются на основе использования результатов из [26], в частности, учет лишь старших членов разложений в представлении для интегралов I_k позволяет выразить аппроксимации $\zeta_k^{(0)}$ в явном виде через элементарные функции, а последующие несколько итераций обеспечивают относительную точность вычисления параметров ИКШ до $\delta = 10^{-20}$.

После нахождения параметров ИКШ искомое отображение $f(\zeta)$ полуплоскости на исходную область $\mathbb{Z}$ строится в виде степенных разложений в прообразах ζ_k , регулярного разложения в прообразе центра симметрии, в виде ряда Лорана в определенном полукольце и в виде специальных рядов в окрестности некоторых отрезков $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$. Полученные разложения покрывают всю полуплоскость и решают задачу эффективного построения отображения $f(\zeta)$.

Численные результаты разработанного метода представлены в виде рассчитанных параметров ИКШ и в виде образа квадратной сетки в прямоугольнике Π при отображении на область $\mathbb{Z}$ с тремя различными геометрическими параметрами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть необходимо построить конформное отображение $f(\zeta)$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}_+ := \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ на симметричную $\mathbb{Z}$ -образную область $\mathcal{Z}$ (см. фиг. 1). Геометрия области определяется толщиной h_0 горизонтальных полочек, толщиной H центральной части, раствором $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$, входящих углов в вершинах z_1 и z_5 , длиной горизонтальных сторон $L_4 = |z_5 - z_4| = |z_1 - z_8|$ и длиной центральных сторон $L_5 = |z_6 - z_5| = |z_2 - z_1|$.

Вершинам z_k при отображении $f(\zeta)$ будут соответствовать прообразы ζ_k , $k = 1, \dots, 8$, а показатели углов, т.е. деленные на π величины углов в вершинах z_k , обозначим через β_k . Это позволяет записать

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_7 = \beta_8 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \beta_5 = \beta, \quad \beta_2 = \beta_6 = 2 - \beta, \quad \beta \in (1, 2). \quad (1)$$

Пусть отображение $f(\zeta)$ имеет такую нормировку, что точка $\zeta_0 = i$ переходит в центр симметрии z_0 области $\mathcal{Z}$ (см. фиг. 1), а точка $\zeta_7 = 0$ переходит в z_7 . Тогда прообразы ζ_k будут обладать свойством симметрии

$$\zeta_3 = \infty, \quad \zeta_k \zeta_{k+4} = \zeta_0^2 = -1, \quad k = 1, 2, 4. \quad (2)$$

Чтобы убедиться в этом, используем отображение $\chi(\zeta) = \frac{i - \zeta}{i + \zeta}$ полуплоскости $\mathbb{H}$ на единичный круг $\mathbb{U} := \{|\chi| < 1\}$ с нормировкой $\chi(i) = 0$. Тогда суперпозиция $f \circ \zeta(\chi)$ отображает круг $\mathbb{U}$ на область $\mathcal{Z}$ с нормировкой $f \circ \zeta(0) = z_0$ и, значит, обладает свойством центральной симметрии, т.е. для любой граничной точки χ_* выполнено

$$f \circ \zeta(-\chi_*) = -f \circ \zeta(\chi_*).$$

Обратная к введенной функции $\chi(\zeta)$, т.е. $\zeta(\chi) = i \frac{1 - \chi}{1 + \chi}$, обладает очевидным свойством, что любым двум граничным симметричным точкам χ_* и $-\chi_*$ при отображении $\zeta(\chi)$ соответствуют две точки $\zeta(\chi_*) = i \frac{1 - \chi_*}{1 + \chi_*}$ и $\zeta(-\chi_*) = i \frac{1 + \chi_*}{1 - \chi_*}$, для которых очевидно выполнено правило $\zeta(\chi_*)\zeta(-\chi_*) = -1$. Это и доказывает свойство (2).

Для удобства выкладок введем обозначение $\alpha_k = \beta_k - 1$ и приведем эти значения:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_8 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_5 = \beta - 1, \quad \alpha_2 = \alpha_6 = 1 - \beta. \quad (3)$$

Запишем теперь ИКШ с выбором нижнего предела ζ_0 в интеграле:

$$z(\zeta) = z_0 + \mathcal{H} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{k \neq 3} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} dt, \quad \mathcal{H} > 0; \quad (4)$$

свойство $\mathcal{H} > 0$ легко следует из рассмотрения (4) при $\zeta > \zeta_2$. Далее, неравенство $k \neq 3$ в произведении биномов в ИКШ будем опускать.

В других необходимых случаях нижний предел в интеграле будем полагать равным прообразу ζ_n , тогда значение z_0 в (4) необходимо заменить на z_n .

Условиями для искоемых параметров ζ_k и множителя $\mathcal{H}$ служат характеристики $\mathbb{Z}$ -образной области, в частности, уравнения для сторон L_4 и L_5 :

$$\mathcal{H} \int_{\zeta_4}^{\zeta_5} \prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k} dt = z_5 - z_4 = -L_4, \quad (5)$$

$$\mathcal{H} \int_{\zeta_5}^{\zeta_6} \prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k} dt = z_6 - z_5 = L_5 e^{-i\pi\beta}. \quad (6)$$

Далее, из рассмотрения области $\mathcal{L}$ и проведения двух перпендикуляров из точки z_5 на стороны $[z_2, z_3]$ и $[z_1, z_2]$ можно несложно вывести связь параметров h_0 , H и β с вектором $z_5 - z_2$:

$$z_5 - z_2 = -\frac{H + h_0 \cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\beta)} + ih_0. \quad (7)$$

Это дает еще два условия на интеграл по любой дуге в полуплоскости $\mathbb{H}_+$ от точки ζ_2 до ζ_5 , т.е. для вещественной и мнимой частей:

$$\mathcal{H} \int_{\zeta_2}^{\zeta_5} \prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k} dt = -\frac{H + h_0 \cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\beta)} + ih_0. \quad (8)$$

Таким образом, в поставленной задаче искомыми являются шесть прообразов ζ_k , $k = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$, и множитель $\mathcal{H} > 0$. Определяющими уравнениями являются четыре уравнения (5), (6), (8) на интегралы и три уравнения (2) парных связей ζ_k и ζ_{k+4} . Выражая прообразы ζ_5 , ζ_6 и ζ_8 по формулам $\zeta_{k+4} = -1/\zeta_k$, получаем искомыми три прообраза ζ_1 , ζ_2 , ζ_4 и $\mathcal{H}$. Интегралы (5), (6), (8) имеют гипергеометрический тип и берутся различными методами, чему посвящены три следующих раздела.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $J_{(4,5)}$ ПО ОТРЕЗКУ $[\zeta_4, \zeta_5]$

3.1. Введение кластера прообразов $\zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_1, \zeta_2$

Пять прообразов $\zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_1, \zeta_2$ объединим в один кластер $\mathbb{C}l^{(62)}$ и введем его центр $\zeta_c^{(62)}$ как полусумму граничных значений ζ_6 и ζ_2 :

$$\zeta_c^{(62)} = (\zeta_6 + \zeta_2)/2. \quad (9)$$

При интегрировании по отрезку $[\zeta_4, \zeta_5]$ введем замену переменной t в виде

$$t = \zeta_4 + \Delta_4 u, \quad \Delta_4 = \zeta_5 - \zeta_4, \quad u \in [0, 1]. \quad (10)$$

Для каждого из биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{6, 7, 8, 1, 2\}$, используем замену (10) и проведем цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} &= (\zeta_4 - \zeta_c^{(62)} + \Delta_4 u)^{\alpha_k} \left(1 - \frac{\zeta_c^{(62)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_4 - \Delta_4 u} \right)^{\alpha_k} = (\zeta_4 - \zeta_c^{(62)})^{\alpha_k} (1 - q^{(62)} u)^{\alpha_k} \times \\ &\times \left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(62)} u} \right)^{\alpha_k}, \quad q^{(62)} = \frac{\Delta_4}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_4}, \quad p_k = \frac{\zeta_c^{(62)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее нам потребуется формула разложения бинома в степенной ряд

$$(1 - ax)^\mu = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad c_m = \frac{a^m (-\mu)_m}{m!}, \quad (-\mu)_m = \frac{\Gamma(m - \mu)}{\Gamma(-\mu)}, \quad |ax| < 1, \quad (12)$$

где $(-\mu)_m$ — символ Похгаммера, а $\Gamma(y)$ — гамма-функция Эйлера.

Последний множитель в (11) теперь разложим в ряд вида (12) по степеням $(1 - q^{(62)}u)^{-n}$:

$$\left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(62)}u}\right)^{\alpha_k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} (1 - q^{(62)}u)^{-n}, \quad b_n^{(k)} = \frac{p_k^n (-\alpha_k)_n}{n!}. \quad (13)$$

Скорость сходимости этого ряда будет весьма высокой, поскольку величина $p_k/(1 - q^{(62)}u)$ при $u \in [0, 1]$ имеет максимум:

$$\max_{u \in [0, 1]} \left| \frac{p_k}{1 - q^{(62)}u} \right| = \left| \frac{p_k}{1 - q^{(62)}} \right| = \frac{|\zeta_c^{(62)} - \zeta_k|}{\zeta_c^{(62)} - \zeta_5} < 1, \quad k = \{6, 7, 8, 1, 2\}. \quad (14)$$

Таким образом, каждый из биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$ для $k = \{6, 7, 8, 1, 2\}$ запишем в окончательном виде

$$(t - \zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_4 - \zeta_c^{(62)})^{\alpha_k} (1 - q^{(62)}u)^{\alpha_k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} (1 - q^{(62)}u)^{-n}. \quad (15)$$

Здесь важно отметить, что текущий прообраз ζ_k участвует лишь в определении коэффициента p_k , а значит, лишь в задании $b_n^{(k)}$.

Необходимое для интегрирования произведение пяти биномов $\prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k}$ теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{6,7,8,1,2\}} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_4 - \zeta_c^{(62)})^{-\beta} (1 - q^{(62)}u)^{-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} (1 - q^{(62)}u)^{-m}, \quad (16)$$

поскольку из (3) имеем $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 + \alpha_2 = -\beta$. Коэффициенты $B_m^{(62)}$ здесь получаются последовательным произведением Коши рядов по степеням $(1 - q^{(62)}u)^{-n}$:

$$\prod_{k=\{6,7,8,1,2\}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} (1 - q^{(62)}u)^{-n} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} (1 - q^{(62)}u)^{-m}, \quad (17)$$

и вычисляются рекуррентно по схеме

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n x^{-n} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m x^{-m}, \quad \eta_m = \sum_{k=0}^m \mu_k \nu_{m-k}. \quad (18)$$

3.2. Сведение интеграла $J_{(4,5)}$ к ряду по функциям $F(a, b; c; q^{(62)})$

Необходимые биномы $(t - \zeta_4)^{\alpha_4}$, $(t - \zeta_5)^{\alpha_5}$ и дифференциал dt представим с учетом замены (10) в виде

$$(t - \zeta_4)^{\alpha_4} = \Delta_4^{\alpha_4} u^{\alpha_4}, \quad (t - \zeta_5)^{\alpha_5} = e^{i\pi\alpha_5} \Delta_4^{\alpha_5} (1 - u)^{\alpha_5}, \quad dt = \Delta_4 du. \quad (19)$$

Тогда, используя произведение биномов (16) и представление (19), в интеграле (5) для $J_{(4,5)}$ получаем

$$J_{(4,5)} = -\mathcal{H} \Delta_4^{\beta-1/2} (\zeta_c^{(62)} - \zeta_4)^{-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} \int_0^1 \frac{u^{-1/2} (1 - u)^{\beta-1}}{(1 - q^{(62)}u)^{m+\beta}} du. \quad (20)$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением Эйлера [27] для гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; z)$:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \quad c > b > 0, \quad (21)$$

и перепишем (20) в виде

$$J_{(4,5)} = -\mathcal{H} \Delta_4^{\beta-1/2} (\zeta_c^{(62)} - \zeta_4)^{-\beta} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} F\left(m + \beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q^{(62)}\right). \quad (22)$$

Величина $q^{(62)}$, участвующая в качестве аргумента функций $F(.,.,.; q^{(62)})$ в этом разложении, определена в (11) и, как легко оценить, очень близка к единице (в реальных расчетах значение $(1 - q^{(62)}) \sim 10^{-3} - 10^{-7}$). Поэтому для эффективного вычисления значений $F(.,.,.; q^{(62)})$ в сумме (22) воспользуемся формулой аналитического продолжения из [27] в окрестность точки $q = 1$:

$$\begin{aligned} F\left(m + \beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q\right) &= (1 - q)^{-m} \frac{\Gamma(m)\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)}{\Gamma(m + \beta)\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\left(\frac{1}{2} - m\right)_n (\beta)_n}{n!(1 - m)_n} (1 - q)^n + \\ &+ (-1)^m \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{1}{2} - m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + m\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!(n + m)!} [k_n'' - \ln(1 - q)] (1 - q)^n, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$k_n'' = \psi(1 + m + n) + \psi(1 + n) - \psi(m + \beta + n) - \psi\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

а при $m = 0$ первая сумма в (23) исчезает.

Функции $F\left(m + \beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q^{(62)}\right)$ вычислим при $m = 0$ и $m = 1$ по формуле (23), а для последующих $m \geq 2$ воспользуемся рекуррентным соотношением из [27]

$$\begin{aligned} F\left(m + \beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q\right) &= \frac{\frac{3}{2} - m}{(m + \beta - 1)(1 - q)} F\left(m + \beta - 2, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q\right) + \\ &+ \frac{2m + \beta - \frac{5}{2} - q\left(m + \beta - \frac{3}{2}\right)}{(m + \beta - 1)(1 - q)} F\left(m + \beta - 1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Численная устойчивость рекурсии (24) проводится с помощью асимптотического анализа при $m \rightarrow +\infty$ двух линейно независимых решений этого трехчленного рекуррентного уравнения (см. [28]) и показывает устойчивость этой рекурсии в сторону увеличения номера m . Высокоточные расчеты с использованием соотношения (24) полностью подтвердили этот вывод.

Таким образом, алгоритм вычисления интеграла $J_{(4,5)}$ построен.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $J_{(2,5)}$ ПО ДУГЕ $[\zeta_2, \zeta_5]$

4.1. Введение кластера $\mathbb{C}l^{(61)}$ прообразов $\zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_1$ и представление бинома $(t - \zeta_4)^{\alpha_4}$

Введем верхнюю полуокружность C_+ с диаметром $[\zeta_2, \zeta_5]$; ее центр $\zeta_c^{(25)}$ и радиус R есть

$$\zeta_c^{(25)} = (\zeta_2 + \zeta_5)/2, \quad R = (\zeta_2 - \zeta_5)/2. \quad (25)$$

Интегрирование будем проводить по полуокружности C_+ от точки ζ_2 к точке ζ_5 , тогда переменная t и дифференциал dt в ИКШ (4) имеют вид

$$t = \zeta_c^{(25)} + Re^{i\varphi}, \quad dt = Rie^{i\varphi}d\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]. \quad (26)$$

Каждый из биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{6, 7, 8, 1\}$, участвующих в ИКШ по дуге C_+ , запишем в виде

$$(t - \zeta_k)^{\alpha_k} = R^{\alpha_k} e^{i\varphi\alpha_k} \left(1 - \frac{\zeta_k - \zeta_c^{(25)}}{R} e^{-i\varphi} \right)^{\alpha_k} \quad (27)$$

и последнюю скобку представим в виде сходящегося ряда

$$\left(1 - \frac{\zeta_k - \zeta_c^{(25)}}{R} e^{-i\varphi} \right)^{\alpha_k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} e^{-in\varphi}, \quad a_n^{(k)} = \left(\frac{\zeta_k - \zeta_c^{(25)}}{R} \right)^n \frac{(-\alpha_k)_n}{n!}, \quad (28)$$

поскольку $|\zeta_k - \zeta_c^{(25)}|/R < 1$, $k = \{6, 7, 8, 1\}$.

Произведение четырех биномов $\prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{6, 7, 8, 1\}$, теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{6,7,8,1\}} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} = R^{-1} e^{-i\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi}, \quad (29)$$

где учтено $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 = -1$, а величины $A_m^{(61)}$ – коэффициенты в произведении Коши

$$\prod_{k=\{6,7,8,1\}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} e^{-in\varphi} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi}, \quad (30)$$

вычисляемые рекуррентно аналогично схеме (18).

Теперь бином $(t - \zeta_4)^{\alpha_4}$ на дуге C_+ представим в виде ряда

$$(t - \zeta_4)^{\alpha_4} = (\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{\alpha_4} \left(1 - \frac{R}{\zeta_4 - \zeta_c^{(25)}} e^{i\varphi} \right)^{\alpha_4} = (\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{\alpha_4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} e^{in\varphi}, \quad (31)$$

где коэффициенты $a_n^{(4)} = \left(\frac{R}{\zeta_4 - \zeta_c^{(25)}} \right)^n \frac{(-\alpha_4)_n}{n!}$.

4.2. Представление биномов $(t - \zeta_2)^{\alpha_2}$ и $(t - \zeta_5)^{\alpha_5}$ и интеграла $J_{(2,5)}$

4.2.1. На дуге C_+ бином $(t - \zeta_2)^{\alpha_2}$ с учетом параметризации (26) и (25) запишем в виде $(t - \zeta_2)^{\alpha_2} = R^{\alpha_2} (e^{i\varphi} - 1)^{\alpha_2}$ и, переходя к углу $\varphi/2$, преобразуем его к виду

$$(t - \zeta_2)^{\alpha_2} = (2R)^{\alpha_2} e^{i\pi\alpha_2/2} \sin^{\alpha_2}(\varphi/2) e^{i\alpha_2\varphi/2}. \quad (32)$$

Аналогично для бинома $(t - \zeta_5)^{\alpha_5}$ имеем

$$(t - \zeta_5)^{\alpha_5} = (2R)^{\alpha_5} \cos^{\alpha_5}(\varphi/2) e^{i\alpha_5\varphi/2}. \quad (33)$$

Подставляя теперь представления (29), (32), (33) и дифференциал $dt = Rie^{i\varphi}d\varphi$ в интеграл $J_{(2,5)}$, запишем его в форме

$$J_{(2,5)} = -\mathcal{H}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2} e^{-i\frac{\pi\beta}{2}} \int_0^\pi \text{tg}^{1-\beta}(\varphi/2) \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} e^{in\varphi} \right) d\varphi, \quad (34)$$

где учтены соотношения $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 = -1$, $\alpha_2 + \alpha_5 = 0$.

Перемножая ряды в (34) и учитывая четность и нечетность функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$, записываем

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(61)} e^{-im\varphi} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(4)} e^{in\varphi} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p \cos p\varphi + i \sum_{p=0}^{\infty} S_p \sin p\varphi, \quad (35)$$

где обозначено

$$C_p = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^{(61)} a_{n+p}^{(4)} + a_n^{(4)} A_{n+p}^{(61)}), \quad S_p = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^{(61)} a_{n+p}^{(4)} - a_n^{(4)} A_{n+p}^{(61)}). \quad (36)$$

Проводя в (34) замену переменной $\varphi = 2\theta$ и учитывая представление (35), получаем

$$J_{(2,5)} = -2\mathcal{H}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2} e^{-i\frac{\pi\beta}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} (C_p I_p^{(\cos)} + i S_p I_p^{(\sin)}), \quad (37)$$

где введены интегралы

$$I_p^{(\cos)} = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} \theta)^{1-\beta} \cos(2p\theta) d\theta, \quad I_p^{(\sin)} = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} \theta)^{1-\beta} \sin(2p\theta) d\theta, \quad p = 0, 1, \dots \quad (38)$$

4.2.2. Вычисление осциллирующих интегралов $I_p^{(\cos)}$, $I_p^{(\sin)}$. Для нахождения интегралов в (38) построим представления

$$\cos(2p\theta) = \sum_{k=0}^p c_k^{(p)} \cos^{2k}\theta, \quad \sin(2p\theta) = \sin \theta \sum_{k=0}^{p-1} s_k^{(p)} \cos^{2k+1}\theta. \quad (39)$$

Коэффициенты $c_k^{(p)}$ при $p = 0$ и $p = 1$ очевидно равны $c_0^{(0)} = 1$, $c_0^{(1)} = -1$, $c_1^{(1)} = 2$, а для последующих значений $p > 1$ используем равенство

$$\cos(2p\theta) = 2 \cos 2\theta \cos[2(p-1)\theta] - \cos[2(p-2)\theta], \quad (40)$$

что приводит к рекуррентным соотношениям для $c_k^{(p)}$, $p \geq 2$:

$$c_k^{(p)} = 4c_{k-1}^{(p-1)} - 2c_k^{(p-1)} - c_k^{(p-2)}, \quad k = 0, \dots, p, \quad (41)$$

причем $c_p^{(p-1)} = c_{p-1}^{(p-2)} = c_p^{(p-2)} = 0$. Таким образом, коэффициенты $c_k^{(p)}$ в (39) найдены.

Разложение для $\sin(2p\theta)$, $p \geq 1$, построим с помощью дифференцирования равенства для $\cos(2p\theta)$ в (39), что дает

$$s_k^{(p)} = \frac{k+1}{p} c_{k+1}^{(p)}, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (42)$$

Получив представления (39), теперь запишем интегралы $I_p^{(\cos)}$ и $I_p^{(\sin)}$ в (38):

$$I_p^{(\cos)} = \sum_{k=0}^p c_k^{(p)} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{1-\beta} (\cos \theta)^{\beta-1+2k} d\theta, \quad I_p^{(\sin)} = \sum_{k=0}^{p-1} s_k^{(p)} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2-\beta} (\cos \theta)^{\beta+2k} d\theta. \quad (43)$$

Значения этих интегралов выражаются явно с помощью формулы из [27]:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (44)$$

что приводит окончательно к представлениям для $I_p^{(\cos)}$ и $I_p^{(\sin)}$:

$$I_p^{(\cos)} = \sum_{k=0}^p c_k^{(p)} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\beta}{2}\right)}{2k!}, \quad I_p^{(\sin)} = \sum_{k=0}^{p-1} s_k^{(p)} \frac{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\beta+1}{2}\right)}{2(k+1)!}. \quad (45)$$

Теперь интеграл $J_{(2,5)}$ в (37) можно записать в удобной форме, выделив в нем вещественную и мнимую части:

$$\operatorname{Re}(J_{(2,5)}) = -2\mathcal{H}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2} \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} \sum_{p=0}^{\infty} C_p I_p^{(\cos)} + \sin \frac{\pi\beta}{2} \sum_{p=0}^{\infty} S_p I_p^{(\sin)} \right), \quad (46)$$

$$\operatorname{Im}(J_{(2,5)}) = -2\mathcal{H}(\zeta_c^{(25)} - \zeta_4)^{-1/2} \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} \sum_{p=0}^{\infty} S_p I_p^{(\sin)} - \sin \frac{\pi\beta}{2} \sum_{p=0}^{\infty} C_p I_p^{(\cos)} \right). \quad (47)$$

Таким образом, алгоритм вычисления интеграла $J_{(2,5)}$ построен.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА $J_{(5,6)}$ ПО ОТРЕЗКУ $[\zeta_5, \zeta_6]$

5.1. Введение кластера $\mathbb{C}l^{(71)}$ прообразов $\zeta_7, \zeta_8, \zeta_1$

Три прообраза $\zeta_7, \zeta_8, \zeta_1$ объединим в один кластер $\mathbb{C}l^{(71)}$ с центром $\zeta_c^{(71)}$:

$$\zeta_c^{(71)} = (\zeta_7 + \zeta_1)/2, \quad (48)$$

и на отрезке $[\zeta_5, \zeta_6]$ введем замену переменной t :

$$t = \zeta_5 + \Delta_5 u, \quad \Delta_5 = \zeta_6 - \zeta_5, \quad u \in [0, 1]. \quad (49)$$

Для каждого из биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{7, 8, 1\}$, участвующих в ИКШ (4) по отрезку $[\zeta_5, \zeta_6]$, проведем цепочку преобразований, аналогичную (11):

$$(t - \zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_c^{(71)} + \Delta_5 u)^{\alpha_k} \left(1 - \frac{\zeta_c^{(71)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_5 - \Delta_5 u} \right)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_c^{(71)})^{\alpha_k} (1 - q^{(71)} u)^{\alpha_k} \left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(71)} u} \right)^{\alpha_k}, \quad (50)$$

$$q^{(71)} = \frac{\Delta_5}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_5}, \quad p_k = \frac{\zeta_c^{(71)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_5},$$

а последний множитель в (50) разложим в аналогичный (13) ряд по степеням $(1 - q^{(71)} u)^{-n}$:

$$\left(1 - \frac{p_k}{1 - q^{(71)} u} \right)^{\alpha_k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} (1 - q^{(71)} u)^{-n}, \quad b_n^{(k)} = \frac{p_k^n (-\alpha_k)_n}{n!}. \quad (51)$$

Скорость сходимости этого ряда будет весьма высокой, поскольку величина $p_k/(1 - q^{(71)} u)$ при $u \in [0, 1]$ имеет максимум:

$$\max_{u \in [0, 1]} \left| \frac{p_k}{1 - q^{(71)} u} \right| = \left| \frac{p_k}{1 - q^{(71)}} \right| = \left| \frac{\zeta_c^{(71)} - \zeta_k}{\zeta_c^{(71)} - \zeta_6} \right| < 1, \quad k = \{7, 8, 1\}. \quad (52)$$

Необходимое произведение биномов $\prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k}$ теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{7, 8, 1\}} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_c^{(71)})^{\beta-2} (1 - q^{(71)} u)^{\beta-2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(71)} (1 - q^{(71)} u)^{-n}, \quad (53)$$

где учтено $\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 = \beta - 2$, а значения $B_n^{(71)}$ — коэффициенты в произведении Коши рядов (51) по степеням $(1 - q^{(71)} u)^{-n}$:

$$\prod_{k=\{7, 8, 1\}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} (1 - q^{(71)} u)^{-n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(71)} (1 - q^{(71)} u)^{-n} \quad (54)$$

и вычисляемые рекуррентно по схеме (18).

5.2. Сведение интеграла $J_{(5,6)}$ к ряду по функциям $F(a, b; c; q^{(71)})$

5.2.1. Представление биномов $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{4, 2, 5, 6\}$. Биномы $(t - \zeta_k)^{\alpha_k}$, $k = \{4, 2\}$, участвующие в ИКШ (4) по отрезку $[\zeta_5, \zeta_6]$, запишем в виде

$$(t - \zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_k)^{\alpha_k} \left(1 - \frac{\Delta_5}{\zeta_k - \zeta_5} u \right)^{\alpha_k}, \quad k = \{4, 2\}, \quad (55)$$

и второй множитель в (55) разложим в ряд по степеням u^n :

$$\left(1 - \frac{\Delta_5}{\zeta_k - \zeta_5} u\right)^{\alpha_k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} u^n, \quad a_n^{(k)} = \left(\frac{\Delta_5}{\zeta_k - \zeta_5}\right)^n \frac{(-\alpha_k)_n}{n!}, \quad k = \{4, 2\}. \quad (56)$$

Произведение двух биномов $(t - \zeta_4)^{\alpha_4}(t - \zeta_2)^{\alpha_2}$ теперь запишем в виде

$$\prod_{k=\{4,2\}} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} = (\zeta_5 - \zeta_4)^{\alpha_4} (\zeta_5 - \zeta_2)^{\alpha_2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(42)} u^m, \quad A_m^{(42)} = \sum_{k=0}^m a_k^{(4)} a_{m-k}^{(2)}. \quad (57)$$

Биномы $(t - \zeta_5)^{\alpha_5}$, $(t - \zeta_6)^{\alpha_6}$ и дифференциал dt , в силу замены (49), примут вид

$$(t - \zeta_5)^{\alpha_5} = \Delta_5^{\alpha_5} u^{\alpha_5}, \quad (t - \zeta_6)^{\alpha_6} = e^{i\pi\alpha_6} \Delta_5^{\alpha_6} (1 - u)^{\alpha_6}, \quad dt = \Delta_5 du. \quad (58)$$

5.2.2. Представление интеграла $J_{(5,6)}$ в виде двойного ряда по функциям $F(a, b; c; q^{(71)})$. Используя полученные представления (53), (57), (58), запишем интеграл $J_{(5,6)}$ в форме

$$J_{(5,6)} = e^{-i\pi\beta_{\text{of}}} P^{(56)} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(71)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(42)} \int_0^1 \frac{u^{\beta-1+m} (1-u)^{1-\beta}}{(1-q^{(71)}u)^{2-\beta+n}} du, \quad (59)$$

где обозначено

$$P^{(56)} = (\zeta_5 - \zeta_4)^{-1/2} (\zeta_2 - \zeta_5)^{1-\beta} (\zeta_c^{(71)} - \zeta_5)^{\beta-2} \Delta_5.$$

Используя теперь интегральное представление (21) для функции $F(a, b; c; q^{(71)})$, преобразуем (59) к виду

$$J_{(5,6)} = e^{-i\pi\beta_{\text{of}}} P^{(56)} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(71)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(42)} \frac{\Gamma(\beta+m)\Gamma(2-\beta)}{(m+1)!} F(n+2-\beta, \beta+m; 2+m; q^{(71)}). \quad (60)$$

Величина $q^{(71)}$, участвующая в качестве аргумента функций $F(\dots; q^{(71)})$ в этом разложении, определена в (50) и, как легко оценить, очень близка к единице (в реальных расчетах значение $(1 - q^{(71)}) \sim 10^{-3} - 10^{-7}$). Поэтому, как и для интеграла $J_{(4,5)}$, вычисление значений $F(\dots; q^{(71)})$ в сумме (60) будем проводить по аналогичной (23) формуле аналитического продолжения из [27]:

$$\begin{aligned} F(n+2-\beta, \beta+m; 2+m; q) &= (1-q)^{-n} \frac{\Gamma(n)\Gamma(2+m)}{\Gamma(n+2-\beta)\Gamma(m+\beta)} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(\beta+m-n)_p (2-\beta)_p}{p! (1-n)_p} (1-q)^p + \\ &+ (-1)^n \frac{\Gamma(2+m)}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\beta+m-n)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+2-\beta)_p (\beta+m)_p}{p! (n+p)!} [k_p - \ln(1-q)] (1-q)^p, \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$k_p = \psi(1+n+p) + \psi(1+p) - \psi(n+2-\beta+p) - \psi(\beta+m+p),$$

а при $n=0$ первая сумма в (61) исчезает.

Помимо этого соотношения для вычисления $F(\dots; q^{(71)})$ будем еще использовать рекурсии, аналогичные (24), по следующей схеме.

Для значений $n=0$ и $n=1$ воспользуемся формулой (61) и вычислим два массива $Y_m^{(0)} = F(2-\beta, \beta+m; 2+m; q^{(71)})$ и $Y_m^{(1)} = F(3-\beta, \beta+m; 2+m; q^{(71)})$, $m=0, 1, \dots, M$. Теперь для каждого фиксированного значения m применим рекурсию

$$\begin{aligned} F(n+2-\beta, \beta+m; 2+m; q) &= \frac{1+m+\beta-n}{(n+1-\beta)(1-q)} F(n-\beta, \beta+m; 2+m; q) + \\ &+ \frac{2n-2\beta-m-q(n+1-2\beta-m)}{(n+1-\beta)(1-q)} F(n+1-\beta, \beta+m; 2+m; q) \end{aligned} \quad (62)$$

при увеличении номера $n = 2, 3, \dots, N$ и найдем все необходимые значения $F(n + 2 - \beta, \beta + m; 2 + m; q^{(71)})$; здесь M и N – верхние границы соответствующих разложений по m и n .

Анализ всех возможных рекуррентных соотношений для функций $F(a, b; c; q)$ показал, что при значении аргумента q , близком к единице, именно такой способ вычисления функций $F(n + 2 - \beta, \beta + m; 2 + m; q^{(71)})$ обеспечивает надежную численную устойчивость и эффективность алгоритма.

Таким образом, представление всех необходимых интегралов в виде быстросходящихся разложений построено.

Теперь для реализации эффективного итерационного процесса вычисления прообразов необходимо задание их подходящих начальных значений.

При произвольных геометрических параметрах $\mathbb{Z}$ -образной области такие приближения построить весьма сложно, поэтому будем рассматривать случай больших длин L_4 и L_5 в сравнении с толщинами h_0 и H . Этот случай соответствует стремлению прообразов ζ_6, ζ_8 и ζ_1 к прообразу $\zeta_7 = 0$ и одновременно стремлению ζ_2, ζ_4 и ζ_5 к прообразу $\zeta_3 = \infty$ так, что выполнено

$$\zeta_6 \rightarrow 0, \quad \zeta_8 \rightarrow 0, \quad \zeta_1 \rightarrow 0; \quad \zeta_4 \rightarrow \infty, \quad \zeta_2 \rightarrow \infty, \quad \zeta_5 \rightarrow \infty, \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_4} \rightarrow 0, \quad \frac{\zeta_5}{\zeta_4} \rightarrow 0. \quad (63)$$

Выводу таких аппроксимаций прообразов ζ_k посвящен следующий раздел.

6. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ

6.1. Аппроксимация интеграла $J_{(4,5)}$

В представлении (22) для интеграла $J_{(4,5)}$ в рассматриваемом случае больших длин L_4 и L_5 учтем условия (63) и оставим члены до первой степени малости $(-\zeta_4)^{-1}$. Используем определение $q^{(62)}$ из (11), что позволяет аппроксимировать (22) следующим образом:

$$J_{(4,5)} \approx -\mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta\right)} F\left(\frac{1}{2}, \beta; \frac{1}{2} + \beta; q^{(62)}\right), \quad q^{(62)} \approx \frac{\zeta_5 - \zeta_4}{\zeta_2/2 - \zeta_4} = 1 - \frac{\zeta_2/2 - \zeta_5}{\zeta_2/2 - \zeta_4}. \quad (64)$$

Поскольку аргумент $q^{(62)}$ здесь очень близок к единице, то для функции $F(., .; .; q)$ используем формулу (23) продолжения в окрестность аргумента $q = 1$. Учтем при этом член первого порядка малости $(1 - q)$, а также равенство $\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2$ (см. [27]); это дает возможность преобразовать (64) к виду

$$J_{(4,5)} \approx -\mathcal{K}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(k_0'' - \ln \frac{\zeta_2 - 2\zeta_5}{\zeta_2 - 2\zeta_4} \right), \quad k_0'' = \psi(1) + 2 \ln 2 - \psi(\beta). \quad (65)$$

6.2. Аппроксимация интегралов, родственных $J_{(2,5)}$

В этом пункте вместо оценки интеграла $J_{(2,5)}$ более удобно аппроксимировать родственные ему два других. Из фиг. 1а следует, что $\text{Im}[J_{(2,5)}] = \text{Im}[J_{(3,4)}] = h_0$, а также

$$\text{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)} J_{(2,5)}] = \text{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)} \hat{J}_0] = -H, \quad (66)$$

где $J_{(3,4)}$ – интеграл ИКШ (4) по отрезку $[\zeta_3, \zeta_4]$, а $\hat{J}_0$ – ИКШ (4) по дуге $\zeta = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, проходящей через прообраз $\zeta_0 = i$ центра симметрии z_0 :

$$\hat{J}_0 = \mathcal{K} \int_1^{-1} \prod_k (t - \zeta_k)^{\alpha_k} dt. \quad (67)$$

Значение $J_{(3,4)}$ определим с помощью замены $t = \zeta_4/u$, $u \in [0, 1]$, и учета соотношений (63), что дает аппроксимацию

$$\operatorname{Im}[J_{(2,5)}] = \operatorname{Im}[J_{(3,4)}] \approx \mathcal{H}\pi(-\zeta_4)^{-1/2}. \quad (68)$$

Интеграл $\hat{J}_0$ вычислим аналогично с помощью замены $t = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, и учета (63):

$$\hat{J}_0 \approx \mathcal{H}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} i e^{i\pi(1-\beta)} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2} \right)^{\beta-1}. \quad (69)$$

Из (69) следует необходимая в равенстве (66) связь

$$\operatorname{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)} J_{(2,5)}] = \operatorname{Im}[e^{-i\pi(2-\beta)} \hat{J}_0] \approx -\mathcal{H}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2} \right)^{\beta-1}. \quad (70)$$

6.3. Аппроксимация интеграла $J_{(5,6)}$

В представлении (60) для интеграла $J_{(5,6)}$ в рассматриваемом случае больших длин L_4 и L_5 учтем соотношения (63) и оставим члены до первой степени малости ζ_4^{-1} . Тогда, используя в двойной сумме (60) лишь главное слагаемое при $n = m = 0$, получим аппроксимацию

$$J_{(5,6)} \approx e^{-i\pi\beta} \mathcal{H}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2 - \zeta_5} \right)^{\beta-1} \Gamma(\beta) \Gamma(2-\beta) F(2-\beta, \beta; 2; q^{(71)}). \quad (71)$$

Поскольку значение аргумента $q^{(71)}$ здесь очень близко к единице:

$$q^{(71)} = \frac{\zeta_5 - \zeta_6}{\zeta_5 - \zeta_1/2} = 1 - \frac{\zeta_6 - \zeta_1/2}{\zeta_5 - \zeta_1/2},$$

то для функции $F(., ., .; q^{(71)})$ используем формулу аналитического продолжения (61) в окрестность аргумента $q = 1$. Учтем при этом члены до первого порядка малости $(1 - q^{(71)})$, что дает возможность преобразовать (71) к виду

$$J_{(5,6)} \approx e^{-i\pi\beta} \mathcal{H}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2 - \zeta_5} \right)^{\beta-1} \left(k_0 - \ln \frac{2\zeta_6 - \zeta_1}{2\zeta_5 - \zeta_1} \right), \quad k_0 = 2\psi(1) - \psi(2-\beta) - \psi(\beta). \quad (72)$$

6.4. Аппроксимация прообразов ζ_1 , ζ_4 и ζ_5

Учтем исходные условия (5), (6), (8) на геометрические параметры отображаемой $\mathbb{Z}$ -образной области, что приводит к соотношениям

$$J_{(4,5)} = -L_4, \quad J_{(2,5)} = -\frac{H + h_0 \cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\beta)} + ih_0, \quad J_{(5,6)} = e^{-i\pi\beta} L_5. \quad (73)$$

Используем теперь полученные аппроксимации (65), (68), (70), (72) интегралов $J_{(4,5)}$, $J_{(2,5)}$, $J_{(5,6)}$. Это приводит к системе четырех уравнений для начальных значений прообразов и множителя $\mathcal{K}$ в итерационном процессе их высокоточного вычисления:

$$\mathcal{H}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\psi(1) + 2 \ln 2 - \psi(\beta) - \ln \frac{\zeta_2 - 2\zeta_5}{\zeta_2 - 2\zeta_4} \right) \approx L_4, \quad (74)$$

$$\mathcal{H}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2} \right)^{\beta-1} \approx H, \quad (75)$$

$$\mathcal{H}\pi(-\zeta_4)^{-1/2} \approx h_0, \quad (76)$$

$$\mathcal{H}(-\zeta_4)^{-1/2} \left(\frac{-\zeta_5}{\zeta_2 - \zeta_5} \right)^{\beta-1} \left(2\psi(1) - \psi(2-\beta) - \psi(\beta) - \ln \frac{2\zeta_6 - \zeta_1}{2\zeta_5 - \zeta_1} \right) \approx L_5. \quad (77)$$

Деля соотношение (75) на (76) и выражая из него прообраз ζ_5 через ζ_2 , находим

$$\zeta_5 = \mu \zeta_2, \quad \mu \approx -\left(\frac{H}{h_0}\right)^{1/(\beta-1)}. \quad (78)$$

Далее разделим соотношение (74) на (76) и используем полученное приближение (78), что даст зависимость ζ_4 от прообраза ζ_2 :

$$\zeta_4 \approx \zeta_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{8} \exp\left(\psi(\beta) - \psi(1) + \frac{\pi L_4}{h_0}\right) \right]. \quad (79)$$

Наконец разделим соотношение (77) на (76) и учтем связь (78), что позволит записать

$$\ln \frac{2\zeta_5/\zeta_1 - 1}{2\zeta_6/\zeta_1 - 1} \approx \pi \frac{L_5}{h_0} (1 - \mu^{-1})^{\beta-1} + \psi(2 - \beta) + \psi(\beta) - 2\psi(1). \quad (80)$$

Используем теперь равенство (2) для прообразов, т.е. $\zeta_1 \zeta_5 = \zeta_2 \zeta_6 = -1$, из которого следуют, с учетом (78), соотношения $\zeta_6/\zeta_1 = \zeta_5/\zeta_2 = \mu$, $\zeta_5 = -1/\zeta_1$. Подстановка этих равенств в (80) дает окончательное представление для прообраза ζ_1 :

$$\zeta_1 \approx \left\{ \frac{1-2\mu}{2} \exp\left[\frac{\pi L_5}{h_0} (1 - \mu^{-1})^{\beta-1} + \psi(2 - \beta) + \psi(\beta) - 2\psi(1)\right] - \frac{1}{2} \right\}^{-1/2}. \quad (81)$$

Тогда последовательность вычисления аппроксимаций прообразов будет следующей. Вычислим ζ_1 по (81), далее найдем $\zeta_5 = -1/\zeta_1$, затем, в силу (78), получим $\zeta_2 = \zeta_5/\mu$, после этого из (79) определим ζ_4 и, в силу связи $\zeta_8 = -1/\zeta_4$, наконец, найдем ζ_8 .

Таким образом, начальные приближения для всех прообразов построены; для последующего итерационного метода обозначим их через $\zeta_k^{(0)}$.

7. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРООБРАЗОВ

Запишем систему трех уравнений относительно трех неизвестных прообразов ζ_1 , ζ_2 и ζ_4 . Для этого уравнение для $J_{(4,5)}$ из (73) разделим на уравнение для $\text{Im}[J_{(2,5)}]$ из (73) и результат запишем в виде функции для $\Phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4)$:

$$\Phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4) = \frac{J_{(4,5)}}{\text{Im}[J_{(2,5)}]} + \frac{L_4}{h_0} = 0. \quad (82)$$

Далее уравнение для $\text{Re}[J_{(2,5)}]$ из (73) разделим на $\text{Im}[J_{(2,5)}]$ и получим

$$\Phi_2(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4) = \frac{\text{Re}[J_{(2,5)}]}{\text{Im}[J_{(2,5)}]} + \frac{\cos(\pi\beta) + H/h_0}{\sin(\pi\beta)} = 0. \quad (83)$$

И, наконец, уравнение для $J_{(5,6)}$ из (73) разделим на $\text{Im}[J_{(2,5)}]$ и запишем

$$\Phi_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4) = \frac{|J_{(5,6)}|}{\text{Im}[J_{(2,5)}]} - \frac{L_5}{h_0} = 0. \quad (84)$$

В этой системе, как сказано ранее, прообразы ζ_5 , ζ_6 и ζ_8 связаны с ζ_1 , ζ_2 и ζ_4 формулами (2).

Решение системы (82)–(84) проводилось итерационным методом Ньютона

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{A}^{-1} \Phi(\mathbf{x}^{(n)}), \quad (85)$$

где $\mathbf{x} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4)^T$ – вектор искомых прообразов, Φ – вектор-функция значений (82)–(84), а $\mathbf{A}$ – матрица частных производных $\partial \Phi_m / \partial \zeta_k$. Необходимые девять частных производных

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial \zeta_k}, \quad m = \{1, 2, 3\}, \quad k = \{1, 2, 4\},$$

находились по формулам конечных разностей

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial \zeta_k} \approx \frac{\Phi_m(\cdot, \zeta_k + \delta_k, \cdot) - \Phi_m(\cdot, \zeta_k - \delta_k, \cdot)}{2\delta_k}, \quad \delta_k = 10^{-5} \zeta_k,$$

а начальные приближения $\zeta_1^{(0)}$, $\zeta_2^{(0)}$ и $\zeta_4^{(0)}$ брались из (81) и последующей схемы нахождения остальных $\zeta_k^{(0)}$. Итерации (85) проводились до достижения относительной погрешности $\delta_\zeta = |(\zeta_k^{(n+1)} - \zeta_k^{(n)})/\zeta_k^{(n)}| \approx 10^{-20}$. В большинстве проведенных обширных расчетов для этого требовалось 7–8 итераций и лишь в некоторых редких случаях было необходимо 9–11 итераций.

Сходимость процесса (85) оказалась очень чувствительна к выбору начального приближения. Так, отклонение от полученных начальных значений (81), (78), (79) очень часто приводило к расходимости итераций, что объясняется сильной нелинейной зависимостью значений интегралов $J_{(4,5)}$, $J_{(2,5)}$, $J_{(5,6)}$ от прообразов ζ_k .

В некоторых редких случаях, когда внутренняя толщина H сильно отличалась от толщины h_0 горизонтальных полочек $\mathbb{Z}$ -образного профиля (см. фиг. 1), выбор начальных значений по формулам (81), (78), (79) также не приводил к сходимости итераций (85). В этом случае процесс модифицировался в соответствии с методом продолжения по параметру (см. [29]). Геометрические характеристики β , L_4 , L_5 , h_0 области $\mathbb{Z}$ полагались равными нужным значениям, а толщина H выбиралась равной h_0 , и итерационный процесс (85) проводился до достижения невысокой точности $\delta_\zeta \approx 10^{-4}$ прообразов ζ_k . Далее, величина H монотонно изменялась с небольшим шагом ΔH , $H_{m+1} = H_m + \Delta H$, а начальные значения прообразов $\zeta_k^{(0)}$ при этом выбирались из решения задачи для H_m . Высокая точность $\delta_\zeta \approx 10^{-20}$ вычисления прообразов ζ_k при этом требовалась лишь на последнем этапе достижения H_m необходимой величины H .

После нахождения прообразов ζ_k множитель $\mathcal{H}$ в ИКШ (4) может быть найден из любого уравнения (73); в частности, из (73) для $J_{(4,5)}$ и (22) получаем

$$\mathcal{H} = L_4 \Delta_4^{1/2-\beta} (\zeta_c^{(62)} - \zeta_4)^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(62)} F\left(m + \beta, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \beta; q^{(62)}\right) \right]^{-1}. \quad (86)$$

Таким образом, проблема нахождения прообразов ζ_k и множителя $\mathcal{H}$ в ИКШ (4) решена.

8. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ $f(\zeta)$

8.1. Представление $f(\zeta)$ вблизи прообразов ζ_k

Отображение $f(\zeta)$ вблизи конечных прообразов и прообраза $\zeta_3 = \infty$ имеют различную структуру, поэтому рассмотрим их отдельно.

8.1.1. Представление $f(\zeta)$ вблизи конечных прообразов. Получим разложение функции $f(\zeta)$ вблизи точек ζ_k , $k \neq 3$. В интеграле (4) все биномы $(t - \zeta_n)^{\alpha_n}$, кроме $n = k$, представим в виде

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = (\zeta_k - \zeta_n)^{\alpha_n} \left(1 - \frac{t - \zeta_k}{\zeta_n - \zeta_k}\right)^{\alpha_n} = (\zeta_k - \zeta_n)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^{(n)} (t - \zeta_k)^m, \quad \gamma_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m}{(\zeta_n - \zeta_k)^m m!}. \quad (87)$$

Перемножая все такие разложения по указанному в (18) правилу Коши и обозначая получаемые коэффициенты через G_m , для производной $f'(t)$ искомой функции в окрестности прообраза ζ_k записываем

$$f'(t) = \mathcal{H} \prod_{n \neq k} (\zeta_k - \zeta_n)^{\alpha_n} (t - \zeta_k)^{\alpha_k} \sum_{m=0}^{\infty} G_m (t - \zeta_k)^m. \quad (88)$$

Интегрируя это разложение от ζ_k до ζ , получаем представление $f(\zeta)$ вблизи ζ_k :

$$f(\zeta) = z_k + \mathcal{H} \prod_{n \neq k} (\zeta_k - \zeta_n)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_m}{m + \alpha_k + 1} (\zeta - \zeta_k)^{m + \alpha_k + 1}. \quad (89)$$

Этот ряд сходится в верхнем полукруге $\{\zeta : |\zeta - \zeta_k| < R_k, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, где $R_k = \min_{n \neq k} |\zeta_n - \zeta_k|$ — расстояние от ζ_k до ближайшего соседнего прообраза ζ_n .

8.1.2. Представление $f(\zeta)$ вблизи бесконечноудаленного прообраза ζ_3 . Вблизи точки $\zeta_3 = \infty$ подынтегральные биномы разложим в ряды

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n} \left(1 - \frac{\zeta_n}{t}\right)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^{(n)} t^{-m}, \quad \gamma_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m \zeta_n^m}{m!}. \quad (90)$$

Перемножая все такие разложения по правилу Коши, обозначая получаемые коэффициенты через G_m и учитывая равенство $\sum_{n \neq 3} \alpha_n = -3/2$, для производной $f'(t)$ записываем представление в окрестности ζ_3

$$f'(t) = \mathcal{H} t^{-3/2} \sum_{m=0}^{\infty} G_m t^{-m}. \quad (91)$$

Интегрируя это разложение от ζ_3 до ζ , получаем разложение $f(\zeta)$ вблизи ζ_3 :

$$f(\zeta) = z_3 - \mathcal{H} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_m}{m + 1/2} \zeta^{-m-1/2}. \quad (92)$$

Этот ряд сходится во внешности полукруга радиуса R_3 , т.е. $\{\zeta : |\zeta| > R_3, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, где $R_3 = \max\{|\zeta_2|, |\zeta_4|\}$.

8.1.3. Представление $f(\zeta)$ вблизи прообраза центра симметрии ζ_0 . Вблизи точки $\zeta_0 = i$ все подынтегральные биномы разложим в ряды

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = (\zeta_0 - \zeta_n)^{\alpha_n} \left(1 - \frac{t - \zeta_0}{\zeta_n - \zeta_0}\right)^{\alpha_n} = (\zeta_0 - \zeta_n)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^{(n)} (t - \zeta_0)^m, \quad \gamma_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m}{(\zeta_n - \zeta_0)^m m!}. \quad (93)$$

Перемножая все такие разложения и обозначая получаемые коэффициенты через G_m , для производной $f'(t)$ в окрестности точки ζ_0 имеем

$$f'(t) = \mathcal{H} \prod_n (\zeta_0 - \zeta_n)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} G_m (t - \zeta_0)^m. \quad (94)$$

Интегрируя это разложение от ζ_0 до ζ , получаем представление $f(\zeta)$ вблизи точки ζ_0 :

$$f(\zeta) = z_0 + \mathcal{H} \prod_n (\zeta_0 - \zeta_n)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G_m}{m + 1} (\zeta - \zeta_0)^{m+1}. \quad (95)$$

Этот ряд сходится в круге $\{\zeta : |\zeta - \zeta_0| < 1\}$, поскольку на его границе лежит ближайшая к $\zeta_0 = i$ особая точка $\zeta_7 = 0$.

8.2. Представление $f(\zeta)$ в полукольце $\mathcal{R}_+$

Биномы $(t - \zeta_n)^{\alpha_n}$ для $n = \{6, 7, 8, 1\}$ разложим в ряды

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n} \left(1 - \frac{\zeta_n}{t}\right)^{\alpha_n} = t^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{(n)} t^{-m}, \quad u_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m \zeta_n^m}{m!}, \quad (96)$$

сходящиеся вне полукруга радиуса r_* , т.е. при $\{\zeta : |\zeta| > r_*, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, где $r_* = \max\{\zeta_1, |\zeta_6|\}$. Перемножая эти разложения по правилу Кошу и обозначая коэффициенты U_m , получаем

$$\prod_{n=6,7,8,1} (t - \zeta_n)^{\alpha_n} = t^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} U_m t^{-m}, \quad (97)$$

где, с учетом (3), имеем $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_1 = -1$.

Теперь биномы $(t - \zeta_n)^{\alpha_n}$ для $n = \{2, 4, 5\}$ разложим в ряды

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = (-\zeta_n)^{\alpha_n} \left(1 - \frac{t}{\zeta_n}\right)^{\alpha_n} = (-\zeta_n)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} V_m^{(n)} t^m, \quad V_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m}{\zeta_n^m m!}, \quad (98)$$

сходящиеся в полукруге радиуса R_* , т.е. при $\{\zeta : |\zeta| < R_*, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, где $R_* = \min\{\zeta_2, |\zeta_5|\}$. Перемножая эти разложения по правилу Коши и обозначая коэффициенты V_m , записываем

$$\prod_{n=2,4,5} (t - \zeta_n)^{\alpha_n} = (-\zeta_2)^{\alpha_2} (-\zeta_4)^{\alpha_4} (-\zeta_5)^{\alpha_5} \sum_{m=0}^{\infty} V_m t^m. \quad (99)$$

Теперь для получения представления $f'(t)$ перемножим разложения (97) и (99) и найдем

$$f'(t) = \mathcal{H}(-\zeta_2)^{\alpha_2} (-\zeta_4)^{\alpha_4} (-\zeta_5)^{\alpha_5} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m t^{m-1}, \quad (100)$$

где обозначено

$$S_m = \sum_{p=0}^{\infty} U_p V_{p+m}, \quad S_{-m} = \sum_{p=0}^{\infty} V_p U_{p+m}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (101)$$

Интегрируя это разложение от ζ_0 до ζ , получаем представление $f(\zeta)$ в полукольце $\mathcal{R}_+$:

$$f(\zeta) = z_0 + \mathcal{H}(-\zeta_2)^{\alpha_2} (-\zeta_4)^{\alpha_4} (-\zeta_5)^{\alpha_5} \left\{ S_0 \ln \left(\frac{\zeta}{\zeta_0} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{S_m}{m} (\zeta^m - \zeta_0^m) - \frac{S_{-m}}{m} (\zeta^{-m} - \zeta_0^{-m}) \right] \right\}. \quad (102)$$

Этот ряд Лорана сходится в полукольце $\mathcal{R}_+$, т.е. при $\{\zeta : r_* < |\zeta| < R_*, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$.

8.3. Представление $f(\zeta)$ вблизи отрезков $[\zeta_7, \zeta_8]$ и $[\zeta_3, \zeta_4]$

8.3.1. Отображение $f(\zeta)$ вблизи отрезка $[\zeta_7, \zeta_8]$. Введем следующую линейную замену переменных в ИКШ (4):

$$t = \frac{\zeta_8}{2}(u+1), \quad u = \frac{2}{\zeta_8}t - 1, \quad (103)$$

откуда, с учетом равенств $\alpha_7 = \alpha_8 = -1/2$, следует представление

$$(t - \zeta_7)^{\alpha_7} (t - \zeta_8)^{\alpha_8} = \frac{2}{\zeta_8} (u^2 - 1)^{-1/2}, \quad dt = \frac{\zeta_8}{2} du. \quad (104)$$

Остальные биномы $(t - \zeta_n)^{\alpha_n}$ с помощью замены (103) представим в виде

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = \left(\frac{\zeta_8 - 2\zeta_n}{2} \right)^{\alpha_n} (1 - p_n u)^{\alpha_n}, \quad p_n = \frac{\zeta_8}{2\zeta_n - \zeta_8}, \quad n = \{1, 2, 4, 5, 6\}, \quad (105)$$

и далее их разложим в ряды

$$(t - \zeta_n)^{\alpha_n} = \left(\frac{\zeta_8 - 2\zeta_n}{2} \right)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{\infty} e_m^{(n)} u^m, \quad e_m^{(n)} = \frac{(-\alpha_n)_m p_n^m}{m!}. \quad (106)$$

Перемножая эти разложения по правилу Коши и обозначая коэффициенты ряда через E_m , имеем

$$\prod_{n=1,2,4,5,6} (t - \zeta_n)^{\alpha_n} = A \sum_{m=0}^{\infty} E_m u^m, \quad A = \prod_{n=1,2,4,5,6} \left(\frac{\zeta_8 - 2\zeta_n}{2} \right)^{\alpha_n}. \quad (107)$$

Подставляя представления (104) и (107) в ИКШ (4), записываем для суперпозиции

$$f' \circ t(u) = \mathcal{H}A(u^2 - 1)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} E_m u^m. \quad (108)$$

Интегрируя это разложение от $u = -1$ до u , и вводя специальные интегралы $I_m(u)$, получаем

$$f \circ t(u) = \mathcal{H}A \sum_{m=0}^{\infty} E_m I_m(u), \quad I_m(u) = \int_{-1}^u (u^2 - 1)^{-1/2} u^m du. \quad (109)$$

Интегралы $I_m(u)$ будем брать с помощью замены $u = \cosh v$, $v = \operatorname{arcsh} u$, тогда

$$I_m(u) = \int_{\pi i}^{\operatorname{arcsh} u} \cosh^m v dv, \quad m = 0, 1, \dots. \quad (110)$$

Значения $I_m(u)$ при $m = 0$ и $m = 1$ получаем явно:

$$I_0(u) = \operatorname{arcsh} u - \pi i, \quad I_1(u) = \sqrt{u^2 - 1}, \quad (111)$$

а для всех последующих m находим $I_m(u)$ рекуррентно интегрированием по частям:

$$I_m(u) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{m} u^{m-1} + \frac{m-1}{m} I_{m-2}(u), \quad m = 2, 3, \dots. \quad (112)$$

Таким образом, учитывая (109) и (103), разложение $f(\zeta)$ вблизи отрезка $[\zeta_7, \zeta_8]$ запишем в виде

$$f(\zeta) = \mathcal{H}A \sum_{m=0}^{\infty} E_m I_m(u), \quad u = \frac{2}{\zeta_8} \zeta - 1, \quad (113)$$

которое сходится в полукруге $\mathbb{U}_+$ с центром в точке $\zeta_* = \zeta_8/2$ и радиусом R_* :

$$\{\zeta : |\zeta - \zeta_*| < R_*, \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}, \quad R_* = \min[\zeta_1 - \zeta_*, \zeta_* - \zeta_6]. \quad (114)$$

8.3.2. Отображение $f(\zeta)$ вблизи отрезка $[\zeta_3, \zeta_4]$. В ИКШ (4) используем рациональную замену переменной $t = -1/w$ и учтем симметричность $\mathbb{Z}$ -образной области, включающую условия (3), (2):

$$\alpha_{n+4} = \alpha_n, \quad \zeta_{n+4} = -1/\zeta_n, \quad n = 1, \dots, 4.$$

Это приводит к преобразованию подынтегрального выражения в (4) в себя же, а отрезка $[\zeta_3, \zeta_4]$ — в отрезок $[\zeta_7, \zeta_8]$. Тогда представление $f(\zeta)$ вблизи $[\zeta_3, \zeta_4]$ будет иметь вид (113) с подстановкой $u = -2/(\zeta_8 \zeta) - 1$, следующей из замены $t = -1/w$. Сходиться такое разложение будет во внешности полукруга

$$\left\{ \zeta : \left| \frac{1}{\zeta} + \zeta_* \right| < R_*, \operatorname{Im} \zeta \geq 0 \right\}, \quad R_* = \min[\zeta_1 - \zeta_*, \zeta_* - \zeta_6], \quad \zeta_* = \zeta_8/2. \quad (115)$$

Построенные в этом разделе разложения искомой функции $f(\zeta)$ полностью покрывают всю полуплоскость $\mathbb{H}_+ = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta \geq 0\}$, причем скорость сходимости в соответствующих подобластях $\mathbb{H}_+$ является экспоненциальной.

9. ОТОБРАЖЕНИЕ ОБЛАСТИ $\mathbb{Z}$ НА ПРЯМОУГОЛЬНИК Π

9.1. Отображение $w = g(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}_+$ на прямоугольник Π

Имея отображение $z = f(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}_+$ на область $\mathbb{Z}$, построим теперь отображение $U(z)$ области $\mathbb{Z}$ на прямоугольник Π единичной высоты и расположенный симметрично на плос-

кости w так, что вершины z_3, z_4, z_7, z_8 с прямыми углами перейдут в вершины w_3, w_4, w_7, w_8 прямоугольника соответственно. Его длина L_0 будет найдена в процессе построения, тогда вершины Π будут иметь координаты $w_3 = L_0/2, w_4 = L_0/2 + i, w_7 = -L_0/2 + i, w_8 = -L_0/2$. Такое отображение можно представить с помощью эллиптического синуса $\operatorname{sn}(w, k)$ и обратного к нему $\operatorname{sn}^{-1}(\zeta, k)$ (см. [30]). Однако далее для единообразия выкладок будем использовать аппарат функций Гаусса $F(a, b; c; z)$.

Построим отображение $w = g(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}_+$ с уже найденным расположением прообразов ζ_k на прямоугольник Π с соответствием $w_3 = g(\zeta_3), w_4 = g(\zeta_4), w_7 = g(\zeta_7), w_8 = g(\zeta_8)$. Функция $w = g(\zeta)$ представима интегралом

$$g(\zeta) = w_k + \mathcal{M} \int_{\zeta_k}^{\zeta} [(t - \zeta_4)t(t - \zeta_8)]^{-1/2} dt, \quad k = \{3, 4, 7, 8\}, \quad \mathcal{M} > 0. \quad (116)$$

Множитель $\mathcal{M}$ и длину L_0 прямоугольника Π найдем из условий

$$\mathcal{M} \int_{\zeta_7}^{\zeta_8} [(t - \zeta_4)t(t - \zeta_8)]^{-1/2} dt = -i, \quad (117)$$

$$\mathcal{M} \int_{\zeta_4}^{\zeta_7} [(t - \zeta_4)t(t - \zeta_8)]^{-1/2} dt = -L_0. \quad (118)$$

В уравнении (117) введем замену $t = \zeta_8 u$ и с помощью метода из п. 3.1 с использованием представления функции $F(a, b; c; z)$ в (21) и с учетом связи $\zeta_4 = -1/\zeta_8$ преобразуем его к виду

$$\pi \mathcal{M} \sqrt{\zeta_8} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\zeta_8^2\right) = 1. \quad (119)$$

В уравнении (118) введем замену $t = \zeta_4(1 - u)$ и аналогично предыдущему преобразуем его к виду

$$\pi \mathcal{M} \sqrt{\frac{\zeta_8}{1 + \zeta_8^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; (1 + \zeta_8^2)^{-1}\right) = L_0. \quad (120)$$

Из уравнения (119) следует значение множителя $\mathcal{M}$, а из отношения (120) и (119) — длина L_0 прямоугольника Π :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\pi \sqrt{\zeta_8} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\zeta_8^2\right)}, \quad L_0 = \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; (1 + \zeta_8^2)^{-1}\right)}{\sqrt{1 + \zeta_8^2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\zeta_8^2\right)}. \quad (121)$$

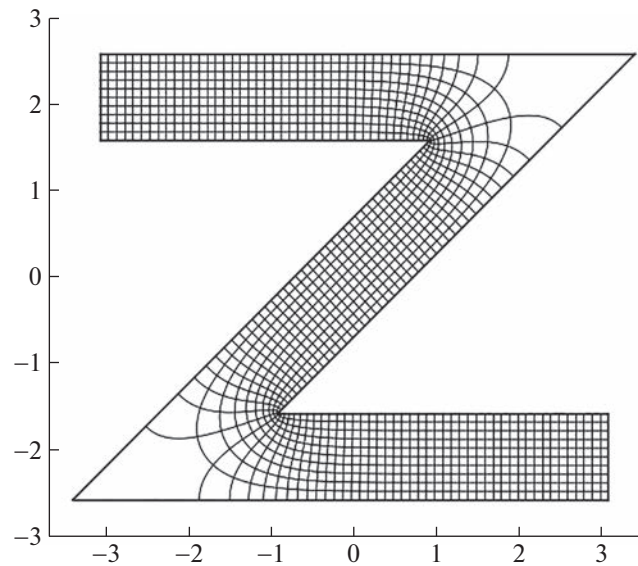
В выражении для длины L_0 функцию $F(a, b; c; z)$ в числителе представим по формуле аналитического продолжения (23), что приведет к соотношению

$$L_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{1 + \zeta_8^2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n k_n \left(\frac{\zeta_8^2}{1 + \zeta_8^2} \right)^n - \ln \left(\frac{\zeta_8^2}{1 + \zeta_8^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\zeta_8^2}{1 + \zeta_8^2} \right)^n \right] \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\zeta_8^2\right) \right]^{-1}, \quad (122)$$

где $a_n = \left[\left(\frac{1}{2} \right)_n / n! \right]^2$, $k_0 = 4 \ln 2$, $k_n = k_{n-1} - \frac{2}{n(2n-1)}$.

В случае вытянутых полочек области $\mathbb{Z}$, когда прообраз $\zeta_8 \rightarrow 0$, асимптотика для длины L_0 прямоугольника принимает простой вид

$$L_0 = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{4}{\zeta_8} \right) (1 + O(\zeta_8^2)), \quad \zeta_8 \rightarrow 0. \quad (123)$$



Фиг. 2. Отображение на $\mathbb{Z}$ -образную область с углом $\pi\beta$, $\beta = 1.7563918$.

9.2. Представление отображения $w = g(\zeta)$ вблизи отрезков $[\zeta_3, \zeta_4]$ и $[\zeta_7, \zeta_8]$

Вблизи отрезка $[\zeta_7, \zeta_8]$ для интеграла (116) используем разложения, аналогичные полученным в подпункте 8.3.1. Это позволяет записать $w = g(\zeta)$ в виде ряда

$$g(\zeta) = \mathcal{M} \left(\frac{2}{\zeta_8 - 2\zeta_4} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)_m}{m!} \left(\frac{\zeta_8}{2\zeta_4 - \zeta_8} \right)^m I_m(u), \quad u = \frac{2}{\zeta_8} \zeta - 1, \quad (124)$$

где $\mathcal{M}$ определено в (121), а функции $I_m(u)$ – в (111) и (112). Это разложение сходится в полукруге $\mathbb{U}_+$ с центром в точке $\zeta_* = \zeta_8/2$ и радиусом $R_* = \zeta_8/2 - \zeta_4$.

Вблизи отрезка $[\zeta_3, \zeta_4]$ используем разложения, аналогичные полученным в подпункте 8.3.2, что дает для $w = g(\zeta)$ представление (124), но с подстановкой $u = -2/(\zeta_8\zeta) - 1$. Этот ряд сходится во внешности полукруга

$$\left\{ \zeta : \left| \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta_8}{2} \right| < R_*, \operatorname{Im} \zeta \geq 0 \right\}, \quad R_* = \frac{\zeta_8}{2} - \zeta_4. \quad (125)$$

Полученные здесь два разложения целиком покрывают полуплоскость $\mathbb{H}_+$, что завершает построение функции $w = g(\zeta)$.

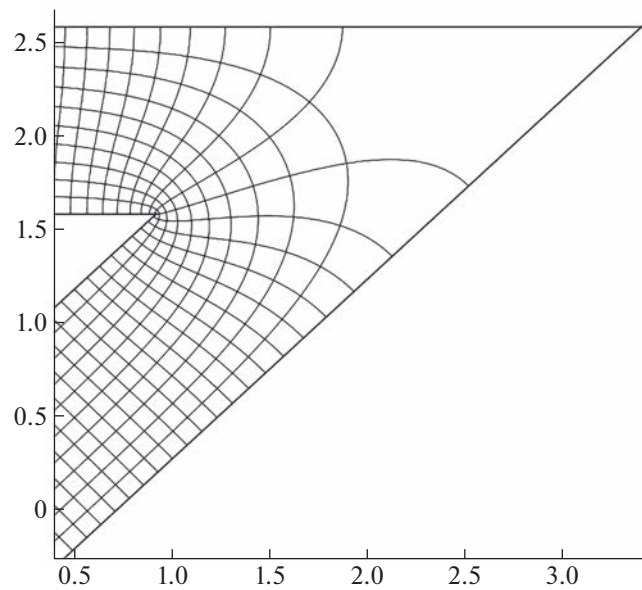
Необходимое для дальнейшего отображение прямоугольника Π на область $\mathbb{Z}$ и обратное к нему даются суперпозициями $f \circ g^{-1}(w)$ и $g \circ f^{-1}(z)$, где $g^{-1}(w)$ и $f^{-1}(z)$ – обратные к функциям $g(\zeta)$ и $f(\zeta)$.

10. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

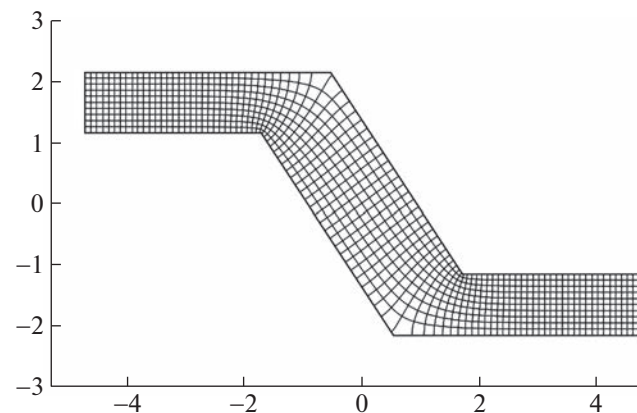
Приведем результаты вычисления параметров ИКШ для различных геометрических характеристик области $\mathbb{Z}$. Напомним здесь, что нормировка отображения $f(\zeta)$ включает условия $\zeta_7 = 0$, $\zeta_3 = \infty$ и $f(i) = z_0 = 0$, из которых вытекают еще три соотношения $\zeta_1\zeta_5 = \zeta_2\zeta_6 = \zeta_4\zeta_8 = -1$.

Размеры области $\mathbb{Z}$ выбирались такими, чтобы длина L_0 прямоугольника Π , на который отображалась $\mathbb{Z}$ -образная область, была с большой точностью кратна числу $\Delta = 0.1$ – шагу квадратной декартовой сетки в прямоугольнике Π .

Ниже приведены результаты расчетов параметров ИКШ, причем даны только три прообраза $\zeta_6, \zeta_8, \zeta_1$, образующие кластер вокруг прообраза $\zeta_7 = 0$. Остальные прообразы находятся из условия $\zeta_k = -1/\zeta_{k+4}$.



Фиг. 3. Отображение на $\mathbb{Z}$ -образную область при $\beta = 1.7563918$ вблизи z_1 .



Фиг. 4. Отображение на $\mathbb{Z}$ -образную область с углом $\pi\beta$, $\beta = 1.31$.

На фиг. 2 дана картина образа такой сетки, а размеры области $\mathbb{Z}$ были выбраны следующими: $h_0 = 1$, $H = 1$, $\beta = 1.7563918$, $L_4 = 4$, $L_5 = 6$. Вычисление прообразов ζ_k и множителя $\mathcal{H}$ дало следующее:

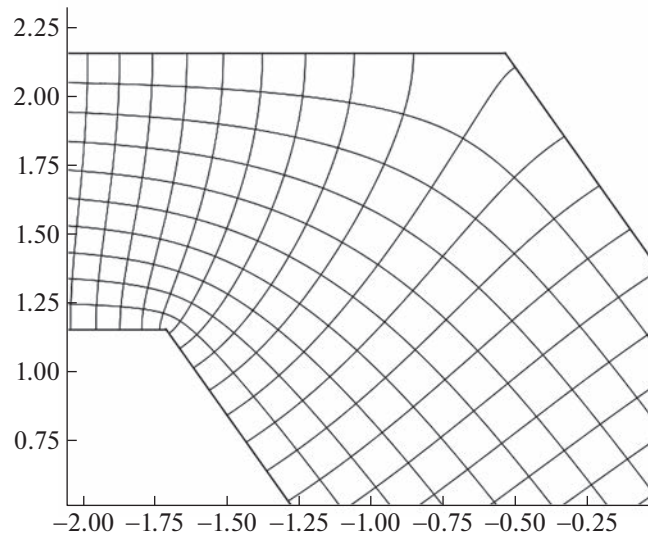
$$\begin{aligned}\zeta_6 &= -1.2456995997 \times 10^{-3}, & \zeta_8 &= 5.4153955997 \times 10^{-9}, \\ \zeta_1 &= 1.2456991666 \times 10^{-3}, & \mathcal{H} &= 4325.5014456.\end{aligned}$$

Полученная длина L_0 прямоугольника Π при этом составила $L_0 = 12.9999758184$.

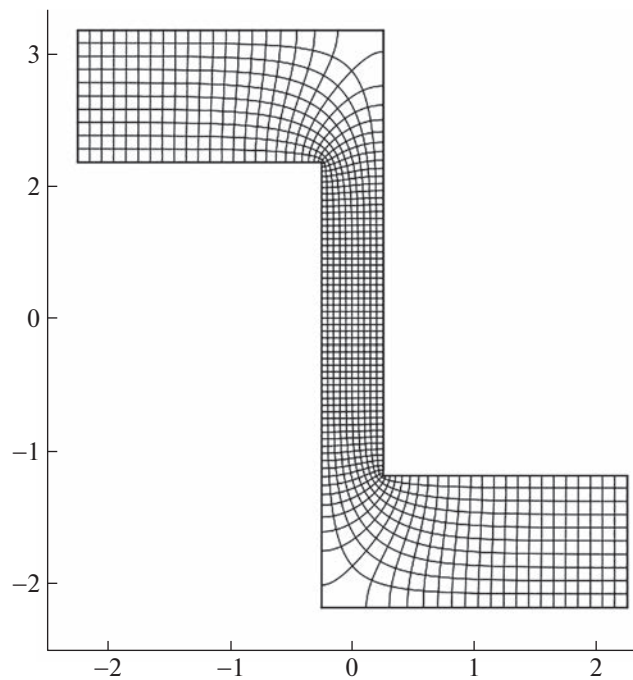
На фиг. 3 представлена эта же сетка с увеличением вблизи вершины z_1 входящего угла.

На фиг. 4 дана картина образа сетки прямоугольника Π , а параметры области $\mathbb{Z}$ были следующие: $h_0 = 1$, $H = 1.5355832266$, $\beta = 1.31$, $L_4 = 3$, $L_5 = 4$. Вычисленные параметры ИКШ таковы:

$$\begin{aligned}\zeta_6 &= -3.0747586008 \times 10^{-2}, & \zeta_8 &= 1.5469999867 \times 10^{-6}, \\ \zeta_1 &= 7.7052145553 \times 10^{-3}, & \mathcal{H} &= 255.93039745.\end{aligned}$$



Фиг. 5. Отображение на $\mathbb{Z}$ -образную область при $\beta = 1.31$ вблизи z_1 .



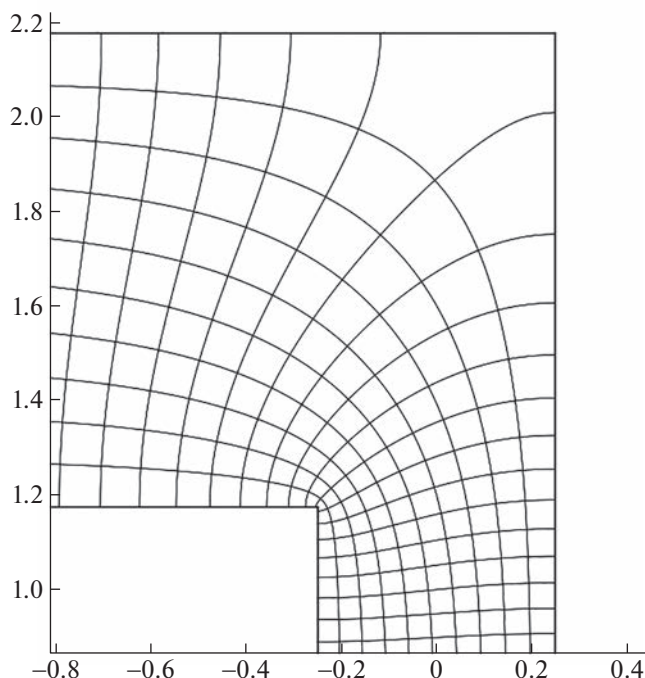
Фиг. 6. Отображение на $\mathbb{Z}$ -образную область с углом $\pi\beta$, $\beta = 1.5$.

Полученная длина L_0 прямоугольника Π составила $L_0 = 9.4000011995$.

На фиг. 5 представлена эта же сетка с увеличением вблизи вершины z_1 .

На фиг. 6 дан образ сетки прямоугольника, а размеры области $\mathbb{Z}$ были взяты следующими: $h_0 = 1$, $H = 0.5$, $\beta = 1.5$, $L_4 = 2$, $L_5 = 3.3564632240$. Найденные параметры ИКШ были следующими:

$$\begin{aligned}\zeta_6 &= -7.6003357522 \times 10^{-5}, & \zeta_8 &= 6.0280691010 \times 10^{-7}, \\ \zeta_1 &= 3.0551837893 \times 10^{-4}, & \mathcal{H} &= 410.99195216.\end{aligned}$$



Фиг. 7. Отображение на $\mathbb{Z}$ -образную область при $\beta = 1.5$ вблизи z_1 .

Полученная длина L_0 прямоугольника Π составила $L_0 = 10$.

На фиг. 7 показана эта же сетка с увеличением вблизи вершины z_1 .

Все представленные результаты дополнительно проверялись нахождением интеграла ИКШ по отрезкам $[\zeta_7, \zeta_8]$, $[\zeta_2, \zeta_3]$ и по дуге $\zeta = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, соответствующей переходу со стороны (z_1, z_2) на сторону (z_5, z_6) . Эти интегралы находились аналогично описанным выше алгоритмам с введением соответствующих кластеров и построением быстросходящихся разложений. Сравнение полученных интегралов с длинами сторон $[z_7, z_8]$, $[z_2, z_3]$ и с толщиной H центральной части области $\mathbb{Z}$ показало требуемую относительную точность $\delta = 10^{-20}$.

Характерное время нахождения параметров ИКШ и построения показанных сеток на PC Intel Core i3 составило порядка 20 секунд.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод нахождения параметров ИКШ включает объединение определенных прообразов вершин ζ_k в кластер, выбор центра этого кластера, построение наиболее удобных быстросходящихся разложений соответствующих биномов в кластере и произведение таких разложений. Полученное представление позволяет свести интегрирование по отрезку $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ к ряду по гипергеометрическим функциям Гаусса $F(a, b; c; q)$, для которых используются формулы аналитического продолжения в окрестность точки $q = 1$ и численно устойчивые трехчленные рекуррентные соотношения по параметрам a , b и c .

Построенные разложения оказываются также весьма эффективными при выборе начальных приближений прообразов $\zeta_k^{(0)}$ в итерационном методе Ньютона. Использование главных членов разложений позволяет выразить $\zeta_k^{(0)}$ в явном виде через элементарные функции, а последующие 6–11 итераций обеспечивают относительную точность параметров ИКШ до $\delta = 10^{-20}$.

Ситуация кроудинга прообразов, создающая для большинства численных методов значительные трудности, в разработанном подходе является наоборот благоприятствующей, поскольку

аналитическое продолжение функций $F(a, b; c; q)$ в окрестность точки $q = 1$ имеет разложение по степеням $(1 - q)^n$, что обеспечивает быструю сходимость представлений.

После нахождения параметров ИКШ искомое отображение $f(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H}$ на исходную область $\mathbb{Z}$ строится в виде степенных разложений в прообразах ζ_k , регулярных разложений в точке $\zeta_0 = i$ (прообразе центра симметрии $\mathbb{Z}$), в виде ряда Лорана в полукольце $|\zeta| \in (\varepsilon_*, R_*)$ и в виде специальных рядов в окрестности некоторых отрезков $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$. Полученные разложения покрывают всю полуплоскость $\mathbb{H}$ и решают задачу эффективного построения отображения $f(\zeta)$.

Разработанный метод применен к построению отображения полуплоскости на область $\mathbb{Z}$, когда возникает кроудинг четырех прообразов вблизи точки $\zeta = 0$ и кроудинг четырех прообразов вблизи $\zeta = \infty$. Разработанный подход также эффективно работает в случае многоугольников с числом вершин, большим восьми, и с образованием более сложного кроудинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962.
2. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Gaier D. Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Springer Tracts in Natural Philosophy. V. 3. Berlin: Springer-Verlag, 1964.
4. Trefethen L.N. Numerical computation of the Schwarz–Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1980. V. 1. P. 82–102.
5. Trefethen L.N., Ed. Numerical Conformal Mapping, Amsterdam: North-Holland, 1986.
6. Driscoll T.A. A MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping // ACM Trans. Math. Soft. 1996. V. 22. P. 168–186.
7. Henrici P. Applied and computational complex analysis. V. 3: N.-Y.—London, Sidney, Toronto: Jonh Willey & Sons, 1991.
8. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz–Christoffel mapping, Vol. 8 of Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2002.
9. Trefethen L.N., Driscoll T.A. Schwarz–Christoffel transformation. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
10. Zemach C. A conformal map formula for difficult cases // J. Comput. Appl. Math. 1986. V. 14. P. 207–215.
11. Kriekes B.C., Rubin R.L. On the crowding of parameters associated with Schwarz–Christoffel transformation // Appl. Math. Comput. 1988. V. 28. № 4. P. 297–308.
12. Wegmann R. An estimate for crowding in conformal mapping to elongated regions // Complex Variables. 1992. V. 18. P. 193–199.
13. Безродных С.И., Власов В.И. Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 277–312.
14. Gautschi W. A Survey of Gauss–Christoffel quadrature formulae. Christoffel E.B. The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences, Ed. P.L. Butzer, F. Feher, Birkhauser Basel, Basel, 1981, 72–147.
15. Боголюбовский А.И., Скороходов С.Л. Разработка обобщенных квадратур Гаусса–Якоби с помощью методов компьютерной алгебры // Программирование. 2005. Т. 31. № 2. С. 72–80.
16. Hale N., Townsend A. Fast and accurate computation of Gauss–Legendre and Gauss–Jacobi quadrature nodes and weights // SIAM J. Sci. Comput. 2013. V. 35. № 2. P. A652–A674.
17. Gil A., Segura J., Temme N.M. Fast and reliable high-accuracy computation of Gauss–Jacobi quadrature // Numer. Algor. 2021. V. 87. P. 1391–1419.
<https://doi.org/10.1007/s11075-020-01012-6>
18. Wegmann R. Methods for numerical conformal mapping. — In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, V. 2. Ed. by R. Kühnau. Amsterdam: Elsevier, 2005, p. 351–477.
19. Paramichael N., Stylianopoulos N.S. Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. New Jersey—London—Singapore: World Scientific, 2010.
20. Безродных С.И. Функция Лауричеллы и конформное отображение многоугольников // Матем. заметки. 2022. Т. 112. Вып. 4. С. 500–520.
21. Безродных С.И. Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. Вып. 6 (444). С. 3–94.
22. Безродных С.И. Формулы для вычисления функции Лауричеллы в ситуации кроудинга переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 2054–2076.

23. *Безродных С.И.* Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и их приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 11. С. 1763–1798.
24. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Конформное отображение L -образной области в аналитическом виде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 1943–1980.
25. *Бабакова О.И.* О кручении стержня с Z -образным сечением // Докл. АН УССР. 1954. № 5. С. 319–323 (на укр.).
26. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.
27. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
28. *Gautschi W.* Computational aspects of three-term recurrence relations // SIAM Rev. 1967. V. 9. № 1. P. 24–82.
29. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
30. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.