

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ¹⁾

© 2023 г. В. Г. Звягин^{1,*}, В. П. Орлов^{1,**}¹ 394018 Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский гос. ун-т, Россия

*e-mail: zvg_vsu@mail.ru

**e-mail: orlov_vp@mail.ru

Поступила в редакцию 14.01.2023 г.
Переработанный вариант 14.01.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

В настоящей работе устанавливается существование слабых решений начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий негладкого поля скоростей и неоднородным граничным условием. Исследование предполагает аппроксимацию исходной задачи приближениями галеркинских типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей используется теория регулярных лагранжевых потоков. Библ. 17.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, неоднородные условия, априорные оценки, слабое решение, регулярный лагранжев поток.

DOI: 10.31857/S0044466923110297, EDN: CTVFFN

1. ВВЕДЕНИЕ

В $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^N$, $N = 2, 3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда (см. [1]), описываемое начально-краевой задачей

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \sum_{i=1}^N u_i(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta u(t, x) - \mu_1 \operatorname{Div} \int_{\tau_u(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x)) ds +$$

$$+ \operatorname{grad} p(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \quad (1.2)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(t, x) = \varphi(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Здесь $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$ и $p(t, x)$ – векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t, x)$ – плотность внешних сил, $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$. Дивергенция $\operatorname{Div} \mathcal{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\lambda > 0$ – константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости, u^0 и φ – заданные начальное и граничное значения функции u . Вектор-функция $z(\tau; t, x)$ определяется как решение задачи Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 22-11-00103).

Функция $z(\tau; t, x)$ определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$. Функция $\tau_u(t, x)$ определяется как $\tau_u(t, x) = \inf\{\tau: z(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}$ и означает момент времени, начиная с которого частица жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$, начинает свое движение к x по Ω .

При $\tau_u(t, x) = 0$ движение данной частицы начинается с нулевого момента времени. Если $\tau_u(t, x) > 0$, то в этот момент времени частица занимает положение $z(\tau_u(t, x); t, x) \in \partial\Omega$, и $\tau_u(t, x)$ означает момент вхождения данной частицы в Ω через $\partial\Omega$.

В случае однородного граничного условия ($\varphi = 0$) поле скоростей $u(t, x)$ равно нулю на границе $\partial\Omega$, решение $z(\tau_u(t, x); t, x)$ задачи Коши (1.4) определено при всех $\tau \in [0, T]$, и, следовательно, $\tau_u(t, x) = 0$ в (1.1). В этом случае для различных моделей вязкоупругих сред нелокальные теоремы существования и единственности слабых и сильных решений для систем вида (1.1)–(1.4) устанавливались в [2–8].

В случае неоднородного условия на $u(t, x)$ на границе $\partial\Omega$, промежуток $\tau_u(t, x) \leq \tau \leq t$, на котором существует решение задачи Коши (1.4), может начинаться в момент $\tau_u(t, x) > 0$, что и определяет появление $\tau_u(t, x) > 0$ в пределе интегрирования в (1.1).

Заметим, что наличие интеграла в (1.1) означает (см. [9, гл. 7]) наличие памяти среды вдоль траекторий поля скоростей. В большинстве работ по разрешимости начально-краевых задач гидродинамики, в уравнение движения которых не входят интегродифференциальные слагаемые, неоднородный случай сводится к однородному сдвигом скорости (см., например, [10, 11, с. 118]). При этом неоднородная задача становится нетривиальной в случае многосвязной границы области Ω и ненулевых потоках на частях границы (о результатах в этом направлении см., например, обзор [12]). Но в случае задачи с памятью вдоль траекторий уже в случае односвязной границы появляются существенные дополнительные трудности, связанные с поведением траекторий поля скоростей в окрестности границы. В этой связи заметим, что с формальной точки зрения трудности связаны с наличием в (1.1) интеграла с переменным нижним пределом $\tau_u(t, x)$. Это сильно усложняет задачу, поскольку сказывается на дифференциальных свойствах выражения под знаком Div в (1.1).

Еще одним важным обстоятельством является следующее. При исследовании слабой разрешимости поле скоростей $u \in L_1(0, T; W_2^1(\Omega)^N)$, и не существует, вообще говоря, классического решения задачи Коши (1.4). Поэтому для разрешимости задачи Коши (1.4) приходится привлекать теорию регулярных лагранжевых потоков (РЛП) (см. разд. 6), обобщающих понятие классического решения.

В настоящей работе мы устанавливаем слабую разрешимость задачи (1.1)–(1.4). Мы предполагаем границу области и граничную функцию достаточно гладкими, чтобы избежать излишних вычислительных сложностей в доказательствах, хотя основные результаты справедливы и при более слабых ограничениях.

Далее структура работы следующая. Обозначения и вспомогательные результаты приводятся в разд. 2. В разд. 3 формулируется основной результат. В разд. 4 исследуются приближения галерского типа для основной задачи. Доказательство основного результата проводится в разд. 5. В разд. 6 приводятся факты из теории регулярных лагранжевых потоков.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Функциональные пространства

Нам понадобятся гильбертовы пространства V и H (см. [13, разд. III.1.4]) соленоидальных функций. Символом $C_0^\infty(\Omega)^N$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых отображений Ω в R^N , $N = 2, 3$, с компактным носителем в Ω . Пусть $\mathcal{V} = \{v: v \in C_0^\infty(\Omega)^N, \operatorname{div} v = 0\}$. Обозначим через H и V замыкание $\mathcal{V}$ в нормах пространств $L_2(\Omega)^N$ и $W_2^1(\Omega)^N$ соответственно. Через V^{-1} обозначим пространство, сопряженное к V .

Обозначим через $\langle f, v \rangle$ действие функционала f из пространства V^{-1} на функцию v из V . Отождествление гильбертова пространства H с его сопряженным V^{-1} и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$. При этом для $u \in V$ и $w \in V^{-1}$ справедливо соотношение $\langle u, w \rangle = (u, w)$ со скалярным произведением в H .

Через $W_2^k(\partial\Omega)$ обозначаются пространства Соболева на границе $\partial\Omega$ (см. [14, стр. 82]). Нормы в пространствах H и $L_2(\Omega)^N$ будем обозначать $|\cdot|_0$, в V как $|\cdot|_1$. Нормы в пространствах V^{-1} , $W_2^{-1}(\Omega)^N$ и $W_2^{-1}(\Omega)^{N \times N}$ будем обозначать $|\cdot|_{-1}$. Нормы в $L_2(0, T; H)$ и $L_2(0, T; L_2(\Omega)^N)$, обозначаются $\|\cdot\|_0$, нормы в $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; W_2^1(\Omega)^N)$ как $\|\cdot\|_{0,1}$, а норма в пространстве $L_2(0, T; V^{-1})$ как $\|\cdot\|_{0,-1}$.

Через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H , $L_2(\Omega)^N$, $L_2(\Omega)^{N \times N}$, в каких именно — ясно из контекста.

2.2. Граничная функция

Нам будет удобно считать, что область Ω содержится в ограниченной области Ω_0 с гладкой границей $\partial\Omega_0$, так что $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$. Будем предполагать, что граница Ω задается уравнением $\Phi(x) = 0$, где гладкая функция $\Phi(x) : \Omega_0 \rightarrow R^1$ такова, что $\Phi(x) < 0$ при $x \in \Omega$ и $\Phi(x) > 0$ при $x \in \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}$.

Вследствие уравнения неразрывности (1.2) функция φ должна удовлетворять условию

$$a) \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot n(x) dx = 0, \quad \varphi(x) \cdot n(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) n_i(x).$$

Здесь $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Так как поведение решений задачи Коши (1.4) в окрестности $\partial\Omega$ тесно связано с граничной функцией $\varphi(x)$, с целью упростить технические моменты доказательств, мы наложим на $\varphi(x)$ некоторые дополнительные условия:

б) граничная функция $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ непрерывно дифференцируемой на Ω_0 соленоидальной функции $a(x)$, равной нулю на $\partial\Omega_0$. Таких функций $a(x)$ существует бесконечно много (см. [10]).

в) в точках $\Gamma_0 = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x) \cdot n(x) = 0\}$ траектории $z_a(s; t, x)$ поля скоростей $a(x)$ (решения задачи Коши $z_a(s; t, x) = x + \int_t^s a(z_a(s; t, x)) ds$, $s, t \in [0, T]$, $x \in \Omega_0$), начинающиеся в точках $x \in \Gamma_0$, при $s > t$, близких к t , не принадлежат Ω .

Если определяемое функцией $\varphi(x)$ множество Γ_0 устроено достаточно просто, то такую функцию $a(x)$ можно построить, используя соображения [10, 13], с. 366. Например, если Ω выпукла и $\Gamma_- = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x) \cdot n(x) < 0\}$ и $\Gamma_+ = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x) \cdot n(x) > 0\}$ разделены множеством Γ_0 , которое состоит из конечного множества непересекающихся гладких линий $\gamma_k \in \partial\Omega$ при $N = 3$, или Γ_0 является конечным набором точек при $N = 2$.

Заметим, что двигаясь в $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}$ по траектории поля скоростей $a(x)$, в точках множества Γ_0 частицы жидкости касаются границы $\partial\Omega$, не входят в Ω , в то время как в точках множества Γ_- входят в Ω , т.е. жидкость втекает в Ω , а в точках множества Γ_+ выходят из Ω , т.е. жидкость вытекает из Ω .

Заметим, что можно было бы с самого начала предполагать гладкость $\varphi(x)$ и считать, что Γ_0 разделяет Γ_- и Γ_+ и состоит из конечного множества непересекающихся гладких линий $\gamma_k \in \partial\Omega$ при $N = 3$, или Γ_0 является конечным набором точек при $N = 2$, а затем строить продолжение $a(x)$ в Ω и $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ гладким образом, что в контексте статьи не является принципиальным.

2.3. Задача Коши

В случае $u \in L_2(0, T; W^1(\Omega)^N)$, вообще говоря, не существует классического решения задачи Коши (1.4), и ее разрешимость будем понимать в следующем смысле. Положим $u(t, x) = v(t, x) + a(x)$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$. Очевидно, что $v \in L_2(0, T; V)$. Продолжив функцию v нулем из Ω в Ω_0 и обозначив продолжение через v^* , имеем $u^* = v^* + a$. Тогда очевидно, что $u^* = u$ в Ω , $u = a$ в $\Omega_0 \setminus \Omega$ и $u^* \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$. Наряду с задачей (1.4) рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau (v^* + a)(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0. \quad (2.1)$$

Так как $v^* + a \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$, то существует единственный РЛП, порожденный функцией $u^* = v^* + a$ (см. [15, 16] и разд. 6 данной статьи). В частности, это означает, что задача Коши (2.1) имеет абсолютно непрерывное по τ решение $z(\tau; t, x)$ при п.в. $x \in \Omega_0$. Обозначим через Z оператор, ставящий в соответствие функции v порожденный функцией $u^* = v^* + a$ РЛП, так что $Z(v) = z$. Ниже, говоря о решении $z(\tau; t, x)$ задачи Коши (1.4), мы будем иметь в виду $z(\tau; t, x) = Z(v)(\tau; t, x)$ при п.в. $x \in \Omega$ (сужение $Z(v)$ на Ω).

При $x \in \Omega$ точка $z(\tau; t, x) \in \bar{\Omega}$ только если $\tau \in [\tau_u(t, x), t]$. При этом функция $z(\tau; t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.4) при $\tau \in [\tau_u(t, x), t]$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата нам будет удобно переписать задачу (1.1)–(1.4) в другом виде. Пусть $v = u - a$, где a отмеченная в разделе 2.2 функция. Полагая $u = v + a$, перепишем задачу (1.1)–(1.4) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + \sum_{i=1}^N v_i(t, x) \partial v(t, x) / \partial x_i - \mu_0 \Delta v(t, x) + \text{grad } p(t, x) = \\ & = f(t, x) - \sum_{i=1}^N v_i(t, x) \partial a(t, x) / \partial x_i - \sum_{i=1}^N a_i(t, x) \partial v(t, x) / \partial x_i + \mu_0 \Delta a(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mu_1 \text{Div} \int_{\tau(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(v+a)(s, Z(v)(s; t, x)) ds \quad (t, x) \in Q_T;$$

$$\text{div } v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \quad (3.2)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in \partial\Omega\}. \quad (3.3)$$

Здесь $\tau(t, x) = \inf\{\tau : z(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}$, $v^0 = u^0 - a$.

Нас будет интересовать разрешимость в слабом смысле задачи (3.1)–(3.3). Введем пространство

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0, T; V), v' \in L_1(0, T; V^{-1})\}.$$

Здесь v' означает производную по t функции $v(t, \cdot)$ как функции со значениями в V^{-1} . Пусть

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i v_j \partial w_j / \partial x_i dx, \quad \text{где } u, v, w \in V.$$

Определение 3.1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$. Слабым решением задачи (3.1)–(3.3) называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая условию (3.3) и тождеству

$$\begin{aligned} & d(v, \phi)/dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\phi)) + \\ & + \mu_1 \left(\int_{\tau(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(v+a)(\tau, Z(v)(\tau; t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) = \\ & = \langle f, \phi \rangle + b(v, a, \phi) + b(a, v, \phi) + b(a, a, \phi) - \mu_0(\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\phi)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

при любой $\phi \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$.

Замечание. В силу вложения $W_1(0, T) \subset C_{weak}([0, T], H)$ (см. [13, лемма III.1.4]) начальное условие (3.3) имеет смысл.

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. Пусть для ϕ выполняются условия а)–в) п. 2.2. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$. Тогда существует слабое решение задачи (3.1)–(3.3).

4. ГАЛЕРКИНСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ (3.1)–(3.3)

4.1. Построение галеркинских приближений

Обозначим через A действующий в H оператор с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega)^N \cap \overset{\circ}{W}_1^2(\Omega)^N \cap H$, определенный дифференциальным выражением $Av = -\mathcal{P} \operatorname{Div} \mathcal{E}(v)$. Здесь $\mathcal{P}$ – оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на подпространство H . Оператор A является положительно определенным самосопряженным оператором (см. [11], разд. 2.4). Ортонормированная система собственных векторов $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{iN})$, $i = 1, 2, \dots$ образует базис в H .

Зафиксируем натуральное число n . Обозначим через $\mathcal{P}_n$ оператор ортогонального проектирования в H на подпространство H_n , порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пользуясь плотностью множества гладких функций в $L_2(0, T; V^{-1})$, аппроксимируем $f(t, x)$ последовательностью гладких по t и x функций $f^n(t, x)$, так что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(t, x) - f^n(t, x)\|_{0, -1} = 0$.

Будем искать галеркинские приближения v^n в виде

$$v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x) \quad (4.1)$$

как решение тождества

$$\begin{aligned} & d(v^n, \phi)/dt - \sum_{i=1}^3 (v_i^n v^n, \partial \phi / \partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v^n), \mathcal{E}(\phi)) + \\ & + \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(v^n+a)(\tau, z^n(\tau; t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) = \\ & = \langle f^n, \phi \rangle + b(v^n, a, \phi) + b(a, v^n, \phi) + b(a, a, \phi) - \mu_0(\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\phi)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

при любой $\phi \in H_n$ и п.в. $t \in [0, T]$, $v^n(0, x) = \sum_{k=1}^n v_k^0 e_k(x)$, $v_k^0 = \sum_{k=1}^n (v^0(x), e_k(x))$.

Здесь z^n – решение задачи Коши

$$z^n(\tau, t, x) = x + \int_t^\tau (v^n + a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \overline{\Omega}_0, \quad (4.3)$$

а $\tau^n(t, x) = \inf \{ \tau : z^n(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t] \}$. При этом мы считаем, что функции $e_k(x)$ продолжены нулем из Ω в Ω_0 , так что и функции $v^n(t, x)$ считаем равными нулю в $\Omega_0 \setminus \Omega$.

Сведем задачу нахождения функции $v^n(t, x)$ к задаче нахождения функций $g_i(t)$.

Полагая в (4.2) $\varphi = e_i$ и опуская непринципиальный в вычислениях множитель $\exp((s - t)/\lambda)$, получим соответствующую интегродифференциальную систему

$$\begin{aligned} g'_i(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^n d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) &= w_{g,i}(t), \\ w_{g,i}(t) &= f_i^n(t) - k_i + \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(e_k(x)) (z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right) + \\ &+ \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(a) (z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right), \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$z^n(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau (v^n + a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0, \quad (4.5)$$

где

$$\tau^n(t, x) = \inf\{\tau : z^n(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}.$$

Здесь $f_i^n(t) = (f^n, e_i)$, $\sum_{k,r=1}^n d_{kri} g_k(t) g_r(t) \equiv D_i(g)$, $d_{kri} = -\sum_{j=1}^N (e_{kj} e_r, \partial e_i / \partial x_j)$, d_{ki} и k_i — некоторые числа.

Выясним свойства решений систем (4.4) и (4.5).

Рассмотрим сначала задачу Коши (4.5). Если бы мы рассматривали задачу Коши (4.5) при $(t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega$, то из-за ненулевого условия для поля скоростей $v^n + a$ на границе Ω решения задачи (4.5) могли бы быть определены не на всем промежутке $[0, T]$, а лишь на промежутке существования полного решения задачи Коши (см. [17]).

Рассматривая задачу Коши при $(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega_0$, мы продолжим нулем функции $e_k(x)$ на Ω_0 , сохраняя для продолжения прежнее обозначение. Пусть $Q_0 = Q_+ \cup Q_-$, где $Q_+ = [0, T] \times \Omega$, $Q_- = [0, T] \times (\Omega_0 \setminus \Omega)$. Из (4.1) следует, что поле скоростей $v^n + a$ непрерывно на $Q = [0, T] \times \Omega_0$ и непрерывно дифференцируемо на $\bar{Q}_+$ и $\bar{Q}_-$. Ясно, что поле скоростей $v^n + a$ удовлетворяет условию Липшица на Q и равно нулю на границе $\partial\Omega_0$ (но не на границе $\partial\Omega$). Тогда решения $z^n(\tau; t, x)$ задачи Коши (4.5) существуют и определены для всех $\tau \in [0, T]$, непрерывно дифференцируемы по $\tau \in [0, T]$ и по начальным данным $(t, x) \in Q_+$ и $(t, x) \in Q_-$.

Пусть $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$. Введем оператор Z , ставящий в соответствие функции $g(t)$ решение $z(\tau; t, x)$ задачи Коши (4.5), так что $Z(g) = z(\tau; t, x)$.

Здесь и ниже мы опускаем верхний индекс n у функций z^n , g^n , v^n , τ^n для удобства.

Пусть $G_0 = [0, T] \times [0, T] \times \Omega_0$, $G_+ = [0, T] \times [0, T] \times \Omega$, $G_- = [0, T] \times [0, T] \times (\Omega_0 \setminus \Omega)$. Справедлива

Лемма 4.1. *Оператор $Z : C[0, T]^n \rightarrow C(G_0)^N$ непрерывен. Кроме того, $Z : C[0, T]^n \rightarrow C^1(\bar{G}_+)^N$, $Z : C[0, T]^n \rightarrow C^1(\bar{G}_-)^N$ ограничен.*

Доказательство. Пусть $S(R) = \{g(t) : \|g\|_{C(0,T)^n} \leq R\}$. Пусть $g^1, g^2 \in S(R)$, а $z^1(\tau; t, x), z^2(\tau; t, x)$ — решения соответствующих задачи Коши (4.5). Пользуясь (4.5) и гладкостью e_k и a , стандартным образом устанавливается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых $g^1, g^2 \in S(R)$, таких, что $\|g^1 - g^2\|_{C(0,T)^n} \leq \delta$ справедливо неравенство $\|z^1(\tau; t, x) - z^2(\tau; t, x)\|_{C(G_0)^N} \leq \varepsilon$.

Второе утверждение леммы следует из непрерывной зависимости и дифференцируемости решения $z(\tau; t, x)$ задачи Коши (4.5) по начальным данным t, x и гладкости e_k и a и стандартным образом устанавливаемого неравенства $\|Z(g)\|_{C(G_0)^N} \leq M(R)$ для всех $g \in S(R)$.

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. Оператор $Z : C[0, T]^n \rightarrow C(G_0)^N$ равномерно непрерывен на $S(R)$.

Доказательство. Пусть $g^i(t) = (g_1^i(t), g_2^i(t), \dots, g_n^i(t)) \in S(R)$, $i = 1, 2$, и пусть $z^i(\tau; t, x)$ являются решениями задач Коши

$$z^i(\tau; t, x) = x + \sum_{k=1}^n \int_t^\tau g_k(s) e_k(z^i(s; t, x)) ds + \int_t^\tau a(s, z^i(s; t, x)) ds, \quad (4.6)$$

$$\tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $r > 0$ и $\bar{y}(t) = \exp(rt)y(t)$ для произвольной $y(t)$. Из (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{z}^2(\tau; t, x) - \bar{z}^1(\tau; t, x) &= \sum_{k=1}^n \int_t^\tau \exp(r(\tau - s)) (\bar{g}_k^2(s) - \bar{g}_k^1(s)) e_k(z^2(s; t, x)) ds + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_t^\tau g_k^2(s) \exp(k\tau) (e_k(z^2(s; t, x)) - e_k(z^1(s; t, x))) ds + \int_t^\tau \exp(r\tau) (a(s, z^2(s; t, x)) - \\ &- a(s, z^1(s; t, x))) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.7) и гладкости $e_k(x)$ и $a(x)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} |\bar{z}^2(\tau; t, x) - \bar{z}^1(\tau; t, x)| &\leq M_1 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) \|\bar{g}^2(s) - \bar{g}^1(s)\|_{C[0, T]^n} ds + \\ &+ M_2 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)| ds \leq M_1 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) ds \|\bar{g}^2(s) - \bar{g}^1(s)\|_{C[0, T]^n} + \\ &+ M_2 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) |ds \max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)|, \quad \tau \leq t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)| \leq M_3 \|\bar{g}^2(t) - \bar{g}^1(t)\|_{C[0, T]^n} + M_4 r^{-1} \max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)|, \quad \tau \leq t.$$

Выбирая $r > 0$ достаточно большим, получаем отсюда неравенство

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)| \leq M_5 \|\bar{g}^2(t) - \bar{g}^1(t)\|_{C[0, T]^n}, \quad \tau \leq t.$$

Из ограниченности $\exp(kt)$ на $[0, T]$ сверху и снизу следует, что

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |z^2(s; t, x) - z^1(s; t, x)| \leq M_6 \|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0, T]^n}, \quad \tau \leq t. \quad (4.9)$$

Неравенство

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |z^2(s; t, x) - z^1(s; t, x)| \leq M_7 \|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0, T]^n}, \quad \tau \geq t, \quad (4.10)$$

легко получается с помощью леммы Гронуолла.

Из неравенств (4.9)–(4.10) вытекает, что

$$\max_{0 \leq s \leq T, (t, x) \in Q_T} |z^2(s; t, x) - z^1(s; t, x)| \leq M_8 \|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0, T]^n} ds. \quad (4.11)$$

Отсюда следует утверждение леммы 4.2.

Лемма 4.2 доказана.

Пусть $z(\tau; t, x)$ является решением задачи Коши (4.5). Рассмотрим на Q_T функцию $\tau(t, x) = \inf\{s : z(\tau; t, x) \in \Omega, 0 \leq s \leq \tau \leq t\}$. Имеет место

Лемма 4.3. Справедливо соотношение $\tau(t, x) \in C(Q_T)$.

Доказательство. Зафиксируем $(t, x) \in Q_T$. Пусть $\tau(t, x) = 0$ и $z(0; t, x) \in \Omega$. Тогда непрерывность $\tau(t, x)$ в точке (t, x) является следствием непрерывности по начальным данным решения задачи Коши (4.5).

Пусть $\tau(t, x) > 0$. Тогда $z(\tau(t, x); t, x) \in \partial\Omega$. Обозначим $\tau_* = \tau(t, x)$, $z_* = z(\tau_*; t, x)$. Тогда $z_* \in \partial\Omega$, $\Phi(z_*) = 0$, $\Phi(z(\tau; t, x)) < 0$ при $\tau \in (\tau_*, t]$. Из условия б) раздела 2.2 вытекает, что $z_* \notin Z_0$, так как в противном случае траектория $z(\tau; t, x)$ при $\tau \geq \tau_*$ должна входить в Ω из $\Omega_0 \setminus \Omega$ и в то же время должна при τ_* по касательной уходить в $\Omega_0 \setminus \bar{\Omega}$, что невозможно в силу единственности решения задачи Коши. Таким образом, $z_* \in Z_-$.

Из непрерывности функции $z(\tau; t, x)$ и условия б) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau_1 \in (\tau_* - \varepsilon, \tau_*)$, что $\Phi(z(\tau_1; t, x)) > 0$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_*]$. Из непрерывности же функции $z(\tau; t, x)$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $S_\delta = \{(t', x') : |t - t'| \leq \delta, |x - x'| \leq \delta\}$ выполнялось неравенство $\Phi(z(\tau_1; t', x')) > 0$ и $|z(\tau_1; t', x') - z(\tau_1; t, x)| < d/2$, где $d = \text{dist}(z(\tau_1; t, x), \partial\Omega)$.

В случае $\tau(t', x') \in [\tau_1, \tau_*]$ имеем $\tau(t, x) - \tau(t', x') \leq \varepsilon$. Покажем, что если $\tau(t', x') > \tau_*$, то $\tau(t', x') - \tau(t, x) \leq \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность (t'', x'') , сходящаяся к (t, x) при $n \rightarrow +\infty$, такая что $\tau(t'', x'') \geq \tau_* + \varepsilon$ и $\Phi(z(\tau(t''), x''); t'', x'')) = 0$. Выберем из последовательности (t'', x'') подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\bar{\tau} \geq \tau_* + \varepsilon$ (пусть это будет сама последовательность (t'', x'')).

Пользуясь непрерывностью функций Φ и z и переходя к пределу в соотношении $\Phi(z(\tau(t''), x''); t'', x'')) = 0$, получаем $\Phi(z(\bar{\tau}; t, x)) = 0$. Но это означает, что $z(\bar{\tau}; t, x) \in \partial\Omega$ при $\bar{\tau} > \tau_*$, чего быть не может.

Таким образом, если $\tau(t', x') > \tau_*$, то $\tau(t', x') - \tau(t, x) \leq \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$.

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $(t', x') \in S_\delta$ выполняется неравенство $|\tau(t', x') - \tau(t, x)| < \varepsilon$.

Случай $\tau(t, x) = 0$ и $z(\tau(t, x); t, x) \in \partial\Omega$ рассматривается аналогично предыдущему случаю с некоторыми упрощениями. Непрерывность функции $\tau(t, x)$ установлена.

Лемма 4.3 доказана.

Поставим в соответствие функции $g(t)$, определяющей задачу Коши (4.5), функцию $\tau_g(t, x)$, тем самым определяя оператор $\mathcal{T}(g) = \tau_g(t, x)$.

Пусть $S_g(R) = \{g : \|g\|_{C(0, T)^n} \leq R\}$, $R > 0$ — произвольное число.

Лемма 4.4. Оператор $\mathcal{T} : C[0, T]^n \rightarrow C(Q_T)$ непрерывен на $S_g(R)$.

Доказательство. Рассмотрим фиксированную $g^*(t) \in S_g(R)$ и соответствующие ей $z^*(\tau; t, x)$ и $\tau^*(t, x)$. Пусть последовательность $g^k(t) \in S_g(R)$ такова, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|g^k - g^*\|_{C(0, T)^n} = 0$. Пусть $g^n(t)$ соответствуют функции $z^k(\tau; t, x)$ и $\tau^k(t, x)$. Покажем, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x)\|_{C(Q_T)} = 0$. Предположим, что это не так. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), для которой выполняется $\|\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x)\|_{C(Q_T)} \geq \varepsilon$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение) такая, что при некотором $(t, x) \in Q_T$ выполняется $|\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим сначала случай $\tau^*(t, x) > 0$. Заметим, что тогда $z^*(\tau^*; t, x) \in \partial\Omega$ и $\Phi(z^*(\tau^*; t, x)) = 0$. Предположим, что на некоторой подпоследовательности имеем $\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x) \geq 0$ (случай $\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x) \leq 0$ рассматривается аналогично). Тогда можно считать, что $\tau^k(t, x) \rightarrow \bar{\tau}(t, x) \geq \tau^*(t, x) + \varepsilon_0$. Так как $z^k(\tau^k(t, x); t, x) \in \partial\Omega$ и $\Phi(z^k(\tau^k; t, x)) = 0$. Из последнего соотношения в силу непрерывности $\Phi(t, x) = 0$ и сходимостей $z^k(\tau; t, x) \rightarrow z^*(\tau; t, x)$ и $\tau^k(t, x) \rightarrow \bar{\tau}(t, x)$ вытекает, что $\Phi(z^*(\bar{\tau}; t, x)) = 0$ при $\bar{\tau}(t, x) > \tau^*(t, x)$, что невозможно.

Случай $\tau^*(t, x) = 0$ рассматривается аналогично.

Непрерывность оператора $\mathcal{T}$ установлена.

Лемма 4.4 доказана.

Рассмотрим теперь соответствующую первому уравнению системы (4.4) задачу

$$g'_i(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^n d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) = w_i(t), \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.12)$$

Здесь $g = (g_1, \dots, g_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Лемма 4.5. Пусть $w(t) \in C(0, T)^n$. Тогда система (4.12) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|g(t)\|_{C(0, T)^n} \leq M(\|w(t)\|_{C(0, T)^n} + |v^0|_0). \quad (4.13)$$

Доказательство. Однозначная разрешимость системы (4.12) вытекает из общих свойств решения задачи Коши для систем ОДУ с гладкими данными (см., например, [17]). В [13, разд. III.3.2], для соответствующей решению системы (4.12) функции $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$ установлена оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |v^n(t)|_0 + \|v^n\|_{0,1} \leq M_0(\|\tilde{w}\|_{0,-1} + |v^0|_0), \quad (4.14)$$

где $\tilde{w}(t, x) = \sum_{k=1}^n w_k(t) e_k(x)$. Так как $\|\tilde{w}\|_{0,-1} \leq \|w(t)\|_{L_2(0, T)^n} \leq \|w(t)\|_{C(0, T)^n}$, а $|v^n(t)|_0^2 = \|g(t)\|_{L_2(0, T)^n}^2$, то из (4.14) вытекает неравенство (4.13).

Лемма 4.5 доказана.

Введем оператор G , ставящий в соответствие функции $w(t)$ решение $h(t)$ системы (4.12), так что $G(w) = g(t)$.

Пусть $S_w(R) = \{w : \|w\|_{C(0, T)^n} \leq R\}$. Справедлива

Лемма 4.6. Оператор $G : C[0, T]^n \rightarrow C[0, T]^n$ непрерывен на $S_w(R)$.

Утверждение леммы вытекает из общих свойств решения задачи Коши для систем ОДУ с гладкими данными (см., например, [17]).

Введем множество $\mathcal{B}(R) = \{g : g = G(w), w \in S_w(R)\}$.

Лемма 4.7. Множество $\mathcal{B}(R)$ компактно в $C(0, T)^n$.

Доказательство. Равномерная ограниченность $\mathcal{B}(R)$ в $C(0, T)^n$ следует из леммы 4.6.

Из (4.12) и леммы 4.6 вытекает неравенство $\|g'(t)\|_{C(0, T)}^n \leq M(R)$ с некоторой константой $M(R)$ для всех $g \in \mathcal{B}(R)$. Отсюда следует равностепенная непрерывность $\mathcal{B}(R)$.

Применение критерия Арцела (см., например, [14], с. 32) дает утверждение леммы.

Лемма 4.7 доказана.

4.2. Операторное уравнение

Обозначим правую часть (4.4), зависящую от $g(t) = (g_1, \dots, g_n)$, $z^n(\tau^1; t, x)$, и $\tau(t, x)$ как $\mathcal{G}_i(g, z, \tau)$, и пусть $\mathcal{G}(g, z, \tau) = (\mathcal{G}_1(g, z, \tau), \dots, \mathcal{G}_n(g, z, \tau))$. Тем самым определяется оператор $\mathcal{G} : C[0, T]^n \times C(Q_0)^n \times C[0, T] \rightarrow C[0, T]^n$. Пусть произвольная функция $w \in C[0, T]^n$. Поставим в соответствие w функцию $g = G(w)$, затем поставим в соответствие g функцию $z = Z(g) = Z(G(w))$, затем поставим в соответствие z функцию $\tau = \mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Обозначим $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w))$ и

$Y(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Таким образом, мы поставили в соответствие w функцию $z(s; t, x) = \mathcal{Z}(w)$, где $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w))$ и функцию $\tau(t, x) = Y(w)$, где $Y(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Тогда из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} w_i(t) = & f_i(t) - k_i - \mu_1 \left(\int_{Y(w)(t,x)}^t \sum_{k=1}^n (G(w))_k(s) \mathcal{E}(e_k)(\mathcal{Z}(w)(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right) - \\ & - \mu_1 \left(\int_{Y(w)(t,x)}^t \sum_{k=1}^n (G(w))_k(s) \mathcal{E}(a)(\mathcal{Z}(w)(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Обозначая правую часть (4.15) через $K_i(w)$, $K(w) = (K(w)_1, \dots, K(w)_n)$, получаем из (4.4) операторное уравнение

$$w = \mathcal{H}(w), \quad \mathcal{H}(w) = \mathcal{G}(G(w), \mathcal{Z}(w), Y(w)). \quad (4.16)$$

Нетрудно видеть, что из непрерывности операторов G , $\mathcal{Z}$, Y следует, что оператор $\mathcal{H}$ переводит $C(0, T)^n$ в $C(0, T)^n$.

Введем на $C(0, T)^n$ норму $\|w\|_l = \|w(t) \exp(-lt)\|_{C(0, T)^n}$, где $l > 0$. Пусть $S_l(R) = \{w : \|w\|_l \leq R\}$. Справедлива

Лемма 4.8. Пусть R достаточно велико. Тогда $\mathcal{H}(S_l(R)) \subset S_l(R)$.

Доказательство. Пусть $w \in S_l(R)$. Пользуясь леммами 4.1, 4.5, 4.6 и равенством (4.15), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(w)\|_l \leq & \|f(t)\|_l + \max |k_i| + \int_0^t \exp(-l(t-s)) \|G(w)(s) \exp(-ls)\|_{C(0, T)^n} ds \leq \|f(t)\|_l + \max |k_i| + \\ & + M_1 \|w(s)\|_l \int_0^t \exp(-l(t-s)) ds \leq \|f(t)\|_l + \max |k_i| + M_2 l^{-1} \|w(t)\|_l \leq \|f(t)\|_l + \max |k_i| + M_2 l^{-1} R. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Выбирая l так, чтобы $M_2 l^{-1} R < 1/2$, получаем $\|K(w)\|_l \leq M_3 (\|f(t)\|_l + \max |k_i|)$. Выбирая теперь R достаточно большим и пользуясь (4.17), получаем $\|\mathcal{H}(w)\|_l \leq R$.

Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. Оператор $\mathcal{H}$ является непрерывным и компактным на $S_l(R)$.

Доказательство. Непрерывные по норме $\|\cdot\|_{C(0, T)^n}$ операторы являются непрерывными и по норме $\|\cdot\|_l$ в силу эквивалентности этих норм, и оператор $K = \mathcal{G}(\mathcal{T}(w), \mathcal{Z}(w), Y(w))$ является непрерывным как суперпозиция непрерывных операторов.

Оператор G переводит $S_l(R)$ в компактное множество $\mathcal{B}(R)$. Следовательно, непрерывные операторы $Y(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$, $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w))$ и $\mathcal{H} = \mathcal{G}(\mathcal{T}(w), \mathcal{Z}(w), Y(w))$ переводят $S_l(R)$ в компактное множество.

Лемма 4.9 доказана.

Из лемм 4.8, 4.9 в силу принципа Шаудера вытекает

Лемма 4.10. Оператор $\mathcal{H}$ имеет на $S_l(R)$ неподвижную точку.

4.3. Разрешимость системы (4.4)–(4.5)

Теорема 4.1. Система (4.4)–(4.5) имеет решение.

Доказательство. Из леммы 10 вытекает существование неподвижной точки w оператора $\mathcal{H}$. Ясно, что $g = G(w)$ является решением системы (4.4)–(4.5), где $z^n(s; t, x) = \mathcal{Z}(w)$, $\tau^n(t, x) = Y(w)$.

Теорема 4.1 доказана.

4.4. Разрешимость интегрального тождества (4.2)

Пусть $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$, где $g(t)$, $z^n(s; t, x)$, $\tau^n(t, x)$ — решение системы (4.4)–(4.5).

Теорема 4.2. Функция $v^n(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4.2) и соотношениям (4.5), (4.3) и справедлива равномерная по n оценка

$$\sup_t \|v^n(t, x)\|_0 + \|v^n(t, x)\|_{0,1} \leq M(\|f(t)\|_{0,-1} + |v^0|_0 + M_*(a)). \quad (4.18)$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 4.1.

Докажем оценку (4.18). Стандартными соображениями, как и в случае системы Навье–Стокса (см. [13, разд. II.1.4, стр. 141]), и опуская индексы n , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t, x)\|_0^2 + \mu_0 \|\mathcal{E}(v)(t, x)\|_0^2 &= \langle f(t, x), v(t, x) \rangle - \\ - \mu_1 \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(v)(t, x) \right) &+ b(a, a, v) + b(v, a, v) + b(a, v, v) = \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Оценим слагаемые I_i .

Рассмотрим сначала I_1 . Нетрудно видеть, что при произвольном $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|I_1| \leq \|f(t, x)\|_{-1} \|v(t, x)\|_1 \leq C_1(\varepsilon) \|f(t, x)\|_{-1}^2 + \varepsilon \|v(t, x)\|_1^2. \quad (4.20)$$

В силу гладкости $a(t, x)$ получаем

$$|I_3| + |I_4| + |I_5| \leq M_0(a) \|v(t, x)\|_0^2. \quad (4.21)$$

Рассмотрим слагаемое I_2 . Очевидно, что

$$|I_2| \leq \varepsilon \|v(t, x)\|_1^2 + C_3(\varepsilon) \left\| \int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(s, z(s; t, x)) ds \right\|_0^2 = \varepsilon \|v(t, x)\|_1^2 + C_2(\varepsilon) I_{22}. \quad (4.22)$$

Легко видеть, что в силу гладкости $a(t, x)$

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int_{\Omega} \left\| \int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(s, z(s; t, x)) ds \right\|^2 dx \leq M \left(\int_{\Omega} \int_{\tau(t, x)}^t |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx + \right. \\ &\left. + \int_{\Omega} \int_0^t |a_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx \right) \leq M_1 \int_{\Omega} \int_{\tau(t, x)}^t |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx + M_2(a) = M_1 I_{221} + M_2(a). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь v_x и a_x — матрицы Якоби вектор-функций v и a , $|v_x|$ и $|a_x|$ — нормы матриц. Считая v продолженной нулем из Ω в Ω_0 , рассмотрим задачу Коши

$$\bar{z}(\tau; t, x) = x + \int_{\tau}^t (\bar{v} + a)(s, \bar{z}(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0. \quad (4.24)$$

Задача (4.24) нелокально разрешима, при этом якобиан $J(t, x)$ отображения $y = z(t; s, x) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ равен единице в силу соленоидальности поля скоростей.

Используя вышеприведенные рассуждения и меняя порядок интегрирования, получаем

$$I_{221} = \int_{\Omega} \int_{\tau(t, x)}^t |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx \leq \int_0^t \int_{\Omega_0} |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds. \quad (4.25)$$

Делаем в последнем интеграле по Ω_0 замену переменной $x = z(t; s, y)$ и учитывая $J(t, x) = 1$, имеем

$$I_{221} \int_0^t \int_{\Omega_0} |v_x(s, y)|^2 J^{-1}(t, z(t; s, y)) dy ds = \int_0^t \int_{\Omega_0} |v_x(s, y)|^2 dy ds = \int_0^t \int_{\Omega} |v_x(s, y)|^2 dy ds. \quad (4.26)$$

Из (4.23)–(4.26) вытекает

$$I_{22} \leq M_1 \int_0^t |v_x(s, y)|_0^2 ds + M_2(a). \quad (4.27)$$

Из неравенств (4.22) и (4.27) вытекает, что

$$|I_2| \leq \varepsilon |v(t, x)|_1^2 + C_3(\varepsilon) \left(\int_0^t |v(s, x)|_1^2 ds + M_2(a) \right). \quad (4.28)$$

Так как $|\mathcal{E}u(x)|_0 > m|u(x)|_1$, $m > 0$, для $\forall u \in V$, то интегрируя (4.19) по t , пользуясь оценками (4.20), (4.21) и (4.28), выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем

$$\begin{aligned} |v(t, x)|_0^2 + \int_0^t |v(s, x)|_1^2 ds &\leq M_6 \left(\int_0^t |f(s, x)|_{-1}^2 ds + |v^0|_0^2 + M_2(a) \right) + \\ &+ M_7 \left(\int_0^t \int_0^\xi |v(s, x)|_1^2 ds d\xi + \int_0^t |v(s, x)|_0^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Отсюда получаем интегральное неравенство типа Гронуолла для $q(t) = \int_0^t |v(\tau, x)|_1^2 d\tau + |v(t, x)|_0^2$, дающее оценку $q(t)$. Из (4.29) и оценки $q(t)$ следует утверждение теоремы 4.2.

Теорема 4.2 доказана.

Замечание. Так как $v(t, x) = 0$ при $x \in \Omega_0 \setminus \Omega$, то $\|v(t, x)\|_{L_2(\Omega_0)^N} = |v(t, x)|_0$, $\|v(t, x)\|_{L_2(0; W_1^2(\Omega_0)^N)} = \|v(t, x)\|_1$. Отсюда и из оценки (4.18) вытекает равномерная по n оценка

$$\sup_t \|v^n(t, x)\|_{L_2(\Omega_0)^N} + \|v^n(t, x)\|_{L_2(0; W_1^2(\Omega_0)^N)} \leq M(\|f(t)\|_{0,-1} + |v^0|_0 + M_*(a)). \quad (4.30)$$

4.5. Свойства галеркинских приближений

Пусть $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$, где $g(t)$, $z^n(s; t, x)$, $\tau^n(t, x)$ являются решениями системы (4.4),

(4.5). Из того, что v^n равна нулю вне Ω и из оценки (4.30) следует слабая в $L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ и сильная в $L_2(0, T; L_2(\Omega_0)^N)$ сходимость $v^n(t, x)$ к некоторой $v^n(t, x) \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ (с точностью до подпоследовательности) при $n \rightarrow +\infty$.

Из теоремы 6.2 следует, что последовательность $z^n(s; t, x)$ сходится по τ , x мере к РЛП $z(s; t, x)$, порожденному $v(t, x) \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ равномерно по t . Тогда последовательность $z^n(s; t, x)$ (с точностью до подпоследовательности) сходится к $z(s; t, x)$ при п.в. $(s, x) \in Q_T$.

Рассмотрим последовательность $\tau^n(t, x)$.

Теорема 4.3. Последовательность $\tau^n(t, x)$ сходится к $\tau(t, x)$ при $n \rightarrow +\infty$ при п.в. $(t, x) \in Q_T$.

Доказательство теоремы 4.3. Пусть последовательность $z^n(s; t, x)$ сходится к $z(s; t, x)$ при $(t, x) \in Q_T$. Покажем, что тогда $\tau^n(t, x)$ сходится к $\tau(t, x)$ (с точностью до подпоследовательности). Рассмотрим сначала случай $\tau(t, x) > 0$. Предположим противное, т.е. $\tau^n(t, x)$ не сходится к $\tau^*(t, x)$. Тогда найдется подпоследовательность (индексы те же), при которой либо $\tau^n(t, x) \geq \tau(t, x) + \delta$,

либо $\tau^n(t, x) \leq \tau(t, x) - \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть сначала $\tau^n(t, x) \geq \tau(t, x) + \delta$. Тогда можно считать, $\tau^n(t, x) \rightarrow \tau_1 > \tau(t, x) + \delta$. В этом случае $\Phi(z^n(\tau^n(t, x); t, x)) = 0$, $\Phi(z^n(\tau_1; t, x)) > 0$. Из сходимости $z^n(s; t, x)$ к $z(s; t, x)$ и непрерывности $\Phi(t, x)$ следует, что $\Phi(z(\tau_1; t, x)) \geq 0$. Следовательно, либо $z(\tau_1; t, x) \notin \Omega$ при $\tau_1 > \tau(t, x)$, либо $z(\tau_1; t, x) \in \partial\Omega$ при $\tau_1 > \tau(t, x)$, что противоречит определению $\tau(t, x)$.

Аналогично рассматривается случай $\tau^n(t, x) \leq \tau(t, x) - \delta$.

В случае $\tau(t, x) > 0$ теорема 4.3 доказана. Случай $\tau(t, x) = 0$ доказывается проще.

Теорема 4.3 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Покажем, что предел v последовательности v^n галеркинских приближений является слабым решением задачи (3.1)–(3.3). Функция v^n удовлетворяет тождеству (4.2) при произвольной $\phi \in H_n$. Пусть $\phi \in H_m$ при фиксированном $m \in N$.

Рассмотрим тождество (4.2) при произвольной $n > m$. Интегрируя (4.2) по t , получаем

$$\begin{aligned} & (v^n(T), \phi) - \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i) ds + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + \\ & + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt + \int_0^T b(a, v^n, \phi) dt + \\ & + \int_0^T b(a, v^n, \phi) dt = \int_0^T (f^n, \phi) ds - \int_0^T b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi), \quad \phi \in H_m. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} I_1(n) &= (v^n(T), \phi), \quad I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i) ds, \quad I_3(n) = \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds, \\ I_4(n) &= \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt, \\ I_5(n) &= \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt, \quad I_6(n) = \int_0^T b(a, v^n, \phi) dt, \\ I_7(n) &= \int_0^T b(v^n, a, \phi) dt, \quad I_8(n) = \int_0^T (f^n, \phi) ds. \\ I_9 &= - \int_0^T b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi). \end{aligned}$$

Запишем тождество (5.1) в виде

$$I_1(n) - I_2(n) + \mu_0 I_3(n) + \mu_1 I_4(n) + \mu_1 I_5(n) + I_6(n) + I_7(n) = I_8(n) + I_9 \quad (5.2)$$

и перейдем в (5.2) или, что то же в (5.1), к пределу при $n \rightarrow +\infty$.

Из оценки (4.18) вытекает ограниченность v^n в $L_2(0, T; V)$ и ограниченность значений $v^n(T)$ в H непрерывных функций $v^n(t)$. Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $v^n(T, x)$ слабо сходится к $v(T, x)$ в H . Далее, доказательство соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = (v(T), \phi), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_3(n) = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s), \mathcal{E}(\phi)) dt, \quad (5.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) ds, \quad (5.4)$$

проводится по стандартной схеме (см., например, [13, с. 232]).

Перейдем к слагаемому $I_4(n)$.

Лемма 5.1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_4(n) = I_4 = \int_0^T \left(\int_{\tau(t,x)}^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt. \quad (5.5)$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds \right) : \mathcal{E}(\phi)(x) dx dt. \quad (5.6)$$

Здесь и ниже $\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(w) = \sum_{i,j=1}^N \mathcal{E}_{ij}(u) : \mathcal{E}_{ij}(w)$ для $u, w \in V$. Покажем, что $\bar{I}_4(n) = I_4(n)$. В самом деле, так как $\text{supp} \phi(x) \subset \Omega$, то

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) : \mathcal{E}(\phi)(x) ds dx dt. \quad (5.7)$$

При $s < \tau^n(t, x)$ имеем $z^n(s; t, x) \notin \Omega$, и так как $v^n(t, x) = 0$ при $x \notin \Omega$, то $v^n(s, z^n(s; t, x)) = 0$. Следовательно, при $s < \tau^n(t, x)$ имеем $\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) = 0$. Поэтому

$$\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds = \int_{\tau^n(t,x)}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds.$$

Отсюда и из (5.6) следует $\bar{I}_4(n) = I_4(n)$.

Перейдем к пределу в (5.6). Сделав в интеграле по x замену переменной $x = z^n(t; s, y)$, получаем

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, y) : \mathcal{E}(\phi)(z^n(t; s, y)) ds dy dt. \quad (5.8)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \bar{I}_4(n) &= \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, y) : \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y)) ds dy dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathcal{E}(v^n)(s, y) : (\mathcal{E}(\phi)(z^n(t; s, y)) - \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y))) dy dt = I_{41}(n) + I_{42}(n). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$I_{41}(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathcal{E}(v^n)(s, y) \psi(t, y) ds dy, \quad \psi(t, y) = \int_s^T \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y)) dt. \quad (5.10)$$

Из (4.30) вытекает слабая компактность $v^n(t, x)$ в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega_0)^N)$. Будем считать, что сама $v^n(t, x)$ слабо сходится к $v(t, x)$ в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega_0)^N)$. Пользуясь слабой сходимостью v^n к v и переходя к пределу в (5.10), получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{41}(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathcal{E}(v)(s, y) \int_s^T \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y)) dy dt. \quad (5.11)$$

Делая в (5.11) обратную замену переменной $y = z^n(s; t, x)$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{41}(n) = \int_0^T \left(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt. \quad (5.12)$$

При $s < \tau(t, x)$ имеем $z(s; t, x) \notin \Omega$, и так как $v(t, x) = 0$ при $x \notin \Omega$, то $v(s, z(s; t, x)) = 0$. Следовательно, при $s < \tau(t, x)$ имеем $\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) = 0$. Поэтому

$$\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))) ds = \int_{\tau(t, x)}^t (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))) ds.$$

Отсюда и из (5.6) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{41}(n) = \int_0^T \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt. \quad (5.13)$$

Рассмотрим $I_{42}(n)$. Из сходимости при п.в. (t, y) $z^n(t; s, y)$ к $z(t; s, y)$ вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{42}(n) = 0. \quad (5.14)$$

Из (5.12) и (5.14) вытекает (5.5).

Лемма 5.1 доказана.

Доказательство соотношения

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_5(n) = \int_0^T \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt \quad (5.15)$$

проводится аналогично доказательству (5.5) с очевидными упрощениями.

Доказательство соотношений

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_6(n) = \int_0^T b(a, v, \phi) dt, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_7(n) = \int_0^T b(v, a, \phi) dt, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_8(n) = \int_0^T (f, \phi) ds \quad (5.16)$$

проводится стандартным образом (см., например, [13, с. 232]).

Из установленной сходимости слагаемых $I_i(n)$ вытекает справедливость

$$\begin{aligned} (v(T), \phi) - \int_0^T (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) dt + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v)(t, x), \mathcal{E}(\phi(x))) dt + \mu_1 \int_0^T \int_{\tau(t, x)}^t (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)) dt + \\ + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt + \int_0^T b(a, v, \phi) dt + \int_0^T b(v, a, \phi) dt = \\ = \int_0^T (f(t), \phi) dt - \int_0^T b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi) \end{aligned} \quad (5.17)$$

при любой $\phi \in H_m$.

Используя плотность множества функций $\phi \in H_m$, $m = 1, 2, \dots$ в V нетрудно показать, что (5.17) справедливо при любой $\phi \in V$.

Очевидно, что (5.17) справедливо и при любом $t \in (0, T)$ вместо T :

$$\begin{aligned} (v(t), \phi) - \int_0^t (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) ds + \mu_0 \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s, x), \mathcal{E}(\phi(x))) ds + \mu_1 \int_0^t \int_{\tau(\xi, x)}^{\xi} (\mathcal{E}(v)(s, z(s; \xi, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)) d\xi + \\ + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau(\xi, x)}^{\xi} \mathcal{E}(a)(z(s; \xi, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) d\xi + \int_0^t b(a, v, \phi) ds + \int_0^t b(v, a, \phi) ds = \int_0^t (f(s), \phi) ds - \\ - \int_0^t b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^t (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Дифференцируя (5.18) по t при почти всех t и учитывая $Z(v) = z$, получаем, что v удовлетворяет (3.4).

Покажем, что $v \in W_1$. Так как $v \in L_2(0, T; V)$, то достаточно показать, что $v' \in L_1(0, T; V^{-1})$.

Перепишем тождество (3.4) в виде $d\langle v, \phi \rangle / dt = \langle g(t), \phi \rangle$, где

$$\begin{aligned} \langle g(t), \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) - \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\phi)) - b(v, a, \phi) - b(a, v, \phi) - \\ - \mu_0 (\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\phi)) - b(a, a, \phi) - \mu_1 \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) \equiv \sum_{i=1}^8 \langle q_i(t), \phi \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для доказательства $v' \in L_1(0, T; V^{-1})$ достаточно показать, что $q_i \in L_1(0, T; V^{-1})$, $i = 1, \dots, 8$. При $i = 1, 2, 3$ этот факт доказан в [13, с. 201, с. 226], а при $i = 4, \dots, 7$ очевиден.

Рассмотрим $q_8(t)$. Элементарные выкладки дают

$$\begin{aligned} |\langle q_8(t), \phi \rangle| &\leq M \int_{\Omega \tau(t, x)}^t \int |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x)) d\tau| |\mathcal{E}(\phi)| dx \leq \\ &\leq M \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\tau(t, x)}^t |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x))| d\tau \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{E}(\phi)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq M \left(\int_{\Omega_0} \left(\int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x))|^2 d\tau dx \right)^{1/2} \right) |\phi(x)|_1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Делая в интеграле по Ω_0 замену переменной $x = z(t, s, y)$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x))|^2 d\tau dx = \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, y)|^2 d\tau dy = \\ = \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, y)|^2 dy d\tau \leq \int_0^T |v_x(\tau, y)|^2 d\tau + \int_{\Omega_0} \int_0^T |a_x(\tau, y)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Из неравенств (4.18), (5.20), (5.21) вытекает неравенство $|\langle q_8(t), \phi \rangle| \leq M |\phi(x)|_1$. Следовательно, $g_8 \in L_1(0, T; V^{-1})$.

Включение $v' \in L_1(0, T; V^{-1})$, а следовательно, и $v \in W_1$ установлено.

Таким образом, v является слабым решением задачи (3.1)–(3.3).

Теорема 3.1 доказана.

Замечания. Основной результат можно очевидным образом переформулировать в терминах задачи (1.1)–(1.4). При этом $u = v + a$, $u^0 = v^0 + a$, $u^0|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Заметим также, что мы считали φ следом на $\partial\Omega$ достаточно гладкой функции $a(x)$. Можно было бы, наоборот, построить $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_0)$ продолжение $a(x)$ граничной функции при естественном предположении $\varphi(x) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, но это привело бы к техническим трудностям в доказательствах.

АППЕНДИКС

Приведем используемые выше факты из теории РЛП. Рассмотрим в ограниченной области Ω_0 с гладкой границей $\partial\Omega_0$ задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0. \quad (6.1)$$

Определение 6.1. Пусть $u \in L_1(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_0)^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} u(t, x) = 0$ и $u|_{[0, T] \times \partial\Omega_0} = 0$. Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным u , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega_0}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при п.в. x и любом $t \in [0, T]$ функция $z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (6.1); 2) для любых $x, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества B с мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$; 3) при всех $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, и п.в. $x \in \overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x))$.

Справедливы следующие результаты (см., например, [15, 16]):

Теорема 6.1. Пусть $u \in L_1(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_0)^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} u(t, x) = 0$ и $u|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП z , порожденный u . Более того, $\partial z(\tau; t, x)/\partial \tau = u(\tau, z(\tau; t, x))$ при $t \in [0, T]$, п.в. $\tau \in [0, T]$, п.в. $x \in \Omega_0$.

Теорема 6.2. Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; \overset{\circ}{W}_1^p(\Omega_0)^N)$, $m = 1, 2, \dots$ при некотором $p > 1$. Пусть $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} v^m = 0$, $v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega_0} = 0$, $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Пусть выполняются неравенства

$$\|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega_0)^{N \times N})} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega_0)^N)} \leq M, \quad \|v^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega_0)^{N \times N})} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega_0)^N)} \leq M.$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1([0, T] \times \Omega_0)^N$ при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $z^m(\tau; t, x)$ и $z(\tau; t, x)$ РЛП, порожденные v^m и v соответственно. Тогда последовательность z^m сходится (с точностью до последовательности) к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega_0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Отметим, что в случае гладкой $u(t, x)$ классическое решение $z(\tau; t, x)$ задачи Коши задает порожденный $u(t, x)$ РЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. Звягин В.Г., Орлов В.П. О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
3. Zvyagin V.G., Orlov V.P. Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory // Nonlin. Analys: TMA. 2018. V. 172. P. 73–98.
4. Zvyagin V., Orlov V. On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. B. 2018. V. 23. № 9. P. 3855–3877.
5. Орлов В.П. Об одной неоднородной регуляризованной задаче динамики вязкоупругой среды // Изв. вузов. Матем. 2012. № 8. С. 58–64.
6. Звягин А.В., Звягин В.Г., Поляков Д.М. О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1243–1257.

7. Звягин В.Г., Орлов В.П. О регулярности слабых решений обобщенной модели вязкоупругости Фойгта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1933–1949.
8. Звягин В.Г., Орлов В.П. Об одной модели термовязкоупругости Джеффриса-Олдройда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1821–1830.
9. Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 2008. P. 230.
10. Ворович И.И., Юдович В.И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53(95). № 4. С. 393–428.
11. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, С. 204.
12. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р. // Задача протекания для уравнений Навье–Стокса. Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. С. 115–176.
13. Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1987, С. 408.
14. Крейн С.Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. С. 544.
15. DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
16. Crippa G., de Lellis C. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. Reine Angew. Math. 2008. V. 616. P. 15–46.
17. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. С. 232.