УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ВЗРЫВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ[1)]

© 2023 г. А. И. Аристов[1,2,*]

[1] *119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия*

[2] *119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия*

**e-mail: ai_aristov@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.
Переработанный вариант 28.03.2023 г.
Принята к публикации 30.04.2023 г.

Работа посвящена изучению одного неклассического уравнения в частных производных четвертого порядка, описывающего взрывную неустойчивость в автоколебательных системах. Построено несколько классов точных решений этого уравнения. Показано, что среди этих решений есть обращающиеся в бесконечность за конечное время, ограниченные глобально по времени и ограниченные на любом конечном промежутке времени, но не глобально. Библ. 11.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, разрушение решений, точные решения.

DOI: 10.31857/S0044466923110042, **EDN:** CIMCNK

Работа посвящена изучению точных решений следующего уравнения:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь u – действительнозначная функция, зависящая от пространственной переменной $x \in [0; l]$ ($l > 0$) и времени $t > 0$.

В [1] и [2] обсуждались уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(u - u^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

которые могут описывать взрывную неустойчивость в автоколебательных системах, в частности, в распределенной системе на основе туннельного диода. В [3, с. 296 и 316–322] изучались начально-краевые задачи для уравнений (2) и (3). Было показано, что если задачи однозначно разрешимы в пространстве $X_T = C^2[0; T; S)$, где $T \in (0; \infty]$, S – некоторое соболевское пространство, причем начальные данные удовлетворяют некоторым неравенствам, то происходит разрушение решения путем опрокидывания, т.е. задача разрешима в некотором классе $X_T (T < \infty)$, но не в X_∞, причем

$$\lim_{t \to T-} \|u(x,t)\|_S = \infty. \tag{4}$$

Для понимания процессов, моделируемых нелинейными уравнениями, полезно не только изучать качественные свойства их решений, но и строить точные решения. Качественным свой-

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ (код проекта 22-21-00449).

ствам решений уравнений, содержащих смешанные производные по времени и по пространственным переменным третьего и более высоких порядков, посвящены обширные исследования (например, [3–5]), тогда как в известной автору литературе о точных решениях (например, [6, гл. 5], [7, разд. 9.3, 9.4, 10.2, 10.3]) такие уравнения встречаются редко.

Несколько классов точных решений уравнения (2) было найдено в статьях [8]–[10]; было проанализировано их качественное поведение. Уравнение (3) можно привести к виду (1) с помощью линейной замены, а именно, если принять $(2u - 1)$ за новую зависимую переменную. Точным решениям уравнения (1) и посвящена данная работа.

Теорема 1. *Существуют решения уравнения* (1), *имеющие следующие варианты качественного поведения:*

- *обращающиеся в бесконечность на конечных промежутках времени,*
- *ограниченные глобально по времени,*
- *ограниченные на любом конечном промежутке времени, но не глобально.*

Справедливость этого утверждения будет следовать из дальнейших рассуждений, где будут построены соответствующие примеры. А именно, решения с качественным поведением первых двух типов будут построены в п. 2.2, а с качественным поведением третьего типа – в разд. 3 (случай $g(x) = 0$).

Будем считать, что $c, c_1, c_2, c_3, \ldots$ – вообще говоря, произвольные действительные постоянные, $P_n(\cdot)$ – многочлен степени n от одной переменной.

1. ТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Несложно убедиться, что решения уравнения (1), зависящие только от x, имеют вид

$$u(x,t) = c_1 x + c_2.$$

Пусть решение зависит только от t. После интегрирования по времени уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u^2}{2} = \frac{c}{2}.$$

Рассмотрим отдельно три множества, в которых может находиться c.

1. Пусть $c > 0$. Полагая $c_1 = \sqrt{c}$, получим следующее семейство решений:

$$u(x,t) = c_1 \frac{c_2 e^{c_1 t} + 1}{c_2 e^{c_1 t} - 1}, \quad c_1 > 0.$$

2. При $c < 0$ получим

$$u(x,t) = 2c_1 \operatorname{tg}(c_2 - c_1 t), \quad c_1 = \sqrt{|c|}/2 > 0.$$

3. Если $c = 0$, то

$$u(x,t) = \frac{2}{t - c_1}.$$

2. МЕТОД БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Будем искать решения в виде $u(x,t) = f(\xi)$, $\xi = x - \alpha t$, $\alpha = \text{const} \neq 0$. Подставив это выражение в уравнение, после упрощений получим:

$$f^{\mathrm{IV}}(\xi) - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} f''(\xi) + \frac{1}{\alpha} f(\xi) f'(\xi) = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение, получим

$$f'''(\xi) - \beta f'(\xi) + \gamma f^2(\xi) = \delta, \tag{5}$$

где

$$\beta = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha},$$

δ – пока произвольная постоянная.

2.1. Анализ Пенлеве

Тест Пенлеве, применяемый к обыкновенному дифференциальному уравнению порядка N относительно функции $f(\xi)$, представляет собой исследование того, представимо ли его общее решение в виде ряда Лорана

$$f(\xi) = (\xi - \xi_0)^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (\xi - \xi_0)^m,$$

где p – некоторое постоянное натуральное число, а ξ_0 и какие-то $(N-1)$ из коэффициентов A_m произвольны (см. [6, гл. 10] и [11]). Тест состоит из следующих этапов.

1. Найти начальный член разложения $A_0(\xi - \xi_0)^{-p}$. Должны получиться ненулевая постоянная A_0 и натуральная постоянная p, иначе – тест не пройден.

2. Найти индексы Фукса $m_1, \ldots, m_{N-1}$, т.е. номера членов ряда, в которых могут быть произвольные коэффициенты. Для этого строится алгебраическое уравнение относительно m степени N, которое должно иметь корень $m = -1$ и $(N-1)$ различных целых неотрицательных корней (иначе тест не пройден).

3. Проверить, что коэффициенты с номерами $m = m_1, \ldots, m = m_{N-1}$ действительно произвольны. Если все этапы пройдены корректно, то уравнение прошло тест и имеет общее решение требуемого вида, иначе – нет.

Утверждение 1. *Уравнение* (5) *не проходит тест Пенлеве ни при каких значениях параметров.*

Попробуем применить тест. Сначала подставим в уравнение "нулевое приближение" – только начальный член разложения $f = A_0(\xi - \xi_0)^{-p}$:

$$\underline{f'''(\xi)} - \beta f'(\xi) + \underline{\gamma f^2(\xi)} = \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{-p(p+1)(p+2)A_0(\xi - \xi_0)^{-p-3}} + \beta p A_0(\xi - \xi_0)^{-p-1} + \underline{\gamma A_0^2(\xi - \xi_0)^{-2p}} = \delta,$$

где подчеркнуты ведущие члены, т.е. члены, соответствующие наибольшим по модулю отрицательным степеням $(\xi - \xi_0)$. На первых двух этапах существенную роль играют только они. "Укороченное уравнение", содержащее только эти члены, должно выполняться тождественно:

$$-p(p+1)(p+2)A_0(\xi - \xi_0)^{-p-3} + \gamma A_0^2(\xi - \xi_0)^{-2p} \equiv 0,$$

следовательно, $A_0 = 60/\gamma$, $p = 3$.

Перейдем ко второму этапу. Подставим в "укороченное уравнение" двучлен $f = A_0(\xi - \xi_0)^{-p} + A_m(\xi - \xi_0)^{m-p}$ и упростим. Здесь существенную роль играют только члены, пропорциональные первой степени A_m, поэтому, пренебрегая членами с большими степенями A_m, получим

$$A_m(\xi - \xi_0)^{m-6}[(m-3)(m-4)(m-5) + 120] \equiv 0.$$

Несложно убедиться, что это уравнение имеет корень $m = -1$, тогда как два других корня не являются действительными числами. Это свидетельствует о том, что уравнение не проходит тест Пенлеве, **что требовалось доказать**.

Понизим порядок уравнения (5), положив $g = f'$. После упрощений получим

$$g\left(\frac{dg}{df}\right)^2 + g^2 \frac{d^2 g}{df^2} - \beta g + \gamma f^2 = \delta. \tag{6}$$

Утверждение 2. *Уравнение* (6) *тоже не проходит тест Пенлеве ни при каких значениях параметров.*

Действительно, попытка применить тест приводит к некорректному результату первого этапа. А именно, или $A_0 = 0$, или p не является натуральным числом.

Теперь будем строить семейства частных решений уравнения (5).

2.2. Решение — обобщенный многочлен 1-го типа

Построим решения (5) вида

$$f(\xi) = P_n(\xi^{-1}), \tag{7}$$

где n — пока произвольное натуральное число. Подставим это выражение в (5), заметив, что дифференцирование по ξ многочлена от ξ^{-1} увеличивает степень многочлена на 1:

$$P_{n+3}(\xi^{-1}) - \beta P_{n+1}(\xi^{-1}) + \gamma P_{2n}(\xi^{-1}) = \delta.$$

Очевидно, $n+1 < n+3$. Пусть $n+3 = 2n$: в противном случае старший коэффициент в (7) будет равен нулю, т.е. степень этого многочлена будет меньше n. Значит, $n = 3$, и решение имеет вид

$$f(\xi) = a\xi^{-3} + b\xi^{-2} + c\xi^{-1} + d, \quad a \neq 0.$$

Подставим это выражение в (5), раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями ξ. Для тождественного выполнения равенства потребуем равенства нулю коэффициента при каждой степени ξ. Таким образом, придем к системе:

$$\begin{gathered}
-\gamma a + 60 = 0,\\
2b(-\gamma a + 12) = 0,\\
-2\gamma ac - \gamma b^2 - 3\beta a + 6c = 0,\\
\beta b + \gamma bc + \gamma ad = 0,\\
\beta c + \gamma c^2 + 2\gamma bd = 0,\\
\gamma cd = 0,\\
\gamma d^2 = 0.
\end{gathered}$$

Выразим γa из первого уравнения и подставим во второе. Тогда легко получим, что $b = 0$. А так как $\gamma \neq 0$, то из последнего уравнения получим, что и $d = 0$. Если $b = d = 0$, то четвертое и шестое уравнения выполняются тождественно. Поэтому систему можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
a = 60/\gamma,\\
b = d = 0,\\
-19c - 30\beta/\gamma = 0,\\
c(\beta + \gamma c) = 0.
\end{gathered}$$

Легко убедиться, что если $\beta = 0$, то и $c = 0$, иначе система несовместна. Условие $\beta = 0$ равносильно условию $|\alpha| = 1$. Значит, при названном условии непротиворечивости решение (5) имеет вид $f(\xi) = 120\alpha\xi^{-3}$. Заметим, что исходное уравнение не меняется при сдвиге времени. Поэтому, возвращаясь к первоначальным обозначениям, внесем произвольный параметр c:

$$u(x,t) = \pm 120(x \mp t + c)^{-3}.$$

Рассмотрим одну "ветвь" этого решения: $u = 120\left(x + c - t\right)^{-3}$. В тех точках x, где $x + c > 0$, решение будет обращаться в бесконечность при $t = x + c$. А при $x + c < 0$ решение будет ограничено глобально по времени: $|u| \leqslant 120|x + c|^{-3}$. Заметим, что если рассматривать $x \in [0; l]$, то условие $c > 0$ будет достаточным для обращения решения в бесконечность во всех точках в соответствующие моменты времени, а условие $c + 1 < 0$ будет достаточным для ограниченности решения глобально по времени равномерно по x: $|u| \leqslant 120|l + c|^{-3}$. Аналогично можно рассмотреть "ветвь" решения с другой комбинацией знаков. Таким образом, построены примеры решений, соответствующие первому и второму типам качественного поведения решений, указанным в теореме 1.

2.3. Решение — обобщенный многочлен 2-го типа

Идею предыдущего раздела можно обобщить следующим образом. Будем строить решения вида

$$f(\xi) = P_m(T(\xi)), \tag{8}$$

где $T(\cdot)$ задается с помощью автономного дифференциального уравнения:

$$\frac{dT}{d\xi} = P_n(T) \tag{9}$$

(показатели m и n надо определить).

Заметим, что

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dT}\frac{dT}{d\xi} = P_{m-1}(T)P_n(T) = P_{m+n-1}(T).$$

Аналогично можно показать, что $f''(\xi) = P_{m+2n-2}(T)$, $f'''(\xi) = P_{m+3n-3}(T)$, $f^2(\xi) = P_{2m}(T)$. Значит, можно переписать уравнение (5) в следующем виде:

$$P_{m+3n-3}(T) - \beta P_{m+n-1}(T) + \gamma P_{2m}(T) = \delta.$$

Потребуем, чтобы два из показателей $m + 3n - 3$, $m + n - 1$ и $2m$ были равны, а третий — не больше двух других (в противном случае степень многочлена в (8) или (9) можно понизить). Пусть $m + 3n - 3 = 2m \geqslant m + n - 1$, откуда $m = 3(n-1)$, $n \geqslant 2$ (в двух других возможных случаях получим только неположительные m).

Рассмотрим комбинацию $m = 3$, $n = 2$:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{3} a_k T^k, \quad \frac{dT}{d\xi} = \sum_{k=0}^{2} b_k T^k.$$

Эти выражения упростятся, если взять $\sqrt[3]{a_3}\left(T + b_1/(2b_2)\right)$ за новую переменную, зависящую от ξ, и переобозначить коэффициенты. Следовательно, не нарушая общности, можно искать решения вида

$$f(\xi) = T^3 + aT^2 + bT + c, \quad \frac{dT}{d\xi} = \mu T^2 + d.$$

С помощью этих выражений представим $f'(\xi)$, $f'''(\xi)$ и $f^2(\xi)$ в виде многочленов от T. Подставим эти выражения в (5), раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями T:

$$\begin{gathered}(60\mu^3 + \gamma)T^6 + (24a\mu^3 + 2a\gamma)T^5 + (2b\gamma + a^2\gamma - 3\beta\mu + 114d\mu^2 + 6b\mu^3)T^4 + \\ + (2c\gamma + 2ab\gamma - 2a\beta\mu + 40ad\mu^2)T^3 + (2ac\gamma + b^2\gamma - b\beta\mu - 3d\beta + 60d^2\mu + 8bd\mu^2)T^2 + \\ + (16ad^2\mu - 2ad\beta + 2bc\gamma)T + (2bd^2\mu - bd\beta + c^2\gamma + 6d^3) = \delta.\end{gathered}$$

Для тождественного выполнения этого соотношения потребуем равенства нулю коэффициента при каждой степени T (аналогичных условий на свободный член можно не налагать в силу произвольности δ). Придем к системе:

$$\begin{gathered}60\mu^3 + \gamma = 0, \\ 2a(12\mu^3 + \gamma) = 0, \\ 2b\gamma + a^2\gamma - 3\beta\mu + 114d\mu^2 + 6b\mu^3 = 0, \\ 2c\gamma + 2ab\gamma - 2a\beta\mu + 40ad\mu^2 = 0, \\ 2ac\gamma + b^2\gamma - b\beta\mu - 3d\beta + 60d^2\mu + 8bd\mu^2 = 0, \\ 16ad^2\mu - 2ad\beta + 2bc\gamma = 0.\end{gathered}$$

Из первого уравнения найдем, что $\mu = -\sqrt[3]{\gamma/60}$. Кроме того, с учетом этого уравнения получим из второго, что $a = 0$. Тогда четвертое уравнение примет вид $2c\gamma = 0$, т.е. $c = 0$. Если $a = c = 0$, то шестое уравнение станет тождеством. Для определения других параметров остаются третье и пятое уравнения. Для их преобразования удобно выразить γ через μ из первого. После упрощений они примут следующий вид:

$$\begin{gathered} 38\mu d - 38\mu^2 b = \beta, \\ -60\mu^3 b^2 - b\beta\mu - 3d\beta + 60d^2\mu + 8bd\mu^2 = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Подставим выражение для β из первого уравнения во второе. После упрощений получим

$$11b^2\mu^2 - 42bd\mu + 27d^2 = 0. \tag{11}$$

Случай $d = 0$ можно исключить из рассмотрения. Действительно, если $d = 0$, то из системы следует, что и $\beta = b = 0$, откуда можно получить результат предыдущего раздела: f пропорционально ξ^{-3}. Значит, (11) можно переписать в следующем виде:

$$11\eta^2 - 42\eta + 27 = 0, \quad \eta = \frac{b\mu}{d}.$$

Таким образом, $\eta = 3$ или $\eta = 9/11$. С помощью первого уравнения (9) получим отсюда выражения для b, а затем – для d.

Следовательно, $f(\cdot)$ зависит от ненулевых параметров μ, b, d, которые определяются следующим образом:

$$\mu = -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{60}}, \quad b = -\frac{3\beta}{76\mu^2}, \quad d = -\frac{\beta}{76\mu}, \tag{*}$$

$$\mu = -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{60}}, \quad b = \frac{9\beta}{76\mu^2}, \quad d = \frac{11\beta}{76\mu}. \tag{**}$$

Рассмотрим по отдельности эти комбинации параметров.

• Для комбинации (*) T определяется уравнением

$$\frac{dT}{T^2 - \dfrac{\beta}{76\mu^2}} = \mu d\xi.$$

Интегрируя это уравнение и разрешая относительно T, придем к следующим выражениям.

– Если $\beta > 0$, то

$$T(\xi) = \sqrt{\frac{\beta}{76\mu^2}} \frac{1 + ce^{2\mu\sqrt{\frac{\beta}{76\mu^2}}\xi}}{1 - ce^{2\mu\sqrt{\frac{\beta}{76\mu^2}}\xi}}.$$

И при положительных, и при отрицательных μ можно упростить это выражение следующим образом:

$$T(\xi) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\beta}{19}} \frac{1 + ce^{\sqrt{\frac{\beta}{19}}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{\frac{\beta}{19}}\xi}}.$$

Кроме того,

$$f(\xi) = T^3 - \frac{3\beta}{76\mu^2}T.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$f(\xi) = -\frac{15}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2 - 1}{19}\right)^{3/2}(E^3 - 3E), \quad E = \frac{1 + ce^{\sqrt{(\alpha^2-1)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{(\alpha^2-1)/(19\alpha^2)}\xi}}.$$

– Если $\beta < 0$, то, рассуждая аналогично, получим, что

$$f(\xi) = -120\alpha\left(\frac{1-\alpha^2}{76\alpha^2}\right)^{3/2}(\tau^3 + 3\tau), \quad \tau = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{76\alpha^2}}\xi + c\right).$$

– Если $\beta = 0$, то получим повторение результата предыдущего раздела.

• Для комбинации (**) T определяется уравнением

$$\frac{dT}{T^2 + \dfrac{11\beta}{76\mu^2}} = \mu d\xi.$$

Аналогичным образом получим следующие семейства решений.

– Если $\beta > 0$, то

$$f(\xi) = -120\sqrt{11}\alpha\left(\frac{\alpha^2 - 1}{76\alpha^2}\right)^{3/2}(11\tau^3 + 9\tau), \quad \tau = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{11(\alpha^2-1)}{76\alpha^2}}\xi + c\right).$$

– Если $\beta < 0$, то

$$f(\xi) = -\frac{120\sqrt{11}\alpha}{76^{3/2}}\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}(11E^3 - 9E), \quad E = \frac{1 + ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}.$$

– Если $\beta = 0$, то получим повторение результата предыдущего раздела.

3. РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Будем искать решения в виде

$$u(x,t) = tf(x) + t^{-1}g(x) + h(x),$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ – гладкие функции, подлежащие определению. Подставим это выражение в уравнение и раскроем скобки:

$$2t^{-3}g''(x) + tf''(x) + t^{-1}g''(x) + h''(x) = 2t^{-3}g(x) + tf^2(x) - t^{-3}g^2(x) + \\ + h(x)f(x) - t^{-2}h(x)f(x).$$

Для того чтобы обеспечить тождественное выполнение этого равенства, сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями t и приравняем к нулю соответствующие коэффициенты. Придем к системе:

$$\begin{aligned} &t^{-3}: 2g''(x) = 2g(x) - g^2(x), \\ &t: \quad f''(x) = f^2(x), \\ &t^{-1}: g''(x) = 0, \\ &1: \quad h''(x) = f(x)h(x), \\ &t^{-2}: 0 = -h(x)g(x). \end{aligned}$$

Из последнего уравнения видно, что хотя бы один из коэффициентов g и h равен нулю. Рассмотрим эти случаи отдельно.

• Пусть $g(x) = 0$. Тогда для f и h получим систему:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f^2(x), \\ h''(x) &= f(x)h(x). \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на f', заметив, что $f \neq \mathrm{const}$, и проинтегрируем:

$$f'^2 = \frac{2f^3}{3} + c.$$

Вообще говоря, это уравнение можно проинтегрировать с помощью специальных функций. Ограничимся рассмотрением случая $c = 0$. Несложно убедиться, что в этом случае

$$f(x) = \frac{6}{(x - c_1)^2}.$$

Тогда для h получим уравнение Эйлера, из которого найдем:

$$h(x) = c_2(x - c_1)^3 + c_3(x - c_1)^{-2}.$$

Таким образом,

$$u(x,t) = \frac{6t + c_2(x - c_1)^5 + c_3}{(x - c_1)^2}.$$

Очевидно, эти решения ограничены на любых конечных промежутках времени (при фиксированных x), но являются бесконечно большими при неограниченном возрастании времени. Таким образом, построен пример решения, имеющего третий тип качественного поведения, указанный в теореме 1.

• Пусть $h(x) = 0$. Тогда для f и g получим систему:

$$2g''(x) = 2g(x) - g^2(x),$$
$$f''(x) = f^2(x),$$
$$g''(x) = 0.$$

Этой системе удовлетворяет только одна нетривиальная функция g, а именно, $g = 2$. Уравнение для f рассматривалось в предыдущем пункте. Заметим, что исходное уравнение не меняется при сдвиге по t, а значит, в решении можно заменить t на $t - c_1$. Таким образом, получим следующее семейство решений:

$$u(x,t) = (t - c_1)f(x) + \frac{2}{t - c_1},$$

где $f(x)$ определяется квадратурой:

$$f'^2 = \frac{2f^3}{3} + c_2.$$

Это семейство имеет подмножество, выражающееся через элементарные функции:

$$u(x,t) = \frac{6(t - c_1)}{(x - c)^2} + \frac{2}{t - c_1}.$$

4. ВЫВОДЫ

Построены следующие семейства решений уравнения (1).

• Тривиальные решения:

1) $u(x,t) = c_1x + c_2$;

2) $u(x,t) = c_1\dfrac{c_2e^{c_1t} + 1}{c_2e^{c_1t} - 1}$, $c_1 > 0$;

3) $u(x,t) = 2c_1\operatorname{tg}(c_2 - c_1t)$, $c_1 > 0$;

4) $u(x,t) = \dfrac{2}{t - c_1}$.

• Решения типа бегущей волны ($u(x,t) = f(\xi)$, $\xi = x - \alpha t$):

1) $u(x,t) = \pm 120(x \mp t + c)^{-3}$;

2) $f(\xi) = -\dfrac{15}{\alpha^2}\left(\dfrac{\alpha^2 - 1}{19}\right)^{3/2}(E^3 - 3E)$, $E = \dfrac{1 + ce^{\sqrt{(\alpha^2-1)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{(\alpha^2-1)/(19\alpha^2)}\xi}}$;

3) $f(\xi) = -120\alpha\left(\dfrac{1-\alpha^2}{76\alpha^2}\right)^{3/2}(\tau^3 + 3\tau),\ \tau = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\alpha^2}{76\alpha^2}}\xi + c\right);$

4) $f(\xi) = -120\sqrt{11}\alpha\left(\dfrac{\alpha^2-1}{76\alpha^2}\right)^{3/2}(11\tau^3 + 9\tau),\ \tau = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\dfrac{11(\alpha^2-1)}{76\alpha^2}}\xi + c\right);$

5) $f(\xi) = -\dfrac{120\sqrt{11}\alpha}{76^{3/2}}\left(\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}(11E^3 - 9E),\ E = \dfrac{1 + ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}.$

• Решения специального вида:

1) $u(x,t) = \dfrac{6t + c_2(x-c_1)^5 + c_3}{(x-c_1)^2};$

2) $u(x,t) = (t-c_1)f(x) + \dfrac{2}{t-c_1}$, где $f(x)$ определяется квадратурой: $f'^2 = \dfrac{2f^3}{3} + c_2$. Это семейство имеет подмножество, выражающееся через элементарные функции: $u(x,t) = \dfrac{6(t-c_1)}{(x-c)^2} + \dfrac{2}{t-c_1}$.

(Здесь c, $c_{1,2,3}$ — произвольные постоянные, α — произвольная постоянная, обеспечивающая корректность выражений, в которых она фигурирует.) Показано, что в этом списке есть решения, имеющие любой из трех типов качественного поведения, указанных в теореме 1. Кроме того, показано, что обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее решения типа бегущей волны, не проходит тест Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. *Рабинович М.И.* Автоколебания распределенных систем. Известия вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 477–510.
3. *Корпусов М.О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: URSS, 2010.
4. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. *Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Springer-Verlag. 2006. 564 с.
6. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
7. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
8. *Аристов А.И.* О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1870–1875.
9. *Аристов А.И.* О точных решениях одного неклассического нелинейного уравнения четвертого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 4. С. 506–517.
10. *Aristov I.* Exact Solutions of Three Nonclassical Equations, and Their Construction with Maple System // Lobachevskii J. Mathematics. 2019. V. 40. № 7. P. 851–860.
11. *Aristov I., Kholomeeva A.A., Moiseev E.I.* Application of the Painleve Test to a Nonlinear Partial Differential Equation // Lobachevskii J. Mathematics. 2022. V. 43. № 7. P. 1791–1794.