
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТОЧНОЙ СХОДИМОСТИ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА НА ХИМЕРНЫХ СЕТКАХ В ЗАДАЧЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ РЕЛЬСОВОГО ПОЛОТНА¹⁾

© 2023 г. А. А. Кожемяченко^{1,2,*}, А. В. Фаворская^{1,2}

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9,
Московский физико-технический институт, Россия

² 117218 Москва, Нахимовский пр-т., 36, к. 1,
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Россия

*e-mail: anton-kozhemyachenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.05.2023 г.
Переработанный вариант 27.05.2023 г.
Принята к публикации 26.06.2023 г.

В работе рассматривается пример решения трехмерной прямой задачи ультразвукового контроля в рельсовом полотне, представляемого в виде линейно-упругой среды, с использованием сеточно-характеристического метода на криволинейной структурированной химерной и регулярных структурированных сетках. Между химерной и регулярными сетками используется взаимная интерполяция, учитывающая особенности перехода от криволинейной к регулярной сеткам в трехмерном пространстве. Предложен аналитический алгоритм для построения химерной сетки. Приведены анализ сходимости разработанных численных алгоритмов в зависимости от изменения шага по пространственным направлениям и сравнительный анализ полноволновых полей модуля скорости распространения возмущения от источника. Библ. 43. Фиг. 17.

Ключевые слова: численное моделирование, сеточно-характеристический метод, химерные сетки, неразрушающий контроль, ультразвуковой метод, рельсовое полотно.

DOI: 10.31857/S0044466923100071, **EDN:** FOEBUS

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы неразрушающего контроля [1] позволяют следить за состоянием различных объектов мониторинга в условиях их длительного срока эксплуатации. Широкое распространение получили такие методы неразрушающего контроля, как магнитные и/или электромагнитные [2], нейтронные [3], рентгеновской дифракции [4], римановской спектроскопии [5] и ультразвуковые [6]. Из них ультразвуковые методы, основанные на линейной зависимости между временем прохождения волны и напряжением эластичного материала, просты в использовании и демонстрируют высокую эффективность при рассмотрении металлических объектов. Согласно [5] ультразвуковые методы при измерении внутренних напряжений подразделяются на три типа: с использованием только продольных волн [7], с использованием также поперечных волн [8] и с использованием продольных волн с критическим преломлением (LCR waves) [9]. Несмотря на несовершенство теории и зависимости от множества параметров окружающей среды и материала [10], ультразвуковые методы неразрушающего контроля широко используются в задачах наблюдения за состоянием железнодорожного полотна благодаря их сильной проникающей способности и высокой чувствительности [11]. Излучаемые зондами ультразвуковые волны отражаются от контактных усталостных повреждений, а их переотражения, проекции и дифракция преобразуются и собираются в т.н. В-сканированных (B-scan) изображениях [12]. В настоящее

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 20-71-10028).

время одним из перспективных направлений в этой области является создание автоматизированного интеллектуального алгоритма обработки изображений В-сканирования [13, 14] с целью точного и стабильного определения дефекта без необходимости ручной обработки.

Методы математического и численного моделирования активно используются в ряде задач безопасности на железнодорожном транспорте. Например, в [15] проведено сравнение метода конечных элементов и объединенных метода конечных элементов и безэлементного метода Галеркина для задачи ударпрочности железнодорожного транспорта. Для анализа образования усталостных трещин при постоянных и переменных нагрузках проводится численное моделирование с использованием метода граничных элементов, конечных элементов, безэлементного метода Галеркина, обобщенного метода конечных элементов [16–20].

Численное решение прямой задачи ультразвукового неразрушающего контроля железнодорожного полотна может быть сведено к решению начально-краевой задачи для уравнений упругого тела или в более общей постановке к задаче численного решения гиперболической системы уравнений. Для решения таких задач используются конечно-элементные [21] и конечно-разностные [22] методы. Среди методов конечных элементов наибольший интерес представляют вариации метода Галеркина [23–25] и метод спектральных элементов [26, 27]. Среди конечно-разностных методов можно выделить методы Годунова [28], методы, использующие схему Кабаре [29, 30], методы на сдвинутых сетках [31, 32], также к числу конечно-разностных методов относится сеточно-характеристический метод [33–35], который используется в настоящей работе.

Для решения уравнений математической физики в последнее время стали использоваться химерные или перекрывающиеся расчетные сетки, которые ранее применялись для решения гидродинамических задач [36–39]. Так, сеточно-характеристический метод с использованием химерных сеток позволяет описывать границы сложной формы [40], в том числе контактные [41] или не сонаправленные с координатными осями [34].

В разд. 2 рассматривается система уравнений, используемая для математического моделирования задачи неразрушающего контроля. В разд. 3 рассмотрен используемый для расчетов сеточно-характеристический метод на регулярных и криволинейных сетках. Разд. 4 посвящен особенностям используемой взаимной интерполяции между криволинейной и регулярными сетками. В разд. 5 поясняется используемый алгоритм для генерации химерной расчетной сетки. В разд. 6 приведены конфигурации рассматриваемых расчетных сеток, а в разд. 7 с их использованием приведены результаты исследования на сеточную сходимость в различных нормах. Разд. 8 содержит выводы и указания на области применения предложенного алгоритма.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

Для моделирования волновых процессов в рельсовом полотне рассматривается следующая система уравнений:

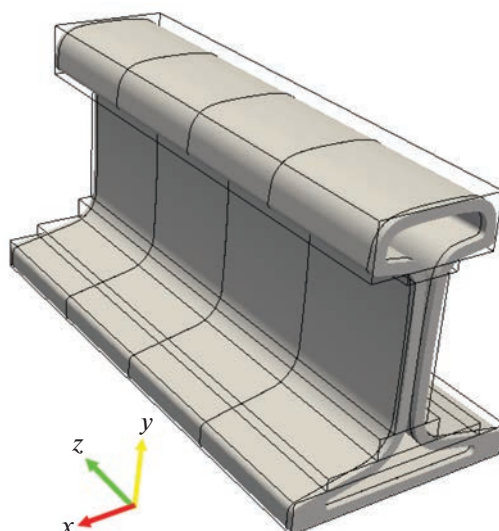
$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t))^T, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) = (\rho c_p^2 - 2\rho c_p^2)(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\mathbf{I} + \rho c_p^2 (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))^T). \quad (2.2)$$

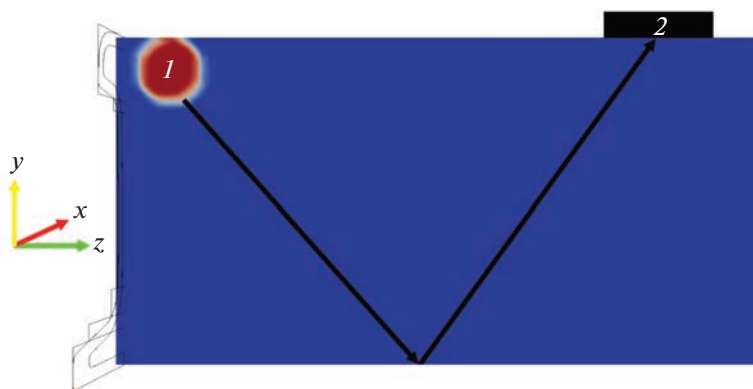
В уравнениях (2.1), (2.2) $\mathbf{v}$ — производная смещений бесконечно-малого элемента материала по времени, $\boldsymbol{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений Коши, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ — плотность стали, $c_p = 6250.1282 \text{ м/с}$ — скорость распространения продольных Р-волн в материале, $c_s = 3188.5210 \text{ м/с}$ — скорость поперечных S-волн в материал.

На фиг. 1 представлен пример расчетной области, моделирующей рельсовое полотно и состоящей из шести структурированных прямоугольных сеток с постоянным шагом и одной структурированной криволинейной химерной сетки.

Рассматривается задача неразрушающего контроля, в рамках которой вблизи верхней границы рельса задается источник синусоидальных возмущений с одним периодом и частотой 625.01282 кГц, как показано в разрезе на фиг. 2. На оставшейся части внешней границы химерной сетки устанавливаются условие свободной границы и нулевые начальные условия.



Фиг. 1. Расчетная область, моделирующая рельсовое полотно.



Фиг. 2. Постановка задачи неразрушающего контроля: 1 – источник, 2 – приемник.

3. СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ИЗОТРОПНОЙ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

Для численного решения систем уравнений (2.1), (2.2) применяется сеточно-характеристический метод. Систему в трехмерном случае можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q} + \mathbf{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q} = 0,$$

далее производится расщепление по трем направлениям и получаются выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} = 0, \quad (3.1)$$

матрица $\mathbf{A}_1$ гиперболическая, у нее существует набор собственных векторов, и она представима в виде

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{\Omega}^1 \mathbf{\Lambda}^1 (\mathbf{\Omega}^1)^{-1},$$

где матрица Ω^1 составлена из собственных векторов, собственные значения матрицы Λ^1 есть элементы диагональной матрицы Λ^1 . Теперь (3.1) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \Omega^1 \Lambda^1 (\Omega^1)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} = 0. \quad (3.2)$$

Введем замену $\omega = \Omega^1 \mathbf{q}$ и умножим систему уравнений (3.2) на матрицу $(\Omega^1)^{-1}$, внося ее под операторы дифференцирования. Таким образом, получаем систему линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \Lambda^1 \frac{\partial}{\partial x} \omega = 0. \quad (3.3)$$

Значения ω , называемые также инвариантами Римана, на следующем временном слое определяются из численного решения уравнений переноса методом характеристик или конечно-разностными схемами. В настоящей работе использована конечно-разностная схема Русанова [41].

Таким образом, вычисления разбиваются на три стадии. На первой стадии (3.4) производится умножение всех векторов $\mathbf{q}$ на матрицу Ω^1 , на второй стадии решается система (3.3), а на третьей стадии делается обратная замена (3.5):

$$\omega = (\Omega^1)^{-1} \mathbf{q}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{q} = \Omega^1 \omega. \quad (3.5)$$

Аналогичным образом рассматриваются оставшиеся одномерные системы уравнений.

Рассмотрим для определенности направление x . Пусть вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль выбранного направления, а векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ образуют с ним декартову систему координат. Введем симметричные тензоры второго ранга

$$\mathbf{N}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_i),$$

где индексы варьируются от 0 до 2, а под $\mathbf{n}_0$ понимается вектор $\mathbf{n}$.

Вектор неизвестных в случае изотропной линейно-упругой среды имеет вид

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T, \quad (3.6)$$

а матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_3$ имеют набор собственных значений:

$$\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\}.$$

Применяя алгоритм сеточно-характеристического метода в регулярной структурированной сетке, для инвариантов Римана и неизвестных (3.6) вдоль направления x можно получить выражения:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= v_x \mp \frac{1}{c_p \rho} \sigma_{xx}, \\ \omega_{3,4} &= v_y \mp \frac{1}{c_s \rho} \sigma_{xy}, \\ \omega_{5,6} &= v_z \mp \frac{1}{c_s \rho} \sigma_{xz}, \\ \omega_7 &= \sigma_{yz}, \\ \omega_8 &= \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \\ \omega_9 &= \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 2k \sigma_{xx}, \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \{\omega_1 + \omega_2, \omega_3 + \omega_4, \omega_5 + \omega_6\}^T, \end{aligned}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho c_p (\omega_2 - \omega_1)}{2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\rho c_s (\omega_4 - \omega_3)}{2}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\rho c_s (\omega_6 - \omega_5)}{2},$$

$$\sigma_{yz} = \omega_7, \quad \sigma_{yy,zz} = \frac{(k \rho c_p (\omega_2 - \omega_1) + \omega_9 \pm \omega_8)}{2},$$

где $k = 1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2}$.

В случае структурированной криволинейной сетки $\{x, y, z\}$ рассматривается преобразование координат и переход к структурированной регулярной сетке $\{\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)\}$ со скалярным полем вида (3.7) для соответствующего направления и ортонормированным базисом (3.8). Тогда для выбранного направления ξ после применения сеточно-характеристического метода в условиях криволинейной сетки получим следующий набор собственных значений:

$$\{lc_p, -lc_p, lc_s, -lc_s, lc_s, -lc_s, 0, 0, 0\}$$

и следующий вид инвариантов Римана:

$$l(x, y, z) = |\nabla \xi(x, y, z)| = \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\nabla \xi(x, y, z)}{|\nabla \xi(x, y, z)|}, \quad \mathbf{n}_1(x, y, z) = \frac{\nabla \eta(x, y, z)}{|\nabla \eta(x, y, z)|}, \quad \mathbf{n}_2(x, y, z) = \frac{\nabla \zeta(x, y, z)}{|\nabla \zeta(x, y, z)|}, \quad (3.8)$$

$$\omega_{1,2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_p \rho} \mathbf{N}_{00} \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\omega_{3,4} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{01} \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\omega_{5,6} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{02} \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\omega_7 = 2\mathbf{N}_{12} \div \boldsymbol{\sigma}, \quad \omega_8 = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) \div \boldsymbol{\sigma}, \quad \omega_9 = (\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - 2k\mathbf{N}_{00}) \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \mathbf{n} + \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} \mathbf{n}_1 + \frac{\omega_5 + \omega_6}{2} \mathbf{n}_2,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\rho(c_p - c_s)\mathbf{N}_{00} + \rho c_3 \mathbf{I})}{2} + \rho c_s (\omega_4 - \omega_3) \mathbf{N}_{01} + \rho c_s (\omega_6 - \omega_5) \mathbf{N}_{02} +$$

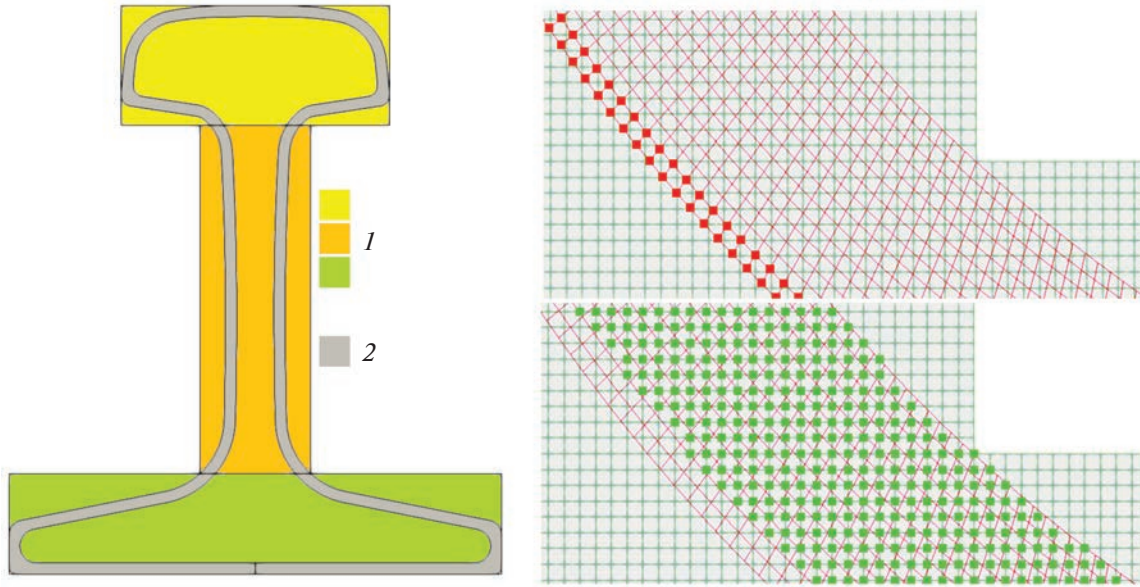
$$+ 2\omega_7 \mathbf{N}_{12} + \frac{\omega_8 (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22})}{2} + \frac{\omega_9 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00})}{2},$$

где $c_3 = \left(1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2} \right) c_p$.

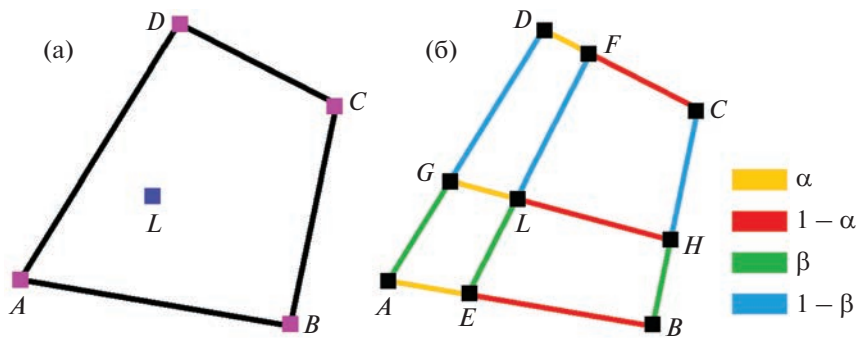
4. ВЗАИМНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МЕЖДУ РЕГУЛЯРНОЙ И КРИВОЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРИРОВАННЫМИ СЕТКАМИ

При реализации численного алгоритма необходимо выполнять интерполяцию из регулярной сетки в химерную сетку (узлы, отмеченные красным на фиг. 3) и из химерной сетки в регулярную сетку (узлы, отмеченные зеленым на фиг. 3).

Для перехода из обычной регулярной сетки в узлы химерной сетки может быть использована обычная билинейная интерполяция, однако при ее использовании для перехода от узлов химерной сетки к узлам регулярной сетки возникают неоднозначность выбора системы координат и необходимость решения системы линейных уравнений для каждой ячейки химерной сетки. Поэтому предлагается другой тип интерполяции, который позволяет избежать этих недостатков.



Фиг. 3. Профиль рельса в задаче интерполяции: 1 – регулярные сетки, 2 – химерная сетка.



Фиг. 4. Интерполяция в точке L через точки четырехугольника $ABCD$: а – постановка задачи интерполяции, б – определение коэффициентов α и β .

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ произвольной формы (фиг. 4), ориентированный так, чтобы удовлетворять неравенству $AB + AD \geq BC + CD$. Точка, в которой необходимо решить задачу интерполяции, обозначена через L , также введены две вспомогательные линии EF и GH таким образом, что

$$\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC} = \frac{GL}{GH}, \quad \beta = \frac{AG}{AD} = \frac{BH}{BC} = \frac{EL}{EF}. \quad (4.1)$$

Зная коэффициенты α и β , по аналогии с билинейной интерполяцией в прямоугольнике можно получить:

$$\mathbf{u}_L = (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{u}_A + \alpha(1 - \beta)\mathbf{u}_B + \alpha\beta\mathbf{u}_C + (1 - \alpha)\beta\mathbf{u}_D,$$

здесь $\mathbf{u}$ – это вектор неизвестных, подлежащих интерполяции.

Используя схему с фиг. 4б и (4.1), получим систему уравнений для поиска α и β :

$$x_L = x_A + \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_D - x_A) + \alpha\beta(x_A + x_C - x_B - x_D), \quad (4.2)$$

$$y_L = y_A + \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_D - y_A) + \alpha\beta(y_A + y_C - y_B - y_D). \quad (4.3)$$

Чем ближе четырехугольник к параллелограмму, тем ближе система уравнений (4.2), (4.3) к системе линейных уравнений. В связи с этим предложен учитывающий различные конфигурации $ABCD$ алгоритм нахождения коэффициентов α и β . Пусть задана ошибка ε , с которой мы ищем координаты точки L из уравнений (4.2), (4.3). Если обнаружено, что расстояние от точки L до одного из узлов химерной сетки меньше ε или расстояние от точки L до одного из ребер $ABCD$ меньше ε , то соответственно используется либо копирование, либо линейная интерполяция вдоль соответствующего сегмента. Иначе рассматриваются следующие случаи.

1. Необходимо вычислить α и β , используя выражения (4.4) и (4.5) соответственно. Если при этом выражения (4.2), (4.3) выполняются с ошибкой меньше чем ε , то задача интерполяции решена. Данный случай соответствует тому, когда $ABCD$ достаточно близок к трапеции $AD//BC$ или параллелограмму:

$$\alpha = \frac{d(L, AD)}{d(L, AD) + d(L, BC)}, \quad \beta = \frac{d(L, AB)}{d(L, AB) + d(L, CD)}, \quad (4.4)$$

$$\beta = \frac{(x_L - x_A) - (x_B - x_A)\alpha}{(x_D - x_A) + (x_A + x_C - x_B - x_D)\alpha} = \frac{(y_L - y_A) - (y_B - y_A)\alpha}{(y_D - y_A) + (y_A + y_C - y_B - y_D)\alpha}. \quad (4.5)$$

2. При невыполнении условия из п. 1. необходимо найти β из (4.4) и α из (4.6) тогда, если выражения (4.2), (4.3) выполняются с ошибкой, не превосходящей ε , то задача интерполяции решена. В этом случае $ABCD$ оказывается близок к трапеции $AB//CD$:

$$\alpha = \frac{(x_L - x_A) - (x_D - x_A)\beta}{(x_B - x_A) + (x_A + x_C - x_B - x_D)\beta} = \frac{(y_L - y_A) - (y_D - y_A)\beta}{(y_B - y_A) + (y_A + y_C - y_B - y_D)\beta}. \quad (4.6)$$

3. Наконец, если не выполнены условия из п. 1 и п. 2, то необходимо решать систему нелинейных уравнений (4.2), (4.3). Введем параметр с рекомендованным значением $\varepsilon_N = 0.3$. Если для одного из квадратных уравнений относительно α и β (4.7) верно неравенство (4.8)

$$a\theta^2 - b\theta + c = 0, \quad \theta \in \{\alpha, \beta\}, \quad (4.7)$$

$$\frac{a}{b} < \varepsilon_N, \quad (4.8)$$

то для нахождения соответствующего θ используются ньютоновские итерации:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\frac{c}{b} - \theta_n \left(1 - \theta_n \frac{a}{b}\right)}{1 - 2\theta_n \frac{a}{b}}.$$

В соответствии с итерационным процессом оставшийся коэффициент находится из выражения (4.5) или (4.6), а завершение итераций наступает при выполнении выражений (4.2), (4.3) с ошибкой меньше, чем ε . Начальное приближение для θ можно найти из (4.4).

Если условие (4.8) не выполнено ни для одного из квадратных уравнений (4.7) относительно α и β , то решается квадратное уравнение с наибольшим коэффициентом a с использованием стандартной формулы через дискриминант.

При рассмотрении задачи интерполяции в трехмерном пространстве используется следующий переход от рассматриваемого четырехугольника к восьмиугольнику:

$$u_L^{2D} = a_{ij}^{2D} u_{ij} + a_{i+1,j}^{2D} u_{i+1,j} + a_{ij+1}^{2D} u_{ij+1} + a_{i+1,j+1}^{2D} u_{i+1,j+1},$$

$$a_{ijk}^{3D} = a_{ij}^{2D}, \quad k \in [0, N_z],$$

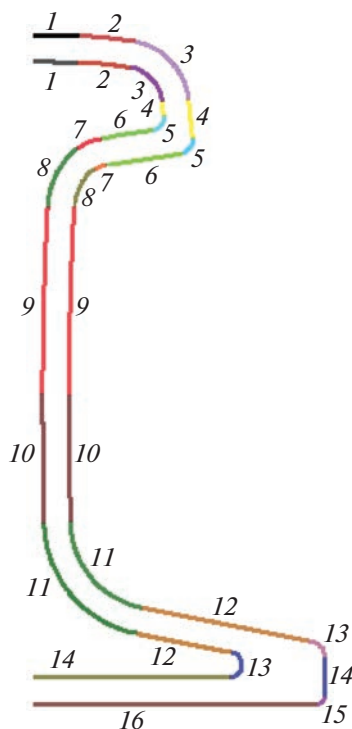
$$u_L^{3D} = a_{ijk}^{3D} u_{ijk} + a_{i+1,j,k}^{3D} u_{i+1,j,k} + a_{ij+1,k}^{3D} u_{ij+1,k} + a_{i+1,j+1,k}^{3D} u_{i+1,j+1,k} + \\ + a_{ijk+1}^{3D} u_{ijk+1} + a_{i+1,j,k+1}^{3D} u_{i+1,j,k+1} + a_{ij+1,k+1}^{3D} u_{ij+1,k+1} + a_{i+1,j+1,k+1}^{3D} u_{i+1,j+1,k+1},$$

где a — коэффициенты при решении задачи интерполяции, а u_{ijk} — компоненты поля, N_z — количество узлов расчетной сетки вдоль направления OZ .

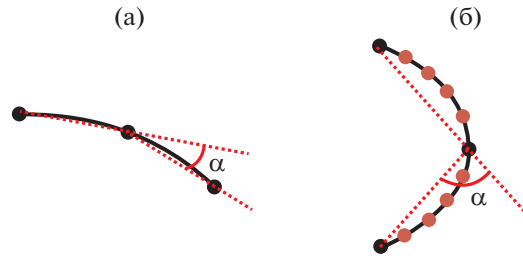
5. АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ХИМЕРНОЙ СЕТКИ

Для создания химерной сетки использован разработанный специальный алгоритм [42]. Профиль рельса разбивается на сегменты, форма которых задается аналитически, исходя из геометрических особенностей рассматриваемого профиля и соответствующей инженерной документации. В предложенном алгоритме как внешняя, так и внутренняя границы криволинейной области разбиваются на отдельные сегменты. В силу симметрии профиля по оси OY достаточно построить половину соответствующих границ, разбитых на 16 и 14 сегментов соответственно, согласно фиг. 5. К каждому из сегментов применяется естественная параметризация кривой, после чего вдоль параметризованной кривой вводится расчетная сетка с заданным пользователем шагом h_U между узлами.

Рассмотрим вначале внешнюю границу криволинейной области. Для учета областей с большим радиусом кривизны вводится дополнительный параметр в виде допустимого угла $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{10}$ отклонения между узлами расчетной сетки. На фиг. 6 схематично приведены два случая, которые учитываются алгоритмом. В случае фиг. 6а после естественной параметризации кривой и введения расчетной сетки с заданным шагом пользователя h_U допустимый угол не превышает установленного значения $\alpha_{\max}$ и дополнительного сгущения расчетной сетки не требуется. В случае фиг. 6б полученная расчетная сетка плохо описывает исходный сегмент, т.е. требуется произвести сгущение сетки, добавив новые узлы (отмечены оранжевым) путем измельчения шага до h_α для рассматриваемого сегмента, при котором с учетом радиуса кривизны угол отклонения между узлами составит $\alpha = \alpha_{\max} = \frac{\pi}{10}$. Данная проверка проводится для всех сегментов.



Фиг. 5. Разбиение половины профиля внутренней и внешней границ криволинейной области на соответствующие пронумерованные сегменты.



Фиг. 6. Постановка задачи сгущения расчетной сетки для сегментов с большим радиусом кривизны.

Для решения задачи измельчения расчетной сетки в каждом сегменте, в котором условие на допустимый угол $\alpha_{\max}$ не выполнено, на основе функции (5.1) ставится в соответствие функция H_{USED} (5.2), зависящая от естественного параметра t . Каждую такую функцию H_{USED} можно задать через коэффициенты (5.3), вычисляемые через параметры сегментов после естественной параметризации, соответствующие началу t_{START} и концу сегмента t_{END} , и предустановленный шаг h_U и характерный для сегмента минимальный шаг h_α . Параметр $h_{\text{GROW}} = 0.25$ введен для расчета промежутка, в котором будет происходить постепенное сгущение сетки при переходе между сегментами, соседствующими с рассматриваемым:

$$t \geq 0, \quad H_0(t) = \begin{cases} 1 - 2t^2, & t \in [0, 1/2], \\ 2(t - 1)^2, & t \in (1/2, 1], \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

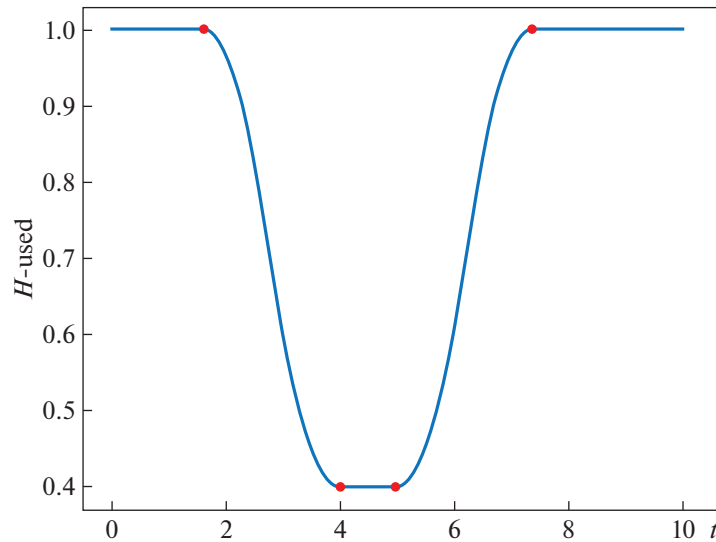
$$H_{\text{USED}}(t) = \begin{cases} 1, & t < t_{\text{START}} - \Delta t_{\text{LEFT}}, \\ 1 + AH_0\left(\frac{t_{\text{START}} - t}{\Delta t_{\text{LEFT}}}\right), & t \in [t_{\text{START}} - \Delta t_{\text{LEFT}}, t_{\text{START}}], \\ 1 + A, & t \in [t_{\text{START}}, t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}}], \\ 1 + AH_0\left(\frac{t - t_{\text{START}} - \Delta t_{\text{CENTER}}}{\Delta t_{\text{RIGHT}}}\right), & t \in (t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}}, t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}} + \Delta t_{\text{RIGHT}}], \\ 1, & t > t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}} + \Delta t_{\text{RIGHT}}, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\Delta t_{\text{LEFT}} = \Delta t_{\text{RIGHT}} = \frac{h_U - h_\alpha}{h_{\text{GROW}}}, \quad t_{\text{CENTER}} = t_{\text{END}} - t_{\text{START}}, \quad A = -\frac{h_U - h_\alpha}{h_U}. \quad (5.3)$$

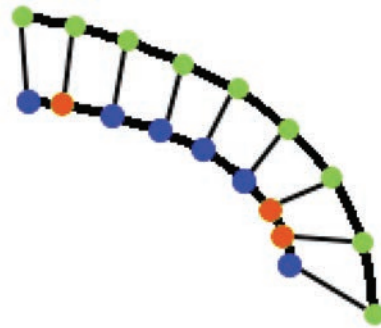
На фиг. 7 представлен пример функции (5.2) для $t_{\text{START}} = 4$, $t_{\text{END}} = 5$, $h_U = 1.0$, $h_\alpha = 0.4$ при $t \in [0, 10]$, красными маркерами отмечены крайние точки для промежутков по t из (5.2).

Таким образом, понимая для каких сегментов h_U остается неизменным, а для каких необходимо постепенное сгущение до соответствующего h_α и используя все соответствующие H_{USED} , с учетом параметризации всего контура, можно получить итоговое распределение параметра измельчения сетки для всей внешней границы криволинейной области, умножая H_{USED} на размер пользовательского шага или перемножая соответствующие функции между собой, в случае если два подобных сегмента соседствуют друг с другом.

Для получения внутренней границы, которая также была естественно параметризована, каждая точка внешней границы переносится вдоль линии. Однако при подобном подходе узлы расчетной сетки на внутренней границе могут оказаться либо слишком отдалены, либо слишком



Фиг. 7. Пример распределения H_{USED} при $t_{\text{START}} = 4$, $t_{\text{END}} = 5$, $h_U = 1.0$, $h_\alpha = 0.4$.



Фиг. 8. Первичное распределение узлов на внутренней границе.

близко относительно друг друга, как показано на фиг. 8, где потенциально проблемные узлы выделены оранжевым цветом.

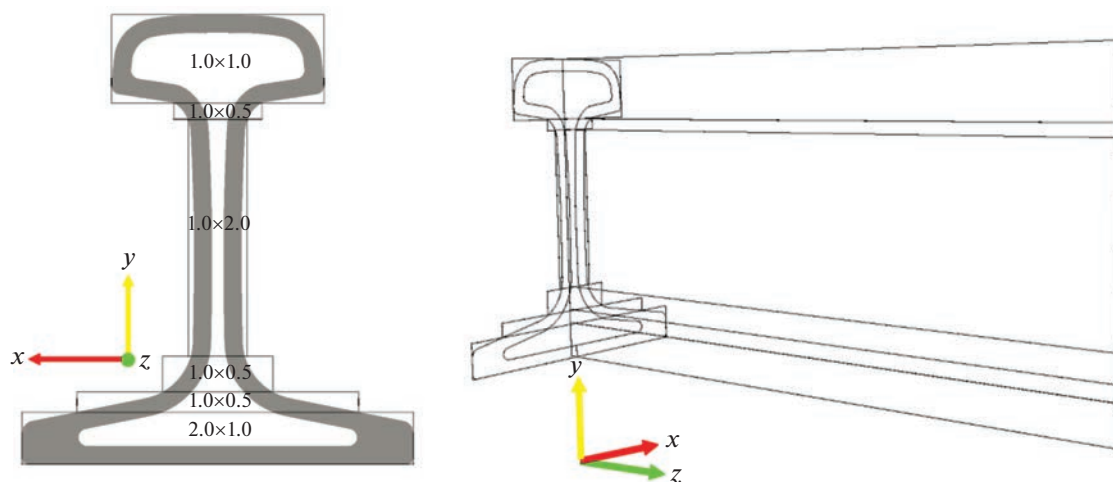
Поэтому после получения первичного распределения на внутренней границе криволинейной области необходимо выполнить проверку условия (5.4) и при его выполнении сдвинуть рассматриваемый узел с радиус-вектором координат $\mathbf{r}_{\text{CENTER}}$:

$$\text{if } \left(\frac{|h_{\text{RIGHT}} - h_{\text{LEFT}}|}{h_{\text{RIGHT}}} > h_{\text{GROW}} \right) \text{ or } \left(\frac{|h_{\text{RIGHT}} - h_{\text{LEFT}}|}{h_{\text{LEFT}}} > h_{\text{GROW}} \right): \quad (5.4)$$

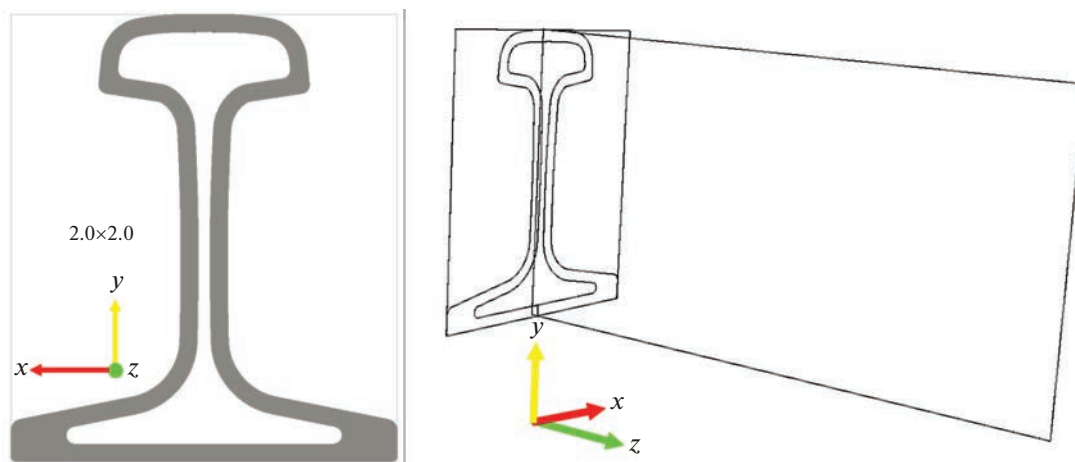
$$\mathbf{r}_{\text{CENTER}} = \frac{\mathbf{r}_{\text{RIGHT}} + \mathbf{r}_{\text{LEFT}}}{2},$$

где h_{RIGHT} и h_{LEFT} — это расстояние между соседними узлами. Ввиду того, что после однократного перемещения может потребоваться сдвиг уже для других узлов, подобная процедура повторяется несколько раз, а в настоящей работе она была выполнена пять раз.

Найдя окончательно распределение узлов для внутренней и внешней границ криволинейной области, мы сможем восстановить итоговую криволинейную сетку, учитывающую геометрию рассматриваемого объекта и пригодную для численных расчетов.



Фиг. 9. Расчетная сетка № 1 с шестью подобластями g .



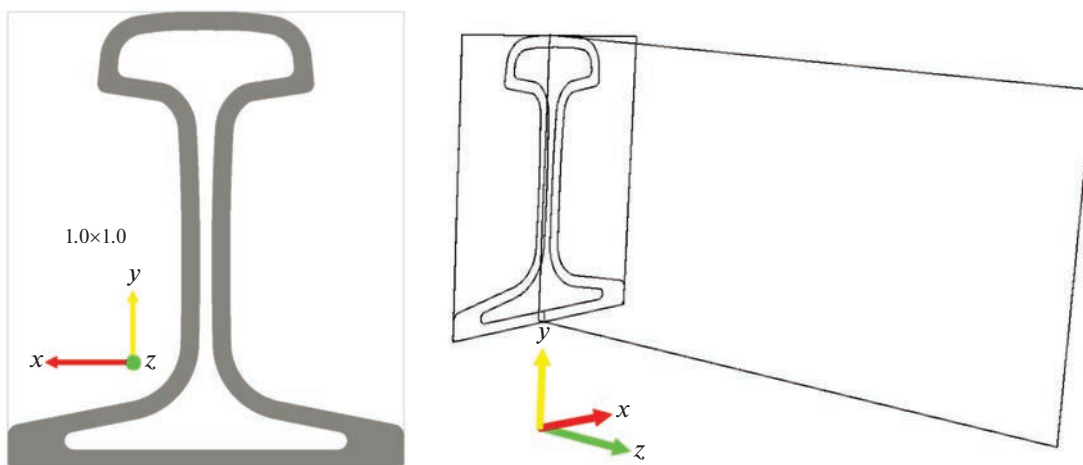
Фиг. 10. Расчетная сетка № 2 с одной подобластью g .

6. РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ

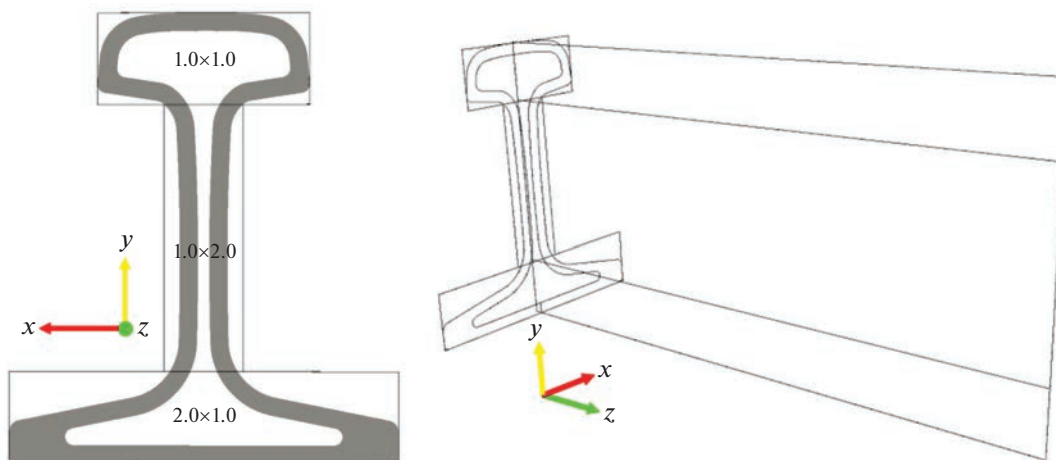
В целях исследования сходимости решения по сетке и проверки надежности предложенного метода для моделирования объектов с криволинейной границей были рассмотрены шесть пронумерованных различных конфигураций расчетных сеток из [43] на фиг. 9–14, на которых изображены профиль рельса в плоскости OXY и срез в плоскости OYZ при разном способе покрытия объекта расчетными сетками, при этом вдоль OZ сетка является регулярной. Видно, что получающийся срез в плоскости OYZ разделен на подобласти g с одинаковыми шагом вдоль направления Z 2 мм, длиной 0.3 м и высотой 0.152 м. Размер ячеек в подобластях g по направлениям X и Y указаны на соответствующих фиг. 9–14 в мм. Во всех конфигурациях расчетных сеток строилась одинаковая химерная сетка с характерным наименьшим шагом 0.4 мм.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

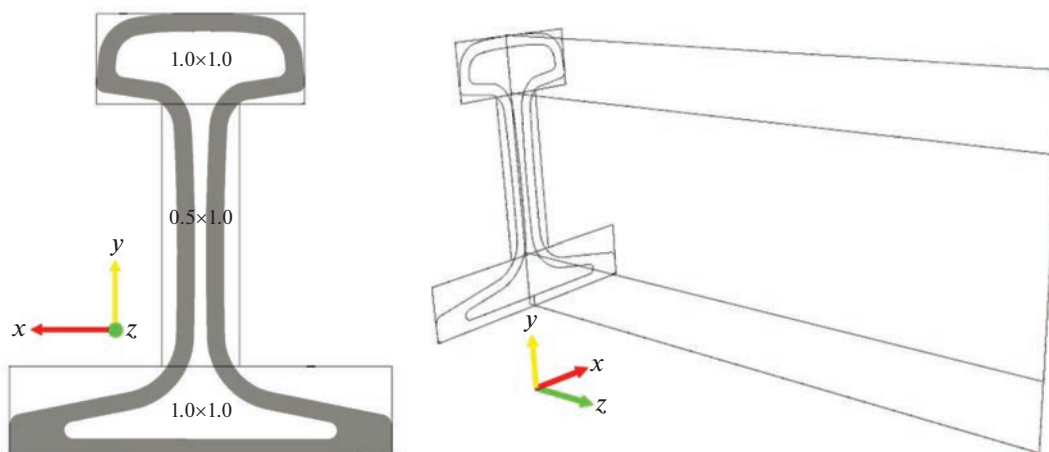
В этом разделе представлены результаты численного моделирования для различных конфигураций расчетных сеток. Шаг по времени во всех расчетах составлял 204.795799229 мкс, количе-



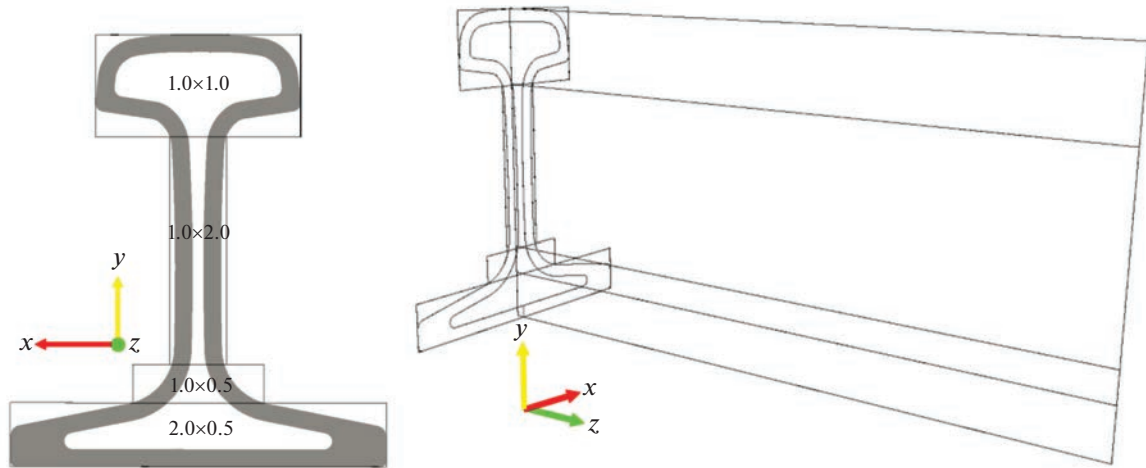
Фиг. 11. Расчетная сетка № 3 с одной подобластью g с измененным шагом относительно фиг. 5.



Фиг. 12. Расчетная сетка № 4 с тремя подобластями g .



Фиг. 13. Расчетная сетка № 5 с тремя подобластями g с измененным шагом относительно фиг. 7.



Фиг. 14. Расчетная сетка № 6 сетка с четырьмя подобластями g .

ство итераций по времени составило 80. Для проверки сходимости использовалась интегральная норма L_1 , в расчете которой применялся метод прямоугольников, по формуле

$$L_1 = \sum_{g=0}^{G-1} L_1^g = \sum_{g=0}^{G-1} h_y^g h_z^g \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_y^g-2} (v_{i0}^g + v_{iN_z^g-1}^g) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_z^g-2} (v_{0j}^g + v_{N_y^g-1,j}^g) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (v_{00}^g + v_{0N_z^g-1}^g + v_{N_y^g-1,0}^g + v_{N_y^g-1,N_z^g-1}^g) + \sum_{i=1}^{N_y^g-2} \sum_{j=1}^{N_z^g-2} v_{ij}^g \right), \quad (7.1)$$

где N_y^g и N_z^g — количество узлов в соответствующей подобласти g расчетной сетки, из которых состоит срез OYZ согласно фиг. 5–10. Также для оценки сходимости была подсчитана норма L_∞ по формуле

$$L_\infty = \max_{g,i,j} |v_{ij}^g|, \quad (7.2)$$

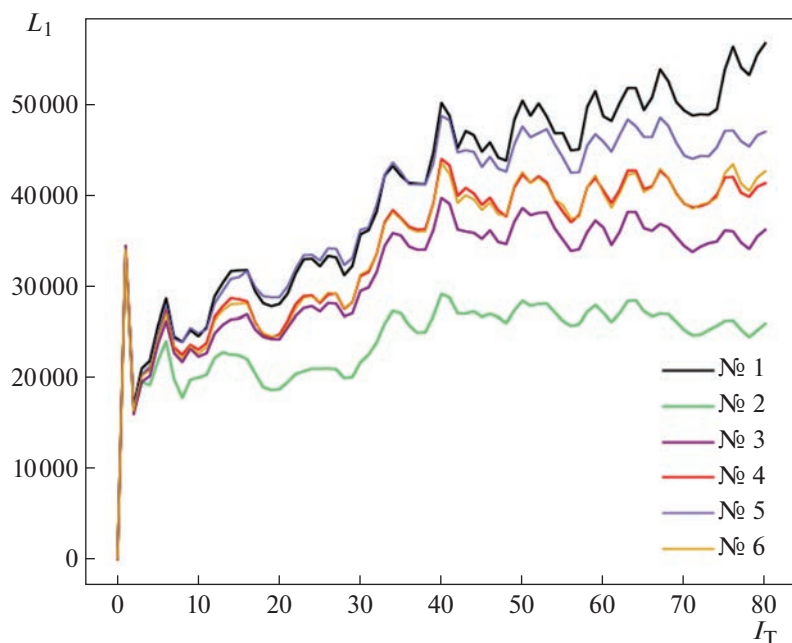
суть которой в поиске глобального максимума по абсолютной величине в рассматриваемой расчетной сетке среза OYZ , состоящей из различного числа подобластей g .

В результате были получены графики зависимости норм (7.1) на фиг. 15 и (7.2) на фиг. 16 от шага по времени для каждой из расчетных сеток. По оси абсцисс отложен номер шага по времени I_T .

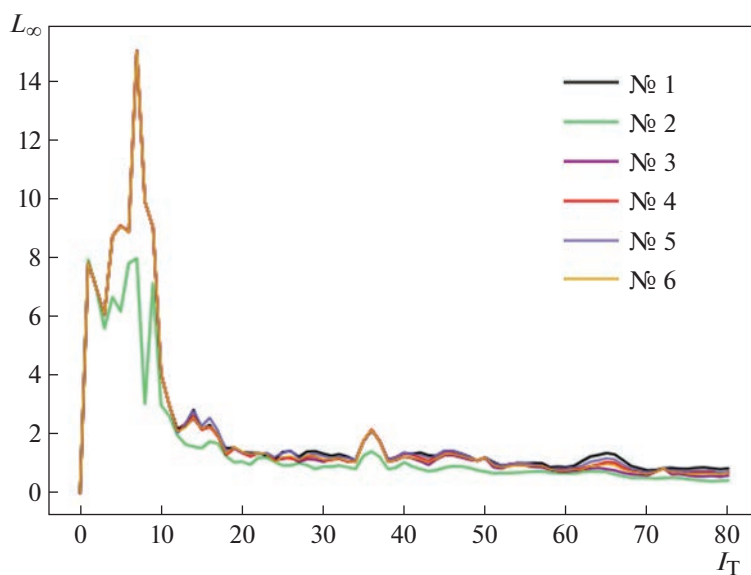
Согласно фиг. 11 наибольшую интегральную норму имеют расчетные сетки, у которых суммарно большее количество узлов из-за мелкости разбиения подобластей вдоль OY по сравнению с другими. При этом и на фиг. 15, и на фиг. 16 можно наблюдать постепенный выход норм на плато, особенно хорошо это заметно для L_∞ . На фиг. 16 также можно заметить значительную разницу численного решения на 7-м временном шаге для расчетной сетки № 2 по сравнению с другими. Это связано с тем, что из всех расчетных сеток она наиболее грубая.

На фиг. 17 приведена визуализация распространения исходного возмущения от источника вдоль плоскости OYZ и трех перпендикулярных к ней секциях в плоскостях OXY в момент времени 8.191831969 мс, соответствующего 40 итерации по времени для соответствующей расчетной сетки.

Из фиг. 17 следует, что в подобластях g с уменьшенным шагом по пространству наблюдается лучшая визуализация пространственно-временного решения, в то же время разделение профиля рельса на большее количество подобластей g также позволяет детализировать расчет волнового поля.



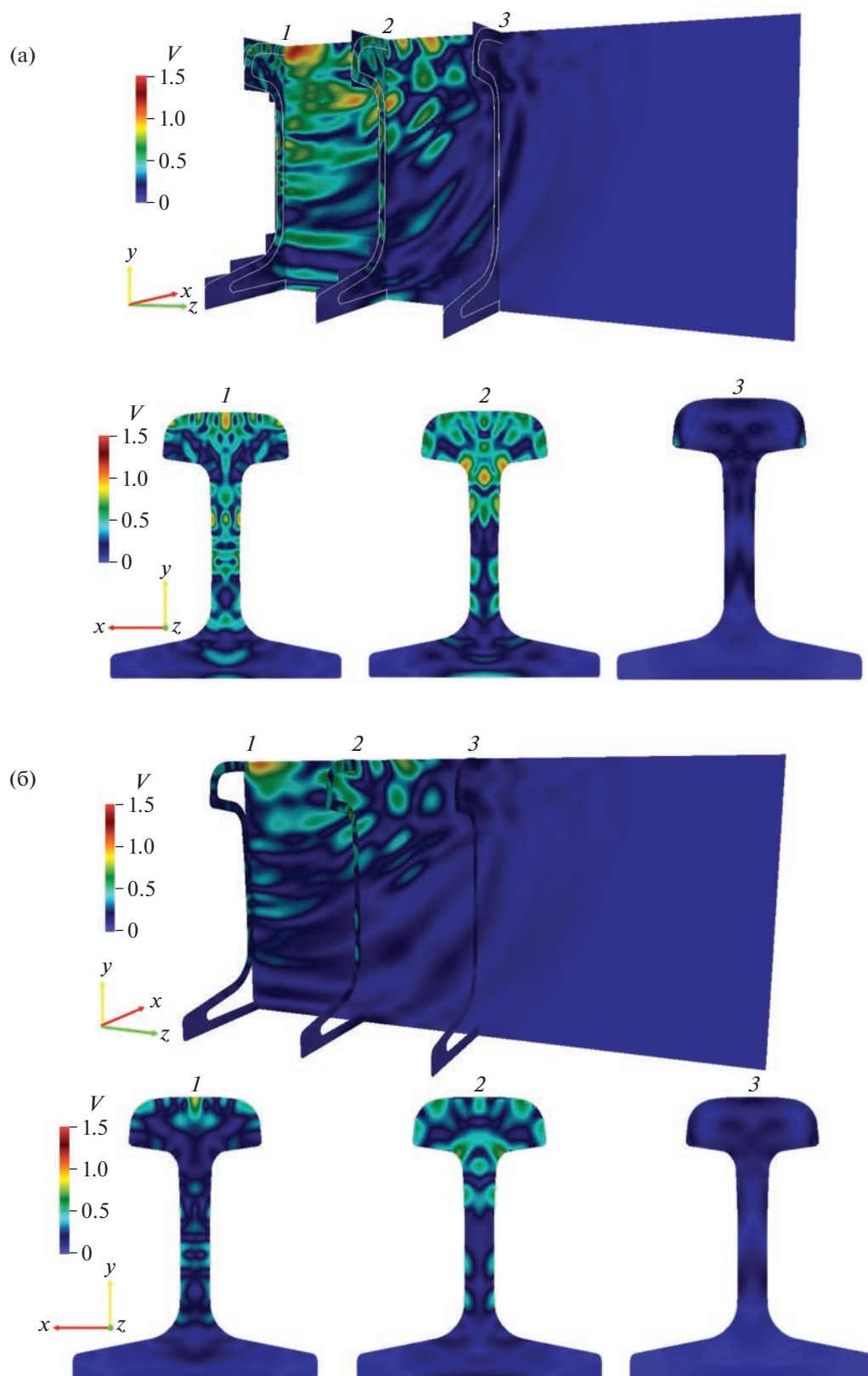
Фиг. 15. Изменение величины L_1 в течение расчета.



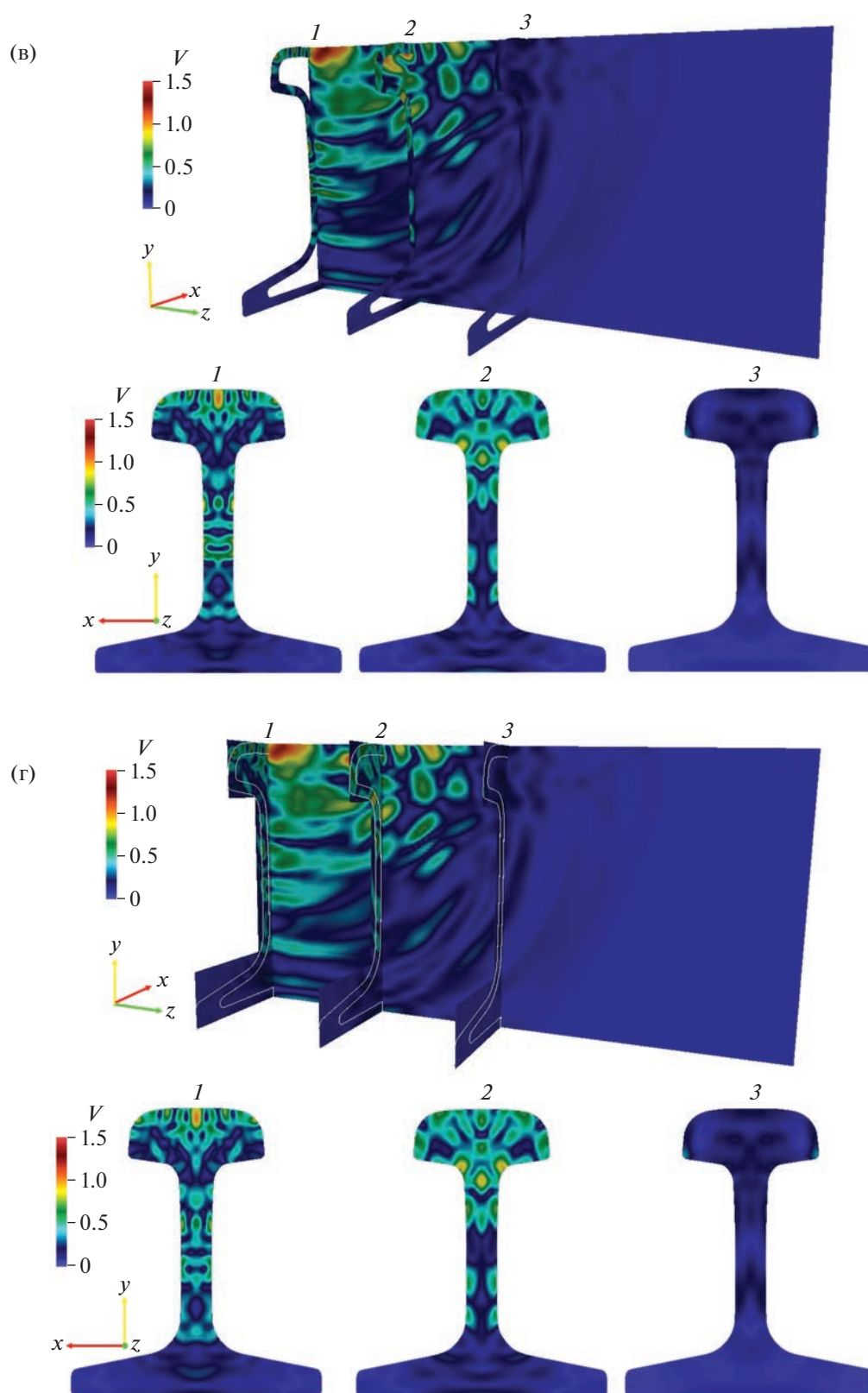
Фиг. 16. Изменение величины L_∞ в течение расчета.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

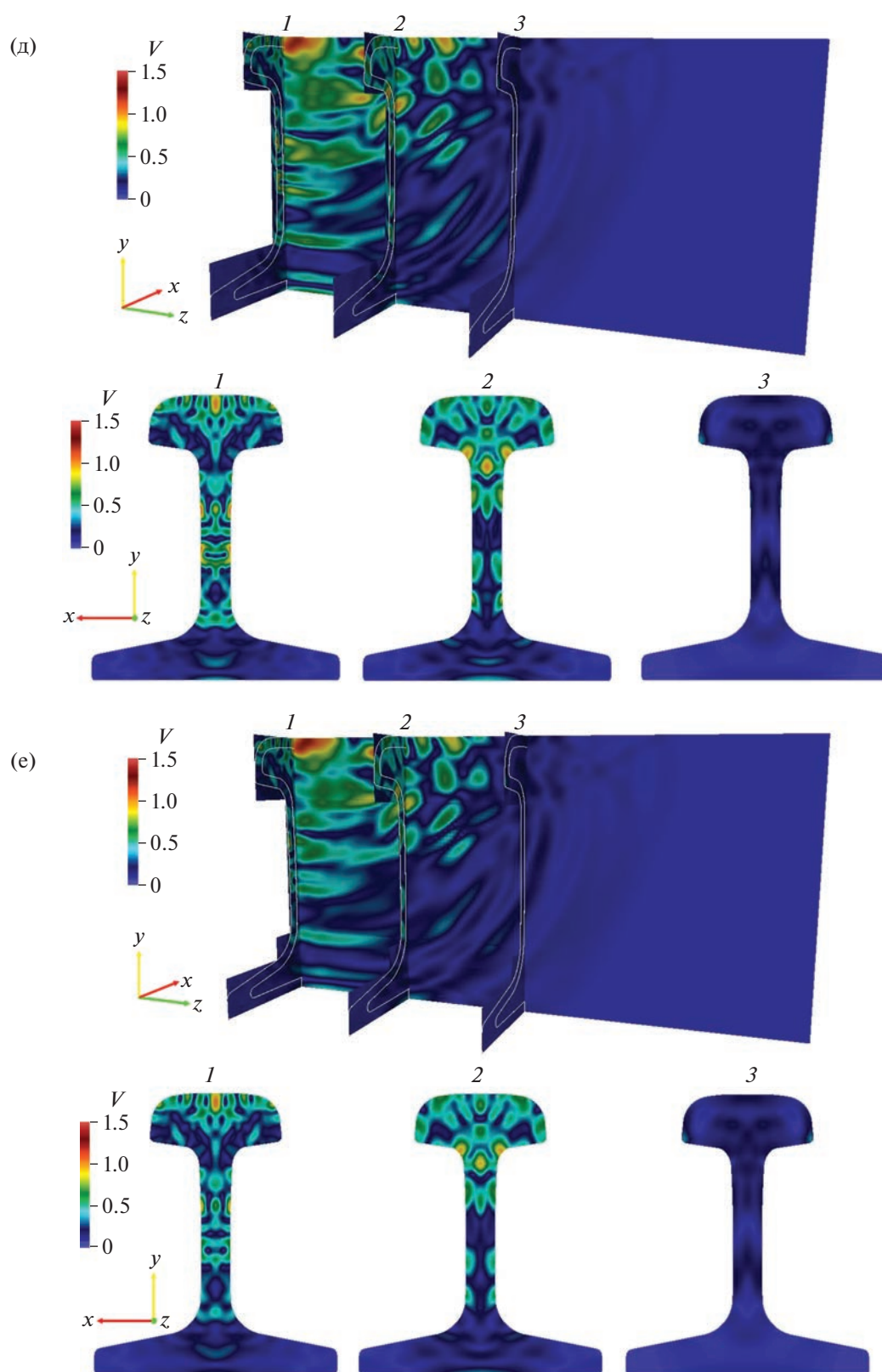
Сеточно-характеристический метод на химерных расчетных сетках был адаптирован для численного решения прямой задачи ультразвукового неразрушающего контроля рельсового полотна. Данный метод позволяет учитывать сложную геометрию профиля рельса. Разработан алгоритм взаимной интерполяции, переходящий в билинейную в случае прямоугольных ячеек, учитывающий особенности перехода от регулярной сетки к химерной и обратно. Разработанные



Фиг. 17. Распределение абсолютной величины v в плоскости OYZ и трех плоскостях OXY для расчетных сеток № 1 (а), № 2 (б), № 3(в), № 4 (г), № 5 (д), № 6 (е) в момент времени 8.191831969 мс.



Фиг. 17. Продолжение.



Фиг. 17. Окончание.

численные алгоритмы позволяют строить различные конфигурации сеток, моделирующие объект сложной формы в зависимости от пространственного шага и разбиения рассматриваемого объекта на подобласти.

Полученные авторами результаты показывают сеточную сходимость предложенных алгоритмов и дают основания использовать сеточно-характеристический метод при дальнейшем изучении задач железнодорожной безопасности и неразрушающего контроля в частности, в которых требуется использовать ультразвуковые методы исследования и мониторинга состояния железнодорожных путей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials & Design*. 2012. V. 35. P. 572588.
2. *Hwang Y.I., Kim Y.I., Seo D.C., Seo M.K., Lee W.S., Kwon S., Kim K.B.* Experimental Consideration of Conditions for Measuring Residual Stresses of Rails Using Magnetic Barkhausen Noise Method // *Materials*. 2021. V. 14. № 18. P. 5374.
3. *Palkowski H., Brück S., Pirling T., Carradò A.* Investigation on the Residual Stress State of Drawn Tubes by Numerical Simulation and Neutron Diffraction Analysis // *Materials*. 2013. V. 6. № 11. P. 51185130.
4. *Kelleher J., Prime M.B., Buttle D., Mummery P., Webster P.J., Shackleton J., Withers P.J.* // The Measurement of Residual Stress in Railway Rails by Diffraction and Other Methods // *Journal of Neutron Research*. 2003. V. 11. № 4. P. 187–193.
5. *Huang H., Zhang K., Wu M., Li H., Wang M.J., Zhang S.M., Chen J.H., Wen M.* Comparison between axial residual stresses measured by Raman spectroscopy and X-ray diffraction in SiC fiber reinforced titanium matrix composite // *Acta Physica Sinica*. 2018. V. 67. № 19. P. 267276
6. *Li Z., He J., Teng J., Wang Y.* Internal Stress Monitoring of In-Service Structural Steel Members with Ultrasonic Method // *Materials*. 2016. V. 9. № 4. P. 223.
7. *Jia D.W., Bourse G., Chaki S., Lacrampe M.F., Robin C., Demouveau H.* Investigation of stress and temperature effect on the longitudinal ultrasonic waves in polymers // *Research in Nondestructive Evaluation*. 2014. V. 25. № 1. P. 2029.
8. *Javadi Y., Azarib K., Ghalehbandi S.M., Roy M.J.* Comparison between using longitudinal and shear waves in ultrasonic stress measurement to investigate the effect of post-weld heat-treatment on welding residual stresses // *Research in Nondestructive Evaluation*. 2017. V. 28 № 2. P. 101122.
9. *Hwang Y.I., Kim G., Kim Y.I., Park J.H., Choi M.Y., Kim K.B.* Experimental Measurement of Residual Stress Distribution in Rail Specimens Using Ultrasonic LCR Waves // *Applied Sciences*. 2021. V. 11. № 19. P. 9306.
10. *Guo J., Fu H., Pan B., Kang R.* Recent progress of residual stress measurement methods: A review // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2021. V. 34. № 2. P. 5478.
11. *Alahakoon S., Sun Y.Q., Spiryagin M., Cole C.* Rail flaw detection technologies for safer, reliable transportation: a review // *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2018. V. 140. № 2. P. 020801.
12. *Gao X., Liu Y., Li J., Gao X.* Automatic recognition and positioning of wheel defects in ultrasonic B-scan image using artificial neural network and image processing // *J. of Testing and Evaluation*. 2019. V. 48. № 1. P. 20180545.
13. *Yu H., Li Q., Tan Y., Gan J., Wang J., Geng Y., Jia L.* A Coarse-to-Fine Model for Rail Surface Defect Detection // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2019. V. 68. № 3. P. 656666.
14. *Wu F.P., Li Q., Li S., Wu T.* Train rail defect classification detection and its parameters learning method // *Measurement*. 2020. V. 151. № 2. P. 107246.
15. *Tang Z., Liu F.J., Guo S.H., Chang J., Zhang J.J.* Evaluation of coupled finite element/meshfree method for a robust full-scale crashworthiness simulation of railway vehicles // *Advances in Mechanical Engng*. 2016. V. 8. № 4. P. 1687814016642954.
16. *Adak D., Pramod L.N.A., Ooi E.T., Natarajan S.* A combined virtual element method and the scaled boundary finite element method for linear elastic fracture mechanics // *Engng Analysis with Boundary Elements*. 2020. V. 113. P. 916.
17. *Teng Z.H., Sun F., Wu S.C., Zhang Z.B., Chen T., Liao D.M.* An adaptively refined XFEM with virtual node polygonal elements for dynamic crack problems // *Comput. Mechanics*. 2018. V. 62. № 5. P. 10871106.
18. *Wu S.C., Zhang S.Q., Xu Z.W.* Thermal crack growth-based fatigue life prediction due to braking for a high-speed railway brake disc // *Internat. Journal of Fatigue*. 2016. V. 87. P. 359369.
19. *Jiang S., Gu Y., Fan C., Qu W.* Fracture mechanics analysis of bimaterial interface cracks using the generalized finite difference method // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2021. V. 113. P. 102942.
20. *Nejad R.M., Liu Z., Ma W., Berto F.* Reliability analysis of fatigue crack growth for rail steel under variable amplitude service loading conditions and wear // *Internat. Journal of Fatigue*. 2021. V. 152. P. 106450.

21. *Li S., Wu Y.* Energy-preserving mixed finite element methods for the elastic wave equation // *Appl. Math. and Comput.* 2022. V. 422. № 15. P. 126963.
22. *Cao J., Chen J.B.* A parameter-modified method for implementing surface topography in elastic-wave finite-difference modeling // *Geophysics*. 2018. V. 83. № 6. P. 313–332.
23. *Duru K., Rannabauer L., Gabriel A.A., Igel H.* A new discontinuous Galerkin method for elastic waves with physically motivated numerical fluxes // *J. of Scientific Computing*. 2021. V. 88. № 3. P. 1–32.
24. *Huang J., Hu T., Li Y., Song J., Liang S.* Numerical dispersion and dissipation of the triangle-based discontinuous Galerkin method for acoustic and elastic velocity-stress equations // *Computers & Geosciences*. 2022. V. 159. № 1. P. 104979.
25. *Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F.* On the Accuracy of the Discontinuous Galerkin Method in Calculation of Shock Waves // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2018. V. 58. № 8. P. 13441353.
26. *Sepehry N., Ehsani M., Asadi S., Shamshirsaz M., Nejad F.B.* Fourier spectral element for simulation of vibro-acoustic modulation caused by contact nonlinearity in the beam // *Thin-Walled Structures*. 2022. V. 174. P. 109112.
27. *Trinh P.T., Brossier R., Métivier L., Tavard L., Virieux J.* Efficient time-domain 3D elastic and viscoelastic full-waveform inversion using a spectral-element method on flexible Cartesian-based mesh. // *Geophysics*. 2019. V. 84. № 1. P. 61–83.
28. *Godunov S.K., Denisenko V.V., Klzuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V.* Study of Entropy properties of Linearized Version of Godunov's Method // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2020. V. 60. № 4. P. 628640.
29. *Kovyrkina O., Ostapenko V.V.* Monotonicity of the CABARET Scheme Approximating a Hyperbolic System of Conservation Laws // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2018. V. 58. № 9. P. 14351450.
30. *Chukhno V.I., Usov E.* CABARET Scheme as Applied to Numerical Approximation of Two-Fluid Flow Equations // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2018. V. 58. № 9. P. 14511461.
31. *Gordon R., Turkel E., Gordon D.* A compact three-dimensional fourth-order scheme for elasticity using the first-order formulation // *Internat. Journal for Numerical Methods in Engng.* V. 122. № 21. P. 6341–6360.
32. *Lu Z., Ma Y., Wang S., Zhang H., Guo J., Wan Y.* Numerical simulation of seismic wave triggered by low-frequency sound source with 3D staggered-grid difference method in shallow water // *Arabian Journal of Geosciences*. 2021. V. 14. № 6. P. 1–8.
33. *Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // *Geophysical Prospecting*. 2018. V. 66. № 8. P. 1485–1502.
34. *Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I.* Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // *J. of Comput. Phys.* 2021. V. 446. № 1. P. 110637.
35. *Kozhemyachenko A.A., Petrov I.B., Favorskaya A.V., Khokhlov N.I.* Boundary conditions for modeling the impact of wheels on railway track // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2020. V. 60. № 9. P. 1539–1554.
36. *Steger J.L.* A Chimera grid scheme: advances in grid generation. American Society of Mechanical Engineers // *Fluids Engng Division*. 1983. V. 5. P. 55–70.
37. *Chesshire G., Henshaw W.D.* Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations // *J. of Comput. Phys.* 1990. V. 90. № 1. P. 1–64.
38. *Henshaw W.D., Schwendeman D.W.* Parallel computation of three-dimensional flows using overlapping grids with adaptive mesh refinement // *J. of Comput. Phys.* 2008. V. 227. № 16. P. 7469–7502.
39. *Chang X.H., Ma R., Wang N.H., Zhao Z., Zhang L.P.* A Parallel Implicit Hole-cutting Method Based on Background Mesh for Unstructured Chimera Grid // *Computers & Fluids*. 2020. V. 198. P. 104403.
40. *Favorskaya A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Grid-Characteristic Method on Joint Structured Regular and Curved Grids for Modeling Coupled Elastic and Acoustic Wave Phenomena in Objects of Complex Shape // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. V. 41. № 4. P. 512–525.
41. *Favorskaya A., Khokhlov N.* Accounting for curved boundaries in rocks by using curvilinear and Chimera grids // *Procedia Computer Science*. 2021. V. 192. P. 3787–3794.
42. *Favorskaya A.V.* Simulation of the human head ultrasound study by grid-characteristic method on analytically generated curved meshes // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. V. 214. P. 249–263.
43. *Favorskaya A., Khokhlov N., Sagan V., Podlesnykh D.* Parallel computations by the grid-characteristic method on Chimera computational grids in 3D problems of railway non-destructive testing // *Lecture Notes in Computer Science*. 2022. V. 13708. P. 199–213.