

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.634

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ПЕАНО<sup>1)</sup>

© 2023 г. Д. Д. Захаров<sup>1,\*</sup>, И. С. Никитин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 123056 Москва, 2-я Брестская ул., 19/18, Институт автоматизации проектирования РАН, Россия

\*e-mail: dmitrii.zakharov@gmail.com

Поступила в редакцию 27.05.2023 г.  
Переработанный вариант 27.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается задача определения собственных частот и форм поперечных колебаний для уравнения Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами. Такого рода задачи возникают как для усложненной геометрии колеблющегося тела, так и в случае функционально градиентных материалов или накопления повреждаемости в классическом упругом материале. С использованием метода разложения в ряды Пеано построены решения краевых задач. При широких предположениях показана равномерная сходимость рядов Пеано и получены оценки остаточных членов. Приведены примеры численной реализации предложенной процедуры для изгибных колебаний стержня с определенными параметрами переменного поперечного сечения (геометрической неоднородности) и распределения модуля упругости (физической неоднородности). Численные примеры ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов при экспериментальном исследовании усталостной прочности сплавов при высокочастотных циклических испытаниях, основанных на общем принципе точечного резонансного нагружения. Предложенный метод решения задач о резонансных колебаниях для уравнения Бернулли–Эйлера может быть использован при проектировании новых перспективных схем циклических испытаний и математическом моделировании процессов усталостного разрушения при высокочастотных резонансных вибрациях. Библ. 30. Фиг. 8.

**Ключевые слова:** поперечные колебания, уравнение Бернулли–Эйлера, переменное сечение, функционально-градиентный материал, ряды Пеано, спектр частот, собственные формы, высокочастотные циклические испытания.

DOI: 10.31857/S0044466923100198, EDN: MSUBZP

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача определения собственных частот и собственных форм поперечных колебаний для уравнения Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами исследовалась многими авторами (см. [1–10]). Аналогичные по постановке задачи решались для случая резонансных продольных (см. [11–15]) и крутильных колебаний (см. [16, 17]) неоднородных стержней переменного сечения.

Основные приложения этих исследований связаны с определением поправок к собственным частотам и формам колебаний, обусловленных дефектами поверхности или наличием внутренних дефектов (трещин) (см. [1–7, 11–13, 16]), а также с решением обратных задач идентификации дефектов по измеренным значениям собственных частот колебаний различного типа (см. [8–10, 14, 15, 17]).

<sup>1)</sup> Работа выполнена в рамках Госзадания ИАП РАН.

В настоящее время сформировалась еще одна область приложений, связанная с проведением экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении образцов на растяжение—сжатие, кручение или трехточечный изгиб (см. [18]). Пьезоэлектрические установки для проведения высокочастотных низкоамплитудных испытаний вплоть до разрушения образцов обладают общим принципом резонансного нагружения с частотой порядка 20 кГц. Этот неклассический режим усталостного разрушения с числом циклов нагружения более  $10^8$  называется сверхмногоциклового усталостью (СВМУ).

Для проектирования геометрии (размеров и форм) экспериментальных образцов, которые представляют собой стержни различного переменного сечения для циклических нагружений разного типа, необходимы решения соответствующих задач на собственные значения и формы колебаний. Кроме того, необходимо моделировать процесс развития микродефектов в образцах с ростом числа циклов нагружения. Континуальное описание этого процесса связано с введением распределенной функции повреждаемости и падением эффективных модулей упругости материала по мере ее роста до критических значений (см. [19]). В рамках такой модели циклической повреждаемости необходимо иметь эффективный метод расчета собственных частот и собственных форм колебаний образцов с заданной переменной формой поперечного сечения и одновременно физически неоднородных по модулям упругости с весьма широким диапазоном изменения параметров такой неоднородности.

Ранее в [11] подобная задача определения собственных частот и форм для случая продольных и крутильных колебаний решалась с использованием теории возмущений (см. [20]). Однако введение малого параметра для описания диапазонов изменения геометрии образца или его упругих свойств, а также связанное с этим предположение о достаточной плавности этих изменений, не всегда оправдано при исследовании процессов циклической повреждаемости, где возможны или даже ожидаемы достаточно резкие перепады эффективных модулей упругости в зонах с развитыми повреждениями экспериментальных образцов.

Поэтому для решения поставленной задачи определения собственных частот и собственных форм поперечных колебаний для уравнения Бернулли—Эйлера с переменными коэффициентами был выбран метод разложения в ряд Пеано (см. [21–24]), который не накладывает вышеупомянутых ограничений на свойства коэффициентов уравнения и допускает оценку погрешности решения за счет остаточных членов ряда.

Кроме того, применение данного подхода не ограничивается задачами о накоплении повреждаемости и деградации модуля упругости, а также может быть использовано для широкого класса функционально-градиентных материалов (см. [25]).

Метод может использоваться как для определения резонансных частот, так и форм колебаний при достаточно большом числе итераций (см., например, [25]). Современные пакеты компьютерной алгебры (Maple, Matematika) позволяют эффективно выполнять необходимые итерации интегрирования.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение поперечных колебаний Бернулли—Эйлера 4-го порядка общего вида (см. [26]):

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( E(X) J(X) \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right) + P(X) S(X) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(X, t).$$

Уравнение описывает поперечные смещения  $w(X, t)$  при (изгибных) колебаниях стержня переменного сечения площади  $S(X)$  с неоднородным распределением плотности  $P(X)$ , приведенного момента инерции сечения  $J(X)$  и модуля Юнга  $E(X)$ . Предполагается, что поперечные сечения имеют центры симметрии, расположенные на общей горизонтальной оси стержня, вдоль которой отсчитывается длина. Стержень предполагается относительно тонким, т.е. отношение максимальной толщины к характерному поперечному размеру (длине волны) есть малый параметр порядка  $\sim 10^{-2}$  или менее.

Будем исследовать стационарные гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ :

$$w(X, t) = v(X) \exp(i\omega t).$$

Также будем рассматривать случай однородного уравнения (свободные колебания), для которого  $F(X, t) = 0$ .

Уравнение решается в диапазоне  $-L \leq X \leq L$ .

Граничные условия на свободных краях при  $X = \pm L$  имеют вид

$$M(X) \equiv E(X)J(X)\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0,$$

$$Q(X) \equiv \frac{\partial}{\partial X} \left( E(X)J(X)\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right) = 0,$$

где  $M(X)$  есть изгибающий момент,  $Q(X)$  — поперечное усилие в сечении стержня.

Введем безразмерные независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $u(x)$  и переменные коэффициенты уравнений:

$$v(X) = Lu(x), \quad x = X/L,$$

$$e(x) = E(X)/E_*, \quad j(x) = J(X)/J_*, \quad \rho(x) = P(X)/P_*, \quad s(x) = S(X)/S_*.$$

Тогда безразмерное уравнение колебаний для  $u(x)$  при  $-1 \leq x \leq 1$  примет вид

$$(\hat{c}^{-1}(x)u'')'' - \hat{i}(x)k^4 u = 0, \quad (\dots)' \equiv \frac{d}{dx}(\dots),$$

где  $\hat{c}(x)$  — податливость:  $\hat{c}^{-1}(x) = e(x)j(x)$ ,  $\hat{i}(x)$  — инертность:  $\hat{i}(x) = \rho(x)s(x)$ , и частотный па-

раметр  $k = \sqrt[4]{\omega^2 L^4 \frac{P_* S_*}{E_* J_*}}$ .

Исходное уравнение колебаний можно записать в виде системы уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} u' &= \phi, \\ \phi' &= \hat{c}(x)m, \\ m' &= q, \\ q' &= \hat{i}(x)k^4 u \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned} Z' &= A(x) \times Z, \quad Z = [u \ \phi \ m \ q]^T, \\ A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + k^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{i}(x) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия при  $x = \pm 1$  примут вид  $m \equiv \hat{c}^{-1}u'' = 0$ ,  $q \equiv m' = 0$ .

### 3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ

#### 3.1. Представление в виде ряда Пеано

Проинтегрируем систему уравнений (1) на некотором отрезке  $[x_0, x]$ :

$$Z(x) = \int_{x_0}^x A(x_1) \times Z(x_1) dx_1 + Z_0, \quad Z_0 \equiv Z(x_0),$$

и будем искать решение системы в виде ряда Пеано [21–23], т.е.

$$Z(x) = \{A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots\} \times Z_0 = \tilde{A}(x) \times Z_0, \quad (2)$$

где  $\tilde{A}(x) = A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots$ ,  $A_0(x) = I$  есть единичная матрица и

$$A_n(x) = \int_{x_0}^x A(x_1) \times A_{n-1}(x_1) dx_1.$$

Полагая, например,  $x_0 = -1$  и  $x = 1$ , получаем

$$Z_1 = \tilde{A} \times Z_0, \quad Z_1 = [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=1}, \quad Z_0 = [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=-1}. \quad (3)$$

В таком виде матричное равенство (3) по сути становится аналогичным введению матриц-пропагаторов для краевых задач, широко используемых для расчета собственных чисел (частот и волновых чисел) в задачах распространения волн в слоистых упругих средах, пластинах и других структурах, в том числе, в теоретической сейсмологии (см. [27–30]).

Из соотношений (3) следует уравнение для собственных чисел  $k$ :

$$f(k) \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} \end{bmatrix} \Big|_{x=1} = 0. \quad (4)$$

Если система уравнений (1) допускает симметричное решение (четную функцию)  $u(x)$ , то это означает, что для симметричных функций  $\hat{c}(x)$  в начале координат будут выполнены следующие равенства (в силу нечетности функций  $\phi(x)$  и  $q(x)$ ):

$$\begin{aligned} Z_0 &= [u \ 0 \ m \ 0]^T \Big|_{x=0} \quad \text{при} \quad x_0 = 0, \\ Z_1 &= [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=1} \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Тогда уравнение для собственных чисел  $k$  можно принять в виде

$$f_S(k) \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{33} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{43} \end{bmatrix} \Big|_{x=1} = 0, \quad (5)$$

рассматривая далее собственные функции только на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с указанными выше краевыми условиями.

Аналогично для антисимметричного решения (нечетной функции)  $u(x)$  нечетной функцией также будет и  $m(x)$ , поэтому для краевой задачи на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  имеем

$$\begin{aligned} Z_0 &= [0 \ \phi \ 0 \ q]^T \Big|_{x=0} \quad \text{при} \quad x_0 = 0, \\ Z_1 &= [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=1} \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Уравнение для собственных чисел  $k$  можно принять в виде

$$f_A(k) \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} \end{bmatrix} \Big|_{x=1} = 0. \quad (6)$$

Поскольку при этом

$$Z_1 = \tilde{A}(1) \times Z_0,$$

то строки 3, 4 зададут линейные однородные уравнения с вырожденной матрицей и ненулевыми неизвестными краевыми значениями либо  $u_0$ ,  $m_0$  (для четного решения):

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{31}(1) & \tilde{a}_{33}(1) \\ \tilde{a}_{41}(1) & \tilde{a}_{43}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = 0, \quad Z_0 = [u \ 0 \ m \ 0]^T \Big|_{x=0},$$

либо  $\phi_0$ ,  $q_0$  (для нечетного решения):

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{32}(1) & \tilde{a}_{34}(1) \\ \tilde{a}_{42}(1) & \tilde{a}_{43}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ q_0 \end{bmatrix} = 0, \quad Z_0 = [0 \ \phi \ 0 \ q]^T \Big|_{x=0}.$$

Откуда следуют соотношения для коэффициентов

$$m_0 = -\frac{\tilde{a}_{31}(1)}{\tilde{a}_{33}(1)}u_0 \quad (\text{четное решение}), \quad q_0 = -\frac{\tilde{a}_{32}(1)}{\tilde{a}_{34}(1)}\varphi_0 \quad (\text{нечетное решение}).$$

Соответственно, из уравнения (1) получаем далее выражения для четных собственных функций:

$$u(x) = \tilde{a}_{11}(x)u_0 + \tilde{a}_{13}(x)m_0 = u_0 \left( \tilde{a}_{11}(x) - \tilde{a}_{13}(x) \frac{\tilde{a}_{31}(1)}{\tilde{a}_{33}(1)} \right),$$

и для нечетных собственных функций:

$$u(x) = \tilde{a}_{12}(x)\varphi_0 + \tilde{a}_{14}(x)q_0 = \varphi_0 \left( \tilde{a}_{12}(x) - \tilde{a}_{14}(x) \frac{\tilde{a}_{32}(1)}{\tilde{a}_{34}(1)} \right).$$

### 3.2. Сходимость полученных рядов

Пусть элементы матрицы  $p \times p$  равномерно ограничены:

$$A(x) = [a_{lm}(x)], \quad |a_{lm}(x)| \leq C_0.$$

Тогда для элементов матрицы в ряду Пеано вида (2)  $A_n(x) = [a_{lm}^{(n)}(x)]$  получаем оценку

$$|a_{lm}^{(n)}(x)| \leq \frac{|pC_0x|^n}{n!p}.$$

Для остаточных сумм ряда (поэлементно) имеем

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |a_{lm}^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|pC_0x|^n}{n!} < \frac{1}{p} \frac{|pC_0x|^N}{N!} \exp(|pC_0x|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty,$$

т.е. на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p = 4$  ряд (2) будет равномерно сходящимся, причем достаточно быстро с погрешностью  $\varepsilon_N$  для остаточной суммы, но выше, чем

$$\varepsilon_N < \frac{1}{p} \frac{|pC_0|^N}{N!} \exp(|pC_0|). \quad (7)$$

Разумеется, оценка (7) введена со значительным “избытком”, что типично для получаемых матрицантов (см. [22, 23]). Некоторые уточнения оценок исследованы в [24]. В частности, если выбираются

$$P_* = \max(P), \quad S_* = \max(S), \quad E_* = \min(E), \quad J_* = \min(J),$$

то в диапазоне  $0 \leq K \leq K_*$ ,  $K \equiv k^4$

$$|\hat{c}(x)|, |\hat{i}(x)| \leq 1, \quad |a_{lm}(x)| \leq K$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{+\infty} |a_{lm}^{(n)}(x)| &\leq \frac{1}{p} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|pKx|^n}{n!} = \frac{1}{p} \frac{|pKx|^N}{N!} \Sigma_N(|pKx|), \\ \Sigma_N(|pKx|) &= 1 + \frac{|pKx|}{N+1} + \frac{|pKx|^2}{(N+1)(N+2)} + \frac{|pKx|^3}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \dots \end{aligned}$$

с оценкой

$$\varepsilon_N < \frac{1}{4} \frac{(4K_*)^N}{N!} \Sigma_N(4K_*). \quad (8)$$

Оценку (8) тоже можно далее уточнить по каждому элементу матрицы. Например, для четной функции  $u(x)$  можно показать, что для элемента  $\tilde{a}_{11}(x)$  выполняется следующая равномерная оценка остаточной суммы ряда, начинающейся со степени  $x^n$ ,  $n \geq 4N$ :

$$\varepsilon < \frac{K_*^N}{(4N)!} + \frac{K_*^{N+1}}{(4N+4)!} + \frac{K_*^{N+2}}{(4N+8)!} + \dots,$$

а для элемента  $\tilde{a}_{13}(x)$

$$\varepsilon < \frac{K_*^N}{(4N+1)!} + \frac{K_*^{N+1}}{(4N+5)!} + \frac{K_*^{N+2}}{(4N+9)!} + \dots,$$

что для определения числа членов ряда при требуемой точности решения в заданном диапазоне достаточно.

#### 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

##### 4.1. Частоты и формы собственных колебаний при постоянных коэффициентах

Рассмотрим случай постоянных коэффициентов уравнения  $\hat{c}(x) = \hat{i}(x) = 1$ .

Решение принимает простой вид

$$u(x) = B_1 \operatorname{ch}(kx) + B_2 \cos(kx) + D_1 \operatorname{sh}(kx) + D_2 \sin(kx).$$

Для четного решения  $D_1, D_2 = 0$  получаем следующие собственные функции:

$$u(x) = B_1 \left( \operatorname{ch}(kx) + \frac{\operatorname{ch} k}{\cos k} \cos(kx) \right),$$

где  $k$  есть решение уравнения  $\operatorname{tg} k = -\operatorname{th} k \left( \frac{k}{\pi} \approx \frac{3}{4} + l, l \rightarrow +\infty \right)$ .

Для нечетного решения  $B_1, B_2 = 0$  и

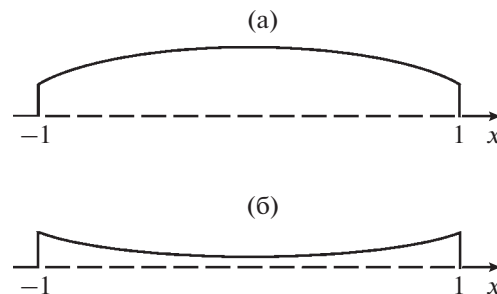
$$u(x) = D_1 \left( \operatorname{sh}(kx) + \frac{\operatorname{sh} k}{\sin k} \sin(kx) \right),$$

где  $k$  есть решение уравнения  $\operatorname{tg} k = \operatorname{th} k \left( \frac{k}{\pi} \approx \frac{1}{4} + l, l \rightarrow +\infty \right)$ .

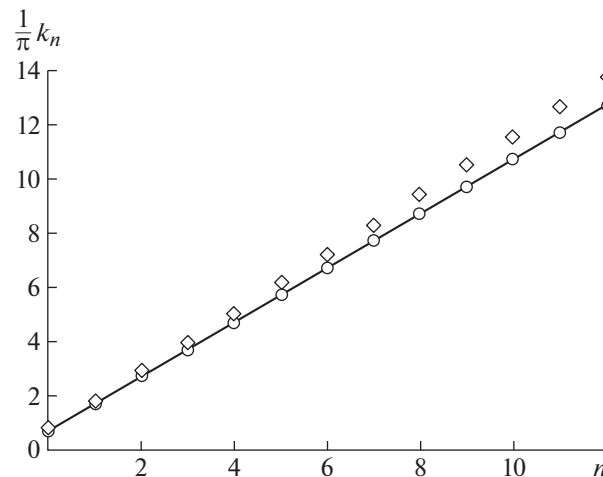
##### 4.2. Примеры расчетов с переменным модулем Юнга

Рассмотрим профили изменения модуля Юнга или поперечного сечения стержня (симметричные относительно оси абсцисс), показанные на фиг. 1а, б.

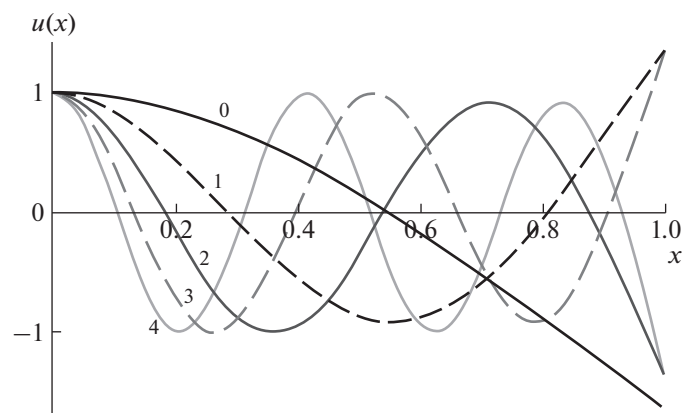
Сначала рассмотрим распределение модуля Юнга, задаваемого для определенности следующей формулой:  $e(x) = 1 + \delta x^2$ ,  $\delta = \pm 0.25$ .



Фиг. 1. Профили изменения модуля Юнга: (а) — выпуклый, (б) — вогнутый.



Фиг. 2. Распределение собственных чисел для вогнутого профиля модуля Юнга.



Фиг. 3. Первые пять собственных функций (мод колебаний) для вогнутого профиля модуля Юнга.

Графики собственных чисел и собственных функций для симметричного решения и вогнутого профиля модуля Юнга (случай  $\delta = 0.25$ ) показаны на фиг. 2, 3.

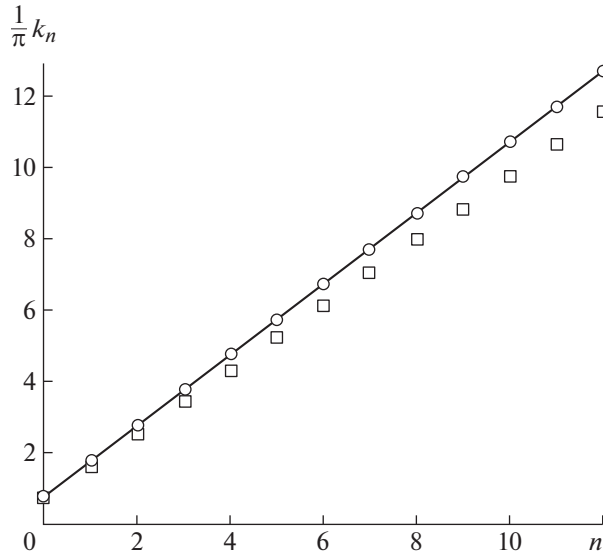
Представлены значения  $(1/\pi)k_n$ , где  $n$  есть номер появления собственного числа по возрастанию (показаны ромбами). Поскольку первое значение обнаруживается в интервале  $[0, \pi]$ , отсчет начинается с  $n = 0$ . Кружками показаны собственные числа для случая постоянных параметров в уравнениях, сплошной линией — асимптотика этих собственных чисел. Нормировка проводилась по значению на крае (что отвечает  $e(x) = 1$ ). С ростом номера наблюдается значительное превышение величин  $k_n$  по сравнению с результатами для невозмущенной задачи.

Графики собственных чисел для симметричного решения и выпуклого профиля модуля Юнга (случай  $\delta = -0.25$ ) показаны на фиг. 4.

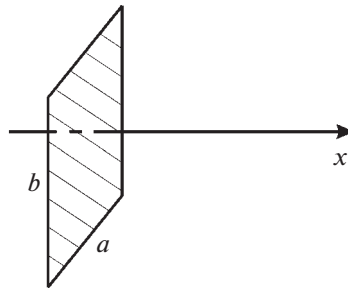
Приведены аналогичные значения  $(1/\pi)k_n$  (показаны квадратами) с тем же принципом нумерации по  $n$ . Графики поведения мод качественно не отличается от предыдущего случая и для краткости опущены.

#### 4.3. Примеры расчетов с переменным поперечным сечением

Геометрическая неоднородность моделируется следующим образом. Для стержня с прямоугольным поперечным сечением со сторонами  $a$ ,  $b$  по горизонтали и вертикали соответственно (фиг. 5) полагаем  $a = 2h_1$  и  $b = 2h_2(1 + \delta x^2)$ ,  $h_1, h_2 = \text{const}$ .



Фиг. 4. Распределение собственных чисел для выпуклого профиля модуля Юнга.



Фиг. 5. Прямоугольное сечение стержня.

Тогда изменение переменных физических параметров описывается следующими формулами:  
 $P = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$ ,

$$S = ab = S_* (1 + \delta x^2), \quad J = ab \frac{a^2 + b^2}{12} = J_* (1 + \delta x^2) (1 + 2\gamma \delta x^2 + \gamma \delta^2 x^4), \quad \gamma = \frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2},$$

т.е. безразмерные переменные коэффициенты в системе уравнений (1) принимают вид

$$\hat{i}(x) = 1 + \delta x^2, \quad \hat{c}(x) = \frac{1}{(1 + \delta x^2)(1 + 2\gamma \delta x^2 + \gamma \delta^2 x^4)}.$$

Рассмотрим ситуацию, аналогичную показанному выше геометрическому профилю (фиг. 1а, б), полагая для определенности  $h_2/h_1 = 2$ .

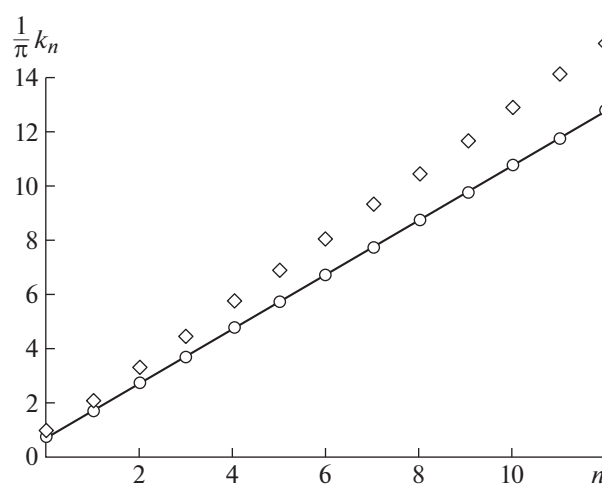
Результаты также нормируются и сравниваются с задачей для невозмущенного профиля  $b = 2h_2 = \text{const}$ .

Рассмотрим случай  $\delta = 0.25$  (вогнутый геометрический профиль). Первые собственные числа представлены на фиг. 6. Видно, что с ростом номера они существенно превышают значения, полученные для невозмущенного профиля.

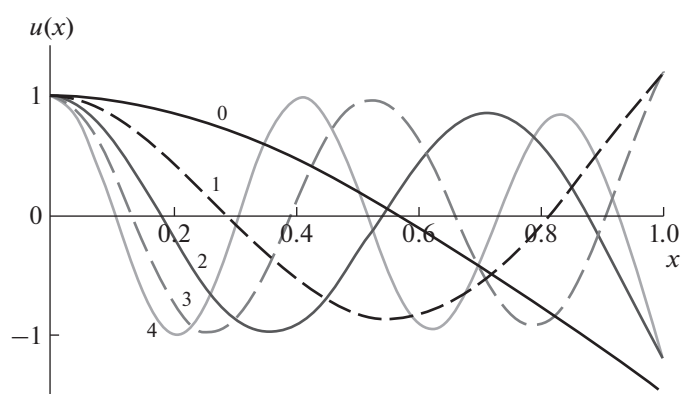
Для сравнения также приведем графики нескольких первых мод (фиг. 7). Видно, что различие форм колебаний по сравнению с предыдущими случаями незначительное.

Далее рассмотрим случай  $\delta = -0.25$  (выпуклый геометрический профиль).

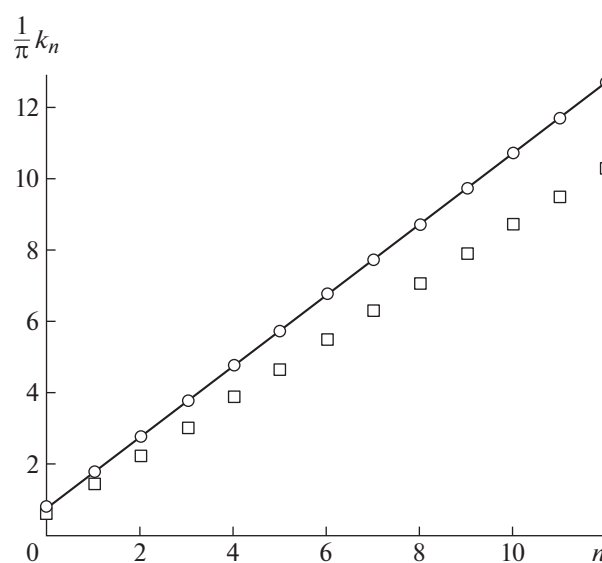
Графики для собственных значений представлены на фиг. 8.



Фиг. 6. Распределение собственных чисел для вогнутого геометрического профиля.



Фиг. 7. Первые пять собственных функций (мод колебаний) для вогнутого геометрического профиля.



Фиг. 8. Распределение собственных чисел для выпуклого геометрического профиля.

Поведение мод качественно не отличается от случая  $\delta = 0.25$  и также опущено.

Судя по результатам расчетов, геометрическая изменяемость профиля стержня (фиг. 1а,б) по длине (изменение размера поперечного сечения вдоль стержня) оказывает более существенное влияние на собственные значения, чем аналогичное изменение профиля модуля упругости (модуля Юнга). Эффекты повышения или понижения значений собственных чисел по сравнению со значениями для невозмущенного профиля связаны с увеличением или уменьшением податливости стержня на изгиб и вполне согласуются с физическими соображениями.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием метода разложения в ряды Пеано построено решение задачи определения собственных частот и форм собственных поперечных колебаний для уравнения Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами. Показана равномерная сходимость решения, представленного в виде ряда Пеано, и получены оценки остаточных членов. Приведены примеры численной реализации предложенной процедуры для изгибных колебаний стержня с определенными параметрами переменного поперечного сечения (геометрической неоднородности) и распределения модуля упругости (физической неоднородности). Численные примеры ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотных циклических испытаниях. Предложенный метод решения задач о резонансных поперечных колебаниях для уравнения Бернулли–Эйлера поможет проводить проектирование новых перспективных схем циклических испытаний и математическое моделирование процессов усталостного разрушения при высокочастотных резонансных вибрациях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gudmundson P.* Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes // *J. Mech. Phys. Solids.* 1982. V. 30. № 5. P. 339–353.
2. *Dimarogonas A.D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review // *Engineer. Fracture Mech.* 1996. V. 55. № 5. P. 831–857.
3. *Shifrin E., Ruotolo R.* Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks // *J. Sound Vibrat.* 1999. V. 222. № 3. P. 409–423.
4. *Yuen M.* A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever // *J. Sound Vibrat.* 1985. V. 103. № 3. P. 301–310.
5. *Ostachowicz W., Krawczuk M.* Analysis of the effects of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam // *J. Sound Vibrat.* 1991. V. 150. № 2. P. 191–201.
6. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // *Вестн. Башкирского ун-та. Матем. и механ.* 2019. Т. 24. № 4. С. 774–779.
7. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О свободных изгибных колебаниях бетонных балок переменного поперечного сечения // *Промышленное и гражданское строительство.* 2019. № 8. С. 93–98.
8. *Лебедев И.М., Шифрин Е.И.* Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний // *Механ. твердого тела.* 2020. № 4. С. 50–70.
9. *Ватульян А.О., Осипов А.В.* Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке // *Дефектоскопия.* 2014. № 11. С. 37–47.
10. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // *Дефектоскопия.* 2009. № 6. С. 83–89.
11. *Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д.* Собственные частоты и формы продольных и крутильных колебаний стержней переменного поперечного сечения // *Прикладн. матем. и механ.* 2023. № 2. С. 327–336.
12. *Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В.* Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // *Механ. твердого тела.* 2017. № 6. С. 136–144.
13. *Ruotolo R., Surace C.* Natural frequencies of a bar with multiple cracks // *J. Sound Vibrat.* 2004. V. 272. № 1. P. 301–316.
14. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // *Механ. твердого тела.* 2019. № 6. С. 98–107.

15. Ватульян А.О., Бочарова О.В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустич. журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.
16. Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Крутильные колебания стержня непостоянного сечения // Вестн. УГАТУ. Машиностр. и машиноведение. 2022. Т. 26. № 1. С. 22–30.
17. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. № 6. С. 93–98.
18. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. NY. Marcel Dekker, 2005. 328 p.
19. Никитин И.С., Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин А.Д. Мультирежимная модель развития усталостных повреждений // Прикладн. матем. и мех. 2020. Т. 84. № 5. С. 687–698.
20. Нейфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
21. Peano G. Integration par series des equations differentielles lineaires // Math. Ann. 1888. V. 32. P. 450–456.
22. Улитин В.В. Ряд Пеано и матрицанты при решении прикладных задач. СПб.: Изд-во “Парк Ком”, 2012. 164 с.
23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
24. Baake M., Schlagel U. The Peano-Baker Series // Proceed. Steklov Inst. Math. 2011. V. 275. P. 155–159.
25. Захаров Д.Д. Точные уравнения и нахождение частот среза при свободных колебаниях пластин из функционально-градиентных материалов // Механика композиционных материалов. 2022. Т. 54. № 5. С. 927–942.
26. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. NY.: Dover Publ., 1975. 682 p.
27. Thomson W.T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. P. 89–93.
28. Haskell N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. Am. 1953. V. 43. P. 17–34.
29. Knopoff A.L. A matrix method for elastic wave problem // Bull. Seismol. Soc. Am. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
30. Schwab F., Knopoff A.L. Surface waves in multilayered inelastic media // Bull. Seismol. Soc. Am. 1971. V. 61. № 4. P. 893–912.