ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 10, с. 1617–1636

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ОДНОСТОРОННЕЙ И ДВУСТОРОННЕЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ[1)]

С. А. Кащенко[1,*]

[1] 150003 Ярославль, ул. Советская, 14, Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова, Россия

*e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 22.04.2023 г.
Переработанный вариант 18.05.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Рассматриваются цепочки уравнений Ван дер Поля с большим запаздыванием в связях. Предполагается, что количество элементов цепочек тоже является достаточно большим. Естественным образом удается перейти к уравнению Ван дер Поля с интегральным по пространственной переменной слагаемым и периодическими краевыми условиями. Основное внимание уделено изучению локальной динамике цепочек с односторонними и с двусторонними типами связей. Условие достаточно больших значений параметра запаздывания позволило в явном виде определить параметры для реализации критических в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случаев. Показано, что в рассматриваемых задачах имеет место бесконечномерный критический случай. Хорошо известные методы инвариантных интегральных многообразий и методы нормальных форм в этих задачах оказываются неприменимыми. На основе предложенного автором метода бесконечной нормализации – метода квазинормальных форм – показано, что главные члены асимптотики исходной системы определяются с помощью решений (нелокальных) квазинормальных форм – специальных нелинейных краевых задач параболического типа. В качестве основных результатов для рассматриваемых цепочек построены соответствующие квазинормальные формы. Библ. 44.

Ключевые слова: цепочки с односторонними и двусторонними связями, бифуркации, устойчивость, квазинормальные формы, запаздывание, динамика.

DOI: 10.31857/S0044466923090107, **EDN:** MMEENN

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим цепочку связанных между собой осцилляторов. В качестве базовой модели осцилляторов используем уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + a\dot{u} + u + f(u,\dot{u}) = 0, \tag{1}$$

где $f(u,\dot{u})$ – кубическая нелинейность

$$f(u,\dot{u}) = b_1u^3 + b_2u^2\dot{u} + b_3u\dot{u}^2 + b_4\dot{u}^3. \tag{2}$$

Пусть цепочку из N связанных одинаковых осцилляторов вида (1) описывает система уравнений

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u = \sum_{k=1}^{N} a_{kj}u_k(t-T) \quad (j = 1,\ldots,N), \tag{3}$$

где a_{kj} – коэффициенты связей, $T > 0$ – время запаздывания. Будем предполагать, что коэффициенты связей каждого элемента одинаковы для всех j, т.е. $a_{kj} = a_{k-j}$ и цепочка является кольцевой: элемент с номером $j \pm N$ отождествляется с элементом с номером j. Систему (3) удобно интерпретировать как цепочку осцилляторов, расположенных на некоторой окружности в точках с угловыми координатами x_k $(k = 1,\ldots,N; x_{N+1} = x_1; x_0 = x_N; x_k = 2\pi N^{-1}k)$ и $u_k(t) = u(t,x_k)$.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 21-71-30011), https://rscf.ru/project/21-71-30011/.

Цепочки вида (3) являются важными объектами для исследований. Им уделяется особое внимание. Такие цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике [1–8], лазерной физике [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных сетей [16–21], оптике [3, 8, 22, 23], биофизике [24] и др. Релаксационные колебания в связанных цепочках с финитной нелинейностью и запаздыванием для небольшого количества элементов изучались в [25, 26].

Аналитическими методами изучались, в основном, динамические свойства цепочек с небольшим количеством элементов. Здесь будем предполагать, что значение N достаточно велико. Отсюда следует, что параметр $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ является достаточно малым

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

Тогда представляется естественным от дискретной зависимости от x_k перейти к изучению $u(t,x)$ с непрерывным аргументом $x \in (-\infty,\infty)$ и условием 2π-периодичности по x.

В этом случае система (3) трансформируется в краевую задачу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u + f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = d\int_0^{2\pi} \Phi(s)u(t-T,x+s)ds, \tag{5}$$

$$u(t,x+2\pi) \equiv u(t,x). \tag{6}$$

Функция $\Phi(s)$ описывает связи между элементами. Сведение цепочки с большим количеством элементов в краевой задаче вида (5), (6) использовалось в [17, 27].

Подробно остановимся на описании основных объектов настоящей работы — цепочках с односторонними и двусторонними связями. В дискретной форме записи они имеют соответственно представления

$$\ddot{u}_n(t) + a\dot{u}_n(t) + u_n(t) + f(u_n(t),\dot{u}_n(t)) = \alpha u_{n+1}(t-T) \tag{7}$$

и

$$\ddot{u}_n(t) + a\dot{u}_n(t) + u_n(t) + f(u_n(t),\dot{u}_n(t)) = \frac{1}{2}\alpha(u_{n+1}(t-T) + u_{n-1}(t-T)). \tag{8}$$

Рассмотрим задачи с непрерывной по x переменной $u(t,x)$, обобщающие уравнения (7), (8). Остановимся на определении функции $\Phi(s)$ для каждого из двух видов цепочек.

Введем в рассмотрение гауссовы функции $F_\pm(s,\varepsilon)$:

$$F_\pm(s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(s\mp\varepsilon)^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right) \quad (\sigma > 0). \tag{9}$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\pm(s,\varepsilon)ds = 1.$$

Значения $F_\pm(s,\varepsilon)$ сосредоточены в окрестностях точек $\mp\varepsilon$ соответственно.

Интегральное выражение в правой части (5) удобно в каждой из рассматриваемых двух задач представить в виде:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s)u(t-T,x+s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_+(s,\varepsilon)u(t-T,x+s)ds, \tag{10}$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s)u(t-T,x+s)ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (F_+(s,\varepsilon) + F_-(s,\varepsilon))u(t-T,x+s)ds. \tag{11}$$

Такого типа функции $F_\pm(s,\varepsilon)$ использовались в [28]. Похожие, но несколько менее удобные в техническом плане выражения для $F_\pm(s,\varepsilon)$, в которых $F_\pm(s) = \mathrm{const}\times\exp(-\sigma^2|s|)$, приведены в работе [29].

Формы записей (10) и (11) предпочтительнее по трем причинам. Во-первых, для каждой фиксированной непрерывной и 2π-периодической функции $u(x)$ имеют место предельные равенства

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s,\varepsilon)u(x+s)ds = u(x\pm\varepsilon), \tag{12}$$

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(F_{+}(s,\varepsilon)+F_{-}(s,\varepsilon))u(x+s)ds = \frac{1}{2}(u(x+\varepsilon)+u(x-\varepsilon)), \tag{13}$$

которые оправдывают названия “односторонняя” и “двусторонняя” связи.

Во-вторых, параметр σ в формулах для $F_{\pm}(s,\varepsilon)$ имеет четкий смысл. Он определяет множество элементов цепочки, которые существенным образом влияют на каждый конкретный элемент. Это влияние тем слабее, чем дальше элементы находятся друг от друга.

В-третьих, формы записи (10) и (11) удобны с чисто технической точки зрения, поскольку имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s,\varepsilon)\exp(iks)ds = \exp(\pm ik\varepsilon)\exp\left(-\frac{\sigma^2\varepsilon^2k^2}{2}\right),$$

которое ниже будет часто использоваться.

Еще одно важное предположение касается параметра запаздывания T. Будем предполагать, что этот параметр является достаточно большим: для некоторого $c>0$ выполнено условие

$$T = c\varepsilon^{-1}. \tag{14}$$

Это открывает путь к использованию специальных асимптотических методов [13–15, 30, 31].

В (5) удобно произвести нормировку времени $t\to Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенному уравнению

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon a\frac{\partial u}{\partial t}+u+f\left(u,\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}\right) = d\int_0^{2\pi}\Phi(s)u(t-c,x+s)ds \tag{15}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t,x+2\pi)\equiv u(t,x). \tag{16}$$

Отметим, что получающееся при $\varepsilon = 0$ уравнение не дает информации о поведении решений краевой задачи (15), (16).

При изучении решений из малой окрестности нулевого состояния равновесия важную роль играет линеаризованное уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon a\frac{\partial u}{\partial t}+u = d\int_0^{2\pi}\Phi(s)u(t-c,x+s)ds. \tag{17}$$

Его характеристическое уравнение получаем путем подстановки в (17) решений Эйлера $\exp(ikx+\lambda t)$:

$$\varepsilon^2\lambda^2+\varepsilon a\lambda+1 = dg(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2z^2-c\lambda\right),\quad z=\varepsilon k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{18}$$

а для функции $g(z)$ имеем равенства:

$$g(z)=\exp(iz),\quad \text{в случае (10)}, \tag{19}$$

$$g(z)=\cos z,\quad \text{в случае (11)}. \tag{20}$$

В том случае, когда все корни (18) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon\to 0$, нулевое решение (17), (16), а значит, и в (15), (16) асимптотически устойчиво и все решения с достаточно малыми (не зависимо от ε) начальными условиями стремятся к нулю при $t\to\infty$. Если же найдется корень в (18) с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon\to 0$ вещественной частью, то нулевое решение в (17), (16) и в (15), (16) неустойчиво и задача о динамике становится нелокальной. Здесь будем рассматривать критические случаи для каждой из функций (10), (11), когда у (18) нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью, но есть корни, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Будет показано, что во всех рассмотренных ниже ситуациях критические случаи имеют бесконечную размерность, т.е. бесконечно много корней (18) стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Известные методы исследования локальной динамики в критических случаях, основанные на использовании инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм [32–34], здесь оказываются неприменимы. Будут использованы специальные методы, разработанные в [14, 30, 31, 35–38]. В качестве основных результатов будут построены нелинейные краевые задачи – аналоги нормальных форм – квазинормальные формы (КНФ). Их нелокальная динамика описывает поведение всех решений из окрестности состояния равновесия исходной краевой задачи (15), (16). Будут выявлены сходства и отличия динамических свойств для каждого типа связей.

В следующих разделах будут последовательно изучены задачи с обоими типами функции $\Phi(s)$ (10), (11). Особо выделим роль параметра σ, фигурирующего в (9). При достаточно малых его значениях существенно усложняются критические случаи и КНФ, а значит, и динамика исходной задачи. В силу равенств (12) и (13) этот стучай имеет особое значение.

Отметим, что в цепочках без запаздывания подобного типа задачи исследовались в [39]. Присутствие большого запаздывания, с одной стороны, позволяет в явном виде получить явные выражения для критических случаев [21, 27, 40–42] и выявить тенденции изменения динамических свойств при увеличении T. С другой стороны, возрастает размерность критических случаев и еще более усложняются соответствующие КНФ.

Центральное место при исследовании краевой задачи (15), (16) для каждой из приведенных функций $g(z)$ занимает линейный анализ. Этому посвящен следующий раздел.

1. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим вопрос о корнях характеристического уравнения (18) с функциями $g(z)$ (19) и (20). Напомним, что критические случаи в задачах об устойчивости в (17), (16) реализуются, когда в уравнении (18) при некотором k есть корень с нулевой или достаточно близкой к нулю вещественной частью. В связи с этим для некоторого вещественного значения ω положим в (18) $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$. В результате получим уравнение

$$1 - \omega^2 + ia\omega = dg(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 - i\omega\varepsilon^{-1}\right), \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{21}$$

Через $p(\omega)$ обозначим модуль левой части (21)

$$p(\omega) = [(1 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2]^{1/2}$$

и пусть

$$p_0 = \min_{-\infty<\omega<\infty} p(\omega) = p(\omega_0).$$

Здесь

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a^2 \geqslant 2, \\ \left(1 - \dfrac{a^2}{2}\right)^{1/2}, & \text{если} \quad a^2 < 2, \end{cases} \qquad p_0 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a^2 \geqslant 2, \\ \dfrac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, & \text{если} \quad a^2 < 2. \end{cases}$$

Отметим, что $p_0 = 0$ при $a = 0$. Положим $P(\omega) = 1 - \omega^2 + ia\omega$ и пусть $P(\omega) = p(\omega)\exp(i\Omega(\omega))$. При $\omega = 0$ имеем $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = a$, $p'(0) = 0$.

Существенную роль при исследовании корней (18) играет параметр σ. Отдельно рассмотрим два принципиально различных случая. Первый из них реализуется, когда

$$\sigma > 0 \tag{22}$$

и σ не зависит от малых параметров.

Второй случай существенно сложнее. Он выделяется условием достаточной малости этого параметра, т.е. предполагаем, что для некоторого фиксированного $\sigma_1 > 0$ выполнено условие

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1. \tag{23}$$

Еще раз отметим, что в силу предельных равенств (12) и (13) этот случай особо интересен.

1.1. Результаты линейного анализа в случае фиксированного значения σ

Пусть выполнено условие (22). При фиксированном z и при условии

$$\left|dg(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right)\right| < p_0$$

уравнение (21) вещественных корней не имеет. Положим

$$\gamma(z) = \left|g(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right)\right|$$

и пусть

$$\gamma_0 = \max_{-\infty<z<\infty} \gamma(z) = \gamma(z_0). \tag{24}$$

Из условия (22) вытекает, что $z_0 = 0$ и $\gamma_0 = 1$. При условии $|d|\gamma_0 < p_0$ и при достаточно малых ε все корни уравнения (18) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части. При $|d|\gamma_0 > p_0$ найдется такое z_0, что уравнение (18) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью.

Значение параметра d_0, который выделяет критический в задаче об устойчивости (17), (16) случай, определяется равенством

$$d_0 = p_0 \quad \text{при} \quad d_0 > 0 \quad \text{и} \quad d_0 = -p_0 \quad \text{при} \quad d_0 < 0.$$

В связи с этим ниже предполагаем, что для произвольного фиксированного значения d_1 параметр d определяем равенством

$$d = d_0 + \varepsilon^2 d_1. \tag{25}$$

При этом условии рассмотрим вопрос об асимптотике всех тех корней характеристического уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Сразу отметим, что таких корней оказывается бесконечно много, поэтому критический случай имеет бесконечную размерность.

Введем обозначения. Через $\theta_\omega = \theta_\omega(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ будем обозначать такое выражение, которое дополняет до целого кратного $2\pi c^{-1}$ величину $\omega_0\varepsilon^{-1}$. При $\omega_0 = 0$ считаем, что $\theta_\omega = 0$. Через $\theta_z = \theta_z(\varepsilon) \in [0, 1)$ подобным образом ниже будем обозначать такое выражение, которое дополняет до целого значение $z_0\varepsilon^{-1}$. При $z_0 = 0$ считаем, что $\theta_z = 0$.

Сформулируем утверждения об асимптотике корней (18) в случаях (19), (20).

Лемма 1.1. *Пусть*

$$a^2 > 2, \quad d_0 = p_0. \tag{26}$$

Тогда $\omega_0 = 0$ *и для корней* $\lambda_{kn}(\varepsilon)(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *уравнения* (18), *вещественные части которых стремятся к нулю при* $\varepsilon \to 0$ *выполнены асимптотические равенства*

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = 2\pi i c^{-1} n + \varepsilon\lambda_{1kn} + \varepsilon^2\lambda_{2kn} + \ldots, \tag{27}$$

где в случае (19)

$$\lambda_{1kn} = c^{-1} i(k - ac^{-1}2\pi n),$$

$$\lambda_{2kn} = c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(2\pi n)^2 + ic^{-2}a(k - c^{-1}a2\pi n) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\sigma^2 k^2,$$

а в случае (20)

$$\lambda_{1kn} = c^{-2} ia2\pi n,$$

$$\lambda_{2kn} = c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(2\pi n)^2 + ic^{-3}a2\pi n + c^{-1}d_1 - c^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)k^2.$$

В случае, когда $a^2 > 2$ и $d_0 = -p_0 = -1$ в предыдущих формулах выражение $2\pi in$ меняется на $i\pi(2n+1)$. В этом случае удобно все предыдущие формулы переписать, акцентируя внимание на то, что, в отличие от приведенных в лемме 1.1 равенств, присутствует уже нечетно кратная π величина $\pi(2n+1)$:

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = \pi i c^{-1}(2n+1) + \varepsilon\lambda_{1kn} + \varepsilon^2\lambda_{2kn} + \ldots,$$

где в случае (19)

$$\lambda_{1kn} = c^{-1}i(k - ac^{-1}\pi(2n+1)),$$

$$\lambda_{2kn} = c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(\pi(2n+1))^2 + ic^{-2}a(k - c^{-1}a\pi(2n+1)) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\sigma^2k^2,$$

а в случае (20)

$$\lambda_{1kn} = c^{-2}ia\pi(2n+1),$$

$$\lambda_{2kn} = c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(\pi(2n+1))^2 + ic^{-3}a\pi(2n+1) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)k^2.$$

Лемма 1.2. *Пусть*

$$0 < a^2 < 2. \tag{28}$$

Тогда $\omega_0 > 0$ *и для корней* $\lambda_{kn}(\varepsilon)(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ *уравнения* (18), *вещественные части которых стремятся к нулю при* $\varepsilon \to 0$, *выполнены асимптотические равенства*

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = i\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \lambda_{0n} + \varepsilon\lambda_{1kn} + \varepsilon^2\lambda_{2kn} + \ldots, \tag{29}$$

где

$$\lambda_{0n} = ic^{-1}[2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0], \quad \varkappa = p_0\exp(i\Omega_0),$$

в случае (19)

$$\begin{gathered}\lambda_{1kn} = c^{-1}(k + \varkappa^{-1}(2\omega_0 - ia))\lambda_{0n},\\ \lambda_{2kn} = c^{-1}\left[\left(\varkappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2\varkappa^{-2}\right)\lambda_{0n}^2 + d_1p_0^{-1} - \sigma^2k^2 - \right.\\ \left. - (c\varkappa)^{-1}2i\omega_0(ik + \varkappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n}) - i\varkappa^{-1}a\lambda_{0n}\right].\end{gathered} \tag{30}$$

В случае (20)

$$\begin{gathered}\lambda_{1kn} = ic^{-1}\varkappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n},\\ \lambda_{2kn} = c^{-1}\left[\left(\varkappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2\varkappa^{-2}\right)\lambda_{0n}^2 + d_1p_0^{-1} - \right.\\ \left. - \sigma^2 + \frac{1}{2}k^2 - (c\varkappa)^{-1}2i\omega_0\varkappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n} - i\varkappa^{-1}a\lambda_{0n}\right].\end{gathered} \tag{31}$$

Отметим, что выполняются условия

$$\mathrm{Re}\left(\varkappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2\varkappa^{-2}\right) < 0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_{1kn} = 0. \tag{32}$$

Выполнение первого из условий (32) очевидно. Подробнее остановимся на обосновании второго равенства в (32). Достаточно доказать, что чисто мнимым является выражение

$$(2\omega_0 - ia)\varkappa^{-1}.$$

В этом случае $P(\omega) = p(\omega)\exp(i\Omega(\omega))$ и $P'(\omega) = (p'(\omega) + i\Omega'(\omega)p(\omega))\exp(i\Omega(\omega))$, а значит,

$$P'(\omega) = i\Omega'(\omega_0)p_0\exp(i\Omega_0) = -2\omega_0 + ia.$$

Отсюда заключаем, что $(-2\omega_0 + ia)\varkappa^{-1} = i\Omega'(\omega_0) = 2ia^{-1}$.

Корни $\lambda_{kn}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (18) позволяют определить решения линейной краевой задачи (17), (16)

$$u_{kn}(t,x,\varepsilon) = \exp(ikx + \lambda_{kn}(\varepsilon)t),$$

а значит, и формальную совокупность решений

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} (\xi_{kn}u_{kn}(t,x,\varepsilon) + \overline{\xi}_{kn}\overline{u}_{kn}(t,x,\varepsilon)), \tag{33}$$

где ξ_{kn} – произвольные комплексные постоянные. В каждом из рассмотренных ниже случаев соответствующие выражения вида (33) будут преобразованы так, чтобы в удобной форме можно было исследовать асимптотику решений нелинейной краевой задачи (15), (16).

1.2. Случай малых значений σ

Ниже будут рассмотрены важные вопросы о динамических свойствах краевой задачи (15), (16) при малых значениях σ. Будем предполагать, что для некоторого фиксированного значения σ_1 выполнено равенство

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1.$$

Интерес к этому случаю обусловлен тем, что, во-первых, как было показано выше при малых σ соответствующие интегральные выражения в краевой задаче (15), (16) близки к записи в виде конечной разности по пространственной переменной.

Во-вторых, из (18) следует, что величина $\exp(-\sigma^2 z^2/2)$ в правой части (18) является малой, а значит, критические случаи определяются периодической функцией $g(z)$. Тем самым критические значения z_0 в (24) находятся заведомо не единственным образом. Таких значений, очевидно, бесконечно много. Это говорит о том, что квазинормальная форма становится существенно сложнее, а динамические свойства интереснее и разнообразнее.

2. ЦЕПОЧКИ С ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ

Отдельно рассмотрим случаи, когда $a^2 > 2$, $a^2 < 2$, $d_0 > 0$ и $d_0 < 0$.

2.1. Случай $a^2 > 2$ *и* $d_0 > 0$

Рассмотрим краевую задачу (15), (16) в предположении, что выполнено условие (22) и равенство

$$g(z) = \exp(iz). \tag{34}$$

Пусть сначала верны неравенства $a^2 > 2$ и $d_0 > 0$. Тогда получаем, что для фигурирующих в (26), (27) величин выполнены равенства

$$\gamma_0 = p_0 = d_0 = 1, \quad d = 1 + \varepsilon^2 d_1, \quad z_0 = 0 \quad (\theta_z = 0). \tag{35}$$

Рассмотрим формальное выражение (33), которое имеет вид

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn} \exp[ikx + i(2\pi nc^{-1} + \varepsilon k - \varepsilon a)t + (\lambda_{2kn} + O(\varepsilon))\varepsilon^2 t].$$

Положим в нем

$$x_1 = (1 - \varepsilon c^{-3}a)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-2}t, \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

и $\xi_{kn}(\tau) = \xi_{kn}\exp[(\lambda_{2kn} + O(\varepsilon))\tau]$. В результате получаем, что

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau)\exp(ikx_2 + 2\pi ic^{-1}nx_1) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2),$$

т.е. $\xi_{kn}(\tau)$ – коэффициенты Фурье c-периодической по x_1 и 2π-периодической по x_2 функции $\xi(\tau, x_1, x_2)$.

Решение нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде формального ряда

$$u(t, x) = \varepsilon\xi(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \ldots, \tag{36}$$

где $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – неизвестные функции, зависимость от x_1 – c-периодическая, а от x_2 – 2π-периодическая. Подставим (36) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При первой степени ε получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при ε^3, приходим к уравнению

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}c^{-1}(a^2-2)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} + \sigma^2 c^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_2^2} - a^2c^{-2}\frac{\partial\xi}{\partial x_1} - ac^{-2}\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + c^{-1}d_1 - c^{-1}b_1\xi^3, \tag{37}$$

для которого выполнены краевые условия

$$\xi(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \tag{38}$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены равенства* (34), $d_0 = 1$, *неравенства* (22) *и* $a^2 > 2$. *Пусть* $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – *ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ *решение краевой задачи* (37), (38). *Тогда функция* $u(t, x) = \varepsilon\xi(\tau, x_1, x_2)$ *удовлетворяет краевой задаче* (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

2.2. Случай $a^2 > 2$ и $d_0 < 0$

В данном разделе $d_0 = -1$, а все остальные величины те же, что и в предыдущем разделе. Повторяя приведенные выше построения, получаем формулу для тех решений линейной краевой задачи (17), (16), которые базируются на “критических” решениях Эйлера:

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau)\exp[ikx + i(\pi(2n+1)c^{-1} + \varepsilon k - \varepsilon a\pi(2n+1)c^{-1})t] \equiv \xi(\tau, x_1, x_2),$$

где $\xi_{kn}(\tau)$ – коэффициенты Фурье c-антипериодической по x_1 и 2π-периодической по x_2 функции $\xi(\tau, x_1, x_2)$.

Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) опять ищем в виде (36). В итоге для $\xi(\tau, x_1, x_2)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}c^{-1}(a^2-2)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} + \sigma^2 c^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_2^2} - a^2c^{-2}\frac{\partial\xi}{\partial x_1} - ac^{-2}\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + c^{-1}d_1 - c^{-1}b_1\xi^3 \tag{39}$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv -\xi(\tau, x_1 + c, x_2). \tag{40}$$

Сформулируем результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены равенства* (34), $d_0 = -1$ *и неравенства* (22) *и* $a^2 > 2$. *Пусть* $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – *ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ *решение краевой задачи* (39), (40). *Тогда функция* $u(t, x) = \varepsilon\xi(\tau, x_1, x_2)$ *удовлетворяет краевой задаче* (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

Таким образом, показано, что при сформулированных в теоремах 1 и 2 условиях краевые задачи (37), (38) и (39), (40) являются квазинормальными формами для краевой задачи (15), (16). Их нелокальные решения определяют поведение решений (15), (16) в малой окрестности состояния равновесия. Отметим, что динамика краевой задачи (37), (38) тривиальна: все ее решения при $t \to \infty$ стремятся к одному из трех стационаров – либо к нулю, либо к значениям $\pm(-d_1b_1^{-1})^{1/2}$. Решения краевой задачи (39), (40) менее тривиальны. В ней могут быть, например, устойчивые неоднородные состояния равновесия.

2.3. Асимптотика быстро осциллирующих решений

При условии $0 < a^2 < 2$ динамические свойства сложнее. Главная часть корней характеристического уравнения (18) близка к $i\omega_0\varepsilon^{-1}$, т.е. является достаточно большой. В связи с этим колебания с такими частотами естественно назвать быстро осциллирующими.

Из результатов разд. 1 получаем соотношения:

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, \quad z_0 = 0, \quad \theta_z = 0, \quad \gamma_0 = 1.$$

Достаточно ограничиться случаем, когда коэффициент d положителен. Поэтому $d_0 = p_0$.

Согласно лемме 2 в рассматриваемом случае (35) для корней $\lambda_{kn}(\varepsilon)$ выполнены равенства (29). Корням $\lambda_{kn}(\varepsilon)$ отвечают решения Эйлера линейной задачи (17), (16)

$$u_{kn}(t,x,\varepsilon) = \exp(ikx + \lambda_{kn}(\varepsilon)t).$$

Учитывая равенства (29), функцию $u_{kn}(t,x,\varepsilon)$ можно записать в виде

$$u_{kn}(t,x,\varepsilon) = E(t_1)\exp(2\pi inc^{-1}x_1 + ikx_2)\exp((\lambda_{2kn} + O(\varepsilon)\tau),$$

где $E(t_1) = \exp(it_1)$,

$$t_1 = [\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - \Omega_0 c^{-1} - R_0 c^{-1}(\theta_\omega - \Omega_0 c^{-1})(2i\omega_0 + a)]t, \tag{41}$$

$$x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1}R_0)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-1}t, \quad \tau = \varepsilon^2 t, \tag{42}$$

$$R_0 = p_0^{-1}\exp(i\Omega_0)(2i\omega_0 + a). \tag{43}$$

Выше было показано, что значение R_0 вещественно ($\mathrm{Im} R_0 = 0$). Отсюда получаем, что

$$\sum_{k,n=-\infty}^{\infty}\xi_{kn}u_{kn}(t,x,\varepsilon) = E(t_1)\sum_{k,n=-\infty}^{\infty}\xi_{kn}(\tau)\exp(2\pi inc^{-1}x_1 + ikx_2) = E(t_1)\xi(\tau,x_1,x_2).$$

Здесь ξ_{kn} – произвольные комплексные постоянные, а $\xi_{kn}(\tau) = \xi_{kn}\exp((\lambda_{2kn} + O(\varepsilon)\tau)$. Функции $\xi_{kn}(\tau)$ являются коэффициентами Фурье c-периодической по x_1 и 2π-периодической по x_2 функции $\xi(\tau,x_1,x_2)$. Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде формального ряда

$$u(t,x) = \varepsilon(\xi(\tau,x_1,x_2)E(t_1) + \overline{cc}) + \varepsilon^3 u_3(t_1,\tau,x_1,x_2) + \ldots, \tag{44}$$

в котором зависимости от t_1, x_1, x_2 – периодические. Здесь и ниже через $\overline{cc}$ обозначаем величину, комплексно сопряженную к предыдущему слагаемому.

Введем обозначения. Положим

$$L_0(\xi) \equiv A\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} + B\frac{\partial\xi}{\partial x_1} + C\frac{\partial\xi}{\partial x_2} + D\xi + \sigma^2 c^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_2^2},$$

где

$$A = c^{-1}\left[\frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2\varkappa^{-2} - \varkappa^{-1}\right],$$

$$B = -[2c^{-1}A(\theta_\omega - \Omega_0) + (c\varkappa)^{-1}2i\omega_0\varkappa^{-1}(2\omega_0 - ia) + i\varkappa^{-1}a],$$

$$C = -2i(c\varkappa)^{-1}\omega_0,$$

$$D = -Ac^{-2}(\theta_\omega - \Omega_0)^2 + d_1(cp_0)^{-1} - i\varkappa^{-1}(2c^{-1}\omega_0 + a),$$

$$L_1(u) \equiv \omega_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + a_0\omega\frac{\partial u}{\partial t_1} + u - p_0 u(t_1 - c(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - \Omega_0 c^{-1}),\tau,x_1,x_2),$$

$$\beta_1 = b_1 + i\omega_0 b_2 - \omega_0^2 b_3 - i\omega_0^3 b_4,$$

$$\beta_2 = b_1 + 3i\omega_0 b_2 - 9\omega_0^2 b_3 - 27i\omega_0^3 b_4.$$

Просто проверяется, что $\mathrm{Re}A > 0$. Подставим (44) в (15). Совершая затем стандартные действия, получаем соотношение

$$L_1(u_3) = E(t_1)\left[-\frac{\partial\xi}{\partial\tau} + L_0(\xi) + 3c^{-1}\beta_1\xi|\xi|^2\right] + \overline{c}c + c^{-1}\beta_2E^3(t_1)\xi^3 + \overline{c}c. \tag{45}$$

Для разрешимости (45) в указанном классе функций необходимо, чтобы первое (и второе – сопряженное к нему) слагаемое обратилось в нуль, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = L_0(\xi) + 3c^{-1}\beta_1\xi|\xi|^2. \tag{46}$$

Напомним, что функция $\xi(\tau, x_1, x_2)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\xi(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \tag{47}$$

При выполнении равенства (46) получаем, что $u_3 = u_{30}$ и

$$u_{30} = \beta_2[-3\omega_0^2 + i\omega_0 a + 1 - p_0\exp(-3i\Omega_0)]^{-1}E^3(t_1) + \overline{c}c.$$

Введем еще одно обозначение. Через $\varepsilon_n(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$, для которой выполнены условия

$$\varepsilon_n(\theta_0) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{и} \quad \theta(\varepsilon_n(\theta_0)) = \theta_0.$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 2.3. *Пусть* $0 < a^2 < 2$ *и* $d_0 = p_0$. *Фиксируем произвольно* $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ *и пусть* $\xi(\tau, x_1, x_2)$ – *ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ *решение краевой задачи* (46), (47). *Тогда при* $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_0)$ *функция*

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2)E(t_1) + \overline{c}c) + \varepsilon^3u_{30}(t_1, \tau, x_1, x_2)$$

удовлетворяет при условиях (41)–(43) *и при* $\theta = \theta_0$ *краевой задаче* (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

На основании этой теоремы заключаем, что при сформулированных условиях краевая задача (46), (47) играет роль квазинормальной формы для исходной краевой задачи (15), (16). Отметим, что динамические свойства этой краевой задачи с комплексными коэффициентами существенно сложнее (см., например, [43]) чем у краевых задач (37), (38) и (39), (40) с вещественными коэффициентами. В частности, в (46), (47) могут наблюдаться такие структуры, как ведущие центры, спиральные волны и др.

2.4. Построение квазинормальной формы при малых значениях параметра σ

Здесь предполагаем, что для параметра σ выполнено условие (23). Функция $\gamma(z)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ имеет вид $\gamma(z) = |\exp(iz)| \equiv 1$, поэтому $\gamma_0 = 1$, а значение z_0 – произвольно. В этом состоит основное отличие от условий разделов 2.2 и 2.3.

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая, когда $0 < a^2 < 2$. Для величин ω_0 и p_0 верны формулы из разд. 1.

Сформулируем результат об асимптотике корней характеристического уравнения (18) в случае (23), (28) и (35).

Фиксируем произвольно значение z и рассмотрим все те целые K, для которых $K = \{z\varepsilon^{-1} + \theta_z + k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. Просто проверяется то, что для каждого z характеристическое уравнение (18) имеет корни $\lambda_{zkn}(\varepsilon)(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ с асимптотикой

$$\lambda_{zkn}(\varepsilon) = i\omega_0\varepsilon^{-1} + ic^{-1}R_{zn} + \varepsilon\lambda_{1zkn} + \varepsilon^2\lambda_{2zkn} + \ldots, \tag{48}$$

где

$$\begin{gathered} R_{zn} = z + 2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0, \\ \lambda_{1zkn} = (i(\theta_z + k) + iR_0R_{zn})c^{-1}, \\ R_0 = (2\omega_0 - ia)(p_0\exp(i\Omega_0))^{-1} = -2a^{-1}, \end{gathered} \tag{49}$$

$$\lambda_{2zkn} = \frac{1}{2}(c\lambda_{1zkn} - i(\theta_z + k))^2 + d_1 c^{-1} p_0^{-1} + c^{-1}(-c^{-2}R_{zn}^2 + (2i\omega_0 + a)\lambda_{1zkn})(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}.$$

Обратим внимание, что в формулах (48), (49) значение z – любое вещественное. Фиксируем произвольно $\Delta > 0$ и z^0. Рассмотрим множество чисел

$$z_m = \left\{z^0 + \frac{2\pi}{\Delta}m;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

В предыдущих разделах со значением z_0 была связана совокупность целых чисел $K_{z_0} = \{z_0\varepsilon^{-1} + \theta_z + k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Здесь аналогично определим совокупности целых чисел K_{zm}, которые связаны со значениями z_m следующими соотношениями:

$$K_{zm} = \{z^0\varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + z_m\varepsilon^{-1} + \theta_{zm} + k;\ k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Заметим, что использование для разных z_m различных значений θ_{zm} неудобно. Поэтому введем такое значение $\theta_\Delta = \theta_\Delta(\varepsilon) \in [0,1)$, которое дополняет до целого величину $2\pi(\Delta\varepsilon^{-1})$. Тогда в качестве θ_{zm} можно взять $m\theta_\Delta$. Здесь уже не требуем, чтобы эта величина лежала в полуинтервале $[0,1)$.

В (48), (49) предполагаем, что значения z пробегают всю совокупность значений для всех m множества K_{zm}.

Подставим соответствующие значения z в (48), (49). Тогда получим асимптотическое представление для некоторой совокупности $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$ корней уравнения (18), зависящих от произвольного параметра Δ

$$\lambda_{mkn}(\varepsilon) = i\omega_0\varepsilon^{-1} + ic^{-1}R_{mn} + \varepsilon\lambda_{1mkn} + \varepsilon^2\lambda_{2mkn} + \ldots, \tag{50}$$

где

$$R_{mn} = z^0 + 2\pi\Delta^{-1}m + 2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0,$$
$$c\lambda_{1mkn} = i(\theta_{z^0} + m\theta_\Delta + k) + iR_0R_{mn},$$
$$c\lambda_{2mkn} = \frac{1}{2}(c\lambda_{1mkn} - i(\theta_{z^0} + m\theta_\Delta + k))^2 + d_1 p_0^{-1} + ((2i\omega_0 + a)\lambda_{1mkn} - c^{-2}R_{mn}^2)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}.$$

Каждому корню (50) отвечает решение Эйлера краевой задачи (17), (16)

$$u_{mnk}(t, x, \varepsilon) = \exp[i(z^0\varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + 2\pi m(\Delta\varepsilon)^{-1} + m\theta_\Delta + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t].$$

Формальное выражение для произвольной линейной комбинации таких решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mkn} \exp[i(z^0\varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + 2\pi m(\Delta\varepsilon)^{-1} + m\theta_\Delta + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t]$$

можно записать в виде

$$u(t, x) = E(t, x)\sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mkn}(\tau) \exp[i2\pi n x_1 + ikx_2 + imx_3],$$

где

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad x_1 = (1 + \varepsilon c^{-1}R_0)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-1}t,$$
$$x_3 = (2\pi(\Delta\varepsilon)^{-1} + \theta_\Delta)(x + \varepsilon(1 + \varepsilon c^{-1}R_0)2\pi\Delta^{-1}t),$$
$$\xi_{mkn}(\tau) = \exp((\lambda_{2mkn} + O(\varepsilon))\tau),$$
$$E(t, x) = \exp[i(\omega_0\varepsilon^{-1} + (\theta_\omega - \Omega_0 c^{-1} + \theta_{z^0})(1 + \varepsilon c^{-1}R_0))t + i(z^0\varepsilon^{-1} + \theta_{z^0})x].$$

Отсюда получаем, что

$$u(t, x) = E(t, x)\xi(\tau, x_1, x_2, x_3),$$

а $\xi_{mkn}(\tau)$ – коэффициенты Фурье функции $\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)$.

Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем тогда в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)E(t, x) + \overline{c}c) + \varepsilon^3(E^3(t, x)u_{31}(\tau, x_1, x_2, x_3) + \overline{c}c) + \ldots, \quad (51)$$

где $\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)$ – неизвестные амплитуды, зависимость от t, x_1, x_2 и x_3 в (51) – периодическая. Подставим (51) в (15). Совершая стандартные действия, находим выражение для u_{31} и уравнение относительно $\xi(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$, $\tilde{x}_2 = x_2 - R_0\tau$:

$$u_{31} = [1 - 9\omega_0^2 + 3ia\omega_0 - p_0\exp(-3i(\Omega_0 + \theta_{z^0}))]^{-1}[-b_1 - 3i\omega_0 + 9\omega_0^2 + 27\omega_0^3]\xi^3,$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = (A_0(a) + iA_1(a))\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} + (A_0(a) + iA_1(a) + \sigma^2)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_3^2} + 2(A_0(a) + iA_1(a))\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1\partial x_3} + \\ + 2i\left(A_0(a) + iA_1(a) + \frac{1}{2}R_0\right)\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x_1} + [2i(A_0(a) + iA_1(a)) - \sigma^2 z^0 - \Delta R_0\theta_\Delta\pi^{-1} + R_0]\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x_3} + \\ + [-(A_0(a) + iA_1(a))(z^0 + \theta_\omega - \Omega_0)^2 - \sigma^2 z_0^2 + iR_0(\theta_\omega - \Omega_0 + z^0) - iR_0\theta_{z^0}]\tilde{\xi} + b_0\tilde{\xi}|\tilde{\xi}|^2.\end{gathered} \quad (52)$$

Здесь

$$A_0(a) = \left(2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1}\left[\left(a^2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} - 1\right],$$

$$A_1(a) = \left(a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2},$$

а через $\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$ обозначена функция

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) = \xi(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)\exp(-iR_0c^{-1}\theta_{z^0}\tau),$$

$$b_0 = 3b_1 - ib_2\omega_0 - b_3\omega_0^2 + 3i\omega_0^3 b_4.$$

Относительно аргументов $x_1, \tilde{x}_2$ и x_3 выполнены условия периодичности ($\tilde{x} = x - R_0\tau$)

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1 + c, \tilde{x}_2, x_3) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3), \quad (53)$$

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2 + 2\pi, x_3) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3), \quad (54)$$

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3 + \Delta) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3). \quad (55)$$

Отметим, что переход от аргумента x_2 к аргументу $\tilde{x}_2$ и от функции ξ к функции $\tilde{\xi}$ позволил исключить из (52) выражения $-R_0\partial\xi/\partial x_2$ и $iR_0\theta_{z^0}\xi$ соответственно.

Для того, чтобы сформулировать итоговый результат, введем обозначения. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi c^{-1})$ и пусть последовательность $\varepsilon_s = \varepsilon_s(\theta_0)$ определяется из условия $\varepsilon_s(\theta_0) = \theta_0$, $s = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\Gamma(\theta_0)$ все предельные точки из промежутка $[0, 1]$ последовательности $\theta_\Delta(\varepsilon_s(\theta_0))$. Через θ_Δ^0 обозначим произвольный элемент из $\Gamma(\theta_0)$ и пусть последовательность ε_{s_Γ} такова, что

$$\lim_{\Gamma\to\infty}\theta_\Delta(s_\Gamma) = \theta_\Delta^0.$$

Заметим, что возможна ситуация, когда множество Γ совпадает с отрезком $[0, 1]$, а возможен случай, когда это множество состоит из одного элемента.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия* (23), (28), (34). *Фиксируем произвольно значение* Δ *и* $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, *и* $\theta_\Delta^0 \in \Gamma$. *Пусть* $\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$ – *ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x_1 \in [0, 2\pi]$, $\tilde{x}_2 \in [0, c]$, $x_3 \in [0, \Delta]$ *решение краевой задачи* (52), (53)–(55). *Тогда функция*

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)\exp(-ic^{-1}R_0\theta_{z^0}\tau)E(t, x) + \overline{c}c) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)E^3(t, x) + \overline{c}c)$$

при $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_1 = (1 + \varepsilon c^{-1}R_0)t$, $\tilde{x}_2 = x + \varepsilon c^{-1}t$, $x_3 = (2\pi(\Delta\varepsilon)^{-1} + \theta_\Delta)(x + \varepsilon(1 + \varepsilon c^{-1}R_0)2\pi\Delta^{-1}t)$, *удовлетворяет на последовательности* $\varepsilon = \varepsilon_{s_\Gamma}$ *краевой задаче* (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3_{s_\Gamma})$.

Таким образом, краевая задача (52), (53)–(55) является квазинормальной формой для исходной краевой задачи (15), (16). Отметим, что в явном виде зависимость от аргумента $\tilde{x}_2$ в (52) не присутствует. Относительно аргументов x_1 и x_3 выполнены условия параболичности, поскольку $A_0(a) > 0$ при $0 < a^2 < 2$ $\quad (A_0(\sqrt{2})) = 0$. Решения краевой задачи в двумерной пространственной области могут быть существенно сложнее. Поэтому приходим к выводу о том, что уменьшение параметра σ в (9) влечет за собой усложнение динамики. Кроме этого, присутствие в (52) двух параметров $\theta_\omega(\varepsilon)$ и $\theta_\Delta(\varepsilon)$ говорит о повышенной чувствительности динамических свойств даже при малых изменениях параметра ε (см., например, [44]).

И еще одно важное наблюдение. В краевой задаче параметр Δ, определяющий период по аргументу x_3, является произвольным. При всех его значениях квазинормальная форма (52), (53)–(55) определяет главные асимптотики решений исходной задачи (15), (16). Поэтому можно говорить о мультистабильности в рассматриваемой ситуации.

3. ЦЕПОЧКИ С ДВУСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ

В этом разделе предполагаем, что основной вклад во взаимодействие элементов цепочки определяется, согласно (8), связью с ближайшими соседними элементами слева и справа. В терминах функции $F(s,\varepsilon)$ тогда имеем

$$F(s,\varepsilon) = \frac{1}{2}(F_+(s,\varepsilon) + F_-(s,\varepsilon)).$$

В характеристическом уравнении (18) имеем равенство

$$g(z) = \cos z. \tag{56}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда параметр σ в (18) фиксирован и выполнено условие (22). Случай, когда параметр σ является асимптотически малым, исследуется в п. 3.3.

3.1. Случай $a^2 > 2$

Пусть выполнено неравенство $a^2 > 2$. В этой ситуации имеем $z_0 = 0$ и $\gamma(z_0) = \gamma_0 = 1$. Критический в задаче об устойчивости случай определяется соотношениями

$$d_0 = p_0 \quad \text{при} \quad d_0 > 0 \quad \text{и} \quad d_0 = -p_0 \quad \text{при} \quad d_0 < 0.$$

Достаточно ограничиться рассмотрением одного из этих случаев. Ниже считаем, что $d_0 > 0$, а значит,

$$d_0 = p_0 = 1.$$

Пусть, как и ранее, для параметра d в (18) выполнено равенство (25). Асимптотика корней (18) приведена в лемме 1.1.

Совокупность решений, отвечающих $\lambda^+_{kn}(\varepsilon)$ и $\lambda^-_{kn}(\varepsilon)$, можно представить в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi^+_{kn} \exp(2\pi c^{-1}nix_1 + ikx_2 + (\lambda^+_{2kn} + O(\varepsilon))\tau) = \xi^+(\tau, x_1, x_2),$$

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi^-_{kn} \exp(\pi(2n+1)c^{-1}ix_1 + ikx_2 + (\lambda^-_{2kn} + O(\varepsilon))\tau) = \xi^-(\tau, x_1, x_2).$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1}a)t$, $x_2 = x$. Тогда решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon\xi^+(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \ldots$$

или соответственно

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon\xi^-(\tau,x_1,x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau,x_1,x_2) + \ldots.$$

Подставляя это выражение в (15) и собирая коэффициенты при ε^3, приходим к уравнению относительно ξ^+ или ξ^-:

$$c\frac{\partial\xi^+}{\partial\tau} = \left(\frac{a^2}{2}-1\right)\frac{\partial^2\xi^+}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1}{2}+\sigma^2\right)\frac{\partial^2\xi^+}{\partial x_2^2} - c^{-2}a^2\frac{\partial\xi^+}{\partial x_1} + d_1\xi - b_1(\xi^+)^3, \tag{57}$$

$$c\frac{\partial\xi^-}{\partial\tau} = \left(\frac{a^2}{2}-1\right)\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x_1^2} + \left(\frac{1}{2}+\sigma^2\right)\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x_2^2} - c^{-2}a^2\frac{\partial\xi^-}{\partial x_1} + d_1\xi - b_1(\xi^-)^3 \tag{58}$$

с краевыми условиями

$$\xi^+(\tau,x_1+c,x_2) \equiv \xi^+(\tau,x_1,x_2) \equiv \xi^+(\tau,x_1,x_2+2\pi), \tag{59}$$

$$-\xi^-(\tau,x_1+c,x_2) \equiv \xi^-(\tau,x_1,x_2) \equiv \xi^-(\tau,x_1,x_2+2\pi). \tag{60}$$

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $a^2 > 2$ *и выполнено условие* (22). *Пусть* $\xi^+(\tau,x_1,x_2)$ $(\xi^-(\tau,x_1,x_2))$ — *ограниченные при* $\tau\to\infty$, $x_1\in[0,c]$, $x_2\in[0,2\pi]$ *решения краевой задачи* (57), (59) ((58), (60)). *Тогда функция*

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon(\xi^+(\tau,x_1,x_2) + \xi^-(\tau,x_1,x_2))$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

Таким образом, при условиях (22) и $a^2 > 2$ краевая задача (57)–(60) является квазинормальной формой для (15), (16).

3.2. Квазинормальная форма в случае $0 < a^2 < 2$

Пусть

$$0 < a^2 < 2. \tag{61}$$

Сначала отметим, что из условия (22) следует

$$z_0 = 0.$$

Напомним, что

$$\omega_0 = \left(1-\frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}\left(4-\frac{a^2}{2}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad d_0 = p_0.$$

Важную роль в процессе применения алгоритма построения квазинормальной формы играет асимптотическое поведение корней характеристического уравнения (18), которое приведено в лемме 2.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (22), (56), (61) *и* $d_0 = p_0 (d_0 = -p_0)$. *Тогда для тех корней* $\lambda^+_{kn}(\varepsilon)$ *и* $\overline{\lambda}^+_{kn}(\varepsilon)$ $(\lambda^-_{kn}(\varepsilon), \overline{\lambda}^-_{kn}(\varepsilon))$ $k,n = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$ *уравнения* (18), *вещественные части которых стремятся к нулю при* $\varepsilon\to 0$, *выполнены асимптотические равенства*

$$\lambda^+_{kn}(\varepsilon) = i\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0 + 2\pi nc^{-1} + \varepsilon\lambda^+_{1kn} + \varepsilon^2\lambda^+_{2kn} + \ldots,$$

$$\lambda^-_{kn}(\varepsilon) = i\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1} + \varepsilon\lambda^-_{1kn} + \varepsilon^2\lambda^-_{2kn} + \ldots,$$

где

$$\lambda^+_{1kn} = -iR_0c^{-1}(2\pi nc^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0), \quad \lambda^-_{1kn} = -iR_0c^{-1}(\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0),$$

$$R_0 = (p_0\exp(i\Omega_0))^{-1}(2i\omega_0 + a) = \frac{2}{a},$$

$$\lambda_{2kn}^{+} = -\Delta(2\pi nc^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2(2\pi nc^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) - \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)c^{-1}k^2 + c^{-1}\frac{d_1}{p_0},$$

$$\lambda_{2kn}^{-} = -\Delta(\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 -$$
$$- ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2(\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) - \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)c^{-1}k^2 + c^{-1}\frac{d_1}{p_0},$$

$$\Delta = 4[a^2(4-a^2)]^{-1}(2-a^2) + 4i[a(4-a^2)]^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}.$$

Совокупность решений линейной краевой задачи (17), (16) в рассматриваемом случае, отвечающих корням $\lambda_{kn}^{+}(\varepsilon)$ ($\lambda_{kn}^{-}(\varepsilon)$), можно представить в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty}\xi_{kn}^{+}\exp(ikx + \lambda_{kn}^{+}(\varepsilon)t) = E(t)\sum_{k,n=-\infty}^{\infty}\xi_{kn}^{+}(\tau)\exp(ikx + 2\pi nic^{-1}x_1) = E(t)\xi_{kn}^{+}(\tau, x_1, x),$$

$$(u(t,x,\varepsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty}\xi_{kn}^{-}\exp(ikx + \lambda_{kn}^{-}(\varepsilon)t) =$$
$$= E(t)\sum_{k,n=-\infty}^{\infty}\xi_{kn}^{-}(\tau)\exp(ikx + \pi(2n+1)c^{-1}ix_1) = E(t)\xi_{kn}^{-}(\tau, x_1, x)),$$

где

$$E(t) = \exp\left[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)(1 - \varepsilon c^{-1}R_0)\right)t\right], \quad x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1}R_0)t,$$
$$\xi_{kn}^{\pm}(\tau) = \xi_{kn}^{\pm}\exp((\lambda_{kn}^{\pm} + O(\varepsilon))\tau), \quad \tau = \varepsilon^2 t.$$

Тогда решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем соответственно в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[E(t)\xi^{+}(\tau,x_1,x) + \overline{cc}] + \varepsilon^3[E(t)u_{31}^{+}(\tau,x_1,x) + \overline{cc} + E^3(t)u_{32}^{+}(\tau,x_1,x) + \overline{cc}] + \ldots, \tag{62}$$

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon[E(t)\xi^{-}(\tau,x_1,x) + \overline{cc}] + \varepsilon^3[E(t)u_{31}^{-}(\tau,x_1,x) + \overline{cc} + E^3(t)u_{32}^{-}(\tau,x_1,x) + \overline{cc}] + \ldots. \tag{63}$$

Здесь вещественные комплексные функции $\xi^{\pm}(\tau,x_1,x)$ являются 2π-периодическими по x, а по x_1 функция $\xi^{+}(\tau,x_1,x)$ c-периодическая, а функция $\xi^{-}(\tau,x_1,x)$ c-антипериодическая:

$$\xi^{+}(\tau,x_1+c,x) \equiv \xi^{+}(\tau,x_1,x) \equiv \xi^{+}(\tau,x_1,x+2\pi),$$
$$-\xi^{-}(\tau,x_1+c,x) \equiv \xi^{-}(\tau,x_1,x) \equiv \xi^{-}(\tau,x_1,x+2\pi).$$

Подставляя (62) в (15) и совершая стандартные действия, получаем уравнения для $u_{31}^{\pm}$ и $u_{32}^{\pm}$. Функции $u_{32}^{\pm}$ просто определяются:

$$u_{32}^{\pm} = -(1 - 9\omega_0^2 + 3i\omega_0 a)^{-1}(b_1 + 3i\omega_0 b_2 - 9\omega_0^2 b_3 - 27i\omega_0^3 b_4)(\xi^{\pm})^3.$$

Условие разрешимости уравнения относительно $u_{31}^{\pm}$ заключается в выполнении равенства

$$cp_0\frac{\partial\xi^{\pm}}{\partial\tau} = \Delta\frac{\partial^2\xi^{\pm}}{\partial x_1^2} + i\left[2(\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) + ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2\right]\frac{\partial\xi^{\pm}}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)\frac{\partial^2\xi^{\pm}}{\partial x^2} +$$
$$+\left[\frac{d_1}{p_0} - (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - i\left(\frac{2}{a}\right)^2(\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)\right]\xi^{\pm} + 3\beta_1\xi^{\pm}\left|\xi^{\pm}\right|^2, \tag{64}$$
$$\beta_1 = (b_1 + i\omega_0 b_2 - \omega_0^2 b_3 - i\omega_0^3 b_4)$$

и выполнено соответственно условие

$$\begin{aligned} &\xi^+(\tau, x_1 + c, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x + 2\pi), \\ &-\xi^-(\tau, x_1 + c, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x + 2\pi). \end{aligned} \tag{65}$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (22), (56) *и* (61). *Пусть* $\theta_\omega^0 \in [0, 2\pi)$ — *произвольно фиксировано и* $\varepsilon_n(\theta_\omega^0)$ *такая последовательность, что* $\varepsilon_n(\theta_\omega^0) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $\theta_\omega(\varepsilon_n(\theta_\omega^0)) = \theta_\omega^0$. *Пусть* $\xi(\tau, x_1, x)$ — *ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x_1 \in [0, c]$, $x \in [0, 2\pi]$ *решение краевой задачи* (64), (65) *при* $\theta_\omega = \theta_\omega^0$. *Тогда при* $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_\omega^0)$, $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1} R_0)t$ *функция*

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x)E(t) + \overline{c}c) + \varepsilon^3(u_{32}(\tau, x_1, x)E^3(t) + \overline{c}c)$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

3.3. Квазинормальная форма для малых значений параметра σ

Предположим, что параметр σ является достаточно малым, т.е. выполнено равенство (23)

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1.$$

Для функции $g(z)$ в этом случае имеем равенство

$$g(z) = \cos z \exp(-\varepsilon^2\sigma_1^2 z^2).$$

Наибольшее значение $|g(z)|$ равно 1, а все величины z_m, на которых это значение достигается с точностью до $O(\varepsilon^2)$, определяются неоднозначно:

$$z_m = \pi m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Через $\theta_\pi(\varepsilon) \in [0,1)$ обозначим такое выражение, которое дополняет до целого величину $\pi\varepsilon^{-1}$.

Рассмотрим решения Эйлера $u_{mkn}(t, x, \varepsilon)$ линейной краевой задачи (17), (16), у которых моды принимают значения $(\pi\varepsilon^{-1} + \theta_\pi)m + k$; $m, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$:

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \exp[i((\pi\varepsilon^{-1} + \theta_\pi)m + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t].$$

Здесь $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$ — все те корни характеристического уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Сформулируем результат об асимптотике корней $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда $d_0 > 0$ и выполнены неравенства $0 < a^2 < 2$. Напомним, что в этой ситуации

$$d_0 = p_0, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, \quad \omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (23), (56) *и* (61) *и* $d_0 = p_0$. *Тогда уравнение* (18) *имеет совокупность корней* $\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon)$, $\overline{\lambda}_{mkn}^\pm(\varepsilon)$, *вещественные части которых стремятся к нулю при* $\varepsilon \to 0$ *и выполнены асимптотические равенства*

$$\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon) = i[\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0 + 2\pi n c^{-1}] + \varepsilon\lambda_{1mkn}^\pm + \varepsilon^2\lambda_{2mkn}^\pm + \ldots,$$

где

$$\lambda_{1mkn}^\pm = -\frac{2i}{a}c^{-1}K, \quad K = \theta_\omega - \Omega_0 c^{-1} + 2\pi n c^{-1},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2mkn}^+ = \frac{1}{2}(\lambda_{1mkn}^+)^2 - c^{-1}(2i\omega_0 + a)(p_0\exp(i\Omega_0))^{-1}\lambda_{1mkn}^+ + (p_0\exp(i\Omega_0))^{-1}c^{-1}K^2 + \\ + d_1 p_0^{-1}c^{-1} - \sigma_1^2(2\pi m)^2 c^{-1} - \frac{1}{2}(2\pi m\theta_\pi + k)^2 c^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{2mkn}^{-} = \frac{1}{2}(\lambda_{1mkn}^{-})^2 - c^{-1}(2i\omega_0 + a)(p_0\exp(i\Omega_0))^{-1}\lambda_{1mkn}^{-} + (p_0\exp(i\Omega_0))^{-1}c^{-1}K^2 + \\ + d_1 p_0^{-1}c^{-1} - \sigma_1^2(\pi(2m-1))^2c^{-1} - \frac{1}{2}(\pi(2m-1)\theta_\pi + k)^2c^{-1}.$$

Совокупность решений $u_{mkn}(\varepsilon)$ линейной краевой задачи (17), (16), отвечающих корням $\lambda_{mkn}^{\pm}(\varepsilon)$, можно записать в виде

$$u_{mkn}(t,x,\varepsilon) = \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\xi_{mkn}^{+}\exp\Bigg(i\left[2\left(\frac{\pi}{\varepsilon}+\theta_\pi\right)m+k\right]x + \Bigg[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon}+\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + 4\pi nc^{-1} - \right. \\ \left. -\frac{2\varepsilon}{a}(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + 4\pi nc^{-1}) + \varepsilon^2(\lambda_{2mkn}^{+} + O(\varepsilon))\right)t\Bigg]\Bigg) + \xi_{mkn}^{-}\exp\Bigg(i\left[\left(\frac{\pi}{\varepsilon}+\theta_\pi\right)(2m-1)+k\right]x + \\ + \Bigg[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1} - \frac{2\varepsilon}{a}(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1}) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2(\lambda_{2mkn}^{-} + O(\varepsilon))\right)t\Bigg]\Bigg) = E(t,\varepsilon)\sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty}(\xi_{mkn}^{+}(\tau)\exp(ikx + 2inc^{-1}x_1 + 2imx_2) + \\ + \xi_{mkn}^{-}(\tau)\exp(ikx + i(2n+1)c^{-1}x_1 + i(2m-1)x_2)\Big) = E(t,\varepsilon)(\xi^{+}(\tau,x,x_1,x_2) + \xi^{-}(\tau,x,x_1,x_2)).$$

Здесь

$$E(t,\varepsilon) = \exp\left(i\left[\frac{\omega_0}{\varepsilon} + (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2ac}\right)\right]t\right), \quad \tau = \varepsilon^2 t,$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{ac}\right)t, \quad x_2 = \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)x - \frac{2\varepsilon}{ac}t,$$

$$\xi_{mkn}^{\pm}(\tau,x,x_1,x_2) = \xi_{mkn}^{\pm}\exp(\lambda_{2mkn}^{\pm} + O(\varepsilon))\tau.$$

Обратим внимание, что для функций $\xi^{\pm}(\tau,x,x_1,x_2)$ выполнены условия

$$\xi^{\pm}(\tau,x+2\pi,x_1,x_2) = \xi^{\pm}(\tau,x,x_1,x_2), \tag{66}$$

$$\xi^{+}(\tau,x,x_1+2\pi,x_2) \equiv \xi^{+}(\tau,x,x_1,x_2) \equiv \xi^{+}(\tau,x,x_1,x_2+2\pi), \tag{67}$$

$$-\xi^{-}(\tau,x,x_1+\pi,x_2) \equiv \xi^{-}(\tau,x,x_1,x_2) \equiv -\xi^{-}(\tau,x,x_1,x_2+\pi). \tag{68}$$

Решение нелинейной краевой задачи в рассматриваемом случае ищем в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon(E(t,\varepsilon)(\xi^{+}(\tau,x,x_1,x_2) + \xi^{-}(\tau,x,x_1,x_2)) + \overline{cc}) + \varepsilon^3 u_3(t,x,x_1,x_2,\tau) + \ldots, \tag{69}$$

где зависимость от t, x, x_1 и x_2 – периодическая. Подставляя (8) в (15) и производя стандартные действия, получаем уравнение для определения u_3. Условие разрешимости этого уравнения в указанном классе функций состоит в выполнении равенств

$$cp_0\frac{\partial\xi^{+}}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi^{+}}{\partial x^2} + \frac{\Delta}{4\pi^2}\frac{\partial^2\xi^{+}}{\partial x_1^2} + \left[\frac{\Delta}{4\pi^2} + \sigma_1^2 + \theta_\pi^2\right]\frac{\partial^2\xi^{+}}{\partial x_2^2} + \\ + 2\frac{\partial^2\xi^{+}}{\partial x\partial x_2} + \frac{\Delta}{2\pi^2}\frac{\partial^2\xi^{+}}{\partial x_1\partial x_2} + i\left[2(\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) + i\left(\frac{2}{ac}\right)^2\right]\frac{\partial\xi^{+}}{\partial x_1} + \\ + \left[\frac{d_0}{p_0} - (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - i\left(\frac{2}{ac}\right)^2(\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)\right]\xi^{+} + 3\beta_1\left[(\xi^{+})^2\overline{\xi}^{+} + 2\xi^{+}\left|\xi^{-}\right|^2 + \overline{\xi}^{+}(\xi^{-})^2\right], \tag{70}$$

$$cp_0\frac{\partial\xi^-}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x^2}+\frac{\Delta}{4\pi^2}\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x_1^2}+\left[\frac{\Delta}{4\pi^2}+\sigma_1^2+\theta_\pi^2\right]\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x\partial x_2}+\frac{\Delta}{2\pi^2}\frac{\partial^2\xi^-}{\partial x_1\partial x_2}+$$
$$+i\left[2(\theta_\omega-c^{-1}\Omega_0)+i\left(\frac{2}{ac}\right)^2\right]\frac{\partial\xi^-}{\partial x_1}+\left[\frac{d_0}{p_0}-(\theta_\omega-c^{-1}\Omega_0)^2-i\left(\frac{2}{ac}\right)^2(\theta_\omega-c^{-1}\Omega_0)\right]\xi^-+ \tag{71}$$
$$+3\beta_1\left[\overline{\xi}^-(\xi^-)^2+2\xi^-\left|\xi^+\right|^2+\overline{\xi}^-(\xi^+)^2\right].$$

При выполнении соотношений (66)–(71) функция u_3 просто находится в явном виде. Из-за громоздкости соответствующую формулу не приводим. Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (23), (56), (61) *и* $d_0 = p_0$. *Фиксируем произвольно значения* θ_ω^0 *и* θ_π^0. *Пусть последовательность* $\varepsilon_r \to 0$ *такова, что* $\theta_\omega(\varepsilon_r) \to \theta_\omega^0$ *и* $\theta_\pi(\varepsilon_r) \to \theta_\pi^0$. *Пусть* $\xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2)$ – *ограниченные при* $\tau \to \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $x_1 \in [0, 2\pi]$, $x_2 \in [0, 2\pi]$ *решения краевой задачи* (66)–(71) *для* $\theta_\omega = \theta_\omega^0$, $\theta_\pi = \theta_\pi^0$. *Тогда при* $\varepsilon = \varepsilon_r$ *функция*

$$u(t,x,\varepsilon)=\varepsilon((\xi^+(\tau,x,x_1,x_2)+\xi^-(\tau,x,x_1,x_2))E(t,\varepsilon)+\overline{cc})+\varepsilon^3u_3,$$
$$\tau=\varepsilon^2t,\quad x_1=\left(1-\frac{2\varepsilon}{ac}\right)t,\quad x_2=\left(\frac{\pi}{\varepsilon}+\theta_\pi^0\right)x-\frac{2\varepsilon}{ac}t,$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

Это утверждение говорит о том, что краевая задача (66)–(71) является квазинормальной формой для исходной краевой задачи в рассматриваемом случае.

Отметим, что эта квазинормальная форма является системой параболического типа.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен вопрос о локальной динамике интегродифференциального уравнения Ван дер Поля, возникающего в задаче о поведении решений цепочек с односторонними и двусторонними запаздывающими связями. Большое запаздывание позволило эффективно находить параметры для реализации критических случаев и исследовать эти случаи. Показано, что исходная задача при этом сводится к квазинормальной форме – нелинейной краевой задаче Гинзбурга–Ландау параболического типа. Более того, установлено, что квазинормальная форма содержит не одну, а две независимые пространственные переменные [43]. Это говорит о богатой динамике изучаемых процессов. Кроме этого показано, что полученные квазинормальные формы в наиболее интересной области параметров обладают большой чувствительностью к изменениям малого параметра задачи – к величине, обратной большому запаздыванию. Это следует из того, что в квазинормальной форме присутствуют быстро меняющиеся функции типа $\theta(\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ может происходить процесс прямых и обратных бифуркаций [44].

Важную роль играет параметр σ, фигурирующий в функциях $F_\pm(s, \varepsilon)$. При уменьшении этого параметра может наблюдаться существенное усложнение динамики, поскольку соответствующие квазинормальные формы содержат уже не две, а три пространственные переменные. В случае $a^2 > 2$ структура решений проще по сравнению со случаем $0 < a^2 < 2$. В последнем случае квазинормальные формы являются комплексными, а колебания их решений – быстро осциллирующими по пространственной и временной переменным.

Важно подчеркнуть, что по решениям (нелокальным) квазинормальные формы определяются главные члены асимптотики решений исходного уравнения.

Отличия квазинормальных форм для односторонних и двусторонних связей существенные. Различается не только формульная часть, но и динамические свойства решений. Особенно ярко это проявляется в случае $\sigma \ll 1$. При односторонних связях квазинормальные формы представляют собой однопараметрическое семейство параболических краевых задач с двумя пространственными переменными. В случае двусторонних связей показано, что квазинормальной формой являются система 1 или 2 параболических уравнений с тремя пространственными переменными. Во многих случаях решения содержат быстро осциллирующие не только по времени, но и по пространственной переменной составляющие.

Выбор уравнения с кубической нелинейностью в качестве базового не принципиален. Отсутствие квадратичных нелинейных слагаемых удобно, поскольку немного упрощается формульная часть. Отметим, что отношение двух больших параметров N и T определяется величиной c: $N/T = 2\pi/c$. Параметр c входит во все квазинормальные формы, поэтому во многом определяет их динамику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. 2013. V. 377. № 45–48. P. 3291–3295.
2. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Physical Review E. 1997. V. 55. № 3. P. 2353–22361.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001. P. 411. (Cambridge Nonlinear Science Series; 12).
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G.L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // Physical Review E. 2004/07/13. American Physical Society, 2004. V. 69. № 5. P. 12.
5. *Williams C.R.S., Sorrentino F., Murphy T.E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2013. V. 23. № 4. P. 43117.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of Epidemic Systems with Neumann Boundary Value under Delayed Impulse // Mathematics, 2022. V. 10. P. 2064. https://doi.org/10.3390/math10122064
7. *Van Der Sande G. et al.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // Physical Review E. 2008/07/23. APS, 2008. V. 77. № 5. P. 55202.
8. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Успехи физических наук. 2013. Т. 183. № 12. С. 1323–1336.
9. *Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F.* Collective dynamics in optomechanical arrays // Phys. Rev. Lett., 2011. V. 107. № 4, 043603, 4 pp.
10. *Zhang M., Wiederhecker G.S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M.* Synchronization of micromechanical oscillators using light // Phys. Rev. Lett., 2012. V. 109. № 23, 233906, 5 pp.
11. *Lee T.E., Sadeghpour H.R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // Phys. Rev. Lett., 2013. V. 111. № 23, 234101, 5 pp.
12. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Instabilities of stationary states in lasers with longdelay optical feedback // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2012. V. 9. № 2. P. 519–535.
13. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A.* Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // Proceedings : 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98, Crans-Montana, Switzerland, Sept. 14–17, 1998). NOLTA Society. 1998. P. 495–498.
14. *Kashchenko S.A.* Quasinormal Forms for Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // Mathematics. 2022. V. 10. № 15. P. 2648.
15. *Кащенко С.А.* Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. № 1. С. 23–27.
16. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. Wiley, 2002. P. 464.
17. *Kashchenko S.A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. V. 31. № 3. P. 033147.
18. *Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W.* Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // Europhysics Letters. 2011. V. 93. № 6. P. 60003.
19. *Rosin D.P., Rontani D., Gauthier D.J., Schöll E.* Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // Physical Review Letters. American Physical Society, 2013. V. 110. № 10. P. 104102.
20. *Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O.V., Tass P.A.* Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. V. 21. № P. 47511.
21. *Klinshov V., Nekorkin V.* Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // Cybernetics and Physics. 2012. V. 1. № 2. P. 106–112.
22. *Stankovski T., Pereira T., McClintock P.V.E., Stefanovska A.* Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // Rev. Mod. Phys. 2017. V. 89. № P. 045001.
23. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S. et al.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // Physical Review E. 2017. V. 96. № P. 042217.

24. *Караваев А.С., Ишбулатов Ю.М., Киселев А.Р., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Миронов С.А., Шварц В.А., Гриднев В.И., Безручко Б.П.* Модель сердечно-сосудистой системы человека с автономным контуром регуляции среднего артериального давления // Физиология человека. 2017. Т. 43. № 1. С. 70–80.
25. *Kashchenko A.A.* Dependence of the dynamics of a model of coupled oscillators on the number of oscillators // Doklady Mathematics. Moscow : Pleiades Publishing, 2021. V. 104. № 3. P. 355–359.
26. *Kashchenko A.A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 93. P. 105488.
27. *Kashchenko S.A.* Corporate Dynamics in Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. V. 61. № 7. P. 1063–1074.
28. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. May. V. 34. P. 123–129.
29. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. V. 5. № P. 380–385.
30. *Kashchenko S.A.* Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative // Differentsialnye Uravneniya. 1989. V. 25. № 8. P. 1448–1451.
31. *Kashchenko S.A.* Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay // Mathematics. 2023. V. 11. № 6. P. 1301.
32. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations, 2nd ed.; New York: Springer, 1977.
33. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations; Wiley: New York, NY, USA, 1965.
34. *Marsden J.E., McCracken M.F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York : Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19).
35. *Kashchenko S.A.* On quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion // Soviet Mathematics. Doklady. 1988. V. 37. № 2. P. 510–513.
36. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1996. V. 6. № 6. P. 1093–1109.
37. *Kashchenko S.A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. № 3. P. 443–451.
38. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30. № 2. С. 189–207.
39. *Kashchenko S.A.* Infinite Turing Bifurcations in Chains of Van der Pol Systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 20. P. 3769.
40. *Kashchenko S.A.* Bifurcations in spatially distributed chains of twodimensional systems of equations // Russian Mathematical Surveys. 2020. V. 76. № 6. P. 1153–1155.
41. *Kashchenko S.A.* Comparative dynamics of chains of coupled van der Pol equations and coupled systems of van der Pol equations // Theoretical and Mathematical Physics. 2021. V. 207. № 2. P. 640–654.
42. *Клиньшов В.В.* Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28. № 5. С. 465–490.
43. *Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A.* Nonstationary structures and diffusion chaos. Moscow : Nauka, 1992. 544 p.
44. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019. V. 22. № P. 407–412.