ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 8, с. 1332–1342

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КЕЛЛОГА ДЛЯ КУСОЧНО-ЛЯПУНОВСКИХ ОБЛАСТЕЙ

А. П. Солдатов[1,2,3,*]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] Московский центр фундаментальной и прикладной математики при МГУ, Москва, Россия

[3] 111250 Москва, Красноказарменная ул., 14, НИУ МЭИ, Россия

*e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.
Переработанный вариант 16.01.2023 г.
Принята к публикации 28.04.2023 г.

В рамках весовых гёльдеровых пространств введены классы гладких дуг и кусочно-гладких контуров, инвариантные относительно отображений степенными функциями. В терминах этих классов по аналогии с классической теоремой Келлога описаны граничные свойства конформных отображений. Библ. 3.

Ключевые слова: конформное отображение, кусочно-ляпуновский контур, радиальная дуга, весовое пространство Гёльдера.

DOI: 10.31857/S0044466923080148, **EDN:** WTNCGU

По определению гладкая дуга на комплексной плоскости принадлежит классу $C^{n,\nu}$, $0 < \nu < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, если она допускает параметризацию из аналогичного класса. Пусть область D ограничена контуром Γ, составленным из дуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \in C^{n,\nu}$, и конечное множество F образовано концами этих дуг. В этом случае говорим, что пара (Γ, F) принадлежит классу $C^{n,\nu}$. Очевидно, F состоит из m точек, к каждой из которых сходятся две дуги. Запись $\Gamma \in C^{n,\nu}$ означает, что контур Γ гладкий, и любая дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ принадлежит классу $C^{n,\nu}$.

Рассмотрим какую-либо каноническую область $\mathbb{D}$, ограниченную гладким контуром класса $C^{n,\nu}$, причем число связных компонент обоих контуров Γ и $\partial\mathbb{D}$ одно и то же. В частности, существует конформное отображение ω области D на $\mathbb{D}$. Если контур $\Gamma \in C^{n,\nu}$, то согласно классической теореме Келлога (см. [1], [2]) функция $\omega \in C^{n,\nu}(\bar{D})$, и аналогичным свойством обладает обратное отображение ω^{-1}. В общем случае, когда $(\Gamma, F) \in C^{n,\nu}$, функция ω принадлежит классу $C^{n,\nu}(\bar{D}_0)$ в любой подобласти $D_0 \subseteq D$, лежащей вне окрестности множества F.

Рассмотрим это конформное отображение в окрестности точек $\tau \in F$. Положим $S_\tau = D \cap \{|z - \tau| < \varrho\}$, где ϱ достаточно мало. Тогда S_τ представляет собой криволинейный сектор с вершиной τ и боковыми сторонами $G_\tau^\pm$. Раствор θ_τ этого сектора предполагаем положительным, так что $0 < \theta_\tau \le 2\pi$. Таким образом, все внутренние углы области D в точках $\tau \in F$ положительны.

Следующий результат хорошо известен (см. [2]) и описывает поведение функции ω в окрестности τ.

Теорема 1. *Пусть* (Γ, F) *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и* $\delta_\tau = \pi/\theta_\tau$, $\tau \in F$. *Тогда*

$$\omega(z) - \omega(\tau) = A_\tau(z)(z - \tau)^{\delta_\tau}, \quad \omega'(z) = B_\tau(z)(z - \tau)^{\delta_\tau - 1}, \tag{1}$$

где $A_\tau, B_\tau \in C^\varepsilon(\bar{S}_\tau)$ *с достаточно малым* $\varepsilon > 0$, *причем* $A_\tau(\tau) \ne 0$, $B_\tau(\tau) \ne 0$.

Аналогичный результат справедлив и для обратного отображения ω^{-1} по отношению к $\delta_\tau = \theta_\tau/\pi$.

Доказательство почти очевидно и основывается на теореме Келлога. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = \omega(\tau) = 0$, и символ τ в обозначениях опущен. Рассмотрим область $\tilde{S} = \{z^\delta,\ z \in S\}$, которая является “криволинейным полукругом”. При этом гдадкая дуга

$$\partial\tilde{S} \cap \{|\zeta| \le \varrho^\delta\}$$

принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$ с некоторым малым ε. Более точно, можно положить $\varepsilon = \min(\nu, \nu/\delta)$. По теореме Келлога функция $\tilde{\omega}(\zeta) = \omega(\zeta^{1/\delta}) \in C^{1,\varepsilon}(\tilde{S}_0)$, где $\tilde{S}_0 = \tilde{S} \cap \{|\zeta| < \varrho_0\}$, $\varrho_0 < \varrho^\delta$. Поэтому остается заметить, что $\omega(z) = \tilde{\omega}(z^\delta)$, $z \in S$.

Основная цель статьи состоит в построении классов гладких дуг, которые были бы инвариантны относительно степенных функций, выпрямляющих контур в окрестности его угловых точек. Использование подобных классов позволило бы в рамках соответствующих весовых пространств описать единообразно коэффициенты A и B в представлениях (2). В основе всех построений лежат весовые гельдеровые пространства $C^{n,\nu}_\lambda$, подробно описанные в [3].

Предварительно введем следующее понятие. Гладкую дугу G с концом τ назовем *радиальной* (по отношению к этому концу), если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(r) = \tau + re^{ih(r)}, \quad 0 \le r \le \varrho, \tag{2}$$

где функция $h(r) \in C[0,\varrho] \cap C^1(0,\varrho]$ и $rh'(r) \to 0$ при $r \to 0$. Эквивалентное определение состоит в том, что каждая окружность радиуса $r \le \varrho$ с центром в τ пересекает эту дугу в единственной точке и при том некасательно.

Нетрудно видеть, что любая разомкнутая гладкая дуга G в некоторой окрестности своего конца τ радиальна.

В самом деле, пусть $\delta(t)$, $0 \le t \le 1$, – некоторая ее гладкая параметризация, причем $\delta(0) = \tau$. Тогда функция $\alpha(t) = |\delta(t) - \delta(0)|$ непрерывно дифференцируема, и $\alpha'(0) = |\delta'(0)|$. Поэтому на отрезке $[0,\varepsilon]$, где $\varepsilon < l$ достаточно мало, функция $r = \alpha(t)$ имеет обратную $t = \beta(r)$, $0 \le r \le \varrho = \alpha(\varepsilon)$, и функция $\gamma(r) = \delta[\beta(r)]$ есть радиальная параметризация соответствующей дуги.

Класс $C^{n,\nu}$ радиальных дуг можно описать в терминах функции $\theta(r)$, фигурирующей в представлении (2).

Лемма 1. *Радиальная дуга* (G,τ) *принадлежит классу* $C^{n,\nu}$ *тогда и только тогда, когда*

$$h(r) \in C^{n-1,\nu}[0,\varrho], \quad rh^{(n)}(r) \in C^\nu[0,\varrho]. \tag{3}$$

Доказательство. Если выполнены условия (3), то функция γ в (2) принадлежит классу $C^{n,\nu}[0,\varrho]$ и, следовательно, дуга $G \in C^{n,\nu}$. Обратно, пусть эта дуга допускает параметризацию $\delta : [0,\varrho] \to G$ класса $C^{n,\nu}[0,\varrho]$ и $\delta(0) = \tau$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = 0$. Функция

$$\delta_0(t) = t^{-1}\delta(t) = \int_0^1 \delta'(tu)du \in C^{n-1,\nu}$$

и всюду отлична от нуля, так что вместе с ней классу $C^{n-1,\nu}$ принадлежат и функции $|\delta_0|^{\pm 1}$. Функция $\alpha(t) = |\delta(t)|$ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0,\varrho]$ на себя с положительной производной

$$\alpha' = \frac{\mathrm{Re}(\delta'\bar{\delta})}{|\delta|} = \frac{\mathrm{Re}(\delta'\overline{\delta_0})}{|\delta_0|},$$

принадлежащей классу $C^{n-1,\nu}$. Поэтому $\alpha \in C^{n,\nu}$, и аналогичным свойством обладает обратное отображение $\beta = \alpha^{-1}$. Но тогда и функция $\delta \circ \beta \in C^{n,\nu}$. Поскольку она также является параметризацией дуги и $|\delta[\beta(r)]| = \alpha[\beta(r)] = r = |\gamma(r)|$, отсюда следует, что $\gamma = \delta \circ \beta$ и, значит, $\gamma \in C^{n,\nu}[0,\varrho]$. Но тогда $r^{-1}\gamma(r) = e^{ih(r)} \in C^{n-1,\nu}[0,\varrho]$, так что и $h(r) \in C^{n-1,\nu}[0,\varrho]$. После n-кратного дифференцирования равенства (2) приходим к справедливости и второго условия в (3).

В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что в теореме 1 боковые стороны $G_\tau^\pm$ криволинейных секторов S_τ радиальны и определяются формулой (2) с соответствующими функциями $h_\tau^\pm(r)$. Зафиксируем τ, опуская символ τ в обозначениях. Рассмотрим функцию $\zeta = \ln(z-\tau)$, которая отображает S на криволинейную полуполосу Q в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta \le \ln\varrho$. В явном виде

$$Q = \{\zeta = \xi + i\eta, | g^-(\xi) < \eta < g^+(\xi), \xi < \ln\varrho\} \tag{4}$$

с функциями $g^\pm(\xi) = h^\pm(e^\xi)$. Очевидно, эти функции имеют конечные пределы $\theta^\pm$ на $-\infty$, причем $(g^\pm)'(\xi) \to 0$ при $\xi \to -\infty$.

Обозначим $C^{n,\nu}(\bar{Q})$, $0 \le \nu \le 1$, $n = 0,1,\ldots$, класс аналитических в Q функций, которые вместе со своими производными до n-го порядка включительно непрерывны и ограничены в замкнутой области $\bar{Q}$ и при $0 < \nu < 1$ $(\nu = 1)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем ν (условию Липшица). Относительно соответствующей нормы это пространство является банаховой алгеброй по умножению.

По определению пространство $C_0^{n,\mu}(\bar{S},\tau)$ состоит из всех функций

$$\phi(z) = \psi[\ln(z-\tau)], \quad \psi \in C^{n,\nu}(\bar{Q}). \tag{5}$$

Оно снабжается перенесенной нормой, относительно которой является банаховой алгеброй. Весовое пространство $C_\lambda^{n,\mu}(\bar{S},\tau)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, состоит из функций

$$\phi(z) = (z-\tau)^\lambda \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C_0^{n,\nu}(\bar{S},\tau). \tag{6}$$

Относительно перенесенной нормы это пространство банахово. Полученное семейство банаховых пространств монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров:

$$C_\lambda^{n,\nu_2} \subseteq C_\lambda^{n,\nu_1}, \quad \nu_1 \le \nu_2 \le 1; \quad C_{\lambda_2}^{n,\nu} \subseteq C_{\lambda_1}^{n,\nu}, \quad \lambda_1 \le \lambda_2; \quad C_\lambda^{n+1,0} \subseteq C_\lambda^{n,1}. \tag{7}$$

В самом деле, первое вложение является следствием аналогичного свойства пространств $C^{n,\nu}$. Второе вложение вытекает из того, что при $\varepsilon > 0$ функция $(z-\tau)^\varepsilon$ принадлежит $C_0^{n,\nu}$. Наконец, третье вложение выводится из аналогичного вложения $C^{n+1,0}(\bar{Q}) \subseteq C^{n,1}(\bar{Q})$. Нетрудно убедиться, что оно справедливо для любой области Q, которая равномерно связна в следующем смысле. Существует такая постоянная $M \ge 1$, что любые две точки $\zeta_1, \zeta_2 \in Q$ можно соединить в этой области гладкой дугой, длина которой не превосходит $M|\zeta_1 - \zeta_2|$. Из описания (4) рассматриваемой криволинейной полуполосы Q легко видеть, что она равномерно линейно связна.

Исходя из пространств $C_\lambda^{0,\nu}$, аналогичные пространства для $n \ge 1$ можно ввести индуктивно по n условиям

$$\phi \in C_\lambda^{n-1,\nu}, \quad \phi' \in C_{\lambda-1}^{n-1,\nu}. \tag{8}$$

Это следует из аналогичного описания пространств $C^{n,\nu}(\bar{Q})$ и того факта, что равенство $\phi(z) = \psi[\ln(z-\tau)]$ влечет $(z-\tau)\phi'(z) = \psi'[\ln(z-\tau)]$.

В свою очередь, пространство $C_0^{0,\nu}$ при $0 < \nu \le 1$ может быть определено независимо как класс всех ограниченных аналитических в S функций $\phi(z)$, для которых $(z-\tau)\phi(z) \in C^{0,\nu}(\overline{S})$. Последнее условие равносильно тому, что функция ϕ удовлетворяет оценке

$$|z_1-\tau|^{\nu}\,|\phi(z_1)-\phi(z_2)| \le C_0\,|z_1-z_2|^{\nu}, \tag{9}$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от $z_1, z_2 \in S$.

Именно подобным образом семейство пространств $C_\lambda^{n,\nu}$ вводилось в [3]. Эквивалентность этих двух подходов обеспечивается теоремой 2.7.2 этой работы.

Отметим связь весовых пространств с преобразованиями области Q на себя.

Лемма 2. *Пусть аналитическая в S функция α осуществляет гомеоморфизм $\overline{S}$ на себя, оставляя точку τ неподвижной, и удовлетворяет двустороннему условию Липшица*

$$C^{-1}|z_1-z_2| \le |\alpha(z_1)-\alpha(z_2)| \le C|z_1-z_2|, \tag{10}$$

где постоянная $C \ge 1$ не зависит от z_1, z_2.

Тогда оператор $\phi \to \phi\circ\alpha$ ограничен в пространстве $C_\lambda^{0,\nu}(\overline{S},\tau)$.

Эта лемма установлена в [3], однако чтобы проиллюстрировать приведенные выше свойства весовых пространств, приведем ее доказательство. Достаточно ограничиться случаем $0 < \nu \le 1$. Функция $\alpha(z)-\tau = \alpha(z)-\alpha(\tau)$ удовлетворяет условию Липшица и обращается в нуль в точке τ, так что она принадлежит $C_1^{0,1}(\overline{S},\tau)$ и, следовательно,

$$a(z) = (z-\tau)^{-1}[\alpha(z)-\tau] \in C_0^{0,1}(\overline{S},\tau).$$

В частности, функция a удовлетворяет оценке (9) с $\nu = 1$. Она показывает, что если область D содержит множество значений этой функции и $f \in C^{0,1}(\overline{D})$, то суперпозиция $f\circ a$ также удовлетворяет этой оценке и, значит, принадлежит $C_0^{0,1}$. В силу (10) область D можно выбрать односвязной вне некоторой окрестности нуля, так что функция $f(\zeta) = \zeta^\lambda$ принадлежит $C^{0,1}(\overline{D})$. Следовательно, функция

$$b(z) = (z-\tau)^{-\lambda}[\alpha(z)-\tau]^\lambda \in C_0^{0,1}(\overline{S},\tau)$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, в соответствии с (6) лемму достаточно установить хотя бы для одного весового порядка λ. Пространство $C_\nu^{0,\nu}(\overline{S},\tau)$ совпадает с подпространством $C^{0,\nu}(\overline{S})$ функций, обращающихся в точке τ в нуль. Но в силу (10) для этого пространства утверждение леммы очевидно.

С каждым целым числом $l \le n$ свяжем модифицированный весовой класс

$$C_{(l)}^{n,\nu}(\overline{S},\tau) = P_l + \bigcup_{0<\varepsilon<1} C_{l+\varepsilon}^{n,\nu}(\overline{S},\tau), \tag{11}$$

где P_l означает класс всех многочленов степени не выше l (так что $P_l = 0$ при $l < 0$). Из определения видно, что

$$C^{l,\nu}(\overline{S}) \subseteq C_{(l)}^{n,\nu}(\overline{S},\tau) \subseteq \bigcup_{0<\varepsilon<1} C^{l,\varepsilon}(\overline{S}), \quad 0 \le l \le n. \tag{12}$$

В частности, класс $C_{(l)}^{n,\nu}(\overline{S},\tau)$ состоит из всех функций $\phi \in C^l(\overline{S})$, для которых

$$\phi(z) - \sum_{k=0}^{l}\frac{\phi^{(k)}(\tau)}{k!}(z-\tau)^k \in C_{l+\varepsilon}^{n,\nu}(\overline{S},\tau)$$

с некоторым малым положительным ε.

Заметим, что класс $C^{n,\nu}_{(l)}$ выдерживает умножение на функции $a \in C^{n,\nu}_{(0)}$, в частности, при $l = 0$ он является алгеброй. В дальнейшем главный интерес представляют случаи $l = 0$ и $l = 1$.

Пространства $C^{n,\nu}_{\lambda}$ и классы $C^{n,\nu}_{(l)}$ совершенно аналогично можно ввести и в случае, когда роль S играет отрезок прямой, а точка τ – один из его концов. При этом условие аналитичности в S заменяется дифференцируемостью на этом интервале. Ясно, что все перечисленные свойства весовых пространств сохраняются без изменений.

По определению гладкая дуга G с концом τ принадлежит классу $C^{n,\nu}_{(1)}$, если она допускает параметризацию $\delta : [0,1] \to G$, $\delta(0) = \tau$, принадлежащую соответствующему пространству $C^{n,\nu}_{(1)}([0,1],0)$. В силу (12) имеем вложение $C^{n,\nu}_{(1)} \subseteq C^{1,\varepsilon}$ с некоторым малым $\varepsilon > 0$, так что дуги этого класса являются ляпуновскими. При этом вне любой окрестности своего конца τ они принадлежат классу $C^{n,\nu}$.

Обратимся к криволинейным секторам S_τ с боковыми сторонами $G^{\pm}_{\tau}$, фигурирующим в теореме 1. По определению пара (Γ, F) принадлежит классу $C^{n,\nu}_{(1)}$, если все дуги $G^{\pm}_{\tau} \in C^{n,\nu}_{(1)}$ и любая дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \backslash F$ принадлежит классу $C^{n,\nu}$.

В принятых обозначениях основной результат статьи, уточняющий теорему 1, можем сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* (Γ, F) *принадлежит классу* $C^{n,\nu}_{(1)}$, $0 < \nu < 1$.

Тогда в представлении (1) *функции*

$$A_\tau(z) \in C^{n,\nu}_{(0)}(\overline{S}_\tau, \tau), \qquad B_\tau(z) \in C^{n-1,\nu}_{(0)}(\overline{S}_\tau, \tau). \tag{13}$$

Аналогичный результат справедлив и для обратного отображения ω^{-1} *по отношению к* $\delta_\tau = \theta_\tau/\pi$.

Заметим, что в действительности достаточно установить первое соотношение в (13). В самом деле, дифференцирование первого представления в (1) дает равенство

$$B_\tau(z) = \delta_\tau A_\tau(z) + A'_\tau(z),$$

согласно которому функция $B_\tau(z) \in C^{n-1,\nu}_{(0)}(\overline{S}_\tau, \tau)$.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько важных свойств класса $C^{n,\nu}_{(l)}$.

Теорема 3. (а) *Условия* $\phi \in C^{n,\nu}_{(l)}(\overline{S}, \tau)$ *и* $\phi' \in C^{n-1,\nu}_{(l-1)}(\overline{S}, \tau)$ *равносильны.*

(б) *Пусть* $\phi \in C^{n,\nu}_{(0)}(\overline{S}, \tau)$, *область* D *содержит значения* $\phi(z)$, $z \in S$, *и функция* $f(\zeta) \in C^{n,1}(\overline{D})$.

Тогда суперпозиция $f \circ \phi \in C^{n,\nu}_{(l)}(\overline{S}, \tau)$.

(в) *Пусть* θ *есть раствор сектора* S *с вершиной* $\tau = 0$, *так что функция* $z \to z^\delta$, *где* $\delta = \pi/\theta$, *переводит* S *на криволинейный сектор* S_0 *раствора* π.

Тогда условия $\phi(z) \in C^{n,\nu}_{(0)}(S_0, 0)$ и $\phi(z^\delta) \in C^{n,\nu}_{(0)}(S, 0)$ равносильны.

Доказательство. (а) В одну сторону утверждение следует непосредственно из определения (11). Обратно, пусть $\phi' \in C^{n-1,\nu}_{(l-1)}(\overline{S}, \tau)$, так что для некоторого многочлена $p_1(z) \in P_{l-1}$ функция $\phi'(z) - p_1(z) \in C^{n-1,\nu}_{l-1+\varepsilon}$ с некоторым малым $\varepsilon > 0$. Заменяя ϕ на $\phi - p$, где $p' = p_1$, можем считать, что

$$\phi'(z) \in C^{n-1,\nu}_{l-1+\varepsilon}. \tag{14}$$

Остается показать, что тогда с точностью до постоянного слагаемого функция $\phi \in C^{n,\nu}_{l+\varepsilon}$. Не ограничивая общности, можно считать $\tau = 0$.

Из (14), в частности, следует оценка

$$|\phi'(z)| \le C|z|^{\lambda-1}, \quad \lambda = l + \varepsilon. \tag{15}$$

Поскольку $0 < \varepsilon < 1$, число λ здесь отлично от нуля. Зафиксируем точку $z_0 \in S$ и рассмотрим функцию $\phi_0(\zeta) = \phi(|z_0|\zeta)$ в области D_0, представляющей пересечения сектора $\{\zeta, |z_0|\zeta \in S\}$ с кольцом $\{1/2 < |\zeta| < 1\}$. В полярной системе координат $\zeta = re^{i\theta}$ она описывается неравенством

$$h_0^-(r) < \theta < h_0^+(r), \quad 1/2 < r < 1,$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями $h_0^{\pm}(r) = h^{\pm}(|z_0|r)$. Эти функции равномерно ограничены по $|z_0|$ в пространстве $C^1[1/2,1]$ и стремятся к постоянным функциям $\theta^{\pm}$ по норме этого пространства. Поэтому область D_0 равномерно линейно связна, причем соответствующая постоянная $M \ge 1$ не зависит от z_0.

В силу (15) производная функции $\phi_0(\zeta)$в области D_0 допускает оценку

$$|\phi_0'(\zeta)| = |z_0||\phi'(|z_0|\zeta)| \le C|z_0|^{\lambda}\max(1, 2^{1-\lambda}).$$

В силу равномерной линейной связности области D_0 отсюда

$$|\phi_0(\zeta_1) - \phi_0(\zeta_2)| \le C_0|z_0|^{\lambda}|\zeta_1 - \zeta_2|, \quad \zeta_j \in D_0,$$

где здесь и ниже $C_0, C_1, \ldots$ означают положительные постоянные, зависящие только от C, λ и M. Пусть точка $z_1 \in S$ выбрана по условию $|z_1| = |z_0|/2$. Тогда $z_j = |z_0|\zeta_j$ с $\zeta_j \in D_0$ и предыдущая оценка переходит в

$$|\phi(z_1) - \phi(z_0)| \le C_1|z_0|^{\lambda}. \tag{16}$$

Далее рассмотрим случаи $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ отдельно. В первом случае рассмотрим последовательность точек z_0, z_1, … области S, выбранную по условию $|z_{k+1}| = |z_k|/2$, которая, очевидно, сходится к нулю. В силу (16) отсюда

$$|\phi(z_{k+s}) - \phi(z_k)| \le C_1(|z_k|^{\lambda} + \cdots + |z_{k+s-1}|^{\lambda}) \le \frac{C_1 M}{1 - 2^{-\lambda}}|z_k|^{\lambda},$$

так что существует предел $c = \lim \phi(z_k)$ при $k \to \infty$. Полагая $k = 0$ и переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to \infty$, приходим к оценке

$$|\phi(z_0) - c| \le C_2|z_0|^{\lambda}.$$

Вместе с (14) она означает, в частности, что функция $\phi(z) - c$ принадлежит классу $C_{\lambda}^{1,0}(\overline{S}, \tau)$, так что с учетом (7) она принадлежит и пространству $C_{\lambda}^{0,\nu}(\overline{S}, \tau)$. Совместно с (14) отсюда следует, что $\phi(z) - c \in C_{\lambda}^{n,\nu}(\overline{S}, \tau)$. Тем самым рассматриваемое утверждение теоремы для случая $\lambda > 0$ установлено.

Пусть $\lambda < 0$. Выберем последовательность точек $z_0, z_{-1}, \ldots, z_{-m} \in S$, удовлетворяющих условию $|z_{-k-1}| = 2|z_{-k}|$, где натуральное m определяется из условия $|z_{-m}| \le \varrho$, но $|z_{-m-1}| > \varrho$. Тогда рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к оценке

$$|\phi(z_0)| \le C_2|z_0|^{\lambda} + \sup_{\rho/2 < |z| < \varrho}|\phi(z)|.$$

Как и выше, из нее совместно с (14) следует, что $\phi \in C_{\lambda}^{n,\nu}$ и в этом случае.

(б) Рассмотрим сначала случай $n = 0$, предполагая для простоты $\tau = 0$. Пусть $\phi \in C_{(0)}^{0,\nu}$, так что для некоторой постоянной $c \in \mathbb{C}$ имеем представление

$$\phi(z) = c + z^{\varepsilon}\phi_0(z), \quad \phi_0 \in C_0^{0,\nu}, \tag{17}$$

с некоторым малым $\varepsilon > 0$.

Нетрудно видеть, что тогда ϕ удовлетворяет аналогичной (9) оценке

$$|z_1|^{\nu-\varepsilon}|\phi(z_1)-\phi(z_2)| \le C|z_1-z_2|^{\nu}, \tag{18}$$

справедливой для любых точек $z_1, z_2 \in S$, подчиненных условию $|z_1| \le |z_2|$.

В самом деле, величина $|z_1|^{\nu-\varepsilon}|\phi(z_1)-\phi(z_2)|$ не превосходит

$$|z_1|^{\nu}|\phi_0(z_1)-\phi_0(z_2)| + |z_1|^{\nu-\varepsilon}\left|z_1^{\varepsilon}-z_2^{\varepsilon}\right||\phi_0(z_2)| \le C|z_1-z_2|^{\nu}$$

с постоянной

$$C = C_0 + \sup_{|\zeta|\ge 1}\frac{\left|1-\zeta^{\varepsilon}\right|}{|1-\zeta|^{\nu}}\sup_{z\in S}|\phi_0(z)|,$$

где C_0 фигурирует в (9) для ϕ_0.

Убедимся, что верно и обратное: из оценки (18) следует представление (17). Как и при доказательстве (а), зафиксируем точку $z_0 \in S$ и рассмотрим последовательность $z_0, z_1, \ldots$ точек S, выбранных по условию $|z_{k+1}| = |z_k|/2$. Тогда на основании (18) имеем неравенства

$$|\phi(z_k)-\phi(z_{k+1})| \le C|z_{k+1}|^{\varepsilon}\left|1-z_{k+1}^{-1}z_k\right|^{\nu} \le C_0|z_k|^{\varepsilon}.$$

Как и при доказательстве (а), отсюда заключаем, что существует предел $c = \lim\phi(z_k)$ при $k \to \infty$, и справедлива оценка

$$|\phi(z_0)-c| \le C_1|z_0|^{\varepsilon}. \tag{19}$$

В частности, с помощью равенства (17) можем ввести функцию $\phi_0(z)$, по модулю не превосходящую C_1. Остается убедиться, что для нее справедлива оценка (9). Считая для определенности $|z_1| \le |z_2|$, рассмотрим величину $|z_1|^{\nu}|\phi_0(z_1)-\phi_0(z_2)|$. Очевидно, она не превосходит выражения

$$|z_1|^{\nu-\varepsilon}|\phi(z_1)-\phi(z_2)| + C_1|z_1|^{\nu}|z_2|^{\varepsilon}\left|z_1^{-\varepsilon}-z_2^{-\varepsilon}\right| \le C_0|z_1-z_2|^{\nu}$$

с постоянной

$$C_0 = C + C_1\sup_{|\zeta|\le 1}\frac{|\zeta|^{\nu}\left|1-\zeta^{-\varepsilon}\right|}{|1-\zeta|^{\nu}},$$

где C_1 фигурирует в (19).

Рассмотрим теперь функцию f, удовлетворяющую условию Липшица $|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)| \le L|\zeta_1-\zeta_2|$ на множестве значений функции ϕ. В силу (18) функция $f[\phi(z)]$ также удовлетворяет аналогичной оценке с постоянной LC, так что она принадлежит классу $C_{(0)}^{0,\nu}$, тем самым для $n = 0$ утверждение теоремы установлено.

В общем случае воспользуемся индукцией по n, т.е. пусть утверждение справедливо для класса $C_{(0)}^{n-1,\nu}$ и $\phi \in C_{(0)}^{n,\nu}$. По предположению индукции в равенстве $(f\circ\phi)' = (f'\circ\phi)\phi'$ множитель $f'\circ\phi$ принадлежит $C_{(0)}^{n-1,\nu}$, а функция $\phi' \in C_{(-1)}^{n-1,\nu}$. Поэтому и $(f\circ\phi)' \in C_{(-1)}^{n-1,\nu}$, так что на основании (а) функция $f\circ\phi \in C_{(0)}^{n,\nu}$.

(в) Подстановка $\zeta = \ln z$ преобразование $z \to z^{\delta}$ переводит в $\zeta \to \delta\zeta$. Поэтому по определению (5) оператор $\phi(z) \to \phi(z^{\delta})$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C_0^{n,\nu}(D_0,0) \to C_0^{n,\nu}(D,0)$ и, следовательно, $C_{\lambda}^{n,\nu}(D_0,0) \to C_{\delta\lambda}^{n,\nu}(D,0)$. В соответствии с определением (11) класса $C_{(0)}^{n,\nu}$ отсюда утверждение теоремы получается непосредственно.

Теорема 3 позволяет получить аналог леммы 1 для дуг класса $C_{(1)}^{n,\nu}$.

Лемма 3. *Радиальная дуга* (G,τ) *принадлежит классу* $C^{n,\nu}_{(1)}$ *тогда и только тогда, когда*

$$h(r) \in C^{n,\nu}_{(0)}([0,\varrho],0). \tag{20}$$

В частности, преобразование $z \to z^{\delta}$ не выводит из класса $C^{n,\nu}_{(1)}$ радиальных дуг с концом $\tau = 0$.

Доказательство осуществляется по той же схеме, что и лемма 1. Пусть выполнено условие (20), тогда на основании теоремы 3(б) функция $e^{ih(r)} \in C^{n,\nu}_{(0)}$, так что и производная

$$\gamma'(r) = [1 + irh'(r)]e^{h(r)} \in C^{n-1,\nu}_{(0)}.$$

Поэтому в силу теоремы 3(а) параметризация $\gamma \in C^{n,\nu}_{(1)}$.

Обратно, пусть эта дуга допускает параметризацию $\delta : [0,\varrho] \to G$ класса $C^{n,\nu}_{(1)}([0,\varrho],0)$ и $\delta(0) = \tau$. Не ограничивая общности можно считать, что $\tau = 0$. Функция $\delta_0(t) = t^{-1}\delta(t)$ принадлежит $C^{n,\nu}_{(0)}$ и всюду отлична от нуля, так что на основании теоремы 3(б) и функции $|\delta_0|^{\pm 1} \in C^{n,\nu}_{(0)}$. Функция $\alpha(t) = |\delta(t)|$ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0,\varrho]$ на себя с положительной производной

$$\alpha' = \frac{\operatorname{Re}(\delta'\,\overline{\delta})}{|\delta|} = \frac{\operatorname{Re}(\delta'\,\overline{\delta_0})}{|\delta_0|},$$

которая на основании теоремы 3(б) принадлежит классу $C^{n-1,\nu}_{(0)}$. Поэтому $\alpha \in C^{n,\nu}_{(1)}$.

Утверждается, что аналогичным свойством обладает и обратное отображение $\beta = \alpha^{-1}$. В самом деле, функция β удовлетворяет двустороннему условию Липшица, фигурирующему в лемме 2, поэтому на основании этой леммы функция $\alpha' \circ \beta \in C^{0,\nu}_{(0)}$ и, значит, $\beta' = (\alpha' \circ \beta)^{-1}$ принадлежит этому же классу. Тогда $\beta \in C^{1,\nu}_{(1)}$, поскольку при $n \ge 2$ функция $\alpha' \in C^{1,\nu}_{(0)}$, отсюда и суперпозиция $\alpha' \circ \beta$, а вместе с ней и функция β' принадлежат классу $C^{1,\nu}_{(0)}$. При $n \ge 3$ аналогично убеждаемся, что $\beta' \in C^{1,\nu}_{(0)}$. В результате после конечного числа шагов придем ко включениям $\beta' \in C^{n-1,\nu}_{(0)}$ и $\beta \in C^{n,\nu}_{(1)}$.

Но тогда и функция $\delta \circ \beta \in C^{n,\nu}_{(1)}$. Поскольку она также является параметризацией дуги и $|\delta[\beta(r)]| = \alpha[\beta(r)]| = r = |\gamma(r)$, отсюда следует, что $\gamma = \delta \circ \beta$ и, значит, $\gamma \in C^{n,\nu}_{(1)}([0,\varrho],0)$. Но тогда $r^{-1}\gamma(r) = e^{ih(r)} \in C^{n,\nu}_{(0)}([0,\varrho],0)$, так что на основании теоремы 3(б) и $h(r) \in C^{n,\nu}_{(0)}([0,\varrho],0)$.

Что касается последнего утверждения леммы, то заметим, что образ G_0 радиальной дуги G с концом $\tau = 0$ при преобразовании $z \to z^{\delta}$ является радиальной дугой, которая описывается аналогично (2) по отношению к функции $h_0(r) = \delta h(r^{1/\delta})$. Поэтому, как отмечено при доказательстве теоремы 3(в), она принадлежит классу $C^{n,\nu}_{(0)}$ вместе с h.

При $n = 0$ весовые пространства $C^{0,\nu}_{\lambda}$ можно вводить и на дугах G с концом τ, согласно лемме 3 гладкая параметризация $\delta : [0,1] \to G$, $\delta(0) = \tau$, осуществляет изоморфизм $C^{0,\nu}_{\lambda}(G,\tau) \to$ $\to C^{0,\nu}_{\lambda}([0,1],0)$. При $n \ge 1$ на дугах G класса $C^{n,\nu}_{1}$ пространство $C^{n,\nu}_{\lambda}(G,\tau)$ естественно вводить с помощью параметризации δ того же класса условием $\varphi \circ \delta \in C^{n,\nu}_{\lambda}([0,1],0)$. Из доказательства леммы 3 видно, что так определенный класс не зависит от выбора параметризации. Аналогично понимаются и классы $C^{n,\nu}_{(l)}(G,\tau)$.

Если кусочно-гладкий контур Γ, ограничивающий область D, имеет единственную угловую точку, т.е. $F = \{\tau\}$, то совершенно аналогично криволинейным секторам определяются пространства $C^{n,\nu}_{\lambda}(\overline{D},\tau)$ и классы $C^{n,\nu}_{(1)}(\overline{D},\tau)$ с сохранением всех описанных выше их свойств. В случае $(\Gamma,\tau) \in C^{n,\nu}_{(1)}$ эти пространства и классы можно рассматривать и на контуре Γ.

Рассмотрим связь классов $C^{n,\nu}_{(l)}$ с интегралами типа Коши на единичной окружности.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbb{D}$ *есть единичный круг с границей* $\mathbb{T}$, *ориентированной против часовой стрелки, и точка* $\tau \in \mathbb{T}$. *Пусть функция* $\varphi \in C^{n,\nu}_{(l)}(\mathbb{T},\tau)$, $-1 \le l \le n$.

Тогда функция

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t)dt}{t - z}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{21}$$

принадлежит $C^{n,\nu}_{(l)}(\overline{\mathbb{D}},\tau)$.

Доказательство проведем сначала для случая $n = 0$, когда l принимает одно из значений $0,-1$. Пусть сначала $l = -1$, тогда $\varphi \in C^{0,\nu}_{\varepsilon-1}(\mathbb{T},\tau)$. Как установлено в [3], в этом случае интеграл (21) определяет ограниченный оператор $C^{0,\nu}_{\varepsilon-1}(\mathbb{T},\tau) \to C^{0,\nu}_{\varepsilon-1}(\overline{\mathbb{D}},\tau)$.

Пусть далее $l = n = 0$. Тогда $\varphi_0 = \varphi - c \in C^{0,\nu}_{\varepsilon}(\mathbb{T},\tau)$. Из очевидного тождества

$$\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \tau} = \frac{z - \tau}{(t - \tau)(t - z)}$$

следует, что $\phi(z) = c + c_0 + \phi_0$, где положено

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - \tau}, \quad \phi_0(z) = \frac{z - \tau}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_0(t)dt}{(t - \tau)(t - z)}.$$

Поскольку $(t - \tau)^{-1}\varphi_0(t) \in C^{0,\nu}_{\varepsilon-1}(\mathbb{T},\tau)$, из тех же соображений утверждение леммы справедливо и в этом случае.

Пусть далее $n \ge 1$. Условимся производную φ' на $\mathbb{T}$ понимать по отношению к комплексному параметру, т.е.

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{T}.$$

Тогда, дифференцируя равенство (21) и интегрируя по частям, получим аналогичное выражение

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi'(t)dt}{t - z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

для производной функции ϕ. Поэтому на основании теоремы 2(a) дело сводится к случаю, когда n и l уменьшены на единицу. Повторяя этот процесс, придем к двум случаям, когда либо $l = n = 0$, либо $l = -1$, $n \ge 0$.

Первый случай, а также случай $l = -1$, $n = 0$ разобраны выше. Пусть $l = -1$ и $n \ge 1$, так что $\varphi \in C^{n,\nu}_{\varepsilon-1}$. Вводя обозначение $\mathcal{D}\phi = (z - \tau)\phi'(z)$ для весовой производной, индуктивное определение (8) весового пространства $C^{n,\nu}_{\varepsilon-1}$ можем записать в форме $\phi,\mathcal{D}\phi \in C^{n-1,\nu}_{\varepsilon-1}$ или, что равносильно, в форме

$$\mathcal{D}^k\phi \in C^{0,\nu}_{\varepsilon-1}, \quad 0 \le k \le n. \tag{22}$$

Воспользуемся тождеством

$$(z - \tau)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{t - z}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t - \tau}{t - z}\right).$$

Как и выше, из него с помощью интегрирования по частям приходим к равенству

$$(\mathcal{D}\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{(\mathcal{D}\varphi)(t)dt}{t - z}.$$

Повторяя эту процедуру, в соответствии с (22) отсюда приходим к справедливости леммы и в рассматриваемом случае.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2 в общем случае, рассмотрим отдельно ситуацию, когда область D ограничена простым гладким контуром Γ, множество F состоит из одной точки τ, и $\mathbb{D}$ является единичным кругом.

Теорема 4. *Пусть контур* Γ *гладкий и* $(\Gamma,\tau) \in C^{n,\nu}_{(1)}$, $0 < \nu < 1$.

Тогда конформное отображение $\omega : D \to \mathbb{D}$, $\omega(\tau) = 1$, *принадлежит* $C^{n,\nu}_{(1)}(\bar{D},\tau)$ *и, соответственно, обратное отображение* $\sigma = \omega^{-1} \in C^{n,\nu}_{(1)}(\bar{\mathbb{D}},1)$.

Доказательство достаточно провести для σ, тогда принадлежность ω классу $C^{n,\nu}_{(1)}(\bar{D},\tau)$ устанавливается совершенно аналогично лемме 3.

Действительно, пусть $\sigma \in C^{n,\nu}_{(1)}(\bar{\mathbb{D}},1)$, так что по теореме 3(б) функция

$$(\sigma')^{-1} \in C^{n-1,\nu}_{(0)}(\bar{\mathbb{D}},1). \tag{23}$$

Воспользуемся равенством

$$\omega' = (\sigma')^{-1} \circ \omega. \tag{24}$$

По теореме Келлога функция ω удовлетворяет двустороннему условию Гёльдера, и можно воспользоваться леммой 2, согласно которой $\omega' \in C^{0,\nu}_{(0)}(\bar{D},\tau)$ и, значит, $\omega \in C^{1,\nu}_{(1)}(\bar{D},\tau)$. При $n \ge 2$ в силу (23) обе функции в правой части (24) принадлежат классу $C^{1,\nu}_{(1)}(\bar{D},\tau)$. Поэтому их композиция $\omega' \in C^{1,\nu}_{(0)}(\bar{D},\tau)$ и, значит, $\omega \in C^{2,\nu}_{(1)}(\bar{D},\tau)$. Повторяя эту процедуру, после конечного числа шагов получим $\omega \in C^{n,\nu}_{(1)}(\bar{D},\tau)$.

Итак, достаточно доказать, что $\sigma \in C^{n,\nu}_{(1)}(\bar{\mathbb{D}},1)$. Пусть $e(t)$ означает единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t, направление которого совпадает с обходом контура против часовой стрелки. Тогда в силу леммы 3 функция

$$e(t) \in C^{n,\nu}_{(0)}(\Gamma,\tau). \tag{25}$$

По отношению к единичной окружности $\mathbb{T}$ аналогичный вектор $e(t) = it$. Известно (см. [1]), что аргумент производной σ' на граничной окружности $|t| = 1$ единичного круга $\mathbb{D}$ дается равенством

$$\arg\sigma'(t) = \arg e[\sigma(t)] - \arg t - \pi/2, \quad |t| = 1. \tag{26}$$

Поскольку σ удовлетворяет двустороннему условию Липшица, в силу леммы 2 из этого равенства следует, что $\arg\sigma' \in C^{0,\nu}_{(0)}$. В единичном круге функция $-i\ln\sigma'$, реальная часть которой на границе совпадает с $\arg\sigma'$, восстанавливается по формуле Шварца

$$-i\ln\sigma'(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{\arg\sigma'(t)dt}{t - z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Поэтому на основании леммы 4 и теоремы 3 функция $\sigma \in C^{1,\nu}_{(1)}$. Но тогда при $n \ge 2$ из (26) следует, что $\arg\sigma' \in \sigma \in C^{1,\nu}_{(0)}$, так что из тех же соображений $\sigma \in C^{1,\nu}_{(1)}$. Повторяя эту процедуру, после конечного числа шагов получим $\sigma \in C^{n,\nu}_{(1)}$.

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1, не ограничивая общности, можно считать, что область D ограничена простым контуром с одной угловой точкой $\tau = 0$, т.е. $(\Gamma,\tau) \in C^{n,\nu}_{(1)}$. Соответственно в качестве области $\mathbb{D}$ можно выбрать единичный круг. Можно также считать, что функция $\zeta = z^{\delta}$, где $\delta = \pi/\theta_0$, однолистна в области D и отображает ее на область D_0, ограниченную гладким контуром Γ_0. В силу леммы 3 этот контур также принадлежит классу $C^{n,\nu}_{(1)}$.

Запишем $\omega(z) = \omega_0(z^\delta)$, где ω_0 означает конформное отображение $D_0 \to \mathbb{D}$. В силу теоремы 4 имеем

$$\omega_0(z) = zA_0(z), \quad A_0 \in C^{n,\nu}_{(0)}(\mathbb{D},0); \quad \omega_0'(z) = B_0(z), \quad B_0 \in C^{n-1,\nu}_{(0)}(\mathbb{D},0).$$

Следовательно, $\omega(z) = z^\delta A_0(z^\delta)$, $\omega'(z) = \delta z^{\delta-1}B_0(z^\delta)$, так что на основании теоремы 3(в) отсюда приходим к справедливости теоремы с

$$A(z) = A_0(z^\delta) \in C^{n,\nu}_{(0)}(D,0), \quad B(z) = \delta z^{\delta-1}B_0(z^\delta) \in C^{n-1,\nu}_{(0)}(D,0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
2. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд., М.: Наука, 1988.
3. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современ. математика. Фундамент. направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.