

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.642

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ ЭНТРОПИЙНЫХ
РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА© 2023 г. О. В. Ильин^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: oilyin@gmail.com

Поступила в редакцию 02.09.2022 г.
Переработанный вариант 20.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Устойчивость решеточных уравнений Больцмана регулируется параметром, отвечающим за время релаксации неравновесной системы, который, в свою очередь, влияет на вязкость исследуемого течения. В энтропийном подходе время релаксации вычисляется из уравнения баланса энтропии таким образом, чтобы энтропия в каждый момент времени и в каждой пространственной точке не убывала. В настоящей статье рассматривается метод решения уравнения баланса энтропии на основе модифицированного метода секущих. Показано, что данный подход имеет хорошую точность. В качестве приложения предлагаемого метода рассмотрены численные решения задачи о двумерном двойном сдвиге. Проведено сравнение результатов расчетов с другими энтропийными методами.

Ключевые слова: решеточные уравнения Больцмана, энтропия, уравнения вязкой жидкости.

DOI: 10.31857/S0044466923060108, **EDN:** UYPUHC

1. ВВЕДЕНИЕ

Решеточные уравнения Больцмана (РУБ) являются дискретизацией по пространственным и временным переменным кинетического уравнения Бхатнагара-Гросса-Крука [1]. Внедрение моделей РУБ для численных расчетов достаточно просто и состоит из двух шагов, локального по пространственным переменным шага столкновений частиц и последующего шага распространения частиц (адвекции) в соседние узлы. Основной проблемой стандартного способа численного решения РУБ является его относительно невысокая устойчивость при моделировании течений с большими числами Рейнольдса.

Одним из возможных подходов улучшения устойчивости моделей РУБ является энтропийный метод. Энтропийный подход состоит из двух частей [2], [3]: состояния равновесия, минимизирующего H -функцию (или максимизирующего энтропию), и времени релаксации, которое не является постоянным и подбирается так, чтобы выполнялось неравенство баланса энтропии в каждый момент времени и каждой пространственной точке (т.е. энтропия системы не убывает). Отметим, что в отличие от дискретных моделей уравнения Больцмана, для которых состояние равновесия максимизирует энтропию [4–6], стандартная форма состояния равновесия для РУБ в виде полиномиальной функции от потоковой скорости имеет существенный недостаток, а именно, H -теорема для таких состояний равновесия в общем случае не выполняется [7], [8]. Отметим, что задача построения энтропийных состояний равновесия является достаточно сложной [9–12]. Время релаксации (определяется в энтропийном методе РУБ параметром α) находится из уравнения баланса энтропии, которое может быть решено численно путем применения методов Ньютона-Рафсона, бисекции [13–15] или в виде комбинации метода Ньютона-Рафсона и аналитических оценок [16]. В существенно энтропийном (essentially entropic) подходе решение уравнения баланса энтропии, которое переформулировано в виде неравенства, было получено в аналитической форме с использованием Паде аппроксимации для логарифмов, входящих в формулу энтропии [17]. Важно подчеркнуть, что данный метод дает решения для α , которые имеют маленькие отклонения от стандартного значения ($\alpha = 2$). Данное свойство важно при решении прикладных задач, так как вязкость течения линейно зависит от α и отклонение α от 2 приводит к изменению вязкости и диссипативных свойств моделируемого течения. Энтропийный подход Чжао и Юна основан на геометрических соображениях [18] (алгоритм секущих), для α получа-

ются выражения в замкнутой форме. Также недавно было проведено сравнение разных энтропийных методов для РУБ [19]. Отметим, что в силу того, что параметр α в энтропийном методе имеет достаточно сложную форму, то анализ линейной устойчивости, применяющийся для стандартных РУБ [22–29], затруднен.

В настоящей работе предложена модификация метода секущих энтропийного подхода РУБ. В новом подходе отдельно рассматриваются два случая $\alpha < 2$ и $\alpha > 2$. В первом случае требуется увеличить вязкость течения для поддержания устойчивости, секущая строится по точкам $\alpha = \underline{\alpha}$, где $\underline{\alpha}$ есть нижняя граница оценки α , и $\alpha = 2$, при этом решение α лежит внутри интервала $[\underline{\alpha}, 2]$; во втором случае секущая строится по точкам $\alpha = 2$ и $\alpha = \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ есть верхняя граница оценки α . Данный подход позволяет получать усредненные значения α , близкие к 2, и тем самым внести минимальные искажения в диссипативные свойства гидродинамической системы. Предложенный подход тестировался для задачи о течении в двойном сдвиговом слое. Показано, что метод дает хорошую точность при сравнении с эталонными решениями.

2. ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

В энтропийном подходе решеточные уравнения Больцмана записываются следующим образом:

$$f_i(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t) = f_i(t, \mathbf{x}) + \alpha \beta (f_i^{eq}(t, \mathbf{x}) - f_i(t, \mathbf{x})), \quad (1)$$

где f_i есть дискретная функция распределения, отвечающая частицам, движущимся со скоростями $\mathbf{c}_i$, $i = 1 \dots N$, N — количество дискретных скоростей, f_i^{eq} функция распределения локального равновесия, t , $\mathbf{x}$ есть время и пространственные координаты, Δt есть шаг по времени. Переменная $0 < \beta < 1$ вычисляется следующим образом:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\left(\tau + \frac{1}{2} \Delta t \right)},$$

где τ — время релаксации. В стандартном методе РУБ $\alpha = 2$, а также вязкость вычисляется как $\nu = c_s^2 \tau$, c_s — постоянная величина (скорость звука). В энтропийном методе переменная α непостоянна и зависит от координат и времени, также $\nu = (2/\alpha) c_s^2 \tau$; α есть решение уравнения

$$H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})] \leq H[\mathbf{f}], \quad (2)$$

где $H[\mathbf{f}]$ — некоторая выпуклая функция (H -функция, или энтропия, взятая со знаком минус), $\alpha > 1$ [17], кроме того используются следующие обозначения $\mathbf{f} = \{f_i, i = 1 \dots N\}$, $\mathbf{f}^{eq} = \{f_i^{eq}, i = 1 \dots N\}$. Если α удовлетворяет неравенству (2), то выполняется H -теорема в рассматриваемых дискретных пространственных и временных переменных

$$\begin{aligned} H[\mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t)] &= H[\mathbf{f} + \alpha \beta (\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})] = H[(1 - \beta) \mathbf{f} + \beta (\mathbf{f} + \alpha (\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f}))] \leq \\ &\leq (1 - \beta) H[\mathbf{f}] + \beta H[\mathbf{f} + \alpha (\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})] \leq (1 - \beta) H[\mathbf{f}] + \beta H[\mathbf{f}] = H[\mathbf{f}], \end{aligned}$$

отметим, что явная форма функции $H[\mathbf{f}]$ не требуется, используются только свойство выпуклости и неравенство (2). Далее рассматривается только больцмановская форма H -функции

$$H[\mathbf{f}] = \sum_{i=1}^N f_i \log \left(\frac{f_i}{w_i} \right), \quad (3)$$

где $w_i > 0$ — веса решетки (дискретные аналоги абсолютного максвелловского распределения). Функции локального равновесия (локальное максвелловское равновесие) в энтропийном подходе находятся как условные экстремумы $H[\mathbf{f}]$ при условии постоянства плотности и импульса (отметим, что энергия может не сохраняться для РУБ, предназначенных для описания изотермических течений). Отметим, что локальное максвелловское равновесие есть неполиномиаль-

ная функция от потоковой скорости, но не обязательно экспоненциальная, для одномерной трехскоростной модели РУБ ($D1Q3$) локальное максвелловское равновесие имеет вид [20]

$$f_{\pm 1}^{eq} = \frac{1}{3}\rho \left(\pm \frac{uc \mp c_s^2}{2c_s^2} + \sqrt{1 + \frac{u^2}{c_s^2}} \right), \quad (4)$$

$$f_0^{eq} = \frac{2}{3}\rho \left(2 - \sqrt{1 + \frac{u^2}{c_s^2}} \right), \quad (5)$$

где $f_{\pm 1}^{eq}$, f_0^{eq} соответствуют дискретным скоростям $\pm c$, 0, кроме того ρ , u — плотность и потоковая скорость, а также $c_s = c/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$, в данной работе считаем $c = 1$. Состояние равновесия в двумерном случае (по пространственным переменным) получается как произведение одномерных функций распределения, соответствующая модель РУБ имеет девять скоростей [1] ($D2Q9$).

Изменения переменной α определяют изменения вязкости течения, в случае если решение $\alpha > 1$ неравенства (2) меньше 2, то вязкость увеличена в сравнении со стандартным значением, если допускаются решения $\alpha > 2$, то для таких α вязкость меньше стандартного значения. Очевидно, что следует искать такие решения неравенства (2), которые наиболее близко лежат к 2.

Так как функция $H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f})]$ неубывающая по α , то очевидно, что если в некотором узле решение (2) такое, что $\alpha > 2$, то и $\alpha = 2$ является решением. В данном узле выполняется H -теорема и неустойчивость не развивается. То есть нет необходимости изменять вязкость относительно стандартного значения и можно в рассматриваемом узле считать, что $\alpha = 2$. Такой подход используется в методе секущих [18]. С другой стороны, в этом случае среднее значение $\alpha \leq 2$, это означает, что течение будет более диссипативным, чем требуется. Поэтому в некоторых других методах (таких как существенно энтропийный [17]) допускаются решения $\alpha > 2$. При этом в силу того, что отклонения от $\alpha = 2$ в разных точках мало и среднее α в моделируемой пространственной области будет близко к 2, то диссипативные свойства течения мало искажены.

Также удобно будет ввести следующие обозначения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i^N a_i b_i,$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — два вектора с компонентами $a_i, b_i, i = 1 \dots N$, макроскопические величины (плотность ρ и импульс $\rho \mathbf{u}$) записываются следующим образом:

$$(\mathbf{f}, 1) = \rho, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{c}_\gamma) = \rho \mathbf{u}_\gamma,$$

где γ обозначает пространственные координаты x, y, z . Имеем выражение для H -функции в виде

$$H[\mathbf{f}] = (\mathbf{f}, \log(\mathbf{f}/\mathbf{w})).$$

где $\mathbf{w} = \{w_i, i = 1 \dots N\}$.

3. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПАРАМЕТРА α

Для построения секущих необходимо определить точки, которые секущие пересекают. Для случая $\alpha \leq 2$ такими точками являются $\underline{\alpha} \leq 2$ и 2, где $\underline{\alpha}$ есть нижняя граница оценки α ; в случае $\alpha \geq 2$ берутся точки 2 и $\bar{\alpha} \geq 2$, где $\bar{\alpha}$ есть верхняя граница оценки α .

Для энтропии в больцмановской форме (3) неравенство (2) может быть записано в следующем виде (см. [17]):

$$(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x})) \leq \alpha (\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x})), \quad (6)$$

где $\mathbf{x}$ отвечает за отклонение от локального равновесия

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f}}{\mathbf{f}}$$

и имеет компоненты $x_i = (f_i^{eq} - f_i)/f_i$.

Дополнительно будет удобно ввести следующие обозначения:

$$(a, b)_+ = \sum_{i: x_i \geq 0} a_i b_i, \quad (a, b)_- = \sum_{i: x_i < 0} a_i b_i,$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ имеют компоненты $a_i, b_i, i = 1 \dots N$.

Имеем тогда для левой части (2) следующую запись:

$$(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x})) = (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_+ + (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_-,$$

теперь воспользуемся следующими неравенствами для логарифмов [21]:

$$\log(1 + z) < \frac{z(2 + z)}{2(1 + z)}, \quad z > 0,$$

$$\log(1 + z) \leq \sum_{l=1}^M (-1)^{(l+1)} \frac{z^l}{l}, \quad -1 < z \leq 0,$$

где $M = 1, 2, \dots$, в данной работе рассмотрим случай $M = 3$. С использованием неравенств для логарифмов получаем

$$\begin{aligned} & (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_+ + (\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x}))_- \leq \left(\mathbf{f}, \frac{1}{2} \alpha \mathbf{x} (2 + \alpha \mathbf{x}) \right)_+ + \\ & + \left(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \left(\alpha \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\alpha \mathbf{x})^2 + \frac{1}{3} (\alpha \mathbf{x})^3 \right) \right)_- \leq \frac{\alpha^2}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{\alpha^3}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{\alpha^4}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_-, \end{aligned}$$

где было учтено, что $(\mathbf{f}, \mathbf{x})_+ + (\mathbf{f}, \mathbf{x})_- = (\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \sum_i (f_i^{eq} - f_i) = 0$. Если найти α такое, что выполняется неравенство

$$\frac{\alpha}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{\alpha^2}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{\alpha^3}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_- \leq (\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x})), \quad (7)$$

то тогда выполняется и (2). Отметим, что для (7) решение $\alpha \leq 2$. Действительно, так как $\alpha > 1$, то из (7) имеем

$$\alpha \leq \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))}{\frac{1}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{\alpha}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{\alpha^2}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_-} \leq \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)}{\frac{1}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{1}{6} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{1}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_-} \leq 2,$$

где использовалось неравенство $(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x})) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)$, следующее из $\log(1 + z) \leq z, z > -1$. Тогда для уравнения (7) и (2) имеется решение, обозначаемое $\underline{\alpha}$, оно имеет вид

$$\underline{\alpha} = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))}{\left(\frac{1}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2) - \frac{1}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^3)_- + \frac{4}{3} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^4)_- \right)}. \quad (8)$$

Использование $\underline{\alpha}$ из (8) вместо α в энтропийном методе РУБ гарантирует выполнение H -теоремы и, следовательно, стабилизирует численные расчеты. Однако в приложениях его использование ведет к излишне диссипативному поведению моделируемых течений. Поэтому в текущей работе $\underline{\alpha}$ из (8) используется как нижняя грань оценки α , при котором выполняется H -теорема.

Из условия $f_i + \alpha(f_i^{eq} - f_i) \geq 0, i = 1 \dots N$, получаем верхнюю границу [14] α^* для α

$$\alpha^* = \min_{i: f_i - f_i^{eq} > 0} \frac{f_i}{f_i - f_i^{eq}}, \quad (9)$$

данную оценку можно улучшить. Рассмотрим неравенство [21]

$$\log(1 + z) > \frac{z}{1 + z}, \quad z \geq -1,$$

применяя данное неравенство к левой части (2), получаем

$$(\mathbf{f}, (1 + \alpha \mathbf{x}) \log(1 + \alpha \mathbf{x})) \geq \frac{\alpha^2}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)_-,$$

тогда решение уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2} (\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)_- = \alpha (\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))$$

определяет еще одну верхнюю границу для α . В результате имеем оценку

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{2(\mathbf{f}, \mathbf{x} \log(1 + \mathbf{x}))}{(\mathbf{f}, \mathbf{x}^2)_-}, \alpha^* \right\}, \quad (10)$$

где α^* определяется из (9).

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

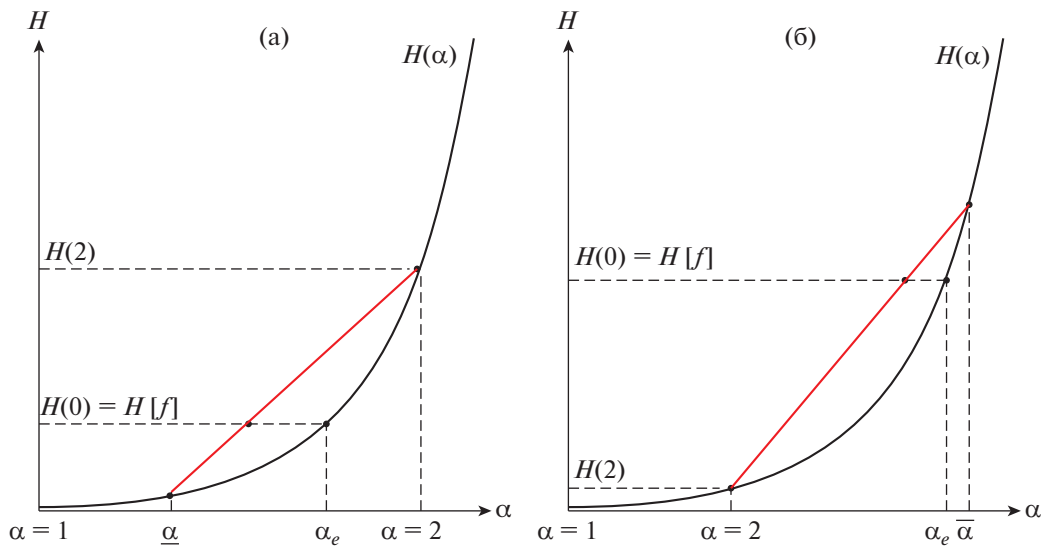
4.1. Модифицированный метод секущих

Вначале рассмотрим случай $\alpha^* < 2$, где α^* определяется из (9), очевидно, что данный случай отвечает большим отклонениям от локального равновесия, на практике это редкий случай. В данном случае считаем, что $\alpha = \min(\underline{\alpha}, \alpha^*)$, где $\underline{\alpha}$ определена формулой (8).

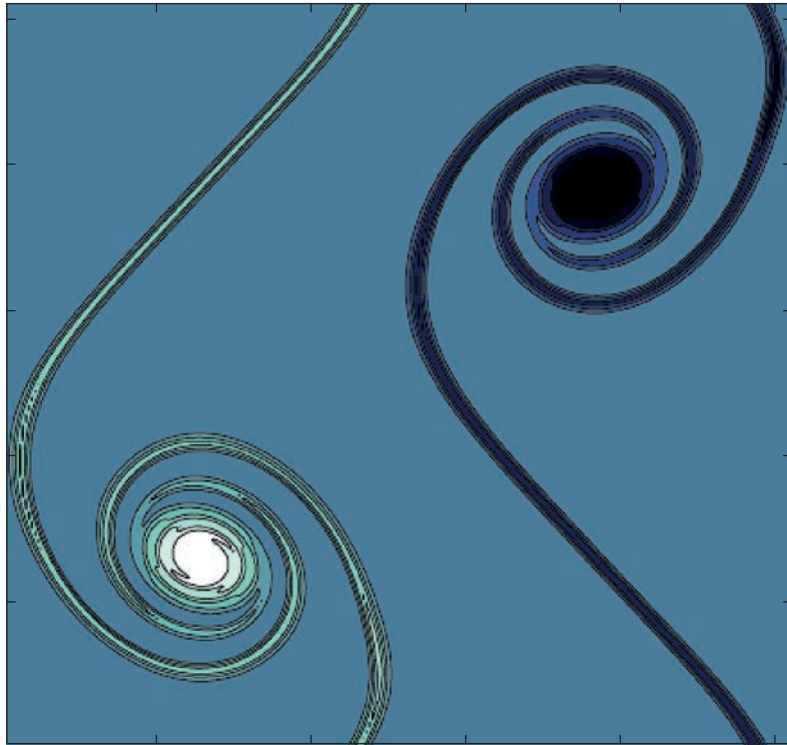
Дальше будем считать, что $\alpha^* \geq 2$. Геометрическая интерпретация метода представлена на фиг. 1. Для удобства определим функцию

$$H(\alpha) \equiv H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{\text{eq}} - \mathbf{f})],$$

очевидно, что решение (2), записанное в виде равенства, есть абсцисса точки пересечения горизонтальной линии $H(0) = H[\mathbf{f}]$ с кривой $H(\alpha)$, фиг. 1, обозначим эту точку α_e . Нахождение аналитического выражения для α_e не представляется возможным. В данном разделе найдем аналитические оценки $\alpha \leq \alpha_e$ с помощью метода секущих.



Фиг. 1. Геометрическая интерпретация модифицированного метода секущих, (а) — для $H(2) \geq H(0)$, (б) — для $H(2) < H(0)$, $H(\alpha) \equiv H[\mathbf{f} + \alpha(\mathbf{f}^{\text{eq}} - \mathbf{f})]$. Решение уравнения баланса энтропии для модифицированного метода секущих есть точка пересечения секущей и горизонтальной прямой $H = H(0) = H[\mathbf{f}]$. Решение уравнения баланса энтропии (2) (в виде равенства) есть точка α_e .



Фиг. 2. Двойной сдвиговый слой. Представлены амплитуды завихренности скорости течения для модифицированного метода секущих.

Пусть $H(0) \leq H(2)$, данный случай представлен на левом слайде фиг. 1. Одним из решений (2) является абсцисса $\underline{\alpha}$ точки пересечения горизонтальной линии $H(0) = H[\underline{f}]$ и секущей, проходящей через точки $\underline{\alpha}$ и 2, после алгебраических вычислений получаем для абсциссы этой точки выражение

$$\alpha = \underline{\alpha} + \frac{H[\underline{f}] - H(\underline{\alpha})}{H(2) - H(\underline{\alpha})}(2 - \underline{\alpha}), \quad (11)$$

где $\underline{\alpha}$ задается (8). Отметим, что если в качестве $\underline{\alpha}$ взять $\alpha = 1$, то получаем стандартный метод секущих [18].

Теперь пусть $H(0) \geq H(2)$, данный случай представлен на фиг. 1б. Аналогично предыдущему случаю находим аналитическое решение для (2) в виде

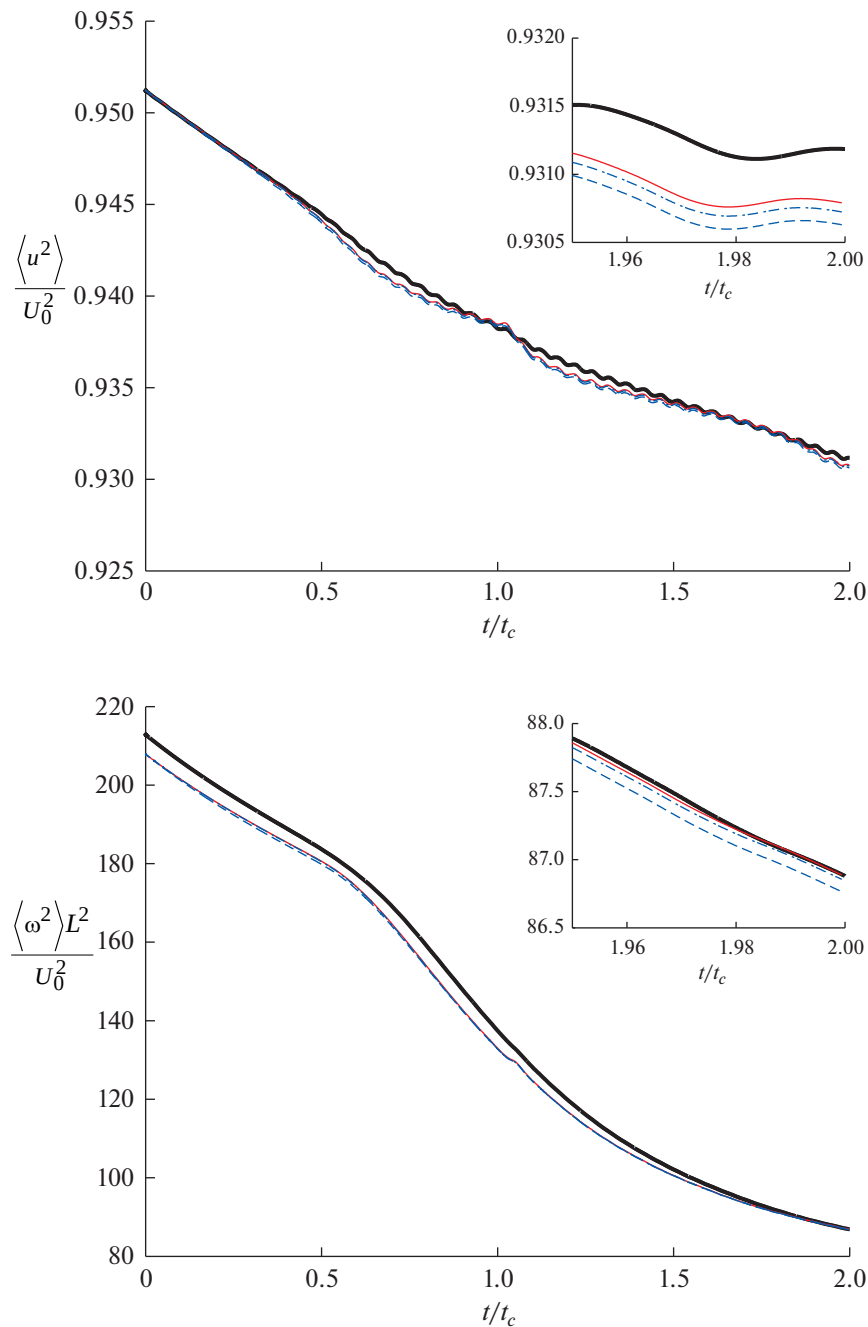
$$\alpha = 2 + \frac{H[\underline{f}] - H(2)}{H(\bar{\alpha}) - H(2)}(\bar{\alpha} - 2), \quad (12)$$

где $\bar{\alpha}$ задается формулой (10).

Для численного моделирования используется девятискоростная решеточная модель уравнения Больцмана для двух пространственных переменных $D2Q9$ [1], состояние локального равновесия берется как произведение одномерных функций распределения (4)–(5). Временной шаг берется равным единице $\Delta t = 1$. В ходе численного моделирования параметр α на каждом временном шаге и в каждом пространственном узле вычисляется по формулам (11)–(12).

4.2. Численное моделирование: двойной сдвиговый слой

Задача о двойном сдвиговом слое часто используется для оценки устойчивости и диссипативных свойств решеточных уравнений Больцмана [18, 27, 29–31]. Это связано с тем, что в данной задаче наблюдаются значительные амплитуды сдвиговых напряжений и достаточно сложная вихревая структура, с другой стороны, задача относительно легко решается численно и имеет



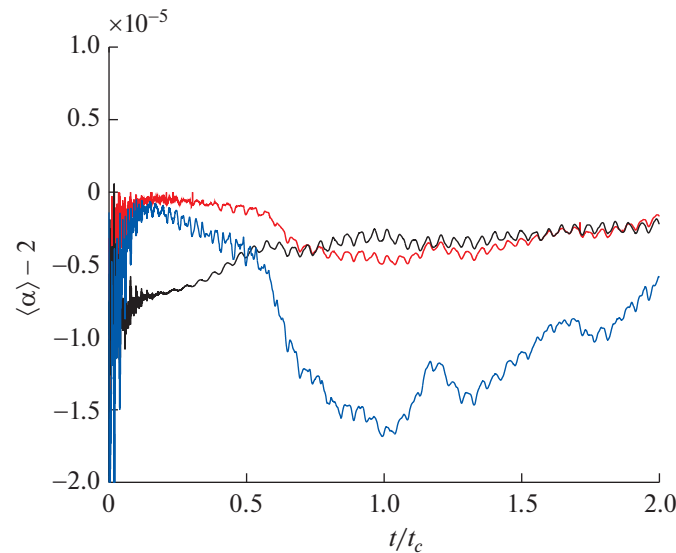
Фиг. 3. Двойной сдвиговый слой. Представлена эволюция во времени усредненной по пространству кинетической энергии и усредненной по пространству завихренности. Эталонное решение обозначается (—), модифицированный метод секущих обозначается (---); существенно энтропийный метод обозначается (— · —); метод секущих обозначается (—).

простые граничные условия. Рассмотрим численное моделирование течения вязкой жидкости в двумерной квадратной области размера $L \times L$, на границах ставятся периодические граничные условия. Начальные значения скоростей в рассматриваемой области следующие:

$$u_x(x, y)|_{t=0} = U_0 \operatorname{th}(k(y/L - 0.25)), \quad y < L/2, \quad (13)$$

$$u_x(x, y)|_{t=0} = U_0 \operatorname{th}(k(0.75 - y/L)), \quad y \geq L/2, \quad (14)$$

$$u_y(x, y)|_{t=0} = U_0 \delta \sin(2\pi(x/L + 0.25)), \quad (15)$$



Фиг. 4. Двойной сдвиговый слой. Представлена эволюция во времени величины $\langle \alpha \rangle - 2$, где $\langle \alpha \rangle$ есть усреднение по пространственным узлам значений α ; модифицированный метод секущих обозначается (—); существенно энтропийный метод обозначается (—); метод секущих обозначается (—).

где параметры k , δ следующие:

$$k = 80, \quad \delta = 0.05$$

также считаем, что плотность жидкости равна 1, число Рейнольдса определяется так: $Re = U_0 L / \nu$, где ν есть вязкость жидкости.

Отметим, что форма начальной функции распределения (которая определяет начальные значения скоростей) существенно влияет на диссипативные свойства течения. Для того, чтобы избежать осцилляций гидродинамических величин в начальные моменты времени, функция распределения в момент времени $t = 0$ задается как $\mathbf{f}^{(eq)} + \mathbf{f}^{(1)}$, где $\mathbf{f}^{(eq)}$ есть равновесная часть функции распределения, в которой гидродинамические величины заданы выражениями (13)–(15), $\mathbf{f}^{(1)}$ есть неравновесная часть функции распределения, зависящая от градиентов гидродинамических величин, последние оцениваются численно на основе центральных разностей [30].

Расчеты для задачи (13)–(15) проводились для числа Рейнольдса $Re = 3 \times 10^4$ и $U_0 = 0.04$, последнее означает, что число Маха $M = U_0 / c_s = \sqrt{3} \times 0.04 \approx 0.0693$. Также удобно ввести характеристическое время конвекции по формуле $t_c = L / U_0$. В качестве эталонного решения возьмем результаты, полученные с помощью стандартной модели $D2Q9$ ($\alpha = 2$) для сетки высокого разрешения 1028×1028 . Сравнивать эталонные решения будем с результатами расчетов на основе энтропийной $D2Q9$ модели для сетки с разрешением 256×256 . Отметим, что для данного разрешения стандартная модель $D2Q9$ ($\alpha = 2$) уже неустойчива, но все рассматриваемые энтропийные подходы (метод секущих, модифицированный метод секущих, существенно энтропийный) дают устойчивые решения. Амплитуды завихренностей (ротор) скоростей в момент времени $t = t_c$ представлен на фиг. 2 для модифицированного метода секущих, другие подходы дают очень похожие результаты. Отметим, что энтропийные методы устойчивы для более грубых сеток, но в решениях наблюдаются паразитные вихри, однако их появление не приводит к возникновению неустойчивостей. На фиг. 3. представлены профили во времени усредненной по пространству кинетической энергии (нормализованной на U_0^2) и усредненного по пространству квадрата завихренности w^2 (нормализованного на L^2 / U_0^2). Очевидно, что модифицированный метод секущих дает результаты, которые чуть ближе лежат к эталонным решениям. На фиг. 4 показана динамика отклонения от 2 усредненной по пространству переменной α . Видно, что метод секущих дает наибольшие отклонения, модифицированный метод секущих имеет наименьшие

отклонения в начальные моменты времени, существенно энтропийный метод имеет наименьшие отклонения при $t > 0.7t_c$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается задача построения нового энтропийного подхода для решеточных уравнений Больцмана. Для улучшения устойчивости РУБ требуется, чтобы в каждой точке выполнялось уравнение баланса энтропии, это означает, что H -функция не возрастает в результате столкновений (энтропия не убывает). Нахождение аналитического решения уравнения баланса энтропии не представляется возможным, однако можно получить решения для данного уравнения, записанного в виде неравенства. В настоящей работе предложен вариант решения, основанный на методе секущих. Показано, что для параметра α (от которого зависят диссипативные свойства системы) можно получить аналитические выражения, зависящие от значений H -функции, вычисленной для разных функций распределения. В качестве тестовой задачи рассмотрен двойной сдвиговый слой. Показано, что построенный метод дает устойчивые решения при больших числах Рейнольдса, также показано, что модифицированный метод секущих менее диссипативен, чем стандартный энтропийный метод секущих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggien E. The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. Springer, 2017.
2. Karlin I., Succi S., Chikatamarla S. Comment on “Numerics of the lattice Boltzmann method: Effects of collision models on the lattice Boltzmann simulations” // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. 068701.
3. Karlin I., Bösch F., Chikatamarla S., Succi S. Entropy-Assisted Computing of Low-Dissipative Systems // Entropy. 2015. V. 17. P. 8099.
4. Godunov S., Sultangazin U. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation // Russian Math. Surveys. 1971. V. 26. P. 1.
5. Gatignol R. The hydrodynamical description for a discrete velocity model of gas // Complex Systems. 1987. V. 1. P. 709.
6. Ilyin O. Discrete Velocity Boltzmann Model for Quasi-Incompressible Hydrodynamics // Mathematics. 2021. V. 9. P. 993.
7. Yong W.-A., Luo L.-S. Nonexistence of H theorems for the athermal lattice Boltzmann models with polynomial equilibria // Phys. Rev. E. 2003. 051105.
8. Yong W.-A., Luo L.-S. Nonexistence of H Theorem for some Lattice Boltzmann models // J. Stat. Phys. 2005. V. 121. P. 91.
9. Karlin I., Succi S. Equilibria for discrete kinetic equations // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. R4053.
10. Karlin I., Gorban A., Succi S., Boffi V. Maximum Entropy Principle for Lattice Kinetic Equations // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 6.
11. Karlin I., Ferrante A., Öttinger H. Perfect entropy functions of the Lattice Boltzmann method // Europhys. Lett. 1999. V. 47. P. 182.
12. Ansumali S., Karlin I., Öttinger H. Minimal entropic kinetic models for hydrodynamics // Europhys. Lett. 2003. V. 63. P. 798.
13. Ansumali S., Karlin I. Stabilization of the lattice Boltzmann method by the H theorem: A numerical test // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. 7999.
14. Ansumali S., Karlin I. Entropy Function Approach to the Lattice Boltzmann Method // J. Stat. Phys. 2002. V. 107. P. 291.
15. Tosi F., Ubertini S., Succi S., Karlin I. Optimization Strategies for the Entropic Lattice Boltzmann Method // J. Sci. Comput. 2007. V. 30. P. 369.
16. Chikatamarla S., Ansumali S., Karlin I. Entropic Lattice Boltzmann Models for Hydrodynamics in Three Dimensions // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. 010201.
17. Atif M., Kolluru P., Thantapanally C., Ansumali S. Essentially Entropic Lattice Boltzmann Model // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. 240602.
18. Zhao W., Yong W.-A. Relaxation-rate formula for the entropic lattice Boltzmann method // Chinese Phys. B. 2019. V. 28. 114701.
19. Jonnalagadda A., Sharma A., Agrawal A. Single Relaxation Time Entropic Lattice Boltzmann Methods: A Developer's Perspective for Stable and Accurate Simulations // Comput. Fluids. 2021. V. 2015. 104792.
20. Karlin I., Ansumali S., Frouzakis C., Chikatamarla S. Elements of the Lattice Boltzmann Method I: Linear Advection Equation // Commun. Comput. Phys. 2006. V. 1. P. 616.

21. *F. Topsøe*. Some bounds for the logarithmic function // <https://rgmia.org/papers/v7n2/pade.pdf>. 2007. University of Copenhagen.
22. *Sterling J., Chen S.* Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods // *J. Comp. Phys.* 1996. V. 123. P. 196.
23. *Siebert D., Hegele Jr. L., Philippi P.* Lattice Boltzmann equation linear stability analysis: Thermal and athermal models // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 77. P. 026707.
24. *Ricot D., Marié S., Sagaut P.* Comparison between lattice Boltzmann method and Navier-Stokes high order schemes for computational aeroacoustics // *J. Comp. Phys.* 2009. V. 228. P. 1056.
25. *Wissocq G., Sagaut P., Boussuge J.-F.* An extended spectral analysis of the lattice Boltzmann method: modal interactions and stability issues // *J. Comp. Phys.* 2019. V. 380. P. 311.
26. *Masset P.-A., Wissocq G.* Linear hydrodynamics and stability of the discrete velocity Boltzmann equations // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 897. A.29.
27. *Coreixas C., Wissocq G., Chopard B., Latt, J.* Impact of collision models on the physical properties and the stability of lattice Boltzmann methods // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2020. V. 378. P. 20190397.
28. *Wissocq G., Coreixas C., Boussuge J.-F.* Linear stability and isotropy properties of athermal regularized lattice Boltzmann methods // *Phys. Rev. E*. 2020. V. 102. P. 053305.
29. *Ilyin O.* Discrete-velocity Boltzmann model: Regularization and linear stability // *Phys. Rev. E*. 2022. V. 105. P. 045312.
30. *Mattila K., Hegele Jr. L., Philippi P.* Investigation of an entropic stabilizer for the lattice-Boltzmann method // *Phys. Rev. E*. 2015. V. 91. P. 063010.
31. *Dellar P.* Bulk and shear viscosities in lattice Boltzmann equations // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64. P. 031203.