ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 9, с. 1524–1530

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРАНИЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

© 2023 г.
А. М. Боговский[1,*]

[1] *119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, ф-т ВМК, Россия*

**e-mail: abogovski@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
Переработанный вариант 03.05.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Статья продолжает построение L_p-теории эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами в дивергентной форме для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно C^1-некомпактной липшицевой границей и C^1-гладкими линиями разрыва коэффициентов. Ранее построенная L_p-теория обобщается на случай несовпадения наименьших собственных значений, соответствующих конечной и бесконечной особым точкам, продолжая исследование эффекта их взаимодействия в функциональном классе с первыми производными из $L_p(\Omega)$ во всей шкале значений показателя $p \in (1,\infty)$. Библ. 3. Фиг. 1.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение в дивергентной форме, разрывный кусочно-постоянный коэффициент, неограниченная область, кусочно-гладкая некомпактная липшицева граница, гладкие линии разрыва коэффициента, задача Дирихле, задача Неймана, слабое решение с первыми производными из L_p, L_p-теория, взаимодействие особенностей,

DOI: 10.31857/S0044466923090041, **EDN:** RJMDHQ

ВВЕДЕНИЕ

В неограниченной плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с одним выходом на бесконечность и кусочно-гладкой некомпактной границей $\partial\Omega$, состоящей из конечного числа гладких кривых, рассматривается краевая задача Дирихле для эллиптического уравнения в дивергентной форме с разрывным скалярным кусочно-постоянным коэффициентом $\varkappa > 0$, имеющим конечное число подобластей непрерывности в Ω, ограниченных кусочно-C^1 гладкими линиями разрыва. Задача Дирихле рассматривается в слабой постановке, соответствующей функциональному классу решений с первыми производными из L_p во всей шкале значений показателя $p \in (1,\infty)$. Статья продолжает начатое в [1] исследование вопросов существования и единственности решений для случая одной конечной и одной бесконечной граничных особых точек.

Конечной граничной особой точкой будем называть точку негладкости $\partial\Omega$ и/или вхождения линий разрыва коэффициента $\varkappa$ в $\partial\Omega$. Углы, образуемые входящими в особую точку кривыми границы и линиями разрыва коэффициента, предполагаются ненулевыми.

Бесконечной граничной особой точкой будем называть связную компоненту окрестности бесконечности в Ω с образующими ненулевой угол асимптотами $\partial\Omega$ и, возможно, асимптотами линий разрыва $\varkappa$ в этой компоненте. Такое определение допускает области с несколькими выходами на бесконечность. В рамках данной статьи ограничимся единственным выходом Ω на бесконечность.

Ограничимся также рассмотрением особых точек, допускающих локальное разделение переменных в полярных координатах в некоторой своей окрестности. Переход к общему случаю производится с помощью известных L_p-оценок и теоремы об устойчивости индекса при малых возмущениях в операторной норме.

Полученный результат является обобщением полученного ранее в [1]. Теперь допускается неравенство наименьших собственных значений $\lambda_1, \widetilde{\lambda_1}$, возникающих в задаче Штурма–Лиувилля по полярному углу. При этом возникают интервалы значений p, на которых эллиптический оператор $L : \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega) \to \overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega)$ имеет конечные ненулевые размерности ядра и коядра.

Отметим, что приведенные здесь и полученные ранее результаты переносятся и на задачу Неймана в смысле установленной в [2] взаимосвязи разрешающих операторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим пространство $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ как замыкание подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ в пространстве Соболева $L^1_p(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{L^1_p(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\omega)},$$

где ω – какая-либо фиксированная ограниченная подобласть $\omega \subset \Omega$, и введем эквивалентную норму $\|u\|_{L^1_p(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. Пространство $\overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega)$ определим как двойственное к $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ пространство линейных непрерывных функционалов, т.е.

$$\overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \left(L^1_q(\Omega)\right)^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Понимая обобщенную дивергенцию в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$, рассмотрим дифференциальный оператор

$$L = \operatorname{div}(\varkappa\nabla\cdot) : \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega) \to \overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega), \tag{1.1}$$

позволяющий записать в операторной форме $Lu = f$ слабую постановку задачи Дирихле

$$\operatorname{div}(\varkappa\nabla u) = f, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Операторная постановка проясняет связь размерностей $\dim\ker$ и $\dim\operatorname{coker}$ ядра и коядра

$$\ker L \overset{\text{def}}{=} \{u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega) \,|\, Lu = 0\},$$

$$\operatorname{coker} L \overset{\text{def}}{=} \overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega)/\{Lu \,|\, u \in L^1_p(\Omega)\}$$

линейного оператора (1.1) в случае, когда эти размерности конечны. В свою очередь, операторная постановка эквивалентна слабой L_p-постановке той же задачи Дирихле

$$\int_\Omega (\varkappa\nabla u, \nabla\psi)dx = -f(\psi) \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

для класса слабых решений $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$. При этом, как хорошо известно, для всякого функционала $f \in \overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega)$ найдется векторное поле $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_p(\Omega)$ такое, что $f = \operatorname{div}\mathbf{F}$ в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$ с оценкой

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\overset{\circ}{L}{}^{-1}_p(\Omega)}.$$

Определение 1. Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ элемент $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ будем называть *слабым решением* задачи Дирихле, если выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega \varkappa(x)(\nabla u, \nabla\psi)dx = \int_\Omega (\mathbf{F}, \nabla\psi)dx \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{L}{}^1_q(\Omega) \tag{1.2}$$

при заданной вектор-функции $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_p(\Omega)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $q = p/(p-1)$ – показатель, сопряженный к $p \in (1, \infty)$.

Отметим, что в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ класс пробных функций $\overset{\circ}{L}{}^1_q(\Omega)$ может быть заменен на пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega)$.

Замечание 1. При построении примеров несуществования слабых решений можно ограничиться рассмотрением правых частей $\operatorname{div}\mathbf{F} = f \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$. В таком случае тождество (1.2) примет более простой вид:

$$\int_{\Omega} \varkappa(x)(\nabla u, \nabla\psi)dx = -\int_{\Omega} f\psi dx \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{L}{}^1_q(\Omega). \tag{1.3}$$

2. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

При разделении переменных в полярных координатах по полярному углу возникает задача Штурма–Лиувилля. Напомним постановку этой задачи и приведем здесь без доказательства некоторые ее свойства, установленные в [1].

Взяв в качестве веса кусочно-постоянный коэффициент $\varkappa = \varkappa(\varphi) > 0$ с конечным числом линий разрыва, введем пространство Лебега $L_{2,\varkappa}(0,\alpha)$ со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi)_{\varkappa} = \int_0^{\alpha} \varkappa(\varphi)\Phi(\varphi)\Psi(\varphi)d\varphi,$$

порождающим соответствующую весовую норму $\|\Phi\|_{2,\varkappa}$.

На $L_{2,\varkappa}(0,\alpha)$ введем операцию слабого дифференцирования

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\varkappa}(\varkappa\Phi')', \tag{2.1}$$

где штрих означает слабое дифференцирование на $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ или, в более широком понимании, дифференцирование в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с требованием регулярности обобщенной производной.

Рассматривая операцию дифференцирования (2.1) на подпространстве

$$D_{\mathcal{L}} \overset{\text{def}}{=} \{\Phi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,\alpha) : \varkappa\Phi' \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,\alpha)\} \subset L_{2,\varkappa}(0,\alpha),$$

приходим к замкнутому неограниченному дифференциальному оператору

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\varkappa}(\varkappa\Phi')' : D_L \subset L_{2,\varkappa}(0,\alpha) \to L_{2,\varkappa}(0,\alpha). \tag{2.2}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Геометрическая кратность всех собственных значений задачи Штурма–Лиувилля* $\mathcal{L}u + \lambda u = 0$ *равна единице.*

Теорема 2. *Система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональным базисом в* $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\varkappa}(0,\alpha)$.

Занумеруем собственные функции $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ по возрастанию чисел $\lambda_k > 0$. Верны утверждения следующих трех теорем и леммы.

Теорема 3. *Существует зависящая только от чисел* α, $\varkappa_{\min}$, $\varkappa_{\max}$ *постоянная* $M > 0$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \leqslant M.$$

Теорема 4. *Собственная функция* Φ_1 *задачи Штурма–Лиувилля, соответствующая* λ_1, *не имеет нулей на* $(0,\alpha)$.

Теорема 5. *Собственные функции* Φ_k, $k \geqslant 2$, *задачи Штурма–Лиувилля меняют знак на* $(0,\alpha)$ *в силу* $\lambda_k > \lambda_1$.

Лемма 1. *Для собственных функций* Φ_k *задачи Штурма–Лиувилля верны неравенства*

$$\exists C > 0: \left|\frac{\Phi_k(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}\right| \leqslant C\lambda_k \quad \forall k \geqslant 2.$$

3. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Напомним, что рассматриваются уже описанные во введении конечная и бесконечая граничные особые точки, допускающие локальное разделение переменных в полярных координатах. При этом ключевым вопросом в вычислении $\dim\ker L$ является количество значений $\lambda_k \in (0,1)$ в соответствующих особым точкам задачах Штурма–Лиувилля по φ. Особые точки, имеющие значения $\lambda_k \in (0,1)$, будем называть *сингулярными*, а не имеющие таковых – *регулярными*. Простой пример сингулярной особой точки можно найти в [1].

Дополнительно потребовав $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ и $\widetilde{\lambda}_1 < 1 < \widetilde{\lambda_2}$, представим решение $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ в окрестностях конечной и бесконечной особых точек в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\mu_k}\Phi_k(\varphi) + B_1 r^{-\mu_1}\Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta, \quad \mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \tag{3.1}$$

$$u(\tilde r,\tilde\varphi) = \widetilde{A}_1 r^{\widetilde{\mu}_1}\widetilde{\Phi}_1(\tilde\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k \tilde r^{-\tilde\mu_k}\widetilde{\Phi}_k(\tilde\varphi), \quad \tilde r > R > \delta, \quad \tilde\mu_k = \sqrt{\widetilde{\lambda}_k}. \tag{3.2}$$

При исследовании взаимодействия конечной и бесконечной особых точек понадобятся следующие свойства локальной знакоопределенности/знакопеременности решения.

Лемма 2 (знакоопределенность в окрестности особой точки).

1. *Пусть* $p < 2/(1+\mu_1)$ *и, соответственно, в окрестности конечной особой точки решение* $u(r,\varphi)$ *имеет вид*

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\mu_k}\Phi_k(\varphi) + B_1 r^{-\mu_1}\Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Если $B_1 > 0$*, то* $u(r,\varphi) \geqslant 0$ *в некоторой окрестности этой особой точки.*

2. *Пусть* $p > 2/(1-\tilde\mu_1)$ *и, соответственно, в окрестности бесконечной особой точки решение* $u(\tilde r,\tilde\varphi)$ *имеет вид*

$$u(\tilde r,\tilde\varphi) = \widetilde{A}_1 \tilde r^{\mu_1}\widetilde{\Phi}_1(\tilde\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{B}_k \tilde r^{-\tilde\mu_k}\widetilde{\Phi}_k(\tilde\varphi), \quad \tilde r > R > 1.$$

Если $\widetilde{A}_1 > 0$*, то* $u(\tilde r,\tilde\varphi) \geqslant 0$ *в некоторой окрестности этой особой точки.*

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем доказательство второго утверждения леммы, для удобства убрав тильды из обозначений.

Оценим решение, переписав его в виде

$$u(r,\varphi) = \Phi_1(\varphi)\left[A_1 r^{\mu_1} + B_1 r^{-\mu_1} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k r^{-\mu_k}\frac{\Phi_k(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)}\right].$$

Заметим, что коэффициенты B_k разложения в ряд Фурье по ортонормированному базису в $L_{2,\varkappa}(0,\alpha)$ ограничены в силу, например,

$$|B_k| = \left|\int_0^{\alpha} u(R,\varphi)\Phi_k(\varphi)\,d\varphi\right| \leqslant \left\|u|_{r=R}\right\|_{L_{2,\varkappa}(0,\alpha)}.$$

Используя оценку $|\Phi_k(\varphi)/\Phi_1(\varphi)| \leqslant C\mu_k^2 \ \ \forall k \geqslant 1$ из леммы 1, получаем

$$\left|B_1 r^{-\mu_1} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k r^{-\mu_k}\frac{\Phi_k}{\Phi_1}\right| \leqslant |B_1| r^{-\mu_1} + M\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k^2 r^{-\mu_k} \quad \forall r > R.$$

При этом ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k^2 r^{-\mu_k} = r^{-\mu_1}\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k^{-4}\mu_k^6 r^{\mu_1-\mu_k}$$

сходится и имеет сумму порядка $O(r^{-\mu_1})$ при $r \to \infty$ в силу теоремы 3 о сходимости ряда $\sum \mu_k^{-4}$ и очевидного неравенства

$$\sup_{s>1}(s^6 r^{\mu_1 - s}) < m(R) < \infty \quad \forall r > R$$

с некоторой постоянной $m(R) > 0$.

Таким образом, $u(r,\varphi) = \Phi_1(\varphi)[A_1 r^{\mu_1} + O(r^{-\mu_1})]$, $r \to \infty$. А по теореме 4 функция Φ_1 знакопостоянна на $(0,\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 3 (смена знака в окрестности особой точки).

1. *Пусть в окрестности конечной особой точки решение* $u(r,\varphi)$ *имеет вид*

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Тогда $u(r,\varphi)$ *меняет знак в любой окрестности этой особой точки.*

2. *Пусть в окрестности бесконечной особой точки решение* $u(\tilde{r},\tilde{\varphi})$ *имеет вид*

$$u(\tilde{r},\tilde{\varphi}) = \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{B}_k \tilde{r}^{-\tilde{\mu}_k} \widetilde{\Phi}_k(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{r} > R > 1.$$

Тогда $u(\tilde{r},\tilde{\varphi})$ *меняет знак в любой окрестности этой особой точки.*

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем доказательство первого утверждения леммы.

Предположим, что найдется такой номер $m \geqslant 2$, что $A_m \neq 0$, тогда как все $A_k = 0$ при $k < m$. Согласно теореме 5, собственная функция Φ_m меняет на Ω_R знак, а тогда на любой дуге $\{r = \delta, 0 < \varphi < \alpha\}$ с достаточно малым δ происходит смена знака рассматриваемого решения u. Действительно, на дуге $r = \delta$, $0 < \varphi < \alpha$ функция Φ_m в малой окрестности своего нуля строго монотонна и принимает значения $(-\sigma,\sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. Оценивая при достаточно малых δ оставшуюся часть ряда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi),$$

устанавливаем смену знака.

Лемма доказана.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

Напомним, что рассматривается задача Дирихле с одной конечной и одной бесконечной граничными особыми точками с локально-разделяющимися переменными. При этом в соответствующих особым точкам задачах Штурма–Лиувилля наложены ограничения $\mu_1 < 1 < \mu_2$ и $\tilde{\mu}_1 < 1 < \tilde{\mu}_2$.

Лемма 4 (нетривиальное решение однородной задачи).

1. *Пусть* $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, $p \in (2/(1+\tilde{\mu}_1), 2/(1+\mu_1))$, *тогда существует нетривиальное решение однородной задачи Дирихле, имеющее особенность в конечной точке.*

2. *Пусть* $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, $p \in (2/(1-\mu_1), 2/(1-\tilde{\mu}_1))$, *тогда существует нетривиальное решение однородной задачи Дирихле, имеющее особенность на бесконечности.*

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем конструктивное доказательство первого утверждения.

Рассмотрим $u(x) = \eta_\sigma(x) u_{\mu_1}(x) - v(x)$, где $u_{\mu_1} = r^{-\mu_1}\Phi_1(\varphi)$, срезающая функция $\eta_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ равна единице в σ-окрестности конечной особой точки и нулю — вне 2σ-окрестности.

В силу выполнения тождеств

$$\int\limits_{\Omega} \varkappa(\nabla(\eta_\sigma u_\mu), \nabla\psi)dx = \int\limits_{\Omega} \varkappa(\eta_\sigma \nabla u_\mu, \nabla\psi)dx + \int\limits_{\Omega} \varkappa(u_\mu \nabla\eta_\sigma, \nabla\psi) \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega),$$

$$0 = \int\limits_{\Omega} \varkappa(\nabla u_\mu, \nabla(\psi\eta_\sigma))dx = \int\limits_{\Omega} \varkappa(\eta_\sigma \nabla u_\mu, \nabla\psi)dx + \int\limits_{\Omega} \varkappa(\nabla u_\mu, \nabla\eta_\sigma)\psi dx \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega),$$

определяющее решение тождество

$$\int\limits_{\Omega} \varkappa(x)(\nabla u(x), \nabla\psi(x))dx = 0 \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$$

равносильно

$$\int\limits_{\Omega} \varkappa(\nabla v, \nabla\psi)dx = -\int\limits_{\Omega} \varkappa(\nabla u_{\mu_1}, \nabla\eta_\sigma)\psi dx + \int\limits_{\Omega} \varkappa(u_{\mu_1}\eta_\sigma, \nabla\psi)dx \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega).$$

Применяя теорему Рисса в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{L}{}^1_{2,\varkappa}(\Omega)$ со скалярным произведением $\int_\Omega \varkappa(x)(\cdot,\cdot)dx$, заключаем, что существует $v \in \overset{\circ}{L}{}^1_2(\Omega)$. А значит, не только $\eta_\sigma(x)u_{\mu_1}(x)$, но и u попадает в $L^1_p(\Omega)$ в силу общего вида решения в окрестностях особых точек при рассматриваемых здесь значениях p.

Лемма доказана.

Теорема 6 (тривиальное ядро).

1. *Если* $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, *то* $\dim\ker L = 0$ *для* $p \in (1, 2/(1+\tilde{\mu}_1)] \cup [2/(1+\mu_1), \infty)$.
2. *Если* $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, *то* $\dim\ker L = 0$ *для* $p \in (1, 2/(1-\tilde{\mu}_1)] \cup [2/(1-\mu_1), \infty)$.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем здесь доказательство второго утверждения, т.е. для $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$.

Выбор $2/(1+\tilde{\mu}_1) \leqslant p \leqslant 2/(1-\tilde{\mu}_1)$ исключает из рядов (3.1) и (3.2), представляющих решение в окрестностях особых точек, члены $\widetilde{A}_1\tilde{r}^{\tilde{\mu}_1}\widetilde{\Phi}_1(\tilde{\varphi})$, $B_1 r^{-\mu_1}\Phi_1(\varphi)$. Решение попадает в $L^1_2(\Omega)$, а значит, оно тривиальное.

При $p \geqslant 2/(1-\mu_1) > 2/(1-\tilde{\mu}_1)$ сразу получаем $A_1 = B_1 = 0$. Докажем от противного, что и $\widetilde{A}_1 = 0$. Не ограничивая общности, предположим $\widetilde{A}_1 > 0$. Выберем дугу $\tilde{r} = R > 1$ в такой окрестности бесконечной особой точки, что

- переменные разделяются в полярных координатах,
- по лемме 2 решение $u \geqslant 0$.

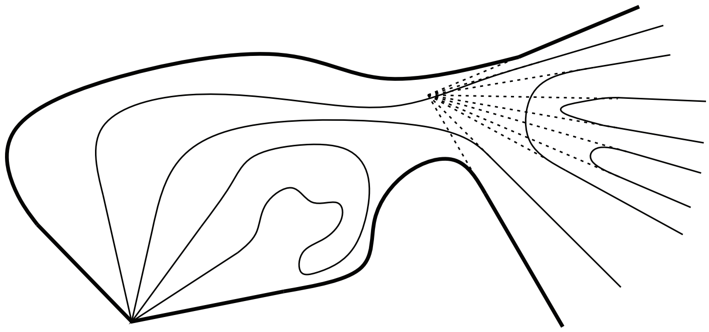
Применяя принцип существенного максимума (см. теорему 9.27 в [3]) на $\Omega_R = \Omega \cap \{x | \tilde{r} < R\}$, получаем $u|_{\Omega_R} \geqslant 0$. Однако в окрестности конечной особой точки $A_1 = B_1 = 0$ и применима лемма 3 о знакопеременности решения. Приходим к противоречию.

При $p < 2/(1+\tilde{\mu}_1)$ сразу получаем $\widetilde{A}_1 = \widetilde{B}_1 = 0$. Докажем от противного, что и $B_1 = 0$. Не ограничивая общности, возьмем $B_1 > 0$. Выберем дугу $r = \delta < 1$ в такой окрестности конечной особой точки, что

- переменные разделяются в полярных координатах,
- по лемме 2 решение $u \geqslant 0$.

Применяя принцип существенного максимума на $\Omega_\delta = \Omega \cap \{x | r > \delta\}$, получаем $u|_{\Omega_\delta} \geqslant 0$. Однако в окрестности бесконечной особой точки $\widetilde{A}_1 = \widetilde{B}_1 = 0$ и применима лемма 3 о знакопеременности решения. Приходим к противоречию.

Теорема доказана.



Фиг. 1. Пример допустимой области.

Теорема 7 (нетривиальное ядро).

1. *Если* $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, *то* $\dim\ker L = 1$ *для* $p \in \left(2/(1+\tilde{\mu}_1), 2/(1+\mu_1)\right)$.

2. *Если* $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, *то* $\dim\ker L = 1$ *для* $p \in \left(2/(1-\mu_1), 2/(1-\tilde{\mu}_1)\right)$.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем здесь доказательство второго утверждения, т.е. для $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$.

Согласно лемме 4 существует нетривиальное решение u_1 однородной задачи. Введем обозначение

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k' r^{\mu_k}\Phi_k(\varphi) + B_1' r^{-\mu_1}\Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Покажем, что произвольное решение u_2 линейно зависимо от u_1. Введем обозначение

$$u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k'' r^{\mu_k}\Phi_k(\varphi) + B_1'' r^{-\mu_1}\Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Линейная комбинация $u = B_1''u_1 - B_1'u_2$ в окрестности конечной особой точки будет по построению иметь коэффициент $B_1 = 0$ при $r^{-\mu^1}\Phi_1(\varphi)$. Применяя схему доказательства случая $p \geqslant 2/(1-\mu_1)$ предыдущей теоремы, показываем, что $u = 0$.

Теорема доказана.

Следствие 1 (размерность коядра).

1. Если $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, то $\dim\operatorname{coker} L = 1$ для $p \in \left(2/(1+\tilde{\mu}_1), 2/(1+\mu_1)\right)$ и $\dim\operatorname{coker} L = 0$ для остальных $1 < p < \infty$ кроме $2/(1 \pm \tilde{\mu}_1)$, $2/(1 \pm \mu_1)$.

2. Если $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, то $\dim\operatorname{coker} L = 1$ для $p \in \left(2/(1-\mu_1), 2/(1-\tilde{\mu}_1)\right)$ и $\dim\operatorname{coker} L = 0$ для остальных $1 < p < \infty$ кроме $2/(1 \pm \tilde{\mu}_1)$, $2/(1 \pm \mu_1)$.

Замечание 2. Не требуется совпадения числа линий разрыва в конечной и бесконечной особых точках $\partial\Omega$. Так, линия разрыва может замыкаться через особую точку, т.е. начало и конец линии разрыва могут совпадать с этой особой точкой. На фиг. 1 приводится пример допустимой области: показаны линии разрыва коэффициента и граница $\partial\Omega$, а пунктиром – их асимптоты в окрестности бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов В.Н., Боговский А.М.* О взаимодействии граничных особых точек в задаче Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в плоской области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 12. С. 2155–2174.
2. *Денисов В.Н., Боговский А.М.* О взаимосвязи слабых решений эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана для плоской односвязной области // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 32–48.
3. *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. New York: Springer, 2011.