ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 9, с. 1513–1523

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА ДИФФУЗИОННО-ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕНЗОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1)]

Т. А. Звонарева[1,2], С. И. Кабанихин[2,3], О. И. Криворотько[1,2,3,*]

[1] *630090 Новосибирск, пр-кт Акад. Лаврентьева, 6, ИВМиМГ СО РАН, Россия*

[2] *630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, НГУ, Россия*

[3] *630090 Новосибирск, пр-кт Акад. Коптюга, 4, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия*

**e-mail: krivorotko.olya@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.12.2022 г.
Переработанный вариант 09.12.2022 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Разработан алгоритм численного решения задачи определения источника в модели распространения информации в синтетических онлайн социальных сетях, описываемой уравнениями типа “реакции–диффузии”, по дополнительной информации о процессе в фиксированные моменты времени. Исследована степень некорректности задачи определения источника в параболическом уравнении, основанная на анализе сингулярных чисел линеаризованного оператора обратной задачи. Разработанный алгоритм основан на комбинации метода тензорной оптимизации и градиентного спуска с учетом регуляризации А.Н. Тихонова. Численные расчеты демонстрируют наименьшую относительную погрешность восстановленного источника, полученную разработанным алгоритмом в сравнении с классическими подходами. Библ. 26. Фиг. 4. Табл. 2.

Ключевые слова: задача об источнике, модель “реакции–диффузии”, обратная задача, тензорная оптимизация, регуляризация, градиентные методы.

DOI: 10.31857/S0044466923090193, **EDN:** DFESUX

ВВЕДЕНИЕ

Оценка последствий принимаемых решений в социальных и экономических сферах опирается на создание и исследование моделей управляемых систем. В этом направлении существенную помощь могут оказать аналогии с процессами из различных предметных областей (математическая физика, механика сплошной среды, геофизика и др.) с хорошо развитым математическим аппаратом (см. [1]).

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для диффузионно-логистической модели

$$\begin{aligned} &u_t = du_{xx} + \left(1 - \frac{u}{K}\right) r(t)u, \quad l_1 \le x \le l_2, \quad t \ge 1, \\ &u(x,1) = Q(x), \quad l_1 \le x \le l_2, \\ &u_x(l_1,t) = u_x(l_2,t) = 0, \quad t \ge 1, \end{aligned} \tag{1}$$

которая описывает процесс распространения информации в онлайн социальной сети (см. [2]). Здесь $u(x,t)$ – плотность пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации, K – константа, описывающая максимальную пропускную способность сети, $r(t)$ [1/час] – скорость роста числа активных пользователей, $Q(x)$ – гладкая функция источника распространения

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10044-П) и Математического Центра в Академгородке, соглашение с Минобрнауки РФ 075-15-2022-281.

информации в социальной сети в зависимости от количества связей $x = 1, 2, \ldots$, интерполированная с помощью сплайнов по дискретному набору связей, удовлетворяющая ограничениям

$$0 \leqslant Q(x) \leqslant Q_{\max}, \quad Q(x) = 0 \quad \forall x < l_1 \quad \text{и} \quad Q(x) = Q_{\max} \quad \forall x > l_2 \geqslant l_1.$$

Переменная x характеризует расстояние от источника, т.е. $x = 0$ соответствует источнику, $x = i$ – минимальное количество связей от источника до вовлеченного пользователя. Например, вовлеченный пользователь отреагировал на новость "друга", который в свою очередь отреагировал (репост, реакция) на новость своего "друга"-источника. В таком случае вовлеченный пользователь находится на расстоянии $x = 2$ от источника.

Подобное уравнение "реакции–диффузии" было рассмотрено в статье А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова [3], в которой $u(x,t)$ означала концентрацию исследуемого вида в популяции при $Q_{\max} = 1$, $K = 1$. В этом случае предельная скорость перемещения популяции равна $v(t) = 2\sqrt{dr(t)}$.

Если ввести функцию потока $\Psi(x,t)$, характеризующую количество вовлеченных пользователей, проходящую через точку с координатой x в единицу времени в момент t, то закон сохранения для модели (1) примет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \left(1 - \frac{u}{K}\right) r(t) u.$$

В случае, когда функции потока $\Psi(x,t)$ и плотности $u(x,t)$ связаны соотношением Фика

$$\Psi(x,t) = -v(u)\frac{\partial u}{\partial x},$$

уравнение из модели (1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1 - \frac{u}{K}\right) r(t) u + \frac{\partial}{\partial x}\left(v(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Здесь $v(u)$ – неотрицательная функция скорости потока.

Замечание. Начально-краевая задача об определении источника $\varphi(x)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left(1 - \frac{\tilde{u}}{K}\right) r(t)\tilde{u} + d\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \varphi(x)k(x,t), \quad t \in (1,T), x \in (l_1, l_2),\\
&\tilde{u}(x,1) < 0, \quad x \in (l_1, l_2),\\
&\tilde{u}_x(l_1,t) = \tilde{u}_x(l_2,t) = 0, \quad t \in (1,T).
\end{aligned} \tag{2}$$

В случае $k(x,t) = \delta(x)\delta(t)$, где δ – дельта-функция Дирака, задача определения функции $\varphi(x)$ из (2) сводится к задаче определения функции $Q(x)$ из (1) (см. [4]).

Определение источника $\varphi(x)$ крайне важно при моделировании динамики популяции, распространения информации в социальных сетях, приложениях математической физики, так как решение $\tilde{u}(x,t)$ сильно зависит от линейной части члена, отвечающего за реакцию. В физических приложениях линейная часть часто неизвестна или известна частично, и $\varphi(x)$ нельзя измерить напрямую, поскольку он является результатом смешанного влияния нескольких факторов. Таким образом, в большинстве случаев $\tilde{u}(x,t)$ не доступны одновременно для всех x и всех моментов времени t. В работе разработан эффективный алгоритм определения функции источника $Q(x)$ в начально-краевой задаче (1) по дополнительной информации о процессе в фиксированные моменты времени.

В Институте системного программирования РАН разрабатываются подходы анализа социальных процессов, основанные на онтологии, графовых структурах, методах машинного обучения и искусственного интеллекта (см. [5]). В настоящей работе предложен упрощенный подход описания процесса распространения информации в онлайн социальных сетях, основанный на описании процессов посредством дифференциальных уравнений.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 сформулирована обратная задача (задача об источнике) для модели (1) в классической и вариационной постановках и исследован линеаризованный оператор обратной задачи на степень некорректности. В разд. 2 сформулирован комбинированный алгоритм численного решения задачи об источнике, основанный на методах тензорной оптимизации и градиентного типа. В разд. 3 приведены результаты и анализ численных расчетов определения функции источника распространения информации в онлайн социальных сетях по синтетическим данным о количестве вовлеченных пользователей в фиксированные моменты времени. В заключении сформулированы выводы по статье и направления дальнейших исследований.

1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В обратной задаче, в отличие от прямой, помимо функции $u(x,t)$ неизвестной является и начальная функция плотности $Q(x)$. Рассматривается дополнительная информация следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{N_1} u(x_i,t_k) = f_k, \quad k = 1,\ldots,N_2. \tag{3}$$

Таким образом, в обратной задаче (1), (3) требуется восстановить функцию $Q(x)$ модели (1) по данным f_k вида (3). Так как данные обратной задачи не полны, такая обратная задача некорректна (см. [6]) (ее решение может быть неединственным и/или неустойчивым).

Благодаря неравенствам Карлемана, метод, введенный Бухгеймом и Клибановым (см. [7]), позволил установить важные результаты, включающие неравенства устойчивости, связывающие восстанавливаемую функцию источника с наблюдениями на части области $\omega\times(1,T)$, $\omega\subset(l_1,l_2)$, и наблюдения на всей области (l_1,l_2) в фиксированный момент времени t^* (см. [8, 9]). В [10] был предложен подход определения функции источника по дополнительной информации о решении в фиксированный момент времени и точки пространства в одномерном случае, получены результаты единственности и устойчивости решения. В [11] В. Исаков получил теорему условной устойчивости решения задачи об источнике для модели (2) с необходимостью дополнительных граничных наблюдений. В [12] А. Хасанов использовал подход слабого решения для минимизации функционала невязки. Больше теоретических и практических результатов приведены в современных работах и ссылках в них (см. [13, 14]).

Для описания быстротекущих процессов (движения плазмы, модели теплопроводности, распространение информации в социальных сетях) в [15, 16] предложен подход регуляризации параболической системы (2) путем добавления второй производной по времени с малым параметром ε в качестве коэффициента. В нашем случае

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_{tt} + u_t = du_{xx} + \left(1-\frac{u}{K}\right)r(t)u, \quad l_1 \le x \le l_2, \quad t \ge 1,\\
&u(x,1) = Q(x), \quad u_t(x,1) = 0, \quad l_1 \le x \le l_2,\\
&u_x(l_1,t) = u_x(l_2,t) = 0, \quad t \ge 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Гиперболическая модель имеет заметные преимущества при использовании явных схем численного решения прямых и сопряженных задач. Особенно ярко эти преимущества по сравнению с параболической моделью (2) проявляются при использовании подробных пространственных сеток, применение которых стало возможным с появлением вычислительных систем сверхвысокой производительности. В то же время добавленный член имеет сингулярный характер. Вопрос о близости решений сингулярно возмущенных и невозмущенных уравнений впервые исследован в работах А.Н. Тихонова [17, 18]. В [16] показано, что оптимальным представляется выбор параметра ε в виде:

$$\varepsilon < \frac{h_x}{V},$$

где h_x – шаг по пространственной сетке, V – характерная скорость диффузионного процесса. При этом, с одной стороны, обеспечивается близость решений параболической и гиперболической моделей (см. [15]), а с другой – обеспечивается заметный вычислительный эффект при использовании явных схем.

1.1. *Исследование сингулярных чисел оператора линеаризованной обратной задачи*

Используя дискретизацию начально-краевой задачи (1), обратную задачу определения $q = (q_0,\ldots,q_5) = (Q(1),\ldots,Q(6))$ по дополнительной информации вида (3) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$Aq = f,$$

где A – матрица размера $N_2 \times N$, а q и $f = (f_1,\ldots,f_{N_2})$ – векторы размерности N и N_2 соответственно. Обратную задачу (4), (3) аналогично можно представить в виде $A_\varepsilon q = f$.

Зависимость решения от возмущения правой части f в случае невырожденной матрицы A для возмущенной задачи

$$A(q + \delta q) = f + \delta f$$

имеет вид $A\delta q = \delta f$, откуда $\delta q = A^{-1}\delta f$, $\|\delta q\| \le \|A^{-1}\|\|\delta f\|$. Кроме того, $\|A\|\|q\| \ge \|f\|$.

Из этих соотношений мы имеем неулучшаемую оценку для относительной ошибки решения:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}. \tag{5}$$

Таким образом, погрешность определяется константой $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, которая называется *числом обусловленности* системы (матрицы). Системы с плохо обусловленными матрицами можно считать практически неустойчивыми, хотя формально задача корректна, и выполнено условие устойчивости $\|A^{-1}\| < \infty$.

В случае возмущения матрицы оценка (5) принимает вид

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \le \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \Big/ \left(1 - \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

(при $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$).

Известно, что число обусловленности выражается через сингулярные числа матрицы следующим образом:

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_p(A)},$$

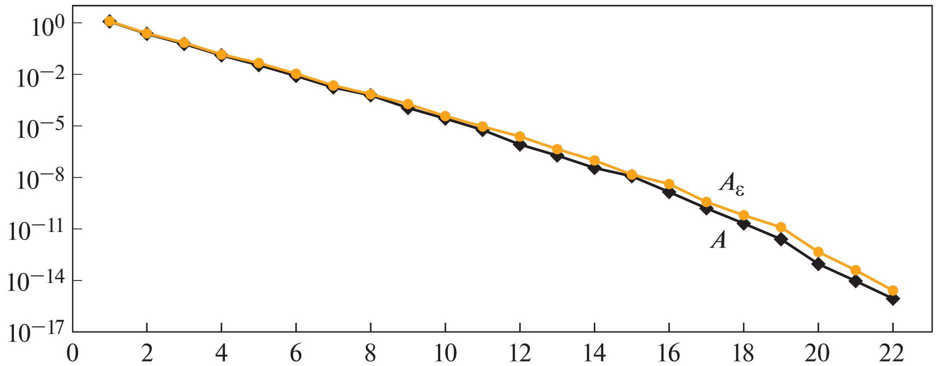
где $\sigma_1(A)$ и $\sigma_p(A)$ – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A, $p = \min(N, N_2)$.

После линеаризации и дискретизации обратных задач (1), (3) (см. [19]) и (4), (3) при $N_1 = 5$, $N_2 = 22$ получим дискретные аналоги операторов обратных задач. В численных расчетах $K = 25$, $d = 0.01$, и функция $r(t)$ имеет вид:

$$r(t) = \frac{\beta_2}{\beta_1} - e^{-\beta_1(t-1)}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - \beta_3\right), \quad \text{где} \quad \beta_1 = 1.5, \quad \beta_2 = 0.375, \quad \beta_3 = 1.65.$$

Сингулярные числа матриц A и A_ε представлены на фиг. 1.

Таким образом, числа обусловленности матриц A и A_ε имеют порядок 10^{16} и 10^{15} соответственно. Это означает, что решение линеаризованной обратной задачи неустойчиво. Добавление малого параметра ε со второй производной по времени не значительно уменьшает число обусловленности матрицы A_ε. В следующем разделе обратная задача сведена к задаче минимизации функционала с учетом регуляризирующего слагаемого.



Фиг. 1. Графики убывания сингулярных чисел операторов A (черная линия с ромбами) и A_ε при $\varepsilon = 0.1$ (оранжевая линия с кругами) линеаризованных обратных задач (1), (3) и (4), (3) в логарифмической шкале.

1.2. Вариационная постановка обратной задачи

Пусть $u(x,t) \in L^2((l_1,l_2)\times(1,+\infty))$. Тогда обратную задачу можно свести к соответствующей задаче минимизации следующего целевого функционала:

$$J(q) = \frac{T-1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}\left|\sum_{i=1}^{N_1} u(x_i,t_k;q) - f_k\right|^2, \tag{6}$$

где $u(x,t;q)$ – решение прямой задачи для начальной функции плотности $Q(x)$, определяемой из набора параметров $q = (q_0,\ldots,q_{N-1})$, т.е. $Q(x_i) = q_{i-1}$, $i = 1,\ldots,N$, $N = 6$ – число параметров.

Для данной обратной задачи также был сформулирован регуляризирующий функционал А.Н. Тихонова (см. [17, 20])

$$J_T(q) = \frac{T-1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}\left|\sum_{i=1}^{N_1} u(x_i,t_k;q) - f_k\right|^2 + \alpha\sum_{j=0}^{N-1}\left|q_j - q_j^0\right|^2 \tag{7}$$

с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-2}$ и линейно убывающим q^0.

2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача определения вектора $q \in R^6$ является некорректной, а именно, как показано в п. 1.1, решение неустойчиво (число обусловленности достигает порядка 10^{16}). Более того, функция $Q(x)$ определяется на всем интервале $x \in [l_1,l_2]$ с помощью интерполяции вектора q кубическими сплайнами, что порождает неединственность решения.

Дополнительная информация (3) обратной задачи задана в дискретном виде.

В [19] были проведены расчеты для более полных данных $u(x_i,t_k) = f_{ik}$, $i = 1,\ldots,N_1$, $k = 1,\ldots,N_2$, с применением комбинации методов глобальной оптимизации (метод роя частиц) и градиентных подходов. Для решения поставленной обратной задачи был применен метод оптимизации тензорного поезда, который сводит функцию нескольких переменных к тензору (см. [21]) и является в сравнении с природоподобными алгоритмами эффективнее без потери точности для многомасштабных задач.

2.1. Метод тензорного разложения функционала

Метод глобальной оптимизации тензорного поезда (Tensor Train global optimization, TT) (см. [21]) заменяет исходную задачу оптимизации на эквивалентную задачу поиска максимума по модулю. Для этого исходная функция непрерывно и монотонно отображается на часть интервала $[0;+\infty)$ и после дискретизации преобразуется в тензор.

Однако число элементов в таком тензоре растет экспоненциально с ростом числа искомых параметров. Поэтому идеей метода является аппроксимация тензора методом TT-CROSS (см. [22]), который получает приближение тензора в TT-формате. Этот формат представляет собой разложение, в котором исходный тензор размерности N сводится к N тензорам размерности 3.

Для вычислительных экспериментов был адаптирован пакет программ ttpy на языке программирования Python. В данном случае исходный функционал $J(q)$ отображается с помощью функции $g(J(q)-\alpha)$ и вводится сетка с n узлами по каждому из N направлений, а тензор значений функции $g(q)$ обозначается через G. Тогда алгоритм метода имеет следующий вид:

0. Для каждого $i = 1,\ldots,N-1$:

• Случайным образом генерируется тензор $\hat{G}_i(j_1; j_2; j_3)$ и считается QR-разложение матрицы развертки $\hat{G}_i(j_1j_2; j_3) = Q_iR_i$.

• Процедура maxvol(Q_i) находит набор номеров строк $\{p\}$, соответствующий квадратной подматрице максимального объема (см. [23]).

• Используя значения сетки и полученный на предыдущем шаге $\hat{q}_{i-1}$, генерируется массив $\hat{q}_i$, из которого выбираются строки с номерами из $\{p\}$.

1. Пока число итераций меньше n_{swp} (параметр функции min_func в пакете ttpy), чередуются следующие действия:

(а) Для $i = N-1,\ldots,1$:

– На основе $\hat{q}_i$ и $\hat{q}_{i+1}$ генерируется множество потенциальных решений M и обновляется сдвиг α.

– Массив значений функционала $J(\tilde{q})$, $\tilde{q} \in M$, представляется в виде тензора $A_i(j_1; j_2; j_3)$ и считается сингулярное разложение матрицы развертки $A_i(j_2j_3; j_1) = U_iS_i(V_i)^*$.

– Процедура rect_maxvol(U_i) находит набор номеров строк $\{p\}$, соответствующий прямоугольной подматрице максимального объема (см. [24]).

– Используя значения сетки и $\hat{q}_{i+1}$, генерируется массив $\hat{q}_i$, из которого выбираются строки с номерами из $\{p\}$.

(б) Для $i = 0,\ldots,N-2$:

– На основе $\hat{q}_i$ и $\hat{q}_{i+1}$ генерируется множество потенциальных решений M и обновляется сдвиг α.

– Массив значений функционала $J(\tilde{q})$, $\tilde{q} \in M$, представляется в виде тензора $A_i(j_1; j_2; j_3)$ и считается QR-разложение матрицы развертки $A_i(j_1j_2; j_3) = Q_iR_i$.

– Процедура rect_maxvol(Q_i) находит набор номеров строк $\{p\}$, соответствующий прямоугольной подматрице максимального объема.

– Используя значения сетки и $\hat{q}_i$, генерируется массив $\hat{q}_{i+1}$, из которого выбираются строки с номерами из $\{p\}$.

На нечетных итерациях выполняется вариант (а), на четных итерациях – (б).

Данный метод использует только некоторые строки и столбцы изначального тензора значений функции $g(q)$, из-за чего может не найти точку глобального оптимума, а лишь обнаружить близкое к оптимальному значение. Поэтому для увеличения точности решения обратной задачи мы рассмотрели комбинированный метод.

2.2. Комбинированный метод

Данный метод состоит в последовательном применении метода глобальной оптимизации TT и локального многоуровневого градиентного метода (МГМ) (см. [25]). Ранее уже были проведены численные эксперименты для подобной обратной задачи, решаемой с помощью МГМ (см. [26]). Алгоритм МГМ имеет следующий вид:

$$q^{m+1} = \theta_{m+1}z^m + (1-\theta_{m+1})y^m, \quad \theta_{m+1} \in \arg\min_{\theta\in[0;1]} J(\theta z^m + (1-\theta)y^m),$$

$$y^{m+1} = q^{m+1} - \zeta_{m+1}J'(q^{m+1}), \quad \zeta_{m+1} \in \arg\min_{\zeta\geq 0} J(q^{m+1} - \zeta J'(q^{m+1})),$$

$$z^{m+1} = z^m - \eta_{m+1} J'(q^{m+1}), \quad \eta_{m+1} = \frac{1}{2L_{m+1}} + \sqrt{\frac{1}{4L_{m+1}^2} + \eta_m^2},$$

$$L_{m+1} = \frac{\left\|J'(q^{m+1})\right\|^2}{2(J(q^{m+1}) - J(y^{m+1}))}, \quad \eta_0 = 0.$$

В качестве начального приближения для МГМ был взят результат метода ТТ. Скорость сходимости по функционалу метода МГМ имеет порядок $O\left(m^{-2}\right)$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Решение задач минимизации (6) и (7) проводилось с помощью методов ТТ, ТТ в комбинации с МГМ (ТТ + МГМ). Сравнение результатов проведено с результатом комбинации методов роя частиц и МГМ для синтетических данных обратной задачи. Вычисления проводились на вычислительном узле с двумя процессорами Intel Xeon Gold 6248R, количество ядер в каждом процессоре – 24, частота – 3 Гц, 384 Гб оперативной памяти.

3.1. Входные параметры

Прямая задача решается конечно-разностным методом на равномерной сетке в замкнутой области $\bar{D} = \{(x,t) \mid l_1 \le x \le l_2, 1 \le t \le T\}$:

$$\bar{\omega} = \{(x_j, t_n) | x_j = l_1 + jh, t_n = 1 + n\tau, \ j = 0,\ldots,N_x, \ n = 0,\ldots,N_t\},$$

где $h = \dfrac{l_2 - l_1}{N_x}$ и $\tau = \dfrac{T-1}{N_t}$.

Для применения классического непрерывного подхода функция начальной плотности $Q(x)$ определяется из вектора q_{ex} (см. табл. 2) интерполяцией кубическими сплайнами (см. [26]).

Прямая задача (1) решается с помощью явной конечно-разностной схемы с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Положим в численных расчетах $l_1 = 1$, $l_2 = 6$, $T = 24$, $N_x = 50$ и $N_t = 575$ (см. [26]). И в случае функционала А.Н. Тихонова $q_j^0 \in [0,6]$ расположены равномерно, т.е. $q^0 = (6, 4.8, 3.6, 2.4, 1.2, 0)$.

В качестве синтетических данных f_k были взяты значения решения прямой задачи в каждой десятой точке по x и в каждой двадцать пятой точке по $t \ge 50$, т.е. $N_1 = 6$ и $N_2 = 22$. Значения параметров q_{ex} в табл. 2 эмитируют реальные данные новостного сайта Digg.com, представленные в [2].

Относительная ошибка вычислялась по формуле

$$\delta_m = \frac{\left\|q_{\text{ex}} - q^m\right\|^2}{\left\|q_{\text{ex}}\right\|^2}.$$

Здесь q_{ex} – точные значения дискретизованной функции $Q(x)$, а q^m – аппроксимация решения обратной задачи, которая соответствует минимуму функционала $J(q^m)$ (6).

3.1.1. Параметры ТТ. Исходный функционал отображался с помощью функции $g(q) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(J(q) - \alpha)$. Для всех N направлений выбирался интервал изменения параметров $[0,6]$, а максимально возможный ранг тензоров в разложении $r_{\max} = 7$ и количество итераций во всех численных экспериментах $n_{\text{swp}} = 10$.

При увеличении количества узлов n по каждому из направлений растет вычислительная сложность (см. п. 3.3), поэтому в расчетах было выбрано оптимальное по времени и значению целевого функционала число узлов $n = 51$.

3.1.2. Параметры МГМ. На каждой итерации параметр спуска определяется на отрезке $[0, \zeta_{\max}]$ с шагом ζ_h. А градиент вычислялся через решение сопряженной задачи (см. [26]).

Таблица 1. Результаты, $t_{ЭВМ}$ – время работы программы

Метод	Функционал	δ	$t_{ЭВМ}$, ч
ТТ	$J(q) = 6.16\times10^0$	2.04×10^{-2}	1.09
ТТ + МГМ	$J(q) = 7.43\times10^{-3}$	1.89×10^{-2}	1.1
ТТ + МГМ + рег.	$J_T(q) = 1.56\times10^{-1}$	1.29×10^{-2}	2.55
МРЧ + МГМ	$J(q) = 6.67\times10^{-2}$	1.03×10^0	0.64

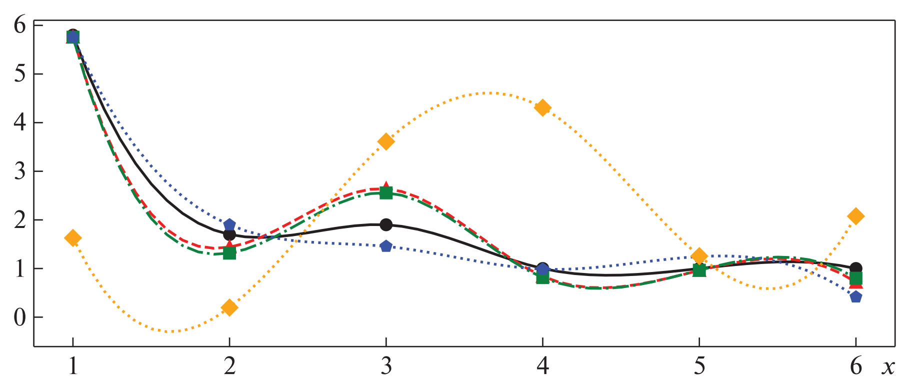
Таблица 2. Значения точного q_{ex} и найденных решений обратной задачи (1), (3)

Параметр	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_{ex}	5.8	1.7	1.9	1	0.95	0.7
$q_{ТТ}$	5.76	1.44	2.639	0.84	0.96	0.72
$q_{ТТ+МГМ}$	5.758	1.316	2.556	0.813	0.965	0.801
$q_{ТТ+МГМ+рег.}$	5.759	1.899	1.456	0.986	1.246	0.415
$q_{МРЧ+МГМ}$	1.629	0.197	3.611	4.307	1.255	2.076

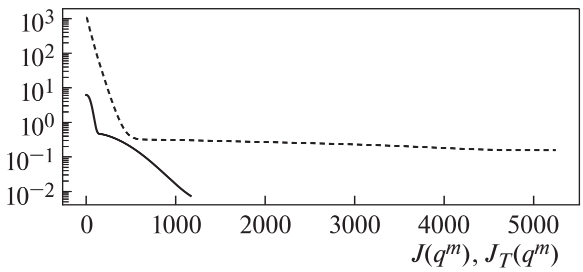
3.2. Результаты численных экспериментов

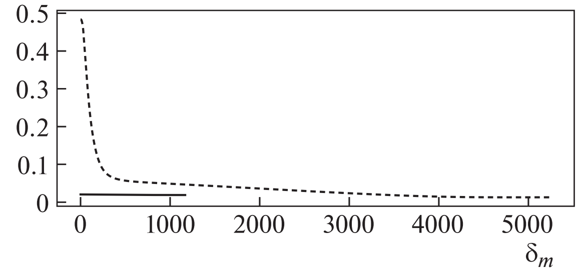
Было выявлено, что при значениях $n \le 50$ изменение параметров r_{max} и n_{swp} никак не влияет на результат работы программы, лишь увеличивая время ее работы. А минимальные значения функционала $J(q) = 6.16\times10^0$ и погрешности $\delta = 2.04\times10^{-2}$ достигались при $n = 51$, $r_{max} = 7$ и $n_{swp} = 10$. Однако решение обратной задачи еще далеко от точного, поэтому для уточнения применялся МГМ.

В табл. 1 и 2 и на фиг. 2 представлены результаты решения задачи минимизации целевого функционала методом ТТ, комбинацией ТТ + МГМ, ТТ + МГМ с регуляризацией А.Н. Тихонова и комбинацией стохастического глобального метода роя частиц (МРЧ) + МГМ. Можно заметить, что метод ТТ работает почти в 2 раза дольше комбинации МРЧ + МГМ, но находит решение лучше в смысле значений погрешности. Применение МГМ к методу ТТ приводит к уменьшению функционала, но незначительно влияет на погрешность, а применение регуляризации А.Н. Тихонова уменьшает погрешность, но увеличивает время работы программы более чем в

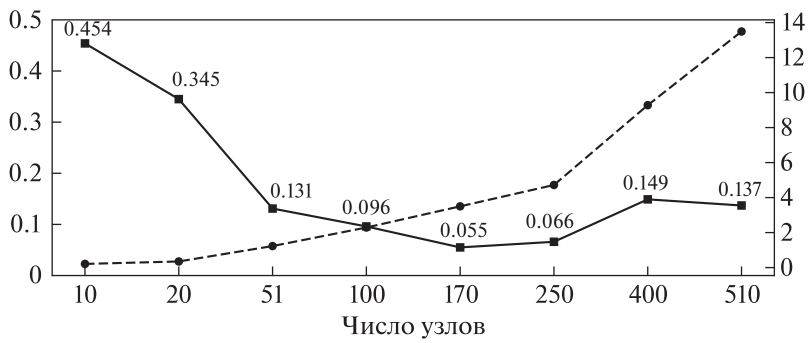


Фиг. 2. Восстановленная начальная функция плотности активных пользователей $Q(x)$. Непрерывной черной линией с кругами изображено точное решение обратной задачи, красной штриховой линией с треугольниками – решение, полученное методом ТТ, зеленой пунктирной линией с квадратами – решение, полученное комбинацией ТТ + МГМ, синей пунктирной линией с пятиугольниками – решение, полученное с помощью комбинации ТТ + МГМ с регуляризацией А.Н. Тихонова, и оранжевой пунктирной линией с ромбами изображено решение, полученное комбинацией МРЧ + МГМ.





Фиг. 3. Графики зависимости функционалов (в логарифмической шкале) и относительной погрешности МГМ от номера итерации m с начальным приближением в виде решения, полученного методом ТТ для случаев без (непрерывная линия) и с регуляризацией А.Н. Тихонова (пунктирная линия).



Фиг. 4. Непрерывная линия с квадратами демонстрирует убывание функционала с увеличением числа узлов, а штриховая линия с кругами – график возрастания времени работы программы с увеличением числа узлов.

2 раза. Таким образом, наименьшее значение погрешности $\delta = 1.29\times10^{-2}$ достигается при работе регуляризованного комбинированного метода ТТ + МГМ.

На фиг. 3 непрерывными линиями изображены кривые, полученные комбинацией ТТ + + МГМ, а пунктирной линией – кривые, полученные комбинированным методом с регуляризацией А.Н. Тихонова. Из фиг. 3 следует, что функционал (6) убывает быстрее, а функционал (7) не достигает минимального значения. Это связано с выбором q^0, что не позволяет функционалу достигнуть похожих значений. А погрешность регуляризованного комбинированного метода хоть и имеет сравнительно большие значения на первых итерациях, но достигает значения меньшего, чем в случае отсутствия регуляризации.

3.3. Вычислительная сложность

Был проведен ряд численных экспериментов для фиксированных параметров метода ТТ $r_{\max} = 7$ и $n_{\text{swp}} = 10$ и набора $n = \{10, 20, 51, 100, 170, 250, 400, 510\}$, который показал, что при увеличении числа узлов n метода ТТ уменьшаются значения функционала и погрешности, но критически увеличивается время работы программы, что продемонстрировано на фиг. 4. В результате было выбрано значение $n = 51$ с учетом оптимального времени работы и приемлемого значения функционала.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическая модель типа "реакции–диффузии", возникающая в биологии, экологии и других приложениях, была адаптирована для описания процесса распространения информации в онлайн социальных сетях. Особенность моделирования состояла в описании социальных процессов в дискретном пространстве с неизвестным источником. В работе численно исследована и решена задача восстановления источника распространения информации по синтетическим данным интегрального типа в фиксированные моменты времени. Анализ степени убывания сингулярных чисел линеаризованного оператора показал необходимость применения методов регуляризации. Разработанный алгоритм решения обратной задачи основан на комбинации вариации метода покрытий и градиентного метода с применением регуляризации А.Н. Тихонова. Было проведено сравнение с природоподобным алгоритмом и показано преимущество использования комбинации метода тензорной оптимизации и градиентного метода с регуляризацией А.Н. Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н., Осипов В.П., Балута В.И.* Подходы к моделированию последствий принятия решений в условиях противодействия // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 43. 15 с.
2. *Wang F., Wang H., Xu K., Wu J., Jia X.* Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model // Proceed. of ICDCS. 2013. P. 307–316.
3. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
5. *Самохвалов Д.И.* Определение аккаунтов злоумышленников в социальной сети ВКонтакте при помощи методов машинного обучения // Тр. Института системного программирования РАН. 2020. Т. 32. № 3. С. 109–117.
6. *Kabanikhin S.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2009. V. 16. № 4. P. 317–357.
7. *Бухгейм А.Л., Клибанов М.В.* Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 2. С. 269–272.
8. *Yamamoto M., Zou J.* Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 1181.
9. *Bellassoued M., Yamamoto M.* Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2006. V. 14(1). P. 47–56.
10. *Cristofol M., Garnier J., Hamel F., Roques L.* Uniqueness from pointwise observations in a multi-parameter inverse problem // Commun. Pure and Appl. Analys. 2012. V. 11(1). P. 173–188.
11. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York: Springer, 2017.
12. *Hasanov A.* Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: Weak solution approach // J. Math. Analys. Appl. 2007. V. 330. Iss. 2. P. 766–779.
13. *Penenko A., Mukatova Z.* Inverse modeling of diffusion-reaction processes with image-type measurement data // 2018 11th Inter. Multiconference Bioinformatics of Genome Regulation and Structure/Systems Biology (BGRS/SB). 2018. P. 39–43.
14. *Kaltenbacher B., Rundell W.* The inverse problem of reconstructing reactionвЂ“diffusion systems // Inverse Problems. 2020. V. 36. P. 065011.
15. *Моисеев Т.Е., Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф.* О близости решений невозмущенных гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных // Докл. АН. Математика. 2018. Т. 481. № 6. С. 605–609.
16. *Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г.* Моделирование процесса лучистой теплопроводности на высокопроизводительных вычислительных системах // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 111–114.
17. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.
18. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. 1948. Т. 22(64). № 2. С. 193–204.
19. *Krivorotko O., Zvonareva T., Zyatkov N.* Numerical solution of the inverse problem for diffusion-logistic model arising in online social networks // Commun. Comput. Info. Sci. 2021. V. 1476. P. 444–459.
20. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.

21. *Zheltkova V.V., Zheltkov D.A., Grossman Z., Bocharov G.A., Tyrtyshnikov E.E.* Tensor based approach to the numerical treatment of the parameter estimation problems in mathematical immunology // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 1. P. 51–66.
22. *Oseledets I.V., Tyrtyshnikov E.E.* TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432. № 1. P. 70–88.
23. *Goreinov S.A., Oseledets I.V., Savostyanov D.V., Tyrtyshnikov E.E., Zamarashkin N.L.* How to Find a Good Submatrix // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Appl. 2010. P. 247–256.
24. *Mikhalev A., Oseledets I.* Rectangular maximum-volume submatrices and their applications // Linear Algebra Appl. 2018. V. 538. P. 187–211.
25. *Gasnikov A.V., Nesterov Y.E.* Universal method for stochastic composite optimization problems // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. № 1. P. 48–64.
26. *Звонарева Т.А., Криворотько О.И.* Сравнительный анализ градиентных методов определения источника диффузионно-логистической модели // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 4. С. 694–704.