ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 7, с. 1177–1191

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

# РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УМЕРЕННО ДЛИННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

**© 2023 г. Х. Г. Умаров[1,2,*]**

[1] 364061 Грозный, пр-т М. Эсамбаева, 13, АН Чеченской Республики, Россия

[2] 364068 Грозный, ул. С. Кишиевой, 33, Чеченский государственный педагогический университет, Россия

*e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.
Переработанный вариант 21.12.2022 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения соболевского типа, моделирующего умеренно длинные продольные волны малой амплитуды в вязкоупругом стержне, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси, для которых существуют пределы на бесконечности. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке. Библ. 11.

**Ключевые слова:** продольные волны в вязкоупругом стержне, нелинейные уравнения соболевского типа, глобальное решение, разрушения решения.

**DOI:** 10.31857/S0044466923070177, **EDN:** VTFKPL

## ВВЕДЕНИЕ

Распространение умеренно длинных продольных волн малой амплитуды в вязкоупругом стержне с учетом дисперсии и диссипации моделируется [1, § 3.1, (3.1.16)], [2] нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных:

$$u_{tt} - \alpha u_{tx} + \beta u_{xx} - u_{txx} - u_{ttxx} + \gamma u_{txxx} - \delta u_{xxxx} + \left(u^2\right)_{xx} = 0,$$
$$(t,x) \in R^1_+ \times R^1, R^1_+ = \left]0,+\infty\right[, R^1 = \left]-\infty,+\infty\right[, \tag{0.1}$$

где $u = u(t,x)$ – продольная деформация; $u_y = \partial_y u = \partial u/\partial y$ – символы дифференцирования по переменной $y$; коэффициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ – неотрицательные постоянные. (Продольные волны называются умеренно длинными, если длина волны существенно больше характерного поперечного размера стержня.)

Неразрешенное относительно старшей временной производной уравнение (0.1) является уравнением соболевского типа с младшими в обобщенном смысле членами [3, гл. 2, § 2], получившимся из уравнения, выведенного в [2] и для которого рассмотрена задача Коши в [4], добавлением как старших: $\gamma u_{txxx}$ и $\delta u_{xxxx}$, так и младших: $\alpha u_{tx}$ и $\beta u_{xx}$, членов уравнения, что, как отмечается в [5], может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши.

Задача Коши для уравнения (0.1) исследуется в пространстве $C\left[R^1\right]$ (см. [6, гл. VIII, § 1]) непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \to \pm\infty$ и норма которого $\|g_C\| = \sup_{x\in R^1}|g(x)|$, полагая, что начальные функции:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^1, \tag{0.2}$$

и искомое классическое решение $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{R}^1_+ \times R^1$, $\overline{R}^1_+ = \left[0,+\infty\right[$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной $t$ по переменной $x$ принадлежат $C\left[R^1\right]$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка, и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Пусть $C^{(k)}\left[R^1\right] = \left\{g(x) \in C\left[R^1\right]: g'(x),\ldots,g^{(k)}(x) \in C\left[R^1\right]\right\}$, $k = 1,2,\ldots,$ – подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C\left[R^1\right]$. Напомним, что в пространстве $C\left[R^1\right]$ [6, гл. VIII, § 1], [7, § 2] дифференциальный оператор $\partial_x$ с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}\left[R^1\right]$ порождает сжимающую сильно непрерывную группу $U(\tau;\partial_x)$, $\tau \in R^1$, класса $C_0$ левых сдвигов: $U(\tau;\partial_x)g(x) = g(x+\tau)$, а оператор $\partial_x^2$ с областью определения $D\left(\partial_x^2\right) = C^{(2)}\left[R^1\right]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U\left(t;\partial_x^2\right)$, $t \in \overline{R}_+^1$, класса $C_0$: $U\left(t;\partial_x^2\right)g(x) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi$; причем для резольвент $R(\lambda;\partial_x) = (\lambda I - \partial_x)^{-1}$, $R\left(\lambda;\partial_x^2\right) = \left(\lambda I - \partial_x^2\right)^{-1}$ справедливы оценки $\|R(\lambda;\partial_x)\|, \left\|R\left(\lambda;\partial_x^2\right)\right\| \le 1/\lambda$ при $\lambda > 0$.

Исследование задачи Коши (0.1), (0.2) проведем по следующей схеме: прежде чем приступать к установлению основных результатов статьи, убедимся, что постановка задачи Коши (0.1), (0.2) корректна и локальное по времени классическое решение ее существует. С этой целью 1) для соответствующего (0.1) линейного однородного уравнения, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций, найдем решение задачи Коши, отмечая используемые в дальнейшем оценки норм вспомогательных операторнозначных функций; и 2) для задачи Коши (0.1), (0.2) найдем временной отрезок $[0,t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму в $C\left[R^1\right]$ этого локального решения. Далее, 3) предполагая, что классическое решение $u = u(t,x)$ уравнения (0.1) и его частная производная $u_t = u_t(t,x)$ для всех значений временной переменной на отрезке $t \in [0,t_1]$ по переменной $x$ принадлежат пересечению пространства $C\left[R^1\right]$ с пространством Соболева $W_2^1\left(R^1\right)$:

$$u(t,x), u_t(t,x) \in C\left[R^1\right] \cap W_2^1\left(R^1\right), \quad t \in [0,t_1]; \tag{0.3}$$

найдем условия существования глобального решения ($t \ge 0$), и разрушения на конечном временном отрезке решения задачи Коши (0.1), (0.2).

## 1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее (0.1):

$$\left(I - \partial_x^2\right)u_{tt} - \left(\alpha\partial_x + \partial_x^2 - \gamma\partial_x^3\right)u_t + \left(\beta\partial_x^2 - \delta\partial_x^4\right)u = 0. \tag{1.1}$$

Введем в уравнение (1.1) новую неизвестную функцию

$$v(t,x) = u(t,x) - u_{xx}(t,x), \tag{1.2}$$

полагая, что частные производные $u_{xx}$, $u_{txx}$ непрерывны при $t \in \overline{R}_+^1$. Из замены (1.2), при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}[R^1]$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v = v(t,x)$: $v|_{t=0} = v_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x)$, $v_t|_{t=0} = v_1(x) = \psi(x) - \psi''(x)$, и, используя принадлежность положительной полуоси резольвентному множеству дифференциального оператора $\partial_x^2$, выразить решение $u(t,x)$ уравнения (1.1) через новую неизвестную функцию $v(t,x)$:

$$u(t,x) = R\left(1;\ \partial_x^2\right)v(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|}v(t,x+s)\,ds. \tag{1.3}$$

В результате замены (1.2) получим эквивалентное (1.1) интегродифференциальное уравнение

$$v_{tt} - Av_t + Bv = 0, \tag{1.4}$$

где $A = \gamma\partial_x - I + A_1$, $A_1 = A_{11} + A_{12}$, $A_{11} = c_1 R(1;\partial_x)$, $c_1 = \alpha - \gamma$, $A_{12} = c_2 R\left(1;\partial_x^2\right)$, $c_2 = 1 - c_1$, $D(A) = C^{(1)}\left[R^1\right]$; $B = \delta\partial_x^2 + B_1$, $B_1 = c_3\left[-I + R\left(1;\partial_x^2\right)\right]$, $c_3 = \beta - \delta$, $D(B) = C^{(2)}\left[R^1\right]$.

Оператор $A$ получен возмущением ограниченным оператором $A_1$ производящего оператора $\gamma\partial_x - I$ сильно непрерывной группы $U(\tau;\gamma\partial_x - I)\,g(x) = e^{-\tau} g(x + \gamma\tau)$ класса $C_0$, поэтому (см. [7, § 8]) он порождает группу $U(\tau;A)\,g(x) = e^{-\tau}U(\tau;A_1)\,g(x + \gamma\tau)$, $\tau \in R^1$, класса $C_0$, для которой справедлива оценка нормы

$$\|U(t;A)\| \le e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\|A_1\|^k \le e^{c_4 t}, \quad c_4 = |c_1| + |c_2|, \quad t \in \overline{R}_+^1. \tag{1.5}$$

В уравнении (1.4) произведем замену неизвестной функции

$$w(t,x) = U(-t/2;A)\,v(t,x), \tag{1.6}$$

тогда можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t,x)$: $w\big|_{t=0} = w_0(x) = v_0(x)$, $w_t\big|_{t=0} = w_1(x) = -Av_0(x)/2 + v_1(x)$, и выразить решение $v(t,x)$ уравнения (1.4) через новую неизвестную функцию $w(t,x)$:

$$v(t,x) = U(t/2;A)\,w(t,x). \tag{1.7}$$

В результате замены (1.6) получим эквивалентное (1.4) интегродифференциальное уравнение

$$w_{tt} = Qw, \tag{1.8}$$

в котором операторный коэффициент $Q = A^2/4 - B = (\gamma^2/4 - \delta)\partial_x^2 - \gamma/2\partial_x + P$, здесь $4P = (1 - 2\gamma c_1 + 4c_3)I + 2(\gamma - c_1)\,R(1;\partial_x) - 2((1+\gamma)c_2 + 2c_3)\,R\left(1;\partial_x^2\right) + c_1^2 R^2(1;\partial_x) + 2c_1c_2 R(1;\partial_x)\,R\left(1;\partial_x^2\right) + c_2^2 R^2\left(1;\partial_x^2\right)$ – ограниченный оператор: $D(P) = C\left[R^1\right]$, притом $D(Q) = C^{(2)}\left[R^1\right]$.

Предполагая выполнение условия $\gamma^2 > 4\delta$, уравнение (1.8) можно переписать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = QW, \tag{1.9}$$

где $Q = Q_0 + Q_1$: $Q_0 = (c_5/2\partial_x - \gamma/(2c_5)\,I)^2$, $c_5 = \sqrt{\gamma^2 - 4\delta}$, $D(Q_0) = C^{(2)}\left[R^1\right]$; $Q_1 = P - \gamma^2/\left(4c_5^2\right)I$, $D(Q_1) = C\left[R^1\right]$, а $W = W(t): t \to w(t,x)$ – искомая вектор-функция, определенная для $t \in \overline{R}_+^1$ и со значениями в пространстве $C\left[R^1\right]$.

Начальные условия для уравнения (1.9) в $C\left[R^1\right]$ перепишутся в виде

$$W\big|_{t=0} = \Phi, \quad W_t\big|_{t=0} = \Psi, \tag{1.10}$$

где $\Phi = w_0(x)$, $\Psi = w_1(x)$ – элементы пространства $C\left[R^1\right]$.

Оператор $Q_{00} = (c_5/2)\,\partial_x - \gamma/(2c_5)\,I$ порождает в пространстве $C\left[R^1\right]$ группу $U(\tau;Q_{00})\,g(x) = e^{-\gamma\tau/(2c_5)} g(x + c_5\tau/2)$, $\tau \in R^1$, класса $C_0$, поэтому квадрат этого оператора, т.е. оператор $Q_0$, является [7, § 1.5] производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau;Q_0)$, $\tau \in R^1$, класса $C_0$, для которой справедливо представление

$$C(\tau;Q_0)\,g(x) = \frac{1}{2}[U(\tau;Q_0) + U(-\tau;Q_0)]\,g(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-\gamma\tau/(2c_5)} g\left(x + \frac{c_5}{2}\tau\right) + e^{\gamma\tau/(2c_5)} g\left(x - \frac{c_5}{2}\tau\right)\right]$$

и оценка нормы $\|C(t;Q_0)\| \le \operatorname{ch}(\gamma t/(2c_5))$, $t \in \overline{R}_+^1$.

Ограниченный оператор $Q_1$ порождает [7, § 4.2] косинус оператор-функцию $C(\tau;Q_1)$, $\tau \in R^1$, класса $C_0$, для которой справедливы представление $C(\tau;Q_1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tau^{2k}}{(2k)!}Q_1^k$, в котором степенной ряд сходится равномерно по $\tau \in R^1$ на каждом конечном отрезке, и оценка нормы $\|C(t;Q_1)\| \le$ $\le \operatorname{ch}(c_6 t)$, $t \in \bar{R}^1_+$, где $c_6^2 = |\gamma - c_1|/2 + (c_1 + c_2)^2/4 + |(1+\gamma)c_2/2 + c_3| + \left|c_3 - \gamma c_1/2 - \gamma^2/\left(4c_5^2\right) + 1/4\right|$.

Возмущение ограниченным оператором $Q_1$ сохраняет способность оператора $Q_0$ порождать косинус оператор-функцию класса $C_0$ [7, § 8.2], поэтому оператор $Q$ является производящим оператором косинус оператор-функции класса $C_0$, для которой на элементах $g(x) \in D(Q) = C^{(2)}\left[R^1\right]$ и для всех $\tau \in R^1$ справедливо представление

$$C(\tau;Q)g(x) = C(\tau;Q_0)g(x) + \frac{\tau^2}{2}\int_0^1 j_1\left(\tau\sqrt{1-s^2}, Q_0\right)C(\tau s;Q_1)g(x)\,ds, \tag{1.11}$$

где $j_1(\tau, Q_0)g(x) = (4/\pi)\int_0^1 \sqrt{1-r^2}C(\tau r;Q_0)g(x)\,dr$.

Для нормы косинус оператор-функции (1.11), используя табличные интегралы, выводим цепочку равенств и неравенств

$$\|C(t;Q)\| \le \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{2c_5 t}{\gamma}\int_0^1 I_1\left(\frac{\gamma t\sqrt{1-s^2}}{2c_5}\right)\operatorname{ch}(c_6 ts)\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} =$$

$$= \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{\pi c_5 t}{\gamma} I_{1/2}((c_7 + c_6)t)\, I_{1/2}((c_7 - c_6)t) = \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{\pi c_5^2 t}{\gamma^2}\operatorname{sh}((c_7 + c_6)t)\operatorname{sh}((c_7 - c_6)t) \le \tag{1.12}$$

$$\le \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{2c_5^2 t}{\gamma^2}\operatorname{ch}(2c_7 t) = h_1(t), \quad c_7 = \sqrt{c_6^2 + \frac{\gamma^2}{4c_5^2}}, \quad t \in \bar{R}^1_+.$$

С косинус оператор-функцией (1.11) связана [7, § 1.4] синус оператор-функция:

$$S(\tau;Q)g(x) = \int_0^\tau C(\xi;Q)g(x)\,d\xi, \quad g(x) \in C\left[R^1\right], \tag{1.13}$$

и линейное многообразие $C_1\left[R^1\right] = \left\{g(x) \in C\left[R^1\right] : C(\tau;Q)g(x) \in C^{(1)}\left(R^1; C\left[R^1\right]\right)\right\}$, т.е. подмножество $C_1\left[R^1\right] \subset C\left[R^1\right]$ состоит из тех функций из $C\left[R^1\right]$, для которых функция $C(\tau;Q)g(x) : R^1 \to C\left[R^1\right]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной $\tau$. Очевидно, что $D(Q) \subset C_1\left[R^1\right]$.

Из соотношений (1.13) и (1.12) для $t \in \bar{R}^1_+$ выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t;Q)\| \le \frac{2c_5}{\gamma}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma t}{2c_5}\right) + \frac{c_5^2}{2\gamma^2 c_7^2}(1 + 2c_7 t\operatorname{sh}(2c_7 t)) = h_2(t). \tag{1.14}$$

Задача Коши (1.9), (1.10) равномерно корректна [7, § 1.4] только тогда, когда оператор $Q$ является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau;Q)$, $\tau \in R^1$, класса $C_0$, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (1.9), (1.10) дается формулой

$$W(t) = C(t;Q)\Phi + S(t;Q)\Psi, \quad t \in \bar{R}^1_+,$$

для любых $\Phi \in D(Q)$ и $\Psi \in C_1\left[R^1\right]$.

Теперь, производя обратные замены (1.7) и (1.3), находим решение задачи Коши для уравнения (1.1):

$$u(t,x) = U(t/2;A)\{C(t;Q)\varphi(x) + S(t;Q)[\psi(x) - A\varphi(x)/2]\}. \tag{1.15}$$

Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** *Пусть выполняется условие* $\gamma^2 > 4\delta$ *и пусть начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству* $C\left[R^1\right]$*:* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}\left[R^1\right]$*, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения* (1.1) *равномерно корректна, классическое решение дается формулой* (1.15) *и для него в пространстве* $C\left[R^1\right]$ *при* $t \in \overline{R}^1_+$ *справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R^1}|u(t,x)| \le e^{c_4 t/2}\left[h_1(t)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)| + h_2(t)\left(\sup_{x\in R^1}|\psi(x)| + \gamma\sup_{x\in R^1}|\varphi'(x)| + (|c_1| + |c_2| + 1)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)\right],$$

*в которой функции* $h_1(t)$ *и* $h_2(t)$ *из* (1.12) *и* (1.14) *соответственно.*

**Замечание 1.** От начальной функции $\psi(x)$ требуем заведомо большую гладкость, чем нужно для существования решения задачи Коши для уравнения (1.9), чтобы не заниматься описанием подмножества $C_1\left[R^1\right]$ пространства $C\left[R^1\right]$.

**Замечание 2.** Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (1.9), (1.10) принадлежит $C^{(2)}\left(\overline{R}^1_+; C\left[R^1\right]\right)$ и для него $QW(t) \in C\left(\overline{R}^1_+; C\left[R^1\right]\right)$, поэтому решение $u(t,x) = \left(I - \partial_x^2\right)^{-1} U(t/2; A)\, w(t,x)$ уравнения (1.1) принадлежит $C^{2,4}\left(\overline{R}^1_+, R^1\right)$.

## 2. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Применим к обеим частям уравнения (0.1) линейный ограниченный оператор $R\left(1;\partial_x^2\right)$, тогда получим эквивалентное (0.1) нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$u_{tt} - Au_t + Bu + \left[R\left(1;\partial_x^2\right) - I\right] f(u) = 0, \tag{2.1}$$

в котором операторные коэффициенты $A$, $B$ такие же, как и в уравнении (1.4), а $f(\cdot)$ — оператор суперпозиции: $f(g) = (g(x))^2$, $g(x) \in C\left[R^1\right]$.

Уравнение (2.1) заменой $u(t,x) = U(t/2; A)\, w(t,x)$ преобразуется к абстрактному полулинейному уравнению

$$W_{tt} = QW + F(t, U(t/2; A)W), \tag{2.2}$$

при этом оператор $Q$ такой же, как и в уравнении (1.9), а $F(t,\cdot)$ — заданный нелинейный оператор:

$$F(t,g) = U(-t/2; A)\left[I - R\left(1;\partial_x^2\right)\right] f(g). \tag{2.3}$$

При $t \in \overline{R}^1_+$ справедлива оценка нормы оператора $F(t,\cdot)$ в пространстве $C\left[R^1\right]$:

$$\|F(t,g)\|_C \le 2e^{(c_4+1)t/2}\|g\|_C^2. \tag{2.4}$$

Ограниченность линейных операторов $U(-t/2; A)$ и $R\left(1;\partial_x^2\right)$ и непрерывная дифференцируемость оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций обеспечивают непрерывную дифференцируемость по Фреше оператора (2.3) в пространстве $C\left[R^1\right]$ и поэтому оператор $F(t,\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Следовательно, найдется промежуток $[0, t_0[$, в котором абстрактная задача Коши (2.2), (1.10) для любых $\Phi \in D(Q)$ и $\Psi \in C_1\left[R^1\right]$ имеет [8, § 3] единственное обобщенное решение $W = W(t)$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения

$$W(t) = C(t;Q)\Phi + S(t;Q)\Psi + \int_0^t S(t-\tau;Q)\, F(\tau, U(\tau/2; A)W)\, d\tau. \tag{2.5}$$

Оценивая норму левой части уравнения (2.5) через норму ее правой части с учетом оценок (1.5), (1.12), (1.14), (2.4) и (0.3), выводим интегральное неравенство

$$\|W(t)\|_C \le h_1(t)\|\Phi\|_C + h_2(t)\|\Psi\|_C + 2\int_0^t h_2(t-\tau)e^{(c_4+1)\tau/2}\|W(\tau)\|_C^2\,d\tau,$$

где $\|\Psi\|_C = \sup_{x\in R^1}|w_1| = 2^{-1}\left[(1+c_4)\|\Phi\|_C + \gamma\sup_{x\in R^1}|\varphi'(x)-\varphi'''(x)|\right] + \sup_{x\in R^1}|\psi(x)-\psi''(x)|$ и $\|\Phi\|_C = \sup_{x\in R^1}|w_0| = \sup_{x\in R^1}|\varphi(x)-\varphi''(x)|$.

Пусть $h_3(t) = h_1(t)\|\Phi\|_C + h_2(t)\|\Psi\|_C$ и $c_8 = 2\max_{\tau\in[0,t],t\in[0,t_0]} h_2(t-\tau)e^{(c_4+1)\tau/2}$, перепишем интегральное неравенство в виде

$$\|W(t)\|_C \le h_3(t) + c_8\int_0^t \|W(\tau)\|_C^2\,d\tau. \tag{2.6}$$

Из неравенства (2.6) выводим [9, §1.3] оценку нормы в пространстве $C\left[R^1\right]$ обобщенного решения уравнения (2.2):

$$\|W(t)\|_C \le h_3(t)\left(1 - c_8\int_0^t h_3(\tau)\,d\tau\right)^{-1} = h_4(t),$$

на отрезке $t\in[0,t_1]$, где

$$t_1 = \sup_{t\in[0,t_0[}\left\{\int_0^t h_3(\tau)\,d\tau < 1/c_8\right\}.$$

Найденное обобщенное решение $W(t)$, $t\in[0,t_1]$, будет классическим решением абстрактной задачи Коши (2.2), (1.10), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что является следствием [8] непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(t,\cdot)$, при условии принадлежности начальных данных $\Phi$ и $\Psi$ соответственно множествам $D(Q)$ и $C_1\left[R^1\right]$.

Таким образом, имеет место

**Теорема 2.** *Пусть выполняется условие* $\gamma^2 > 4\delta$ *и пусть начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^{(4)}\left[R^1\right]$, *тогда на временном отрезке* $[0,t_1]$ *существует единственное классическое решение* $u = u(t,x)$ *задачи Коши* (0.1), (0.2) *в пространстве* $C\left[R^1\right]$, *для которого справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R^1}|u(t,x)| \le e^{c_4t/2}h_4(t) = h_5(t), \quad t\in[0,t_1]. \tag{2.7}$$

В дальнейших рассмотрениях локальное по временной переменной классическое решение $u = u(t,x)$ уравнения (0.1) принадлежит не только пространству $C\left[R^1\right]$, но и пространству Соболева $W_2^1\left(R^1\right)$ на отрезке $[0,t_1]$. (Напомним, что скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом обозначаются соответственно через $(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ и $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C\left(R^1\right)$ с пространством Соболева $W_2^1\left(R^1\right)$, справедлива оценка $\|g\|_C \le \|g\|_{W_2^1} = = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(g(x))^2 + (g'(x))^2\right]dx\right)^{1/2}$, причем, если $g(x)\in C^{(2)}\left(R^1\right)$, то [10] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x\to\pm\infty$ равен нулю.)

## 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

**Теорема 3.** *Пусть параметры* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C^{(4)}\left[R^1\right]\cap W_2^1\left(R^1\right)$ *удовлетворяют условиям*

$$\alpha>1,\quad \gamma>1+\delta,\quad \gamma^2>4\delta;$$

$$\alpha\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi''\|_2^2\geq 2(\psi,\varphi')+2(\psi',\varphi''),$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2+\frac{\delta}{\gamma-1}\left(\alpha\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi''\|_2^2\right)a_1\geq \beta\|\varphi'\|_2^2+\delta\|\varphi''\|_2^2+\frac{2\delta}{\gamma-1}\left[(\psi,\varphi')+(\psi',\varphi'')\right]a_1,$$

*где* $a_1=1+e^{3t_1/(\gamma-1)}$, *тогда из существования классического решения* $u=u(t,x)$, *удовлетворяющего условию* $u(t,x)$, $u_t(t,x)\in C\left[R^1\right]\cap W_2^1\left(R^1\right)$ *на отрезке* $t\in[0,t_1]$, *следует существование единственного глобального классического решения задачи Коши* (0.1), (0.2), *для которого в пространстве* $C\left[R^1\right]$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_C=\sup_{x\in R^1}|u(t,x)|\leq ae^{bt},\quad a,b-\text{const},\quad t\in \overline{R}_+^1.$$

(Постоянные $a$, $b$, зависящие от параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ и начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, определяются в ходе доказательства теоремы.)

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функционал

$$y(t)=(u,u)+(u_x,u_x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u^2+u_x^2\right)dx=\|u\|_{W_2^1}^2,\quad t\in[0,t_1].\tag{3.1}$$

Применяя к значениям производной функционала (3.1): $y'(t)=2(u,u_t)+2(u_x,u_{tx})$, и ее квадрата: $\left[y'(t)\right]^2$, неравенство Коши–Буняковского: $|(\varphi,\psi)|\leq\|\varphi\|_2\|\psi\|_2$, и обозначая через

$$z(t)=(u_t,u_t)+(u_{tx},u_{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_t^2+u_{tx}^2\right)dx=\|u_t\|_{W_2^1}^2,\quad t\in[0,t_1],\tag{3.2}$$

еще один функционал, связанный с уравнением (0.1), выводим вспомогательные оценки:

$$y'(t)\leq y(t)+z(t),\tag{3.3}$$

и

$$\left[y'(t)\right]^2\leq 4y(t)z(t).\tag{3.4}$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u_t=u_t(t,x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_2^2+\|u_{tx}\|_2^2-\beta\|u_x\|_2^2-\delta\|u_{xx}\|_2^2\right)+\|u_{tx}\|_2^2-2(uu_x,u_{tx})=0,$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0,t]$ и обозначая $E_1=\|\psi\|_{W_2^1}^2-\beta\|\varphi'\|_2^2-\delta\|\varphi''\|_2^2$, имеем

$$z(t)+2\int_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau=E_1+\beta\|u_x\|_2^2+\delta\|u_{xx}\|_2^2+4\int_0^t(uu_x,u_{\tau x})\,d\tau.\tag{3.5}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, оценим абсолютную величину интеграла в правой части (3.5):

$$2\left|\int_0^t(uu_x,u_{\tau x})\,d\tau\right|\leq\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}u^2u_x^2dx+\int_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau\leq$$

(применяя оценку (2.7) решения $u = u(t,x)$ на временном отрезке $[0,t_1]$)

$$\leq \int_0^t h_5^2(\tau)\|u_x\|_2^2\,d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau \leq$$

(обозначая $\max_{\tau\in[0,t_1]} h_5^2(\tau) = c_9^2$)

$$\leq c_9^2\int_0^t \|u_x\|_2^2\,d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau.$$

Таким образом,

$$2\int_0^t (uu_x, u_{\tau x})\,d\tau \leq c_9^2\int_0^t \|u_x\|_2^2\,d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau, \quad t\in[0,t_1]. \tag{3.6}$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u_x = u_x(t,x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\alpha\|u_x\|_2^2 + \gamma\|u_{xx}\|_2^2\right) = (u_{tt}, u_x) + (u_{tx}, u_{xx}) + (u_{ttx}, u_{xx}) + 2(uu_x, u_{xx})$$

откуда, интегрируя по отрезку $[0,t]$, имеем

$$\begin{aligned}\alpha\|u_x\|_2^2 + \gamma\|u_{xx}\|_2^2 = \alpha\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 + 2\int_0^t (u_{\tau\tau}, u_x)\,d\tau + \\ + 2\int_0^t (u_{\tau\tau x}, u_{xx})\,d\tau + 2\int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx})\,d\tau + 4\int_0^t (uu_x, u_{xx})\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Первые два интеграла в правой части равенства (3.7) можно вычислить и затем оценить, применяя неравенство Коши–Буняковского:

1) используя равенство $(u_{\tau\tau}, u_x) = (u_\tau, u_x)_\tau - (u_\tau, u_{\tau x})$, имеем цепочку равенств и неравенств

$$2\int_0^t (u_{\tau\tau}, u_x)\,d\tau = 2(u_t, u_x) - 2(\psi, \varphi') - \int_0^t u_\tau^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} d\tau \leq 2\|u_t\|_2\|u_x\|_2 - 2(\psi,\varphi') \leq \|u_t\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 - 2(\psi,\varphi'); \tag{3.8}$$

2) аналогично, используя равенство $(u_{\tau\tau x}, u_{xx}) = (u_{\tau x}, u_{xx})_\tau - (u_{\tau x}, u_{\tau xx})$, получаем цепочку равенств и неравенств

$$\begin{aligned}2\int_0^t (u_{\tau\tau x}, u_{xx})\,d\tau = 2(u_{tx}, u_{xx}) - 2(\psi', \varphi'') - \int_0^t u_{\tau x}^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} d\tau \leq 2\|u_{tx}\|_2\|u_{xx}\|_2 - 2(\psi',\varphi'') \leq \\ \leq \|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 - 2(\psi',\varphi'').\end{aligned} \tag{3.9}$$

Для третьего интеграла в правой части равенства (3.7), имеем

$$2\int_0^t (u_{\tau x}, u_{xx})\,d\tau \leq \int_0^t \left(\|u_{\tau x}\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2\right)d\tau \leq \int_0^t z(\tau)\,d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau. \tag{3.10}$$

Наконец, оценивая четвертый интеграл в правой части равенства (3.7), получаем

$$2\int_0^t (uu_x, u_{xx})\,d\tau \leq \int_0^t \left(\|uu_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2\right)d\tau \leq c_9^2\int_0^t y(\tau)\,d\tau + \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau. \tag{3.11}$$

С учетом полученных оценок из равенства (3.7) выводим

$$\begin{aligned}(\alpha-1)\|u_x\|_2^2 + (\gamma-1)\|u_{xx}\|_2^2 \leq \alpha\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi,\varphi') - 2(\psi',\varphi'') + \\ + z(t) + \int_0^t z(\tau)\,d\tau + 2c_9^2\int_0^t y(\tau)\,d\tau + 3\int_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau.\end{aligned}$$

Откуда, полагая $\alpha > 1$ и $\gamma_1 = \gamma - 1 > 0$, и обозначая $c_{10} = \gamma_1^{-1}\left(\alpha\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 - 2(\psi,\varphi') - 2(\psi',\varphi'')\right)$, $H_1(t) = \gamma_1^{-1}\left(z(t) + \int_0^t z(\tau)\,d\tau + 2c_9^2\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right)$, следует интегральное неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \le c_{10} + H_1(t) + 3\gamma_1^{-1}\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_2^2\,d\tau, \quad t \in [0,t_1]. \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12) при выполнении условия $c_{10} \ge 0$, т.е. $\alpha\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 \ge 2(\psi,\varphi') + 2(\psi',\varphi'')$, согласно лемме Гронуолла [9, § 1.1] следует оценка

$$\begin{gathered}\|u_{xx}\|_2^2 \le c_{10} + H_1(t) + 3\gamma_1^{-1}\int\limits_0^t [c_{10} + H_1(\tau)]e^{3\gamma_1^{-1}(t-\tau)}d\tau \le \\ \le c_{10} + H_1(t) + c_{10}e^{3\gamma_1^{-1}t} + 3\gamma_1^{-1}e^{3\gamma_1^{-1}t}\int\limits_0^t H_1(\tau)\,d\tau.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Интегрируя по частям, оценим на отрезке $[0,t_1]$ интеграл в правой части последнего неравенства

$$\begin{gathered}\gamma_1\int\limits_0^t H_1(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau + \tau\int\limits_0^\tau z(s)\,ds\Bigg|_0^t - \int\limits_0^t \tau z(\tau)\,d\tau + 2c_9^2\left(\tau\int\limits_0^\tau y(s)\,ds\Bigg|_0^t - \int\limits_0^t \tau y(\tau)\,d\tau\right) = \\ \le (1+t_1)\int\limits_0^t z(s)\,ds + 2c_9^2 t_1\int\limits_0^t y(s)\,ds.\end{gathered}$$

С учетом последнего неравенства и обозначая $a_2 = \gamma_1^{-1}e^{3\gamma_1^{-1}t_1}$, $c_{11} = c_{10}(1 + \gamma_1 a_2)$, $c_{12} = \gamma_1^{-1}(1 + 3(1+t_1)a_2)$, $c_{13} = 2\gamma_1^{-1}c_9^2(1 + 3t_1a_2)$ оценка (3.13) на отрезке $[0,t_1]$ примет вид

$$\|u_{xx}\|_2^2 \le c_{11} + \gamma_1^{-1}z(t) + c_{12}\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau + c_{13}\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau, t \in [0,t_1]. \tag{3.14}$$

Применяя полученные оценки (3.6), (3.14) к равенству (3.5), имеем

$$\gamma_1^{-1}(\gamma - \delta - 1)z(t) \le E_1 + c_{11}\delta + \beta y(t) + \left(c_{13}\delta + 2c_9^2\right)\int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau + (c_{12}\delta + 2)\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau. \tag{3.15}$$

Полагая $\gamma > 1 + \delta$ и $E_1 + c_{11}\delta \ge 0$, т.е. $\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \gamma_1^{-1}\delta\left(\alpha\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2\right)(1 + \gamma_1 a_2) \ge \beta\|\varphi'\|_2^2 + \delta\|\varphi''\|_2^2 + 2\gamma_1^{-1}\delta[(\psi,\varphi') + (\psi',\varphi'')](1 + \gamma_1 a_2)$, и обозначая $c_{14} = \gamma_1/(\gamma_1 - \delta)$, $c_{15} = c_{14}(E_1 + c_{11}\delta)$, $c_{16} = c_{14}\beta$, $c_{17} = c_{14}\left(c_{13}\delta + 2c_9^2\right)$, $c_{18} = c_{14}(c_{12}\delta + 2)$, $H_2(t) = c_{15} + c_{16}y(t) + c_{17}\int_0^t y(\tau)\,d\tau$, из соотношения (3.15) выводим интегральное неравенство

$$z(t) \le H_2(t) + c_{18}\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда по лемме Гронуолла следует неравенство на отрезке $[0,t_1]$

$$z(t) \le H_2(t) + c_{18}\int\limits_0^t H_2(\tau)e^{c_{18}(t-\tau)}d\tau \le H_2(t) + a_3\int\limits_0^t H_2(\tau)\,d\tau, \tag{3.16}$$

где обозначено $a_3 = c_{18}e^{c_{18}t_1}$.

Интегрируя по частям, оценим при $t \in [0, t_1]$ интеграл в правой части (3.16):

$$\int_0^t H_2(\tau)\,d\tau \le c_{15}t_1 + c_{16}\int_0^t y(\tau)\,d\tau + c_{17}\left(\tau\int_0^\tau y(s)\,ds\Big|_0^t - \int_0^t \tau y(\tau)\,d\tau\right) \le c_{15}t_1 + (c_{16} + c_{17}t_1)\int_0^t y(\tau)\,d\tau. \qquad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16) и обозначая $c_{19} = c_{15}(1 + t_1 a_3)$, $c_{20} = c_{17} + (c_{16} + c_{17}t_1)a_3$, получаем

$$z(t) \le c_{19} + c_{16}y(t) + c_{20}\int_0^t y(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \qquad (3.18)$$

Интегрируя обе части неравенства (3.5) и учитывая неравенство (3.18), получаем интегральное неравенство

$$y(t) \le c_{21} + c_{22}\int_0^t y(\tau)\,d\tau, \qquad (3.19)$$

где обозначено $c_{21} = y(0) + c_{19}t_1$, $c_{22} = (1 + c_{16} + c_{20}t_1)$.

Из неравенства (3.19) в силу леммы Гронуолла следует оценка

$$y(t) \le c_{21}e^{c_{22}t}, \quad t \ge 0,$$

и, значит, классическое решение $u = u(t,x)$ при $t \ge 0$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ и поэтому справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1}|u(t,x)| \le \|u\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u^2 + u_x^2\right)dx\right)^{1/2} \le \sqrt{c_{21}}e^{c_{22}t/2}, \quad t \in \overline{R}_+^1,$$

обеспечивающая существование глобального решения задачи Коши (0.1), (0.2).

**Замечание 3.** При выполнении условий теоремы 3 классическое решение $u = u(t,x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) удовлетворяет требованиям (0.3): $u(t,x)$, $u_t(t,x) \in C\left[R^1\right] \cap W_2^1\left(R^1\right)$, для всех $t \ge 0$.

## 4. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Предполагая выполнение требования (0.3): $u$, $u_t \in C\left[R^1\right] \cap W_2^1\left(R^1\right)$, $t \in [0, t_1]$, рассмотрим условия разрушения решения $u = u(t,x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) на некотором временном отрезке $[0, t_2] \subseteq [0, t_1]$, другими словами, получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала $y(t) = \|u(t,\cdot)\|_{W_2^1}^2$ на отрезке $[0, t_2]$. Отрезок $[0, t_2]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялось неравенство $y(t) > 0$, которое следует из начального условия

$$y(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0. \qquad (4.1)$$

**Теорема 4.** *Пусть параметры* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ *и начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(4)}\left[R^1\right] \cap W_2^1\left(R^1\right)$ *удовлетворяют условиям* $\gamma > \delta + 2$, $\gamma^2 > 4\delta$,

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \beta\|\varphi'\|_2^2 + \delta\|\varphi''\|_2^2 + 2\left(\varphi, (\varphi')^2\right) > (\varphi', \alpha\psi + \psi') + \gamma(\varphi'', \psi'),$$

$$(1 + \alpha)\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi''\|_2^2 \ge 2(\psi, \varphi'' + \varphi' - \varphi) + 2(\psi', \varphi'),$$

$$(\gamma-2)\|\psi\|^2_{W_2^1}+a_5\delta\left[(\alpha+1)\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi''\|_2^2\right]>$$
$$>(\gamma-2)\left(\beta\|\varphi'\|_2^2+\delta\|\varphi''\|_2^2\right)+a_5\delta[2(\psi,\varphi''+\varphi'-\varphi)+2(\psi',\varphi'')],$$

$$(\varphi,\psi)+(\varphi',\psi')>\frac{1}{2}a_7\|\varphi\|^2_{W_2^1}>0,$$

*тогда время $t_0$ существования решения не может быть сколь угодно большим: решение разрушается за конечное время $T_0$ и для времени существования решения справедлива оценка сверху*

$$t_0<T_0=\frac{1}{c_{35}}\|\varphi\|^{-2\varrho}_{W_2^1},$$

*притом для функционала $y(t)$ имеет место оценка снизу*

$$y(t)\geq\left(\|\varphi\|^{-2\varrho}_{W_2^1}-c_{35}t\right)^{-1/\varrho}e^{a_6t/\varrho}.$$

(Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные $a_5$, $a_6$, $a_7$, $\varrho$ и $c_{35}$ определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ и начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$.)

**Доказательство.** Вычислим производную второго порядка функционала (3.1) и выразим ее значение через функционал (3.2):

$$\frac{1}{2}y''(t)+(u_{xx},u_{tt})-(u,u_{tt})=z(t). \tag{4.2}$$

Учитывая уравнение (0.1) и интегрируя по частям, преобразуем третье слагаемое в левой части равенства (4.2)

$$(u,u_{tt})=-\alpha(u_x,u_t)+\beta\|u_x\|_2^2-(u_x,u_{tx})+(u_{xx},u_{tt})-\gamma(u_{xx},u_{tx})+\delta\|u_{xx}\|_2^2+2\left(u,u_x^2\right). \tag{4.3}$$

Из равенств (4.2) и (4.3) следует представление

$$z(t)+\beta\|u_x\|_2^2+\delta\|u_{xx}\|_2^2=\frac{1}{2}y''(t)+\alpha(u_x,u_t)+(u_x,u_{tx})+\gamma(u_{xx},u_{tx})-2\left(u,u_x^2\right), \tag{4.4}$$

из которого, в частности, можно найти значение

$$\frac{1}{2}y''(0)=\|\psi\|^2_{W_2^1}+\beta\|\varphi'\|_2^2+\delta\|\varphi''\|_2^2+2\left(\varphi,(\varphi')^2\right)-(\varphi',\alpha\psi+\psi')-\gamma(\varphi'',\psi').$$

Потребуем, чтобы в дополнение к условию (4.1) выполнялись требования $y'(0)>0$ и $y'(0)>0$, т.е. $(\varphi,\psi)+(\varphi',\psi')>0$ и $\|\psi\|^2_{W_2^1}+\beta\|\varphi'\|_2^2+\delta\|\varphi''\|_2^2+2\left(\varphi,(\varphi')^2\right)>\alpha(\varphi',\psi)+(\varphi',\psi')+\gamma(\varphi'',\psi')$, тогда найдется отрезок $[0,t_3]\subseteq[0,t_2]$ на котором для функционала (3.1) справедливы неравенства

$$y(t)>0,\quad y'(t)\geq 0\quad \text{и}\quad y''(t)\geq 0\quad \text{при}\quad t\in[0,t_3]. \tag{4.5}$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $u=u(t,x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной $x$ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, интегрируя по частям, получаем

$$(u_{tt},u)+\alpha(u_t,u_x)-\beta\|u_x\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|_2^2-(u_{tt},u_{xx})+\gamma(u_{tx},u_{xx})-\delta\|u_{xx}\|_2^2-2\left(u,u_x^2\right)=0,$$

откуда, интегрируя обе части по отрезку $[0,t]$, имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u_x\|_2^2+\int_0^t(u_{\tau\tau},u)\,d\tau+\alpha\int_0^t(u_\tau,u_x)\,d\tau+\gamma\int_0^t(u_{\tau x},u_{xx})\,d\tau=\\=\frac{1}{2}\|\varphi'\|_2^2+\beta\int_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau+\delta\int_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau+\int_0^t(u_{\tau\tau},u_{xx})\,d\tau+2\int_0^t\left(u,u_x^2\right)d\tau.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Применяя соотношения $(u_{\tau\tau},u)=(u_\tau,u)_\tau-\|u_\tau\|_2^2$ и $(u_{\tau\tau},u_{xx})=(u_\tau,u_{xx})_\tau+\|u_{\tau x}\|_2^2$, вычислим соответственно первый интеграл в левой части и третий интеграл в правой части равенства (4.6):

$$\int_0^t (u_{\tau\tau},u)\,d\tau=\int_0^t (u_\tau,u)_\tau\,d\tau-\int_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau=(u_t,u)-(\psi,\varphi)-\int_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau$$

и

$$\int_0^t (u_{\tau\tau},u_{xx})\,d\tau=\int_0^t (u_\tau,u_{xx})_\tau\,d\tau+\int_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau=(u_t,u_{xx})-(\psi,\varphi'')+\int_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau.$$

Используя полученные равенства, перепишем (4.6) в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u_x\|_2^2=\frac{1}{2}\|\varphi'\|_2^2+(\psi,\varphi)-(\psi,\varphi'')-(u_t,u)-\alpha\int_0^t(u_\tau,u_x)\,d\tau-\gamma\int_0^t(u_{\tau x},u_{xx})\,d\tau+\\+\beta\int_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau+\delta\int_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau+(u_t,u_{xx})+\int_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau+\int_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+2\int_0^t\left(u,u_x^2\right)d\tau.\end{gathered}\tag{4.7}$$

Складывая равенство (4.7) с равенством (3.7), переписанным в виде

$$\begin{gathered}\alpha\|u_x\|_2^2+\gamma\|u_{xx}\|_2^2=\alpha\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi''\|_2^2-2(\psi,\varphi')-2(\psi',\varphi'')+\\+2(u_t,u_x)+2(u_{tx},u_{xx})+4\int_0^t(uu_x,u_{xx})\,d\tau,\end{gathered}$$

получим

$$\begin{gathered}(\alpha+1)\|u_x\|_2^2+\gamma\|u_{xx}\|_2^2=E_2+2(u_t,u_{xx}+u_x-u)+2(u_{tx},u_{xx})+2\beta\int_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau+\\+2\delta\int_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau+2\int_0^t\|u_\tau\|_2^2\,d\tau+2\int_0^t\|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau+4\int_0^t\left(u,u_x^2\right)d\tau+4\int_0^t(uu_x,u_{xx})\,d\tau-\\-2\alpha\int_0^t(u_\tau,u_x)\,d\tau-2\gamma\int_0^t(u_{\tau x},u_{xx})\,d\tau,\end{gathered}\tag{4.8}$$

где $E_2=(1+\alpha)\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi''\|_2^2+2(\psi,\varphi-\varphi'-\varphi'')-2(\psi',\varphi'')$.

Применяя неравенство Коши–Буняковского и оценки

$$\begin{gathered}2\int_0^t(uu_x,u_{xx})\,d\tau\le\int_0^t\left(\|uu_x\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2\right)d\tau\le\int_0^t\left(\sup_{x\in R^1}|u(\tau,x)|\right)^2d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx+\int_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau\le\\\le c_9^2\int_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau+\int_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau\end{gathered}$$

и

$$\int_0^t\left(u,u_x^2\right)d\tau\le\int_0^t\sup_{x\in R^1}|u(\tau,x)|\,d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx\le\int_0^t h_5(\tau)\|u_x\|_2^2\,d\tau\le c_9\int_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau,$$

увеличим правую часть равенства (4.8)

$$\begin{gathered}\alpha\|u_x\|_2^2+(\gamma-2)\|u_{xx}\|_2^2\le E_2+y(t)+3z(t)+(\alpha+\gamma+2)\int_0^t z(\tau)\,d\tau+\\+\left(\alpha+2\beta+4c_9+2c_9^2\right)\int_0^t\|u_x\|_2^2\,d\tau+(\gamma+2\delta+1)\int_0^t\|u_{xx}\|_2^2\,d\tau.\end{gathered}\tag{4.9}$$

Пусть выполнены следующие условия $\gamma_2 = \gamma - 2 > 0$ и $E_2 \geq 0$, тогда, обозначая $c_{23} = \max\left\{\left(\alpha + 2\beta + 4c_9 + 2c_9^2\right)/\alpha, (\gamma + 2\delta + 1)/\gamma_2\right\}$, и $H_3(t) = E_2 + y(t) + 3z(t) + (\alpha + \gamma + 2)\int_0^t z(\tau)\,d\tau$ приходим к интегральному неравенству

$$\alpha\|u_x\|_2^2 + \gamma_2\|u_{xx}\|_2^2 \leq H_3(t) + c_{23}\int_0^t \left[\alpha\|u_x\|_2^2 + \gamma_2\|u_{xx}\|_2^2\right]d\tau.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, интегрируя по частям и обозначая $a_4 = c_{23}e^{c_{23}t_1}$, получим цепочку неравенств

$$\alpha\|u_x\|_2^2 + \gamma_2\|u_{xx}\|_2^2 \leq H_3(t) + a_4\int_0^t H_3(\tau)\,d\tau \leq (1 + t_1a_4)E_2 + y(t) + a_4\int_0^t y(\tau)\,d\tau + 3z(t) +$$

$$+ (\alpha + \gamma + 2 + 3a_4)\int_0^t z(\tau)\,d\tau + a_4(\alpha + \gamma + 2)\left[\tau\int_0^\tau z(s)\,ds\Big|_0^t - \int_0^t \tau z(\tau)\,d\tau\right] \leq$$

$$\leq (1 + t_1a_4)E_2 + y(t) + a_4\int_0^t y(\tau)\,d\tau + 3z(t) + ((\alpha + \gamma + 2)(1 + t_1a_4) + 3a_4)\int_0^t z(\tau)\,d\tau$$

и, следовательно, обозначая $c_{24} = (1 + t_1a_4)E_2/\gamma_2$, $c_{25} = ((\alpha + \gamma + 2)(1 + t_1a_4) + 3a_4)/\gamma_2$, имеем

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq c_{24} + \frac{y(t)}{\gamma_2} + \frac{a_4}{\gamma_2}\int_0^t y(\tau)\,d\tau + \frac{z(t)}{\gamma_2} + c_{25}\int_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0, t_3]. \tag{4.10}$$

Далее сложим соответствующие части равенств (4.4) и (3.5), предварительно умножив обе части равенства (3.5) на пока неопределенное положительное число $\varepsilon$:

$$\begin{gathered}(\varepsilon + 2)z(t) + 2\varepsilon\int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau = 4\varepsilon\int_0^t (uu_x, u_{\tau x})\,d\tau + \varepsilon E_1 + (\varepsilon - 2)\left(\beta\|u_x\|_2^2 + \delta\|u_{xx}\|_2^2\right) + \\ + y''(t) + 2\alpha(u_x, u_t) + 2(u_x, u_{tx}) + 2\gamma(u_{xx}, u_{tx}) - 4\left(u, u_x^2\right).\end{gathered} \tag{4.11}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (3.6) и $\left(u, u_x^2\right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|u|u_x^2dx \leq$ $\leq \sup_{x\in R^1}|u|\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx \leq c_9\|u_x\|_2^2$, увеличим правую часть равенства (4.11):

$$\begin{gathered}(\varepsilon + 2)z(t) + 2\varepsilon\int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau \leq 2\varepsilon c_9^2\int_0^t \|u_x\|_2^2\,d\tau + 2\varepsilon\int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2\,d\tau + \varepsilon E_1 + y''(t) + 4c_9\|u_x\|_2^2 + \\ + (\varepsilon - 2)\left(\beta\|u_x\|_2^2 + \delta\|u_{xx}\|_2^2\right) + \alpha\left(\|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\right) + \|u_x\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma\left(\|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2\right).\end{gathered}$$

Откуда, применяя неравенства $\|u_t\|_2^2 \leq z(t)$, $\|u_{tx}\|_2^2 \leq z(t)$, $\|u_x\|_2^2 \leq y(t)$, приводя подобные и обозначая $c_{26} = \alpha + (\varepsilon - 2)\beta + 4c_9 + 1$, $c_{27} = \gamma + (\varepsilon - 2)\delta$, выводим

$$(\varepsilon - \alpha - \gamma + 1)z(t) \leq \varepsilon E_1 + y''(t) + c_{26}y(t) + 2\varepsilon c_9^2\int_0^t y(\tau)\,d\tau + c_{27}\|u_{xx}\|_2^2. \tag{4.12}$$

Используя неравенство (4.10), увеличим правую часть (4.12):

$$\begin{gathered}\left(\varepsilon - \alpha - \gamma - \frac{c_{27}}{\gamma_2} + 1\right)z(t) \leq \varepsilon E_1 + c_{24}c_{27} + y''(t) + \left(c_{26} + \frac{c_{27}}{\gamma_2}\right)y(t) + \\ + \left(\frac{a_4c_{27}}{\gamma_2} + 2\varepsilon c_9^2\right)\int_0^t y(\tau)\,d\tau + c_{25}c_{27}\int_0^t z(\tau)\,d\tau.\end{gathered}$$

Отсюда, полагая $\gamma-\delta-2>0$ и

$$\varepsilon-\alpha-\gamma-\frac{c_{27}}{\gamma_2}+1>0, \tag{4.13}$$

т.е.

$$\varepsilon>\frac{(\alpha+\gamma)(\gamma-2)-2\delta+2}{\gamma-\delta-2}, \tag{4.14}$$

и обозначая $c_{28}=\varepsilon-\alpha-\gamma-\gamma_2^{-1}c_{27}+1$, $c_{29}=(\varepsilon E_1+c_{24}c_{27})c_{28}^{-1}$, $c_{30}=\left(c_{26}+\gamma_2^{-1}c_{27}\right)c_{28}^{-1}$, $c_{31}=\left(2\varepsilon c_9^2+\gamma_2^{-1}a_4c_{27}\right)c_{28}^{-1}$, $c_{32}=c_{25}c_{27}c_{28}^{-1}$, $H_4(t)=c_{29}+c_{30}y(t)+c_{28}^{-1}y''(t)+c_{31}\int_0^t y(\tau)\,d\tau$, придем к интегральному неравенству на отрезке $[0,t_3]$

$$z(t)\le H_4(t)+c_{32}\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau. \tag{4.15}$$

Для того чтобы выполнялось неравенство $H_4(t)\ge 0$, достаточно потребовать, учитывая (4.5) и (4.14), выполнение неравенства $c_{29}\ge 0$, т.е. $\varepsilon[\gamma_2E_1+\delta a_5E_2]\ge(2\delta-\gamma)a_5E_2$, где $a_5=1+t_1a_4$, поэтому при выполнении условия $\gamma_2E_1+\delta a_5E_2>0$ или в подробной записи $\gamma_2\|\psi\|^2_{W_2^1}+$ $+\,a_5\delta\left[(\alpha+1)\|\varphi'\|_2^2+\gamma\|\varphi''\|_2^2\right]>\ \gamma_2\left(\beta\|\varphi'\|_2^2+\delta\|\varphi''\|_2^2\right)+\ a_5\delta[2(\psi,\varphi''+\varphi'-\varphi)+2(\psi',\varphi'')]$, получается оценка снизу параметра $\varepsilon$:

$$\varepsilon\ge\frac{(2\delta-\gamma)a_5E_2}{\gamma_2E_1+\delta a_5E_2}. \tag{4.16}$$

Теперь, из неравенства (4.15), применяя лемму Гронуолла, выводим оценку

$$z(t)\le H_4(t)+c_{32}e^{c_{32}t_1}\int\limits_0^t H_4(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,t_3].$$

Отсюда, интегрируя по частям, обозначая $a_6=c_{32}e^{c_{32}t_1}$ и используя неравенство $\int_0^t y(\tau)\,d\tau=$ $=\tau y(\tau)\big|_0^t-\int_0^t\tau y'(\tau)\,d\tau\le ty(t)\le t_1y(t)$, выводим

$$z(t)\le c_{29}(1+t_1a_6)+c_{30}y(t)+c_{28}^{-1}y''(t)+a_6c_{28}^{-1}y'(t)+t_1(c_{31}+a_6(c_{30}+t_1c_{31}))\,y(t).$$

Таким образом, обозначая $c_{33}=c_{28}c_{29}(1+a_6t_1)$ и $c_{34}=c_{28}t_1(c_{31}+a_6(c_{30}+t_1c_{31}))$, имеем

$$c_{28}z(t)\le c_{33}+c_{34}y(t)+a_6y'(t)+y''(t),\quad t\in[0,t_3]. \tag{4.17}$$

Уменьшим левую часть неравенства (4.17), применив оценку (3.4):

$$y(t)\,y''(t)-\frac{c_{28}}{4}[y'(t)]^2+a_6y(t)\,y'(t)+c_{34}y^2(t)+c_{33}y(t)\ge 0. \tag{4.18}$$

Потребуем, чтобы коэффициент при квадрате производной в (4.18) удовлетворял условию $c_{28}/4>1$, что подразумевает автоматическое выполнение условия (4.13) и, значит,

$$\varepsilon>\frac{(3+\alpha+\gamma)\gamma_2+\gamma-2\delta}{\gamma_2-\delta}. \tag{4.19}$$

Теперь, рассматривая одновременно оценки (4.16) и (4.19), приходим к определению ранее неопределенного числа $\varepsilon$:

$$\varepsilon=\varepsilon_0>\max\left\{\frac{(3+\alpha+\gamma)\gamma_2+\gamma-2\delta}{\gamma_2-\delta},\frac{(2\delta-\gamma)a_5E_2}{\gamma_2E_1+\delta a_5E_2}\right\}, \tag{4.20}$$

при этом дальнейшие рассуждения проводим, полагая во всех соотношениях, в которых фигурирует число $\varepsilon$, его равным $\varepsilon_0$.

Далее, увеличим левую часть неравенства (4.18), потребовав выполнение оценки

$$c_{33} + c_{34}y(t) \le \omega y(t), \quad t \in [0, t_3], \tag{4.21}$$

где $\omega$ – пока неопределенное положительное число. Тогда из (4.5) и (4.21) с необходимостью следует

$$\omega = \omega_0 \ge c_{34} + c_{33}\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2}. \tag{4.22}$$

При выполнении условий (4.20) и (4.22) дифференциальное неравенство (4.18) примет вид

$$y(t)\,y''(t) - (\varrho + 1)[y'(t)]^2 + a_6 y(t)\,y'(t) + \omega_0 y^2(t) \ge 0, \quad t \in [0, t_3], \tag{4.23}$$

где $\varrho = c_{28}/4 - 1 > 0$.

Применяя к неравенству (4.23) результат, приведенный в монографии [11, Приложение, § 2, уравнение (2.9), Теорема 2], заключаем, что если в дополнение к ранее приведенным условиям потребовать выполнения условия $y'(0) > a_7\, y(0)$, $a_7 = a_6/\varrho + \sqrt{\omega_0/\varrho}$, т.е. $(\varphi,\psi) + (\varphi',\psi') > \frac{1}{2}a_7\|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$, тогда время $t_0$ существования решения не может быть сколь угодно большим: $t_0 < T_0 = c_{35}^{-1}\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2\varrho}$, где $c_{35} = \varrho\,(y(0))^{-1-\varrho}\left[(y'(0) - y(0)\,a_6/\varrho)^2 - (y(0))^2\,\omega_0/\varrho\right] > 0$, т.е.

$$c_{35} = \varrho\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2(\varrho+1)}\left[\left(2(\varphi,\psi) + 2(\varphi',\psi') - \frac{a_6}{\varrho}\|\varphi\|_{W_2^1}^2\right)^2 - \frac{\omega_0}{\varrho}\|\varphi\|_{W_2^1}^4\right] > 0,$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу $y(t) \ge e^{a_6 t/\varrho}\left(\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2\varrho} - c_{35}t\right)^{-1/\varrho}$, и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ильичев А.Т.* Устойчивость локализованных волн в нелинейно-упругих стержнях. М.: Физматлит, 2009. С. 159.
2. *Куликовский А.Г., Гвоздовская Н.И.* О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Тр. МИАН. 1998. Т. 223. С. 63–73.
3. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998. С. 436.
4. *Умаров Х.Г.* Задача Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне // Сиб. матем. журнал. 2021. Т. 62. № 1. С. 198–209.
5. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
6. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators. Part I: General Theory. N.Y.: Interscience, 1958. xiv + 858 p. = *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 895.
7. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 87–202.
8. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
9. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002. 193 p.
10. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
11. *Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Физический факультет МГУ, 2014. С. 364.