ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 9, с. 1415–1427

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.61

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЕКТОРИЗАЦИИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ $P \otimes P$ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ P[1)]

© 2023 г. А. И. Глущенко[1,*], К. А. Ласточкин[1,]**

[1] 117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия

**e-mail: aiglush@ipu.ru*

***e-mail: lastconst@ipu.ru*

Поступила в редакцию 20.02.2022 г.
Переработанный вариант 20.02.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

В работе предложен конструктивный алгоритм вычисления матриц исключения $\overline{L}$ и дублирования $\overline{D}$ для операции векторизации произведения $P \otimes P$ при $P = P^{\mathrm{T}}$. Матрица $\overline{L}$, получаемая в соответствии с алгоритмом, позволяет формировать из упомянутого произведения вектор, содержащий только уникальные элементы. Матрица $\overline{D}$, в свою очередь, позволяет выполнять обратное преобразование. Предложена программная реализация процедуры вычисления матриц $\overline{L}$ и $\overline{D}$. На основе отмеченных результатов предложена новая операция $\operatorname{vecu}(.)$, определенная над произведением $P \otimes P$ при $P = P^{\mathrm{T}}$ и описаны ее свойства. Показаны отличия и преимущества разработанной операции от известных операций $\operatorname{vec}(.)$ и $\operatorname{vech}(.)$ $(\operatorname{vecd}(.))$ в случае их применения для векторизации произведения $P \otimes P$ при $P = P^{\mathrm{T}}$. На примере параметризации алгебраического уравнения Риккати продемонстрирована эффективность операции $\operatorname{vecu}(.)$ для снижения перепараметризации задачи идентификации неизвестных параметров. Библ. 14. Фиг. 3.

Ключевые слова: векторизация, матрица исключения, матрица дублирования, произведение Кронекера, уникальные элементы матрицы, снижение размерности, перепараметризация, уравнение Риккати.

DOI: 10.31857/S0044466923090090, **EDN:** ROMVVI

1. ВВЕДЕНИЕ

Матричный оператор $\operatorname{vec}(.)$, векторизующий квадратную матрицу, располагая ее столбцы друг под другом, широко используется для облегчения математических вычислений с матрицами [1, 2]. В частности, линейное матричное уравнение с матрицей неизвестных P с помощью $\operatorname{vec}(.)$ преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, к которой применим весь известный арсенал аналитических и численных методов поиска ее решения. В [1, 2] также вводятся два варианта данной операции для случая, когда такая матрица является симметричной $P = P^{\mathrm{T}}$: $\operatorname{vech}(.)$ и $\operatorname{vecd}(.)$. Обе операции возвращают вектор-столбец, который содержит в себе только уникальные элементы матрицы P, т.е. ее ниже-треугольную часть. Для $\operatorname{vech}(.)$ и $\operatorname{vecd}(.)$ различается лишь порядок расположения таких элементов, при этом операции обладают сходными свойствами, ввиду чего в дальнейшем тексте работы без потери общности будет упоминаться только операция $\operatorname{vech}(.)$. Применение таких операций позволяет существенно сократить размерность получаемой после векторизации системы уравнений, а также в принципе гарантировать возможность получения решения системы уравнений (см. лемму 7.1 в [1]). Однако существуют задачи, в которых в матричных уравнениях матрица неизвестных параметров обладает более сложной симметрией по сравнению с уже упомянутым случаем $P = P^{\mathrm{T}}$. Например, если такая матрица является симметричной и состоит из блоков равной размерности, каждый из ко-

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Президента РФ (код проекта МД-1787.2022.4).

торых также является симметричной квадратной матрицей — $P \otimes P$, где $P = P^{\mathrm{T}}$. В этом случае при применении операции векторизации размерность решаемой задачи можно было бы сократить еще сильнее, поскольку повторяющихся элементов в такой матрице больше, чем в обычной симметричной. Однако ни одна из имеющихся операций $\mathrm{vec}(.)$, $\mathrm{vech}(.)$ не позволяет этого сделать. Ниже рассмотрим один из классов таких задач, в которых в качестве матрицы неизвестных возникает $P \otimes P$ при $P = P^{\mathrm{T}}$.

В настоящее время теория адаптивного управления предоставляет множество инструментов для решения проблем управления в условиях параметрической неопределенности, немоделируемой динамики, возмущений и пр. [3—5]. Известные подходы обеспечивают асимптотическую и экспоненциальную сходимость по параметрам и ошибке слежения, сходимость за конечное время.

При применении многих подобных методов первичной задачей является приведение исходной системы к линейному регрессионному уравнению (LRE) относительно неизвестных параметров [6]:

$$y = \omega\theta, \tag{1}$$

где $y \in \mathrm{R}^{N\times 1}$ — вектор измеримых выходных величин, $\omega \in \mathrm{R}^{N\times M}$ — измеримый регрессор, $\theta \in \mathrm{R}^{M\times 1}$ — вектор неизвестных параметров. Разумеется, желательно, чтобы размерность θ была минимально возможной для решения поставленной задачи. Для улучшения динамических свойств регрессора ω возможно применение различных схем предобработки, таких как DRE [7], MRE [8] для получения матричного квадратного регрессора $\Omega \in \mathrm{R}^{M\times M}$, а также DREM [6] для получения скалярного регрессора $\Delta \in \mathrm{R}$. Независимо от размерности регрессора, для идентификации неизвестных параметров θ обычно используются классические алгоритмы идентификации, такие как, gradient descent или least squares.

В целом методы теории адаптивного управления обладают рядом недостатков, одним из основных среди которых является отсутствие гарантий на качество получаемых в системе переходных процессов [9]. Например, асимптотическая или экспоненциальная сходимость не гарантирует отсутствие перерегулирования и/или колебательности. Поэтому становится актуальным применение методов теории адаптивного управления для задач, традиционно решаемых в рамках теории оптимального управления.

Теория оптимального управления позволяет гарантировать наилучшее возможное качество управления с точки зрения целевой функции, выбранной пользователем [10]. Для линейных систем классическим решением задачи оптимального управления является синтез регулятора, минимизирующего линейно-квадратичный (LQ) функционал от состояний и управлений на бесконечном времени [11, 12]. Параметры такого регулятора вычисляются на основе матрицы P, являющейся решением алгебраического уравнения Риккати (ARE).

Для синтеза LQ регулятора в адаптивной постановке одним из подходов является приведение ARE к виду (1). Для этого осуществляют [13] подстановку в него вместо неизвестных матриц объекта A и B их динамических оценок $\hat{A}$, $\hat{B}$ или некоторых измеримых сигналов. На основе идентификации неизвестных параметров полученной таким образом регрессии (1) и определяют искомую матрицу P. Однако задача идентификации матрицы P осложняется тем обстоятельством, что после приведения ARE к (1) вектор неизвестных параметров θ, кроме искомой матрицы P, включает в себя также перепараметризованную часть, определяемую выражением $\mathrm{vec}(P \otimes P)$. Как хорошо известно, решение задачи идентификации неизвестных параметров при наличии перепараметризации обладает рядом существенных недостатков (неудовлетворительное качество оценок, потеря возбуждения регрессором и пр.), поэтому актуальным является уменьшение числа перепараметризованных параметров или их полное исключение. Как уже упоминалось выше, единственным существующим на сегодняшний день подходом к уменьшению числа параметров в перепараметризованной части уравнения ARE, записанного в виде (1), является использование вместо $\mathrm{vec}(P \otimes P)$ процедуры частичной векторизации $\mathrm{vech}(P \otimes P)$. Однако в силу симметрии матрицы P и симметрии произведения $P \otimes P$ перепараметризованная часть в данной задаче содержит повторы и в нижне-треугольной части, а поэтому использование процедуры $\mathrm{vech}(P \otimes P)$ не является оптимальным и возвращает вектор с повторяющимися элементами. В литературе авторам не удалось обнаружить алгоритма операции векторизации $P \otimes P$, результатом которого является вектор, содержащий только уникальные элементы. Также не были обнаружены оценки на число уникальных элементов в произведении $P \otimes P$ для матрицы $P = P^{\mathrm{T}}$ произвольно выбранного размера. Необходимо упомянуть, что в работах [13, 14] декларативно упоминается необходимость наличия такой операции, но конструктивный алгоритм ее выполнения не приводится, а полученная в [13] формула для оценки числа уникальных параметров при некоторых значениях размера матрицы $P = P^{\mathrm{T}}$ выдает нецелочисленный ответ. Некоторые дополнительные пояснения по результатам работам [13, 14] приведены в разд. 2 настоящей статьи.

Таким образом, в развитие результатов работ [1, 2] для случая более сложной симметрии матрицы неизвестных параметров, целью настоящей работы является разработка алгоритма векторизации произведения $(P \otimes P)$ с целью получения вектора, включающего в себя только уникальные элементы такого произведения. Дополнительно будет получена зависимость числа уникальных элементов рассматриваемого произведения от размерности исходной матрицы P. Основным результатом работы является операция векторизации произведения $P \otimes P$ с исключением повторений, которая может быть использована как в задаче адаптивного LQ синтеза, так и в других задачах, в которых приходится оперировать выражением вида $P \otimes P$, $P = P^{\mathrm{T}}$.

1.1. Определения

Выпишем основные определения из [1], которые будут использоваться в настоящей работе.

Определение 1. Операция векторизации $\mathrm{vec}(.)$ заключается в преобразовании произвольной матрицы $M \in R^{q \times l}$ в вектор $\mathrm{vec}(M) \in R^{ql}$ путем записи столбцов один под другим.

Основные свойства операции $\mathrm{vec}(.)$:

1) $\mathrm{vec}(MNC) = \left(C^{\mathrm{T}} \otimes M\right)\mathrm{vec}(N)$;

2) $\mathrm{vec}(MN) = (I_m \otimes M)\mathrm{vec}(N) = \left(N^{\mathrm{T}} \otimes I_q\right)\mathrm{vec}(M)$,

где $I_q \in R^{q \times q}$ – единичная матрица, $N \in R^{l \times m}$, $C \in R^{m \times n}$.

Определение 2. Операция частичной векторизации $\mathrm{vech}(.)$ заключается в преобразовании некоторой матрицы $M = M^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$ в вектор $\mathrm{vech}(M) \in R^{k}$ путем записи столбцов нижне-треугольной части матрицы M один под другим:

$$\mathrm{vech}(M) = \left[m_{1,1}, m_{2,1}, \ldots, m_{n,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,2}, \ldots, m_{n-1,n-1}, m_{n-1,n}, m_{n,n}\right]^{\mathrm{T}},$$

где $k = \dfrac{n^2 + n}{2}$ – число уникальных элементов матрицы M.

Операция $\mathrm{vech}(.)$ выполняется над матрицей M путем умножения $\mathrm{vec}(M)$ на матрицу исключения (elimination matrix), а связь между операциями $\mathrm{vec}(M)$ и $\mathrm{vech}(M)$ задается с помощью матрицы возвращения (дублирования, duplication matrix):

$$\mathrm{vech}(M) = L\,\mathrm{vec}(M), \quad \mathrm{vec}(M) = D\,\mathrm{vech}(M),$$

где матрицы $D \in R^{n^2 \times k}$ и $L \in R^{k \times n^2}$ обладают следующими свойствами:

1) L имеет полный строчный ранг k;

2) $LL^{\mathrm{T}} = LD = I_k$;

3) $L^{\dagger} = L^{\mathrm{T}}$, где $L^{\dagger}$ – псевдоинверсия Мура-Пенроуза матрицы L;

4) $\mathrm{vec}(M) = DL\,\mathrm{vec}(M) = D\,\mathrm{vech}(M)$.

Определение 3. Матрица исключения $L \in R^{k \times n^2}$ для $M = M^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$ определяется следующим образом:

$$L = \sum_{i \geq j}\left(u_{ij} \otimes e_j^{\mathrm{T}} \otimes e_i^{\mathrm{T}}\right), \quad i, j = \overline{1, n},$$

где $e_i \in R^n$ – вектор, на i-й позиции в котором стоит единица, а на остальных – нули, $u_{ij} \in R^k$ – вектор, на $(j-1)n + i - \frac{1}{2}j(j-1)$ позиции которого стоит единица, а на остальных позициях – нули.

Определение 4. Матрица возвращения $D \in R^{n^2 \times k}$ для $M = M^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$ определяется следующим образом:

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{i \ge j} \left(u_{ij} \operatorname{vec}^{\mathrm{T}}(T_{ij})\right), \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $T_{ij} \in R^{n \times n}$ – матрица, заполненная нулями и содержащая единицы в позициях (i, j) и (j, i).

Пример 1. Выполним над $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_4 \end{bmatrix}$ операции $\operatorname{vec}(.)$ и $\operatorname{vech}(.)$:

$$\operatorname{vec}(M) = D \operatorname{vech}(M) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_2 & m_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$
$$\operatorname{vech}(M) = L \operatorname{vec}(M) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, а $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя работам [13, 14], рассмотрим классическое ARE, к решению которого сводится задача конструирования оптимального LQ регулятора:

$$PA + A^{\mathrm{T}} P - PBR^{-1} B^{\mathrm{T}} P = -Q. \tag{3}$$

Здесь $A \in R^{n \times n}$ – матрица состояний, $B \in R^{n \times m}$ – матрица коэффициентов усиления, $R = R^{\mathrm{T}} > 0$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$ – матрицы соответствующей размерности, являющиеся параметрами целевого функционала LQ оптимизации, $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – матрица соответствующей размерности, являющаяся решением ARE.

Применив $\operatorname{vec}(.)$ к выражению (3), получим

$$\left(A^{\mathrm{T}} \otimes I_n + I_n \otimes A^{\mathrm{T}}\right) \operatorname{vec}(P) - (P \otimes P) \operatorname{vec}\left(BR^{-1} B^{\mathrm{T}}\right) = -\operatorname{vec}(Q).$$

Использовав второе свойство операции векторизации, имеем

$$\left(A^{\mathrm{T}} \otimes I_n + I_n \otimes A^{\mathrm{T}}\right) \operatorname{vec}(P) - \left[\operatorname{vec}^{\mathrm{T}}\left(BR^{-1} B^{\mathrm{T}}\right) \otimes I_{n^2}\right] \operatorname{vec}(P \otimes P) = -\operatorname{vec}(Q). \tag{4}$$

Так как $P = P^{\mathrm{T}}$, $Q = Q^{\mathrm{T}}$, $BR^{-1}B^{\mathrm{T}} = \left(BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$, то $\operatorname{vec}(P \otimes P)$, $\operatorname{vec}^{\mathrm{T}}\left(BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\right)$, $\operatorname{vec}(Q)$ содержат повторы, а поэтому для исключения неуникальных элементов рационально перейти с учетом свойств, описанных в определении 2, от $\operatorname{vec}(.)$ к $\operatorname{vech}(.)$.

Утверждение 1. *Уравнение Риккати* (4) *относительно матрицы* $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ *может быть записано в виде линейного уравнения с перепараметризацией*:

$$\left[L\left(I_n \otimes A^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} \otimes I_n\right) D \;\; L\left(\left(D \operatorname{vech}\left(BB^{\mathrm{T}}\right)\right)^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2}\right) D_1\right] \begin{bmatrix} L \operatorname{vec}(P) \\ L_1 \operatorname{vec}(P \otimes P) \end{bmatrix} = -\operatorname{vech}(Q), \tag{5}$$

в котором матрицы $L \in R^{k \times n^2}$, $D \in R^{n^2 \times k}$, $L_1 \in R^{r \times n^4}$, $D_1 \in R^{n^4 \times r}$ *задают операции исключения и возвращения над* Q *и* $P \otimes P$ *и по определению* 2 *удовлетворяют условиям* $L = \left(D^{\mathrm{T}} D\right)^{-1} D^{\mathrm{T}}$, $L_1 = \left(D_1^{\mathrm{T}} D_1\right)^{-1} D_1^{\mathrm{T}}$, $r = 0.5n^2\left(n^2 + 1\right)$, $k = 0.5n(n+1)$.

Доказательство утверждения непосредственно следует из применения операции частичной векторизации к $\mathrm{vec}(P \otimes P)$, $\mathrm{vec}(P)$, $\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\right)$, $\mathrm{vec}(Q)$ в уравнении (4) с учетом свойств матриц возвращения и исключения. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $m = 1$, а матрицы ARE определены следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_4 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Тогда ARE в форме (4) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & a_3 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_1 + a_4 & 0 & a_3 \\ a_2 & 0 & a_1 + a_4 & a_3 \\ 0 & a_2 & a_2 & 2a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_2 \\ p_4 \end{bmatrix} - VP_{\mathrm{kron}} = -\begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$V = \left[b_1^2 I_{n^2} \;\; b_1 b_2 I_{n^2} \;\; b_1 b_2 I_{n^2} \;\; b_2^2 I_{n^2} \right],$$

$$P_{\mathrm{kron}} = \left[p_1^2 \;\; p_1p_2 \;\; p_1p_2 \;\; p_2^2 \;\; p_1p_2 \;\; p_1p_4 \;\; p_2^2 \;\; p_2p_4 \;\; p_1p_2 \;\; p_2^2 \;\; p_1p_4 \;\; p_2p_4 \;\; p_2^2 \;\; p_2p_4 \;\; p_2p_4 \;\; p_4^2 \right]^{\mathrm{T}}.$$

Очевидно, что второе и третье уравнения (6) совпадают, как и то, что $P_{\mathrm{kron}} = \mathrm{vec}(P \otimes P)$ содержит множество повторов и всего шесть уникальных элементов.

Теперь рассмотрим запись уравнения (3) с использованием частичной векторизации (5):

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_3 & 0 \\ a_2 & a_1 + a_4 & a_3 \\ 0 & 2a_2 & 2a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{bmatrix} - VP_{\mathrm{kron}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

В данном случае

$$V = \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_2 & b_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & 0 & 0 & b_1b_2 & b_1b_2 & b_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^2 & 0 & 0 & b_1b_2 & 0 & b_1b_2 & b_2^2 \end{bmatrix},$$

а вектор $P_{\mathrm{kron}} = \left[p_1^2 \;\; p_1p_2 \;\; p_1p_2 \;\; p_2^2 \;\; p_1p_4 \;\; p_2^2 \;\; p_2p_4 \;\; p_1p_4 \;\; p_2p_4 \;\; p_4^2 \right]^{\mathrm{T}}$.

Из сравнения (7) и (6) следует, что число уравнений (по определению k из утверждения 1) сократилось до трех (повторяющееся уравнение было отброшено), а длина вектора P_{kron} (по определению r из утверждения 1) – до 10. Тем не менее в P_{kron} все также присутствует четыре повтора, число которых, очевидно, будет существенно возрастать с ростом размерности n.

Таким образом, пример 2 демонстрирует, что операция $\mathrm{vech}(.)$ не позволяет сформировать из P_{kron} вектор уникальных параметров минимальной длины, поскольку неуникальные элементы в $P \otimes P$ находятся не только в верхнетреугольной части, но и в нижнетреугольной.

В работах [13, 14] выражения, сходные с (5), рассматриваются как линейная регрессия, вектор параметров которой идентифицируется on-line. В такой задаче вектор параметров должен иметь минимально возможную перепараметризацию – фактически, состоять только из уникальных составляющих. Однако работы [13, 14] ограничены наличием только процедуры $\mathrm{vech}(.)$, что приводит к проблемам, продемонстрированным в примере 2. Поэтому в [13] сделано допущение о том, что желаемая процедура векторизации существует и уже применена к (5), не поясняя, как именно ее выполнить. Кроме того, они дают оценку на количество уникальных элементов в $P \otimes P$, $P = P^{\mathrm{T}}$: $\dfrac{n^4 + n^3 + 7n^2 + 6n}{8}$, которая, как будет продемонстрированно ниже, является неверной.

Поэтому актуальной является задача разработки операции, выполняющей преобразование произведения $P \otimes P$ в вектор, наполненный только уникальными элементами.

Цель. В настоящей работе требуется, во-первых, построить алгоритм формирования матрицы исключения $\overline{L} \in R^{r\times n^4}$, выполняющей преобразование $\operatorname{vec}(P \otimes P)$ в вектор, состоящий из уникальных элементов (оптимизируя тем самым размерность r), а во-вторых, получить аналитическую формулу зависимости числа уникальных элементов в произведении $P \otimes P$ от размерности матрицы P.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Чтобы сформулировать алгоритм исключения из $P \otimes P$ повторяющихся элементов, рассмотрим подробней представленный на фиг. 1 результат умножения по Кронекеру P саму на себя в случае $n = 2$.

Таким образом, поскольку результат произведения $P \otimes P$ при $P = P^{\mathrm{T}}$ является симметричной матрицей, то элементы верхнетреугольной формы (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) считаются неуникальными. Кроме того, если результат произведения $P \otimes P$ разбить на блоки размером $n \times n$, то в каждом из полных блоков нижнетреугольной части в силу $P = P^{\mathrm{T}}$ наблюдается симметрия относительно главной диагонали блока, а тогда элемент (3,2) считается неуникальным. Дополнительно, чем правее и ниже расположен блок в нижнетреугольной части, тем больше в нем повторов элементов с блоками, стоящими левее и/или выше – межблочная симметрия (элементы (4,3) и (3,1) считаются неуникальными). На фиг. 1 в красные рамки взяты элементы, находящиеся ниже главной диагонали $P \otimes P$, но при этом являющиеся неуникальными при обходе нижнетреугольной части по блокам сверху вниз и слева направо.

На основе описанной и отмеченной на фиг. 1 естественной симметрии в матрице $P \otimes P$ формализуем в виде следующего утверждения алгоритм формирования матрицы исключения $\overline{L} \in R^{r\times n^4}$ и возвращения $\overline{D} \in R^{n^4\times r}$.

Утверждение 2. *Матрица исключения* $\overline{L} \in R^{r\times n^4}$, *обеспечивающая* $\overline{L}\operatorname{vec}(P \otimes P) \in R^r$, $r = \left(\dfrac{n^4}{12} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{5n^2}{12} + \dfrac{n}{6}\right)$ *может быть сформирована следующим конструктивным алгоритмом*:

$$\overline{D}^{\mathrm{T}} = \sum_{l=1}^{r} u_l \operatorname{vec}^{\mathrm{T}}(E_{\wp_l}), \quad \overline{D} \in \mathrm{R}^{n^4\times r}, \quad \overline{L} = \left(\overline{D}^{\mathrm{T}}\overline{D}\right)^{-1}\overline{D}^{\mathrm{T}},$$
$$E_{\wp} = \left\{E_{\wp_l} \in \mathrm{R}^{n^2\times n^2} : l = \overline{1,r}\right\}, \tag{8}$$
$$\wp := \left\{(i,j,p,q):\ i \ge j > 0,\ p \ge q > 0,\ p \le i \le n,\ q \le j \le n\right\},$$

где p — номер вектор-строки с числом строк n в блочной матрице $E_{\wp_l}$, q — номер вектор-столбца с числом столбцов n в блочной матрице $E_{\wp_l}$, i — номер строки в блоке (p,q), j — номер столбца в блоке (p,q), $u_l \in R^r$ — вектор, заполненный нулями и содержащий единицу на l-й позиции, $E_{\wp}$— множество мощностью r всех возможных матриц с учетом $(i,j,p,q) \in \wp$, заполненных нулями и содержащих единицы в позициях (i,j,p,q), (j,i,p,q), (i,j,q,p), (j,i,q,p), (p,q,i,j), (q,p,i,j), (p,q,j,i), (q,p,j,i).

Доказательство. Поскольку алгоритм (8) является конструктивным, то справедливость утверждения 2 следует из отсутствия логических противоречий в рассуждениях, использованных для его формирования. Далее кратко остановимся на основных рассуждениях, на основе которых и был предложен алгоритм (8).

$$P \otimes P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} & p_2\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} \\ p_2\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} & p_4\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_2 & p_2^2 \\ p_1p_2 & p_1p_4 & p_2^2 & p_2p_4 \\ \hline \boxed{p_1p_2} & \boxed{p_2^2} & p_1p_4 & p_2p_4 \\ p_2^2 & p_2p_4 & \boxed{p_2p_4} & p_4^2 \end{array}\right]$$

Фиг. 1. Симметрия в $P \otimes P$.

В первую очередь, матрицу $P \otimes P \in R^{n^2 \times n^2}$ разобьем на n^2 блоков размерностью $n \times n$. Пусть каждый блок имеет уникальный составной индекс (p, q), где p — номер вектор-строки с числом строк n в блочной матрице $P \otimes P$, q — номер вектор-столбца с числом столбцов n в блочной матрице $P \otimes P$. Для обращения к каждому элементу блока также введем уникальный составной индекс (i, j), где i — номер строки в блоке (p, q), j — номер столбца в блоке (p, q). Таким образом, каждый элемент матрицы $P \otimes P$ может быть однозначно определен уникальным составным индексом (i, j, p, q).

Теперь, пользуясь симметрией, отмеченной на фиг. 1, определим позиции уникальных элементов в матрице $P \otimes P$, которые находятся на или ниже главной диагонали.

Ввиду общей симметричности матрицы $P \otimes P$, такие элементы должны находиться в блоках, находящихся ниже главной диагонали $P \otimes P$, или включающих ее. Таким образом, при учете $p = 1, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, n$, необходимым условием уникальности является $p \geq q$.

Учитывая, что каждый блок матрицы $P \otimes P$ сам представляет собой симметричную матрицу, необходимо считать уникальными только элементы блока, которые находятся на или ниже его главной диагонали. Таким образом, при учете $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$, необходимым условием является $i \geq j$.

Принимая во внимание блочную структуру матрицы $P \otimes P$ и тот факт, что $P = P^{\mathrm{T}}$, для элемента с индексом (i, j, p, q) обязательно будет симметричным элемент (p, q, i, j). Ведь элемент (i, j, p, q) — это фактически, следуя определению операции произведения Кронекера, произведение (i, j) элемента матрицы P на ее элемент (p, q), а (p, q, i, j) — это произведение (p, q) элемента матрицы P на элемент (i, j). Поэтому необходимым условием оптимальности является $p \leq i$, $q \leq j$.

Таким образом, объединив сформулированные условия, может быть сформировано множество индексов уникальных элементов матрицы $P \otimes P$: $\wp := \{(i, j, p, q) : \ i \geq j > 0,\ p \geq q > 0,\ p \leq i \leq n,\ q \leq j \leq n\}$. Примем пока, что таких уникальных элементов r, а обоснование формулы для подсчета их числа приведем ниже.

Для формирования матрицы $\bar{D}$ путем, аналогичным (2) [1], необходимо для каждого l-го ($l = 1, \ldots, r$) уникального элемента матрицы $P \otimes P$ (l-го члена множества $\wp$, который обозначим $\wp_l$) сформировать матрицу $E_{\wp_l} \in R^{n^2 \times n^2}$, которая содержит единицы на всех позициях, соответствующих позициям, в которых в исходной матрице $P \otimes P$ встречается элемент $\wp_l = \left(i^{(l)}, j^{(l)}, p^{(l)}, q^{(l)}\right)$.

Таких позиций может быть максимум восемь: сама позиция элемента $\left(i^{(l)}, j^{(l)}, p^{(l)}, q^{(l)}\right)$; симметричный элемент относительно главной диагонали блока (p, q) — $\left(j^{(l)}, i^{(l)}, p^{(l)}, q^{(l)}\right)$; как уже упоминалось выше, элемент $\left(p^{(l)}, q^{(l)}, i^{(l)}, j^{(l)}\right)$; также элемент, симметричный $\left(p^{(l)}, q^{(l)}, i^{(l)}, j^{(l)}\right)$ относительно главной диагонали блока (i, j) — $\left(q^{(l)}, p^{(l)}, i^{(l)}, j^{(l)}\right)$, а также четыре элемента, симметричных уже упомянутым четырем относительно главной диагонали матрицы $P \otimes P$ — $\left(i^{(l)}, j^{(l)}, q^{(l)}, p^{(l)}\right)$, $\left(j^{(l)}, i^{(l)}, q^{(l)}, p^{(l)}\right)$, $\left(p^{(l)}, q^{(l)}, j^{(l)}, i^{(l)}\right)$, $\left(q^{(l)}, p^{(l)}, j^{(l)}, i^{(l)}\right)$. Для некоторых элементов в матрице $P \otimes P$ часть из этих восьми индексов могут указывать на один и тот же элемент (например, для элемента (1, 1, 1, 1)). В этом нет противоречия, поскольку это будет лишь означать, что установить единицу в некоторый элемент матрицы $E_{\wp_l}$ необходимо несколько раз.

Транспонированная векторизация матрицы $E_{\wp_l}$ представляет собой вектор размерностью $1 \times n^4$, который должен занять l-й столбец в матрице $\bar{D}$, что сходно с (2). Заявленная в утверждении процедура формирования вектора $u_l \in R^r$ и формула

$$\bar{D}^{\mathrm{T}} = \sum_{l=1}^{r} u_l \operatorname{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_l}\right)$$

позволяют сформировать именно такую матрицу.

От полученной матрицы дублирования с помощью псевдообращения Мура-Пенроуза возможно получить матрицу исключения $\bar{L}$. При этом существование $\bar{L}$ гарантируется взаимной ортогональностью $\operatorname{vec}\left(E_{\wp_l}\right)\ \forall l=\overline{1,r}$, в свою очередь обеспечиваемой $(i,j,p,q)\in\wp$, т.е. тем фактом, что элементы сформированного множества $\wp$ уникальны.

Для подсчета числа уникальных элементов в матрице $P\otimes P$ воспользуемся следующим подходом. В первую очередь, число уникальных элементов матрицы $P\otimes P$ не больше числа уникальных элементов в ее нижне-треугольной части, определяемого по формуле $0.5(n^4+n^2)$. Из этой величины необходимо вычесть число элементов, расположенных выше главной диагонали своего блока для всех блоков, расположенных полностью ниже главной диагонали матрицы $P\otimes P$. Таких блоков ровно $n^2-0.5(n^2+n)$, поскольку всего их n^2, а расположенных на или выше главной диагонали – $0.5(n^2+n)$. В каждом из таких блоков по $n^2-0.5(n^2+n)$ элементов выше главной диагонали. Поэтому из $0.5(n^4+n^2)$ необходимо вычесть $(n^2-0.5(n^2+n))^2$.

Наконец, необходимо подсчитать число неуникальных элементов в нижне-треугольных частях всех блоков матрицы $P\otimes P$, расположенных на или ниже главной диагонали $P\otimes P$. Рассмотрение матрицы $P\otimes P$ необходимо вести по блочным вектор-столбцам $q=1,\ldots,n$. В первом таком столбце по мере увеличения номера вектор-строки $p=1,\ldots,n$, количество неуникальных элементов будет возрастать в виде ряда, члены которого представляют собой сумму элементов арифметической прогрессии 0, 1, 2, 3, 4, ..., т.е. 0, 1, 3, 6, 10, ... ввиду упомянутого выше совпадения элементов (i,j,p,q) и (p,q,i,j) для всех допустимых $i,\ j,p,q$. Сумма такой последовательности вычисляется как $(n-1)n(n+1)/6$. По мере роста q число неуникальных элементов в каждом последующем столбце будет возрастать, поскольку при формировании множества $\wp$ были выставлены требования $p\le i,\ q\le j$. То есть при возрастании q на единицу в каждом из $(n-q)$ блоков соответствующего вектор-столбца рассматривается на один столбец элементов меньше, что, при учете, что $p\ge q$ означает отбрасывание еще $(nq-(q-1)q/2)$ неуникальных элементов. При этом для оставшихся в рассмотрении элементов каждого блока действует все то же правило суммы элементов арифметической прогрессии. Таким образом, общее количество неуникальных элементов в нижне-треугольных частях всех блоков матрицы $P\otimes P$, расположенных на или ниже главной диагонали $P\otimes P$, рассчитывается по формуле:

$$N_n=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}+\sum_{q=1}^{n-1}\left[(n-q)\left(nq-\frac{q(q-1)}{2}\right)+\frac{(n-q-1)(n-q)(n-q+1)}{6}\right].$$

А общее число уникальных элементов в матрице $P\otimes P$ вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}r=\frac{n^4+n^2}{2}-\frac{n(n-1)(n+1)}{6}-\sum_{q=1}^{n-1}\left[(n-q)\left(nq-\frac{q(q-1)}{2}\right)+\frac{(n-q-1)(n-q)(n-q+1)}{6}\right]-\\-\left(n^2-\frac{n^2+n}{2}\right)^2=\left(\frac{n^4}{12}+\frac{n^3}{3}+\frac{5n^2}{12}+\frac{n}{6}\right),\end{gathered}\tag{9}$$

что завершает доказательство утверждения.

На основе конструктивного алгоритма формирования матрицы исключения $\bar{L}$ введем определение операции исключения повторений из $\operatorname{vec}(P\otimes P)$.

Определение 5. Операция исключения повторений $\operatorname{vecu}(.)$ из вектора $\operatorname{vec}(M\otimes M)\in R^{n^4}$, $M=M^{\mathrm{T}}\in R^{n\times n}$, задается следующим образом:

$$\operatorname{vecu}(M\otimes M)=\bar{L}\operatorname{vec}(M\otimes M),$$

где $\bar{L}$ и r определены в утверждении 2, а $\bar{L}$ обладает следующими свойствами:

1) $\bar{L}$ имеет полный строчный ранг r;

2) $\bar{L}^{\dagger}=\bar{L}^{\mathrm{T}}$, где $\bar{L}^{\dagger}$ – псевдоинверсия Мура–Пенроуза матрицы $\bar{L}$.

Существует матрица $\bar{D}$ такая, что:

3) $\bar{L}\bar{L}^{\mathrm{T}}=\bar{L}\bar{D}=I_r$;

4) $\mathrm{vec}(M) = \bar{D}\bar{L}\,\mathrm{vec}(M) = \bar{D}\,\mathrm{vecu}(M)$.

Справедливость определения 5 непосредственно следует из доказательства утверждения 2.

Замечание 1. Результатом выполнения операции $\mathrm{vecu}(.)$ является вектор уникальных элементов $P \otimes P$, а также матрицы исключения и дублирования, поэтому введение отдельных дополнительных массивов для длительного хранения индексов уникальных элементов в $P \otimes P$ (которые упоминались в доказательстве) не требуется.

Ниже приведен код на языке Matlab Script Language, реализующий в соответствии с конструктивным алгоритмом (8) формирование матриц дополнения $\bar{D}$ и исключения $\bar{L}$.

```
%порядок задачи
n=2;
%число уникальных элементов в матрице P kron P
sum=n*(n-1)*(n+1)/6;
for q=1:1:(n-1)
    sum=sum+(n-q)*(n*q-q*(q-1)/2)+(n-q)*(n-q+1)*(n-q-1)/6;
end
result_unique = (n^4+n^2)/2 - sum - (n*n-n*(n+1)/2)^2;
%код для формирования матрицы возвращения
D=zeros(n^4,result_unique);
l=1;
for q=1:1:n
    for p=q:1:n
            for j=q:1:n
                if j>p
                    k=j;
                else
                    k=p;
                end
                for i=k:1:n
                        E=zeros(n^2,n^2);
                        E((p-1)*n+i,(q-1)*n+j)=1;
                        E((p-1)*n+j,(q-1)*n+i)=1;
                        E((q-1)*n+i,(p-1)*n+j)=1;
                        E((q-1)*n+j,(p-1)*n+i)=1;
                        E((i-1)*n+p,(j-1)*n+q)=1;
                        E((i-1)*n+q,(j-1)*n+p)=1;
                        E((j-1)*n+p,(i-1)*n+q)=1;
                        E((j-1)*n+q,(i-1)*n+p)=1;
                        E=reshape(E,n^2*n^2,1);
                        D(:,l)=E;
                        l=l+1;
                end
            end
    end
end
%код для формирования матрицы исключения
L=pinv(D);
```

Оценим сложность предложенного конструктивного алгоритма. Необходимо отметить, что для подсчета числа уникальных элементов *result_unique* она является линейной $O(n)$. Для построения матрицы D циклы *for* организованы таким образом, что будет осуществлен обход только уникальных r (см. (9)) штук элементов $P \otimes P$. При этом для каждого такого элемента будет осуществляться векторизация матрицы E со сложностью $\mathrm{O}(n^4)$. То есть сложность этой части алгоритма составляет $O(n^4 \cdot r)$. Сложность вычисления матрицы L совпадает со сложностью получения псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, которая для данного случая будет равна $O((n^4)^2 \cdot r) = O(n^8 \cdot r)$. Наибольшую сложность имеет последняя часть алгоритма. Она же и определяет его сложность в целом.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим два иллюстративных примера ($n = 2$, $n = 3$), поясняющих предложенный конструктивный алгоритм формирования матрицы исключения.

Пример 3. Продолжим рассмотрение ARE из примера 2. На фиг. 2 приведено расположение уникальных элементов в произведении $P \otimes P$ в соответствии с определением множества $\wp$.

Таким образом, $p = 1, 2$; $q = 1, 2$. Согласно сформированным правилам, множество $\wp = \{(1,1,1,1),(2,1,1,1),(2,2,1,1),(2,1,2,1),(2,2,2,1),(2,2,2,2)\}$, а согласно формуле расчета (9), количество уникальных элементов $r = \left(\dfrac{2^4}{12} + \dfrac{2^3}{3} + \dfrac{5 \cdot 2^2}{12} + \dfrac{2}{6}\right) = 6$.

На основе определения множества $\wp$ составим шесть матриц $E_{\wp_l}$:

$$E_{\wp_1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad E_{\wp_2} = \begin{bmatrix} 0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad E_{\wp_3} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad E_{\wp_4} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$E_{\wp_5} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&0 \end{bmatrix}, \quad E_{\wp_5} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (8) сформируем матрицу:

$$\bar{D}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_1}\right) + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_2}\right) + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_3}\right) + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_4}\right) +$$

$$+ \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_5}\right) + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \mathrm{vec}^{\mathrm{T}}\left(E_{\wp_6}\right) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Все ее столбцы уникальны, поэтому матрица $\bar{L}$ существует и имеет вид

$$\bar{L} = \bar{D}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0.25&0.25&0&0.25&0&0&0&0.25&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0.5&0&0&0&0&0.5&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0.25&0&0&0.25&0&0&0.25&0&0&0.25&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0.25&0&0&0&0.25&0&0.25&0.25&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \quad q=1 \quad & \quad q=2 \quad \end{array} \\
\begin{array}{r} p=1 \\ \\ P\otimes P= \\ \\ p=2 \end{array} &
\left[\begin{array}{cc|cc}
\boxed{p_1^2} & p_1p_2 & p_1p_2 & p_2^2 \\
p_1p_2 & \boxed{p_1p_4} & p_2^2 & p_2p_4 \\
\hline
p_1p_2 & p_2^2 & p_1p_4 & p_2p_4 \\
\boxed{p_2^2} & \boxed{p_2p_4} & p_2p_4 & \boxed{p_4^2}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Фиг. 2. Расположение уникальных элементов в $P \otimes P$ ($n = 2$).

Тогда, пользуясь четвертым свойством операции из определения 5, по аналогии с (5) получим:

$$\left[L\left(I_n \otimes A^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} \otimes I_n\right) D \;\; L\left(\left(D\mathrm{vech}\left(BB^{\mathrm{T}}\right)\right)^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2}\right)\bar{D} \right] \cdot \begin{bmatrix} L\mathrm{vec}(P) \\ \bar{L}\mathrm{vec}(P \otimes P) \end{bmatrix} = -\mathrm{vech}(Q). \tag{10}$$

Откуда, подставив значения матриц, в рассматриваемом случае получим:

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_3 & 0 \\ a_2 & a_1 + a_4 & a_3 \\ 0 & 2a_2 & 2a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{bmatrix} - VP_{kron} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix},$$

где $V = \begin{bmatrix} b_1^2 & 2b_1b_2 & 0 & b_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_2 & b_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^2 & 2b_1b_2 & b_2^2 \end{bmatrix}$, а вектор $P_{\mathrm{kron}} = \begin{bmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_4 & p_2^2 & p_2p_4 & p_4^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, получена минимально возможная параметризация исходной задачи. При использовании операции $\mathrm{vec}(P \otimes P)$ вектор параметров P_{kron} содержал 16 элементов, после применения операции $\mathrm{vech}(P \otimes P)$ – 10 (см. пример 2), а после применения разработанной в работе операции $\mathrm{vecu}(P \otimes P)$ – 6. Данный пример демонстрирует практическую ценность предлагаемой операции. В задаче идентификации неизвестных параметров регрессии типа (5) общее число неизвестных параметров было сокращено с 10 до 6, что позволяет избежать излишней перепараметризации и максимально сократить размерность решаемой задачи.

Также на примере (10) наглядно видно, что результат выполнения операции $\mathrm{vecu}(P \otimes P)$ единожды используется для получения параметризации типа (10) для дальнейшего решения ARE. Длительное хранение матриц исключения и дублирования не требуется. Хранится лишь вектор уникальных элементов $P \otimes P$, который по количеству элементов строго меньше общего числа элементов $P \otimes P$.

Пример 4. Пусть $n = 3$. В данном примере ограничимся изображением с отметками уникальных элементов в матрице $P \otimes P$ и подсчетом их количества по формуле (9). На фиг. 3 приведено расположение уникальных элементов в матрице $P \otimes P$ в соответствии с определением множества $\wp$.

Количество уникальных элементов $r = \left(\frac{3^4}{12} + \frac{3^3}{3} + \frac{5 \cdot 3^2}{12} + \frac{3}{6}\right) = 20$, что подтверждается фиг. 3. При использовании операции $\mathrm{vec}(P \otimes P)$ вектор параметров P_{kron} содержал 81 элемент, после применения операции $\mathrm{vech}(P \otimes P)$ содержал 45 элементов, а после применения разработанной в работе операции $\mathrm{vecu}(P \otimes P)$содержал 20 элементов.

Несложно убедиться, что для $n = 4$ по сравнению с операцией $\mathrm{vec}(P \otimes P)$ при использовании $\mathrm{vecu}(P \otimes P)$ число параметров сокращается с 256 до 50, для $n = 5$ – с 625 до 105 и т.д.

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccc} \quad q=1 \quad & \quad q=2 \quad & \quad q=3 \quad \end{array} \\
\begin{array}{r} p=1 \\ \\ \\ P\otimes P = \\ p=2 \\ \\ p=3 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\boxed{p_1^2} & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_2 & p_2^2 & p_2p_3 & p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \\
\boxed{p_1p_2} & \boxed{p_1p_4} & p_1p_5 & p_2^2 & p_2p_4 & p_2p_5 & p_2p_3 & p_3p_4 & p_3p_5 \\
\boxed{p_1p_3} & \boxed{p_1p_5} & \boxed{p_1p_6} & p_2p_3 & p_2p_5 & p_2p_6 & p_3^2 & p_1p_4 & p_3p_6 \\
\hline
p_1p_2 & p_2^2 & p_2p_3 & p_1p_4 & p_2p_4 & p_3p_4 & p_1p_5 & p_2p_5 & p_3p_5 \\
\boxed{p_2^2} & \boxed{p_2p_4} & p_2p_5 & p_2p_4 & \boxed{p_4^2} & p_4p_5 & p_2p_5 & p_4p_5 & p_5^2 \\
\boxed{p_2p_3} & \boxed{p_2p_5} & \boxed{p_2p_6} & p_3p_4 & \boxed{p_4p_5} & \boxed{p_4p_6} & p_3p_5 & p_5^2 & p_5p_6 \\
\hline
p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 & p_1p_5 & p_2p_5 & p_3p_5 & p_1p_6 & p_2p_6 & p_3p_6 \\
p_2p_3 & p_3p_4 & p_3p_5 & p_2p_5 & p_4p_5 & p_5^2 & p_2p_6 & p_4p_6 & p_5p_6 \\
\boxed{p_3^2} & \boxed{p_3p_5} & \boxed{p_3p_6} & p_3p_5 & \boxed{p_5^2} & \boxed{p_5p_6} & p_3p_6 & p_5p_6 & \boxed{p_2^2}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Фиг. 3. Расположение уникальных элементов в $P \otimes P$ ($n = 3$).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании разработан конструктивный алгоритм выполнения операции произведения Кронекера симметричной матрицы на саму себя $P \otimes P$ с последующей векторизацией результата таким образом, чтобы получаемый вектор включал в себя только уникальные элементы – пары произведений элементов исходной матрицы. Данный алгоритм основан на определении операции Кронекера и симметричности исходной матрицы. Предложен алгоритм поиска индексов уникальных элементов в $P \otimes P$, а также формулы для получения матриц исключения и дублирования, которые базируются на классической работе [1] по частичной векторизации матриц. Кроме того, была получена зависимость числа таких уникальных элементов от размерности исходной матрицы.

Такой подход позволяет получать минимальную по числу параметров параметризацию уравнения Риккати в виде (1), привнося тем самым необходимое обоснование в работы [13, 14], где подобная процедура была заявлена декларативно.

Предложенная операция может применяться не только в задачах, связанных с решением ARE, но и в любых других, где возникает необходимость векторизации выражения вида $P \otimes P$, при условии $P = P^{\mathrm{T}}$.

Актуальной представляется задача расширения полученного результата на случай векторизации произведений вида $A \otimes B$, где $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times n}$ – произвольные квадратные матрицы.

В дальнейшем авторы планируют воспользоваться предложенной операцией $\mathrm{vecu}(.)$ и полученными результатами по минимальной параметризации уравнения Риккати для построения адаптивного LQ регулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Magnus J.R., Neudecker H.* The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods. 1980. V. 1 (4). P. 422–449.
2. *Nagakura D.* On the relationship between the matrix operators, vech and vecd // Communications in Statistics-Theory and Methods. 2018. V. 47(13). P. 3252–3268.
3. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive control: stability, convergence and robustness. Courier Corporation, 2011.
4. *Lavretsky E., Wise K.A.* Robust adaptive control // Robust and adaptive control. London: Springer, 2013.
5. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust adaptive control. Courier Corporation, 2012.
6. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // Annual Reviews in Control. 2020. V. 50. P. 278–293.
7. *Lion P.M.* Rapid identification of linear and nonlinear systems // AIAA Journal. 1967. V. 5. P. 1835–1842.

8. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // IEEE Transactions on Automatic Control. 1977. V. 22 (1). P. 2–8.
9. *Aranovskiy S.* Parameter Estimation with Enhanced Performance. Habilitation. Rennes: Université de Rennes 1, 2021.
10. *Lewis F., Syrmos V.* Optimal control. John Wiley & sons, INC., 2nd edition, 1995.
11. *Kalman R.E. et al.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 1960. V. 5 (2). P. 102–119.
12. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution // Automation and Remote Control. 2005. V. 66(5). P. 681–718.
13. *Jha S.K., Roy S.B., Bhasin S.* Data-driven adaptive LQR for completely unknown LTI systems // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50 (1). P. 4156–4161.
14. *Jiang Y., Jiang Z.P.* Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics // Automatica. 2012. V. 48 (10). P. 2699–2704.