ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 7, с. 1061–1072

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.614.2

ИНДИКАТОРЫ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ И РАЗРЕЖЕННЫЙ СЛУЧАИ

 В. Н. Разжевайкин[1,*]

[1] *119333 Москва, ул. Вавилова,40, ФИЦ ИУ РАН, Россия*

**e-mail: razzh@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.
Переработанный вариант 06.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Излагаются методы алгоритмического построения и обсуждаются возможности использования индикаторов устойчивости неотрицательных матриц в прикладных задачах, возникающих в современной математической биологии и эпидемиологии. Указываются специфические особенности таких индикаторов при их применении в рамках задач о параметрической потере устойчивости тривиальных равновесных состояний дискретных динамических систем. Приводятся оценки эффективности алгоритмов, основанных на предложенных методах, в случае систем, задаваемых разреженными матрицами. Обсуждаются отдельные примеры использования построенных алгоритмов для таких систем. Библ. 16.

Ключевые слова: неотрицательная матрица, индикатор устойчивости, дискретная динамическая система, параметрическая система, разреженная матрица.

DOI: 10.31857/S004446692307013X, **EDN:** ZXWNEA

1. ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость неотрицательной квадратной $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$, понимается в настоящей работе в смысле локализации ее спектра внутри единичного круга. Индикаторы устойчивости – это сравнительно простые конструкции, сводящиеся к конечному числу арифметических действий над элементами матрицы, позволяющие дать ответ на вопрос о такой локализации. В случае матриц малого порядка, т.е. при не очень больших n, эти конструкции могут иметь вид вполне обозримых формул, что позволяет использовать их для решения задач как теоретического, так и практического характера. Подавляющая их часть относится к области математической биологии.

Вот некоторые из них.

Первая – построение биологического потенциала популяции. Содержательный смысл этого потенциала – среднее число потомков, приходящихся на одну особь в течение всей ее жизни. Здесь следует уточнить, что принимаются в расчет только те потомки, которым удается не только дожить до возраста родителя, при котором они появились на свет, но и занять его место в репродуктивной структуре популяции. При этом ни сам возраст, ни это место значения не имеют. По умолчанию для живородящих двуполых видов принято считать таким возрастом возраст плода, при котором он покидает утробу матери, ограничиваясь только той частью популяции, которая принимает непосредственное участие в деторождении, т.е. самками.

Для моделей с дискретным временем наиболее характерным примером биологического потенциала является построенный в модели Лесли [1], которая описывает линейную динамику структурированной по возрасту популяции. В этой модели состояния популяции на двух последовательных моментах времени связаны посредством неотрицательной матрицы перехода (матрицы Лесли). При этом экспоненциальный рост или убывание общей численности популяции определяются локализацией по отношению к единице спектрального радиуса этой матрицы. Но они также могут определяться такой же локализацией биологического потенциала популяции, представляемого в виде полинома от элементов этой матрицы, который может быть сконструирован на основе ее характеристического полинома. Другие задачи (например, в эпидемиологии роль биологического потенциала выполняет коэффициент распространения эпидемии, т.е.

среднее число вновь зараженных от одного заболевшего) приводят к необходимости рассмотрения произвольного набора параметров структурированности (стадии развития, местообитание и т.п.). Биологический потенциал при этом приходится строить уже для моделей с более общими, чем в модели Лесли, неотрицательными матрицами перехода.

Вторая проблема – построение функционалов отбора в задачах эволюционной оптимальности. О постановке задач такого рода см. [2]. В этих уже нелинейных задачах устойчивость установившегося положения равновесия возможна только в случае экстремальности спектральных характеристик для ограничений вычисленного в этом положении равновесия якобиана правой части модельной дискретной динамической системы на ненулевые компоненты этого положения равновесия, соответствующие выжившим видам. Вместо этих характеристик можно использовать монотонно связанные с ними функции. В частности, на эту роль годятся биологические потенциалы популяций и другие индикаторы устойчивости матриц перехода. Отметим, что задачи эволюционной оптимальности изначально требуют аналитического задания функционалов отбора, не привязанных к каким-либо конкретным значениям элементов матрицы, поскольку эти функционалы фигурируют в задачах оптимизации по параметрам отбора. При этом существенное значение приобретает возможность решения оптимизационных задач с учетом доступных для них способов построения уравнений, учитывающих производные построенных функционалов по этим параметрам.

Отдельные результаты по построению индикаторов устойчивости в работах, ориентированных на приложения в области биологии, называемых наряду с биологическими потенциалами также индикаторами потенциального роста (см. [3]), были получены в рамках обобщений модели Лесли, таких как модели Лефковича [4] и Логофета (см. [5], [6], гл. 9). К числу таких результатов относятся теоремы о связи индикатора суммы двух матриц с индикатором произведения одной из них на вычисленную в единице резольвенту другой (см. [7], [8]), об одноранговых возмущениях неотрицательных матриц [9] и т.п. Обсуждение вопросов конструирования и анализа неотрицательных матриц, применяемых в дискретных популяционных моделях, можно найти в [10].

Один из вариантов использования индикаторов устойчивости в задачах моделирования динамики развития видов, механизм размножения которых не ограничивается единственной стадией, продемонстрирован на примере исследования прохождения жизненных стадий для одного из растительных видов (точнее для травянистого вида Eritrichium caucasicum), см. [11].

Решение задачи о построении индикаторов устойчивости попутно позволяет отвечать и на более утилитарные вопросы об устойчивости численно заданных неотрицательных матриц. Здесь уже отпадает необходимость ограничиваться малыми порядками, поскольку исчезает востребованность в явных формулах от элементов матрицы. При этом для расчетов в большинстве случаев можно воспользоваться весьма обширным набором устанавливающих такую устойчивость критериев, включающих критерии невырожденности M-матриц (см., например, [12]). Многие из этих критериев вполне пригодны для построения индикаторов устойчивости в обозначенном выше смысле. Однако в ряде вырожденных случаев, которые регулярным образом могут встречаться только в системах с параметрами, подходы, основанные на этих критериях, могут давать осечку. Так, например, критерии, базирующиеся на положительности ведущих главных миноров, в вырожденных случаях могут породить функцию, не пригодную для роли индикатора (см. пример в [13]).

В настоящее время имеется большое число статей, монографий, работающих вычислительных программ, так или иначе связанных с решением линейных задач, включая исследование спектральных свойств матриц. В рамках стандартных постановок представленных в них методов вполне достаточно, чтобы ответить на конкретные вопросы, возникающие в процессе изучения сложных систем, включающих биологические сообщества и учитывающих взаимодействие между ними. Технику конструирования прямых численных алгоритмов за конечное число итераций, дающих точный ответ на вопрос об устойчивости конкретной матрицы, можно без особых затруднений воспроизвести, базируясь на апробированных пакетах в системе MATLAB, если предварительно вооружиться лежащей в их основе теоретической базой, изложенной, например, в монографиях [14] и [15]. Последняя из перечисленных представляется наиболее свежей как с точки зрения ориентации на новейший вычислительный инструментарий, так и по охвату фигурирующей в ней библиографии.

Ключевой особенностью представленного в настоящей работе подхода являются простота и универсальность при решении конкретной задачи об устойчивости неотрицательной матрицы, задаваемой как численно, так и параметрически. Возможность такого задания означает допустимость вырождений, неприемлемых с точки зрения непосредственного использования стандартных алгоритмов. Этот подход базируется на алгоритме, обоснование которого можно найти в [13]. Он будет весьма полезным в качестве альтернативы также для тех ученых, которые сталкиваются в своей деятельности со сложными линейными задачами лишь эпизодически, уделяя основное внимание не техническим, а содержательным аспектам своих исследований.

Особенно эффективным обозначенный алгоритм оказывается в случае разреженных матриц, причем эффективность быстро возрастает по мере сокращения доли ненулевых элементов. Более того, по мере такого сокращения снижается необходимость точного задания все большего числа элементов матрицы. Формулы, задающие индикаторы устойчивости для разреженных матриц, могут оказаться сравнительно простыми даже в случае больших порядков. При этом следует придавать значение только тем элементам, которые фигурируют в таких формулах. На этом пути весьма полезными могут оказаться методы предварительной перенумерации в матрице с заданной симметричной структурой разреженности, широко представленные в монографии [16].

Целью настоящей работы, помимо изложения основных методов построения индикаторов устойчивости неотрицательных матриц, ориентированного преимущественно на цельность изложения, является исследование вопросов, касающихся свойств непрерывности этих индикаторов в задачах о параметрической потере устойчивости тривиальных равновесных состояний динамических систем и вопросов сложности построения индикаторов разреженных матриц, довольно часто встречающихся при решении задач популяционной динамики в условиях распределения по множеству ареалов, имеющих между собой редкие связи. В частности, это относится и к задачам распространения эпидемий между локализованными местообитаниями населения, взаимные перемещения между которыми крайне незначительны.

2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть M_n – множество вещественных $n \times n$ матриц $A = (a_{ij})$, $i, j = 1,\ldots,n$, $\mathrm{M}_n^+ = \{A \in \mathrm{M}_n : A \geq 0\}$ (последнее неравенство означает выполнение совокупности неравенств $a_{ij} \geq 0$ для всех $i, j = 1,\ldots,n$), $I = (\delta_{ij})$ – единичная матрица, $\sigma(A)$ – спектр матрицы $A \in \mathrm{M}_n$, $n = \dim A$ – ее порядок, $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ – спектральный радиус, $P(\lambda, A) = \det(\lambda I - A)$ – характеристический полином матрицы A, $\|\cdot\|$ – норма (вектора, оператора).

Под *перенумерацией* в матрице $A \in \mathrm{M}_n$ мы понимаем одновременную перенумерацию ее строк и столбцов. Главная $k \times k$ подматрица J для $n \times n$ матрицы A с $k \leq n$ (пишем $J \subseteq A$) – это подматрица матрицы A, занимающая верхнюю левую позицию после подходящей перенумерации в последней.

Граф матрицы $A \in \mathrm{M}_n^+$ – это ориентированный граф $\Gamma(A)$ с множеством из n вершин $W = \{1,\ldots,n\}$ и направленными звеньями $j \to i$ между ними, соответствующими ненулевым элементам a_{ij} матрицы A. Перенумерации в матрице A соответствует перенумерация множества вершин W графа $\Gamma(A)$. *Структура графа* $\Gamma(A)$ – это класс эквивалентности по отношению к такой перенумерации. В число свойств, относящихся к структуре графа $\Gamma(A)$, входят такие, как наличие и свойства циклов у графа, структура фактор-графа при отождествлении вершин графа $\Gamma(A)$, расположенных на циклах, число и характер несвязных между собой кластеров такого фактор-графа, представляющих собой цепочки, элементы которых соответствуют неразложимым главным подматрицам матрицы A. В число таких свойств входит и свойство неразложимости матрицы A, заключающееся в существовании на ее графе замкнутого пути, обходящего все его вершины. Подходящей перенумерацией в матрице A ее можно привести к блочно-треугольному виду с квадратными неразложимыми блоками на главной диагонали.

Матрицу $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ с $\hat{a}_{ij} = \operatorname{sign} a_{ij}(\lambda)$ мы будем называть *структурой разреженности* матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n^+$. Семейство матриц $A(\lambda) \subset \mathrm{M}_n^+$, имеющих общую структуру разреженности, имеет и общий граф $\Gamma(\hat{A}) = \Gamma(A(\lambda))$, и наоборот, так что звену $j \to i$ графа матрицы $\Gamma(A(\lambda))$ соответствует элемент структуры разреженности $\hat{a}_{ij} = 1$. Заметим, что отношение эквивалентности матриц, заключающееся в наличии общей структуры разреженности, является более сильным, чем общность структур их графов, различаясь возможностью для последних перестановок в матрице. Матрица $A = (a_{ij})$ *с симметричной структурой разреженности* определяется условием: $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$.

3. ИНДИКАТОРЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Две функции $f_1 : \Omega \to \mathrm{M}_{n_1}$ и $f_2 : \Omega \to \mathrm{M}_{n_2}$ с одной и той же областью определения Ω такие, что для любого $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\operatorname{sign}\left(r\left(f_1(\omega)\right) - 1\right) = \operatorname{sign}\left(r\left(f_2(\omega)\right) - 1\right)$$

мы назовем *r-эквивалентными* (символ r здесь означает, что отношение эквивалентности определяется свойствами спектрального радиуса значений этих функций). В случае $n_2 = 1$ функцию f_2, r-эквивалентную функции f_1 с областью определения Ω, назовем ее *индикатором устойчивости* (или с учетом области значений последней – матрицы f_1 на множестве Ω). Имеет место следующая (см. [13])

Теорема 1. *Тождественная функция* $f_k : A_k \to A_k \in \mathrm{M}_k^+,\ A_k = \left(a_{ij}^k\right)$, *с областью определения* $\mathrm{M}_k^+ \cap \left\{A_k : a_{kk}^k < 1\right\}$ *r-эквивалентна функции* $f_{k-1} : A_k \to A_{k-1} \in \mathrm{M}_{k-1}^+$ *с* $A_{k-1} = \left(a_{ij}^{k-1}\right) \in \mathrm{M}_{k-1}^+$ *и*

$$a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^k + \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{1 - a_{kk}^k}. \tag{1}$$

Переход от матрицы A_k порядка k к матрице A_{k-1} порядка $k-1$, описанный в формулировке теоремы 1, мы будем называть процедурой *сокращения порядка* (или *СП-методом*).

Замечание 1. Процедура сокращения порядка имеет очень простой и наглядный смысл. От матрицы отрезаются последние строка и столбец, а к каждому из оставшихся элементов прибавляется произведение отрезанных, имеющих с ним общую строку или столбец, деленное на разницу между единицей и отрезанным диагональным элементом матрицы. Элементы матрицы A_k, используемые в формуле (1) для вычисления элемента a_{ij}^{k-1} матрицы A_{k-1}, выделены в ее представлении вида:

$$A_k = \left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ij}^k & \cdots & a_{ik}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \cdots & a_{kj}^k & \cdots & a_{kk}^k \end{array}\right).$$

В терминах графа $\Gamma_k = \Gamma(A_k)$ матрицы A_k описанная процедура в случае $a_{kk} < 1$ сводится к удалению k-й вершины с заменой каждой проходящей через нее цепочки $j \to k \to i$ с $i, j < k$, на звено $j \to i$ и удалению повторных звеньев, так что звено $j \to i$ принадлежит графу Γ_{k-1} тогда и только тогда, когда либо оно принадлежало графу Γ_k, либо последнему принадлежали оба звена $j \to k$ и $k \to i$. Последовательное $(n-1)$ кратное повторение процедуры построения по матрице A_k матрицы A_{k-1} с элементами из (1), если таковое возможно, позволяет получить индикатор устойчивости исходной матрицы $A = A_n = \left(a_{ij}^n\right)$. Препятствиями для выполнения очередного шага могут быть следующие.

1. Очередное $a_{kk}^k > 1$. В этом случае $r(A_k) > 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) > 1$.

2. Очередное $a_{kk}^k = 1$ и для некоторого номера $i < k$ $a_{ii}^k \neq 1$. В этом случае подходящей перенумерацией в матрице A_k, переводящей такой элемент матрицы в нижний правый угол, можно добиться либо возможности продолжения процедуры (в случае $a_{ii}^k < 1$), либо выполнения условия 1 (в случае $a_{ii}^k > 1$).

3. Все $a_{ii}^k = 1$, $i \le k$. В этом случае возможны два варианта.

3.1. Существует неразложимая главная подматрица $J \subseteq A_k$ порядка, большего единицы. В этом случае $r(A_k) \ge r(J) > 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) > 1$.

3.2. Подходящей перенумерацией в матрице A_k можно привести ее к треугольному виду с единицами на главной диагонали. В этом случае $r(A_k) = 1$, так что в силу теоремы $r(A_n) = 1$.

Замечание 2. Приведенных здесь результатов достаточно для проверки устойчивости неотрицательной матрицы в случае численного задания ее элементов. При этом необходимость в перенумерациях, как правило, отпадает из-за отсутствия в реальных задачах точных попаданий элементов исходной матрицы на значения, обеспечивающие выполнение условий типа равенства, при которых такая потребность может возникнуть. Поскольку эти значения отличны от нуля, то от подобных условий можно избавиться сколь угодно малым возмущением положительных элементов матрицы, сохраняя тем самым ее структуру разреженности.

Выражения для индикатора устойчивости матрицы в виде формулы от ее элементов без привязки к их конкретным значениям можно получить путем многократного применения подстановки (1), сокращая последовательно порядок матрицы вплоть до единичного, т.е. выстраивая в соответствии с теоремой 1 цепочку

$$A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_1 = \left(a_{11}^1\right). \tag{2}$$

Получаемое в результате выражение a_{11}^1 вполне пригодно на роль индикатора устойчивости исходной матрицы с двумя оговорками.

Первая. Выражение a_{11}^1 представляет собой многоэтажную дробь от элементов матрицы, которая уже при сравнительно небольших порядках становится необозримой.

Вторая. На каждой итерации при построении цепочки (2) требуется оговаривать в качестве дополнительного условия выполнение неравенства $a_{kk}^k < 1$ для $k = 2,\ldots,n$.

Последние условия можно ослабить до условий $a_{kk}^k \neq 1$. Точнее имеет место следующая (см. [13])

Теорема 2. *Функция* $F(A_n) = \max\limits_{k=1,\ldots n}\left\{a_{kk}^k\right\}$, *вычисленная последовательным применением подстановок* (1) *при* $k = n,\ldots,1$ *начиная с* $A_n = \left(a_{ij}^n\right) \in \mathrm{M}_n^+$, *является индикатором устойчивости матрицы* A_n *на подмножестве* M_n^+, *неявно задаваемом посредством указанных подстановок неравенствами* $a_{kk}^k \neq 1$, $k = n,\ldots,2$.

Замечание 3. Неравенства $a_{kk}^k \neq 1$ в теореме 2 можно проигнорировать, если допустить бесконечные значения для элементов матриц A_k с использованием следующих договоренностей: 1) для матрицы $A \geq 0$ с бесконечными элементами $r(A) = \sup\limits_{0\leq A'\leq A,\|A'\|<\infty} r(A')$. 2) $\dfrac{0}{0} = 0 \cdot \infty = 0$.

4. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ

Функция $F(A)$ матрицы $A \geq 0$, построенная в предыдущем разделе, хотя и является решением задачи о конструировании индикатора устойчивости, но не обладает гладкостью, позволяющей эффективно использовать ее в задачах практического характера. К числу таковых относится задача о потере устойчивости тривиального положения равновесия системы

$$u(t+1) = A(\lambda)u(t) \tag{3}$$

при непрерывном изменении параметра λ. В системе (3) $u \geq 0$ есть n-мерный вектор, λ – набор параметров, принадлежащих некоторому топологическому пространству Λ, $A(\lambda) \in \mathrm{M}_n^+$ при каждом λ. В случае нормированного Λ и гладкого отображения $A : \Lambda \to \mathrm{M}_n^+$, $\lambda \mapsto A(\lambda)$, при изменении λ все выражения $a_{kk}^k(\lambda) = a_{kk}^k$, $k = 1,\ldots,n$, вычисленные согласно (1), будут гладко изменяться, если все они, кроме, быть может, $a_{11}^1(\lambda)$, остаются меньшими единицы. В этом случае $a_{11}^1(\lambda)$ является гладкой функцией от λ, и знак ее отклонения от единицы совпадает с аналогичным знаком для спектрального радиуса $r(A)$, т.е. при указанном дополнительном ограничении функция $a_{11}^1(\lambda)$ может выполнять роль индикатора устойчивости матрицы $A(\lambda) \geq 0$, причем уже достаточно гладкого для оперирования с ним в задачах, требующих учета производных.

Приводимая ниже теорема предназначена для выявления свойств непрерывности индикаторов устойчивости матрицы по входным параметрам, так что $\Lambda = \{\lambda\}$ – некоторое топологическое пространство.

Теорема 3. *Пусть семейство матриц* $A(\lambda) \subset M_n^+$, *имеет общую неразложимую структуру разреженности* $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, *непрерывно зависит от* λ, *и все ненулевые элементы равномерно по* λ *ограничены снизу:* $a_{ij}(\lambda) > a > 0$. *Предположим, что для некоторой последовательности* $\{\lambda_p\}$ *выполнены следующие условия*:

1) $\lambda_p \to \lambda_0$ *при* $p \to \infty$;

2) $r(A(\lambda_p)) < 1$ *при всех* $p \in \mathbf{N}$;

3) $r(A(\lambda_0)) = 1$.

Тогда $a_{11}^1(\lambda_0) = 1$ *для* a_{11}^1, *вычисленного СП-методом* (1).

Лемма. *Итерационная процедура* (1) *в случае положительности знаменателей сохраняет неразложимость матриц.*

Доказательство леммы следует из сохранения возможности построения пути из одной произвольной вершины в другую вдоль графа неразложимой матрицы. Так, если путь в графе $\Gamma_k = \Gamma(A_k)$ проходил через выкидываемую в процессе применения алгоритма (1) вершину с номером k, т.е. имел некоторые звенья $j \xrightarrow{k} k$ и $k \xrightarrow{k} i$ (индекс k над звеном – это индекс графа Γ_k), соответствующие положительным элементам a_{kj}^k и a_{ik}^k, то согласно (1) будет выполнено неравенство $a_{ij}^{k-1} > 0$, т.е. цепочка $j \xrightarrow{k} k \xrightarrow{k} i$ в графе Γ_k после применения очередного шага алгоритма заменится на стягивающее звено $j \xrightarrow{k-1} i$ в графе Γ_{k-1}. Таким образом, для любых двух вершин графа Γ_{k-1} может быть построен соединяющий их путь. Это либо старый путь вдоль графа Γ_k в случае, если он не проходил через вершину с номером k, либо путь со стягивающим звеном вместо двузвенной цепочки в случае, если эта вершина встречается на пути вдоль графа Γ_k.

Доказательство теоремы. В условиях теоремы для всех конечных p выполняются неравенства $r(A(\lambda_p)) < 1$, так что $F(A(\lambda_p)) < 1$, и в силу положительности знаменателей в (1) все матрицы $A_l(\lambda_p)$, $l = 1,\ldots,n$, неотрицательны и с учетом леммы неразложимы. Более того, все они имеют общую структуру разреженности $\hat{A}_l$, а стало быть, и граф $\Gamma_l = \Gamma(\hat{A}_l)$. Из непрерывности спектрального радиуса по параметрам в условиях теоремы получаем сходимость $r(A(\lambda_p)) \to 1 - 0$ при $p \to \infty$, а значит, и сходимость $F(A(\lambda_p)) \to 1 - 0$, имеющую в свою очередь следствием сходимость $a_{kk}^k(\lambda_p) \to 1 - 0$, по крайней мере, для одного $k \geq 1$ на некоторой подпоследовательности последовательности $\{p\}$. Выберем минимальное k из числа тех, для которых такая подпоследовательность существует и будем без ограничения общности считать эту подпоследовательность совпадающей с самой последовательностью $\{p\}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k = 1$.

Предположим, что построенное выше $k > 1$, так что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $l = 1,\ldots,k-1$ выполняются неравенства $0 \leq a_{ll}^l(\lambda_p) < 1 - \varepsilon$ при $p \to \infty$. Назовем звено $j \xrightarrow{l} i$ графа Γ_l *отмеченным*, если для любого $C > 0$ найдется $p \in \mathbf{N}$ такое, что $a_{ij}^l(\lambda_p) > C$. Оказывается, что если граф Γ_l имел отмеченное звено, то и граф Γ_{l-1} также будет иметь отмеченное звено. Действительно, в случае, если $l \neq j$ и $l \neq i$, то отмеченное звено $j \xrightarrow{l} i$ графа Γ_l будет служить также отмеченным звеном $j \xrightarrow{l-1} i$ графа Γ_{l-1}. В каждом из альтернативных случаев в качестве отмеченного звена можно использовать звено $h \xrightarrow{l-1} i$, стягивающее цепочку $h \xrightarrow{l} l \xrightarrow{l} i$ в случае $l = j$, и $j \xrightarrow{l-1} q$, стягивающее цепочку $j \xrightarrow{l} l \xrightarrow{l} q$ в случае $l = i$. То, что найдутся h с $a_{lh}^l(\lambda_p) > a > 0$ в первом из указанных случаев и q с $a_{ql}^l(\lambda_p) > a > 0$ во втором, следует из неразложимости матриц $A_l(\lambda)$ и их монотонности по убыванию l в случае положительности знаменателей в (1).

Пусть теперь, как и в доказательстве леммы, цепочка $j \xrightarrow{k} k \xrightarrow{k} i$ в графе Γ_k после применения очередного шага алгоритма (1) заменяется на стягивающее звено $j \xrightarrow{k-1} i$ в графе Γ_{k-1}. Поскольку при $p \to \infty$ имеет место сходимость $a_{kk}^k(\lambda_p) \to 1 - 0$, то в силу (1) будет иметь место асимптотика $a_{ij}^{k-1}(\lambda_p) \to \infty$, т.е. звено $j \xrightarrow{k-1} i$ оказывается отмеченным. Доказанное выше наследование отмеченных звеньев в графах цепочки $\Gamma_{k-1} \to \Gamma_{k-2} \to \ldots \to \Gamma_1$ с учетом наличия такового в начале цепочки влечет существование отмеченного звена и у Γ_1. Но этот граф имеет единственную вершину $\{1\}$ и единственное звено $1 \to 1$, так что при сделанном предположении $\limsup\limits_{p\to\infty} a_{11}^1(\lambda_p) = \infty$, что противоречит условию 2) теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что для семейства матриц $A(\lambda) \geq 0$, имеющих общую структуру разреженности, потерю устойчивости, связанную с преодолением функцией $F(A(\lambda))$ единичного значения, можно отследить по единственной функции $a_{11}^1(\lambda)$.

В случае когда рассматривается семейство разложимых матриц $A(\lambda) \geq 0$, имеющих одинаковую структуру разреженности, для использования описанных соображений потребуется предварительное их разложение на неразложимые блоки с построением для каждого из них функции указанного выше вида и отслеживанием преодоления единичного значения их максимумом. При этом снова оказывается удобным оперировать на графах матриц, выстраивая циклы, соответствующие неразложимым блокам. Группировка вершин графа по кластерам, внутри которых возможны произвольные переходы вдоль графа из одной вершины в другую, т.е. соответствующих этим блокам, позволяет выстроить набор цепочек из этих кластеров, звенья в каждой из которых соответствуют наличию ненулевых элементов $a_{ij}(\lambda)$ с j-й вершиной, принадлежащей блоку, расположенному перед блоком, содержащим i-ю вершину. В случае, если такая группировка оказывается возможной в практических задачах (это не теоретический, а чисто технический вопрос), то потерю устойчивости неразложимых блоков следует отслеживать вдоль этой цепочки. В случае, если такая потеря при изменении параметра произошла впервые для какого-то из ее промежуточных звеньев одной из цепочек, то компоненты возмущения, соответствующие кластерам, определяющим предшествующие такому звену звенья, равно как и кластерам, принадлежащим другим цепочкам, можно не учитывать, т.е. считать соответствующие им возмущения нулевыми. Так, например, в задаче о распространении эпидемий в популяции, стратифицированной по каким-либо признакам, с возможными односторонними передачами инфекции между стратами (в этом случае страты – это вершины графа матрицы, а направления передачи – его направленные звенья) наличие пандемии, соответствующее потере устойчивости нулевого (с точки зрения присутствия инфекции) положения равновесия, может наблюдаться в стратах, соответствующих хвосту цепочки, содержащей очаг, т.е. страте, внутри которой наблюдалось первичное возникновение пандемии, и отсутствовать в стратах, соответствующих как ее началу, так и в других цепочках, не содержащих этого очага.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОКРАЩЕНИЯ ПОРЯДКА ДЛЯ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

В этом разделе исследуются вопросы эффективности алгоритмов вычисления индикаторов устойчивости неотрицательных матриц, основанных на методе понижения порядка для разреженных матриц. При этом предполагается, что распределение ненулевых элементов определяется исключительно вероятностью оказаться таковым с поправкой на возможность симметричности структуры разреженности матрицы (в этом случае свойства диагональных элементов могут в расчет не приниматься). Это означает, в частности, что никакая предварительная обработка, связанная с перенумерацией в исходной матрице, не производится, что позволяет использовать весьма простые алгоритмы для вычисления индикаторов устойчивости СП-методом. Альтернативные подходы, основанные на учете структуры графа матрицы и допускающие предварительную перенумерацию, могут не только существенным образом сократить объем вычислений, но и в значительной степени упростить формулы, выражающие зависимость индикатора устойчивости неотрицательных матриц, имеющих одинаковую структуру разреженности, от ее элементов. Для матриц с симметричной структурой разреженности ряд весьма эффективных методов предварительной перенумерации можно найти в монографии [16].

Из формулы (1) видно, что в случае нулевого значения для одного из элементов a_{ik}^k или a_{kj}^k будет $a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^k$, т.е. на $(n-k+1)$-м шаге элемент матрицы, занимающий (i,j)-ю позицию, не меняется. Это, в частности, относится и к нулевым элементам, что позволяет подсчитать изменение степени разреженности при очередной итерации.

Заметим, что общность содержательных результатов для матриц, графы которых имеют одинаковую структуру, т.е. инвариантность этих результатов по отношению к перенумерациям в матрице, влечет, по крайней мере с точки зрения теоретических конструкций, использование только таких распределений, которые сохраняются при этих перенумерациях. К числу таковых относятся равномерные распределения для внедиагональных элементов матрицы, а также просто равномерные, или, например, в качестве наиболее привлекательного с точки зрения приложений случая, имеющие симметричную структуру разреженности, т.е. парные (или, другими словами, включающими обратные связи) вхождения.

Рассмотрим случай матрицы A_k с равномерной распределенностью ее ненулевых элементов. Пусть S_k — число таковых, так что $p_k = \dfrac{S_k}{k^2} \leq 1$ — доля ненулевых, которую мы будем также называть *заполненностью* матрицы A_k. При этом можно рассматривать p_k как вероятность того, что для наперед произвольным образом выбранной позиции (i, j) будет $a_{ij}^k > 0$. В этом случае

$$S_{k-1} = S_k - p_k(2k-1) + (p_k(k-1))^2(1-p_k). \tag{4}$$

Здесь второй член в правой части соответствует числу убираемых ненулевых элементов при переходе от матрицы A_k к матрице A_{k-1} за счет окаймления в последних строке и столбце. Действительно, общее число элементов в этом окаймлении равно $2k-1$, а доля ненулевых получается умножением этого числа на вероятность p_k. Третий член в (4) определяет количество добавляемых ненулевых элементов при указанном переходе. Сомножитель $p_k(k-1)$ — это число ненулевых внедиагональных элементов последней строки матрицы A_k, т.е. $a_{kj}^k > 0$ с $j < k$. Этой же величине равно и число ненулевых внедиагональных элементов последнего столбца матрицы A_k, т.е. $a_{ik}^k > 0$ с $i < k$. Множитель $1 - p_k$ характеризует вероятность того, что конструируемый по формуле (1) ненулевой элемент действительно будет новым, т.е. что на этом же месте в матрице A_k стоял нулевой элемент.

Собирая все выражения в (4), находим

$$p_{k-1} = f(p_k) \tag{5}$$

с

$$f(p) = p + p^2(1-p). \tag{6}$$

Соотношение (5) с правой частью (6) не изменится, если предполагать вместо равномерной распределенности ненулевых элементов таковую лишь среди внедиагональных как при отсутствии, так и при наличии дополнительного условия симметричности структуры разреженности матрицы A_k. Нетрудно проверить, что переход $A_k \to A_{k-1}$ в соответствии с (1) сохраняет выполнимость этого дополнительного условия. Независимо от симметричности структуры разреженности матрицы A_k в случае равномерного распределения ее внедиагональных ненулевых элементов, если S_k — число таковых, а $p_k = \dfrac{S_k}{k^2 - k}$ — их доля, то

$$S_{k-1} = S_k - 2(k-1)p_k + p_k^2(k-1)(k-2)(1-p_k). \tag{7}$$

Интерпретация слагаемых в (7) такая же, как и в (4) с той оговоркой, что добавляемый ненулевой элемент является внедиагональным, так что если $p_k(k-1)$ — число ненулевых внедиагональных элементов последней строки матрицы A_k, то для ее последнего столбца число ненулевых внедиагональных элементов таких, что добавляемый ненулевой элемент также не будет диагональным, равно уже $p_k(k-2)$. Проведя необходимые сокращения в (7), мы снова получаем соотношение (5).

Функция (6) монотонна на отрезке $[0,1]$, тождественна на его концах, так что сохраняет инвариантными этот отрезок и его внутреннюю часть $(0,1)$, на которой она строго больше тождественной.

Итерационная процедура (5) с $0 < p_n < 1$ дает, как нетрудно проверить, монотонную последовательность

$$0 < p_n < p_{n-1} < \ldots < p_{n-t} < \ldots < 1. \tag{8}$$

Представляет интерес оценка времени заполнения t, определяемого как число итераций, необходимых для выхода этой последовательности на значения порядка единицы в зависимости от начального $p_n \ll 1$.

Разделив (5) на $p_k p_{k-1} > 0$, получим с учетом (8)

$$p_k^{-1} - p_{k-1}^{-1} = p_k p_{k-1}^{-1}(1 - p_k) < 1. \tag{9}$$

Для любого целого неотрицательного $t \le n - 1$ суммирование неравенств (9) по k от $n - t + 1$ до n дает неравенство

$$p_n^{-1} - p_{n-t}^{-1} \le t \tag{10}$$

(равенство имеет место в случае $t = 0$), так что для $0 \le t < p_n^{-1}$ получим

$$p_{n-t} \le \frac{p_n}{1 - p_n t}. \tag{11}$$

Пусть теперь $t = n - k$, где k – порядок матрицы A_k. Неравенство (10) обеспечивает в этом случае нижнюю оценку для числа итераций t, необходимых для достижения заполненностью $p_k = p_{n-t}$ матрицы A_k некоторого значения $\delta \in (p_n, 1)$. Действительно, из (10) следует, что в случае $t < p_n^{-1} - \delta^{-1}$ будет выполнено неравенство $p_{n-t} < \delta$.

Неравенство (11) задает верхнюю оценку заполненности p_k в зависимости от числа итераций в цепочке (2), равного t. В силу (8) это неравенство актуально лишь в случае, когда его правая часть меньше единицы, т.е. при $t \le p^{-1} - 1$ с $p = p_n$. При $k \le \hat{k} + 1$ с $\hat{k} = n - p^{-1}$ все матрицы A_k в цепочке (2) уже нельзя рассматривать как разреженные.

Число арифметических операций, необходимых в общем, т.е. неразреженном, случае для вычисления индикатора устойчивости по формулам (1), оценивается для матрицы A_k сверху величиной $k^3 + C\left(k^2 + 1\right)$ с некоторой постоянной C порядка единицы. Действительно, число операций в одиночном (т.е. при фиксированных i и j) применении формулы (1) равно четырем, включая вычисление знаменателя, который является общим для всех пар (i, j), что позволяет при оценках учитывать только три операции из четырех. Общее же число таких применений с учетом последовательного сокращения порядка пересчитываемых матриц равно сумме квадратов чисел от 1 до $k - 1$, т.е. $\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$. В частности, число арифметических операций, необходимых для вычисления индикатора устойчивости на этапе заполненности, т.е. при $k \le \hat{k}$, оценивается сверху величиной $\Sigma_1 = \hat{k}^3 + C\left(\hat{k}^2 + 1\right)$.

Оценим теперь число арифметических операций, необходимых для достижения заполненности, т.е. для прохождения начального участка цепочки (2) при $k = n, \ldots, [\hat{k}] + 1$ (для $r \in \mathbf{R}$ под $[r]$ понимается целая часть числа r). Для алгоритмов, основанных на описанной в настоящей работе схеме, адаптированных для разреженных матриц, т.е. имеющих дело только с ненулевыми элементами, переход $A_k \to A_{k-1}$ требует примерно $C(p_k k)^2$ операций, где $C = 3$ (при перемножении элементов крайних столбца и строки рассматриваются только ненулевые, все остальное как и выше). В силу (11) с $t = n - k$ общее число таких операций оценивается сверху величиной $C\Sigma_2$ с $\Sigma_2 = R + \Sigma$, $R = \left([\hat{k}] + 1\right)^2$ (это – число элементов матрицы $A_{[\hat{k}]+1}$, замыкающей начальный участок цепочки (2); для нее применяется оценка $p_{[\hat{k}]+1} \le 1$) и

$$\Sigma = \sum_{k=[\hat{k}]+2}^{n} \frac{k^2 p^2}{\left(1 - p(n-k)\right)^2}.$$

В случае $\hat{k} = n - p^{-1} > 0$ выражение под знаком суммы в Σ является строго монотонно убывающим по k, что позволяет оценить ее сверху интегралом

$$I(\hat{k}) = \int_{\hat{k}+1}^{n} \frac{k^2 p^2 dk}{(1 - p(n-k))^2} = \int_{1}^{1/p} \frac{\left(\hat{k} + z\right)^2 dz}{z^2},$$

где $z = k - \hat{k}$. При фиксированном $0 < p < 1$ получаем $I\left(\hat{k}\right) = \left(\hat{k}^2 - p^{-1}\right)(1 - p) + 2\hat{k} \ln p^{-1} <$ $< \hat{k}^2 + 2\hat{k} \ln n$ и с учетом R оценку $\Sigma_2 < 2\left(\hat{k}^2 + \hat{k} \ln n + \hat{k}\right) + 1$, так что при $\hat{k} \gg 1$ находим $C\Sigma_2 \ll \Sigma_1$.

Заметим, что большим параметром, по которому строятся приведенные выше оценки необходимого числа операций, фигурирующим как в Σ_1, так и в Σ_2, является не порядок n матрицы A_n, не доля $p = p_n$ ее (внедиагональных) ненулевых элементов, а порядок ее заполнения $\hat{K}(A_n) = [\hat{k}] = [n - p_n^{-1}]$, характеризующий порядок заполненной матрицы $A_{\hat{k}}$, получаемой в результате применения СП-метода.

В случае $\hat{K}(A_n) \sim 1$ вплоть до значений k порядка единицы заполнение будет отсутствовать, так что приведенные выше верхние кубические оценки необходимого числа арифметических операций следует заменить не превышающими квадратичных по n.

Напомним (см. [13]), что проверяемые на положительность в процессе применения СП-метода (1) выражения $\left(1 - a_{jj}^j\right)$ с точностью до обратной нумерации совпадают с диагональными элементами LU-разложения матрицы $I - A_n$. Для сравнения вычислительной эффективности СП-метода по сравнению с методом исключения Гаусса, используемым при построении LU-разложений (см., например, [15], гл. 1.7), заметим следующее.

1. Никакой проверки априорной невырожденности матрицы $I - A_n$ для применения СП-метода не требуется.

2. Метод исключения Гаусса задает почти экспоненциальный рост заполненности p с функцией роста, применяемой на каждом шаге метода $p' = f(p) = 2p - p^2$, так что для $\delta \ll 1$ соответствующее время заполнения, при котором итерируемая плотность p с начальным значением p_{init} будет достигать величины $\delta > 0$, близко к значению $\log_2 \delta + \log_2 p_{\text{init}}^{-1}$. Сопоставление линейной оценки с ростом p_n^{-1} при использовании СП-метода с логарифмической оценкой в методе Гаусса при $p_{\text{init}} = p_n$ свидетельствует о большей эффективности СП-метода при исследовании рассматриваемых в настоящей статье задач для разреженных матриц.

3. Для уже заполненной матрицы $A_{\hat{k}}$ метод Гаусса требует применения $\approx \frac{2}{3}\hat{k}^3$ операций (см., например, [15], гл. 1.7), что лишь на треть более эффективно, чем в случае использования СП-метода (оценка $\hat{k}^3$, см. выше).

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Во всех разбираемых ниже примерах рассматривается только нетривиальный случай с диагональными элементами матрицы $A = A_n$, меньшими единицы: $a_{ii} < 1$, $i = 1, \ldots, n$. При этом S_n задает число ненулевых внедиагональных ее элементов.

1. Рассмотрим случай матрицы $A = A_n$ в варианте равномерного распределения ее внедиагональных ненулевых элементов с $n < S_n < n(1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Класс таких матриц A_n характеризуется тем, что среднее число звеньев, входящих (равно как и выходящих) в каждую из n вершин графа $\Gamma(A_n)$, не меньше 1 и не больше $(1 + \varepsilon)$. Этот класс включает в себя неразложимые матрицы, граф которых имеет более одного многозвенного цикла. Из последнего неравенства в цепочке

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < p_n = \frac{S_n}{n^2 - n} < \frac{1+\varepsilon}{n-1}$$

получаем в случае $0 < \varepsilon < 1$ неравенство $p_n^{-1} > (n-1)(1-\varepsilon)$. Согласно приведенным оценкам к моменту заполнения матрицы ее порядок сократится до $\hat{K}(A_n) = \left[n - p_n^{-1}\right] + 1 < \varepsilon(n+1)$. Таким образом, реальное время, необходимое в этом случае для вычисления индикатора устойчивости, будет оцениваться сверху величиной $(\varepsilon n)^3 + C\left((\varepsilon n)^2 + \varepsilon n \ln n + 1\right)$ с некоторой постоянной C порядка единицы.

2. В случае $S_n < n$ матрица A является разложимой, что позволяет свести задачу о локализации ее спектрального радиуса к набору таких же задач для матриц меньшего порядка. Однако в рамках предложенной в настоящей работе методики построения индикаторов устойчивости необходимость в такой декомпозиции отсутствует. Тем не менее ее проведение на этапе предварительной обработки исходной информации, базирующееся на использовании стандартных алгоритмов перенумерации (см., например, в случае матриц с симметричной структурой разреженности [16]), не исключает возможности получения более эффективных результатов как с вычислительной, так и алгебраической (в смысле громоздкости формул, выражающих индикатор через ненулевые элементы матрицы с заданной структурой разреженности) точек зрения.

3. В случае $S_n = n$ неразложимая матрица A обязана представлять собой сумму циклической и диагональной матриц, так что ее граф содержит единственный цикл C, проходящий однократно через все его вершины, дополненный однозвенными циклами C_i, $i = 1,\ldots,n$, соответствующими диагональным элементам матрицы. После перенумерации, соответствующей порядку прохождения циклом C вершин графа матрицы, в качестве ее индикатора устойчивости можно использовать произведение ее ненулевых внедиагональных элементов $a_{i,i-1}$, $i = 1,\ldots,n$, $a_{10} = a_{1n}$, с поправкой на ненулевые диагональные элементы a_{ii}:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i,i-1}}{1 - a_{ii}}, \quad a_{10} = a_{1n}. \tag{12}$$

Выражение (12) следует из (1) применением индукции по i.

Формулу (12) можно трактовать еще и следующим образом. Развитие процесса, задаваемого системой (3) с матрицей A, определяется произведением коэффициентов передачи $a_{i,i-1}$ по каждому из звеньев цикла C, умноженному на коэффициенты внутреннего развития для каждой из вершин $1 - a_{ii}$. Каждый из последних представляет собой сумму всевозможных итераций при повторных внутренних передачах на циклах C_i:

$$\frac{1}{1 - a_{ii}} = \sum_{l=0}^{\infty} (a_{ii})^l.$$

Выражение (12) можно использовать в качестве индикатора также и в случае произвольного S_n, если граф матрицы A имеет единственный неоднозвенный цикл C. При этом порядок матрицы можно сократить до размера этого цикла, оставив в качестве ее графа только цикл C, дополненный однозвенными циклами C_i на вершинах, входящих в цикл C. Все тупиковые, т.е. не дающие циклов ответвления, игнорируются, так что соответствующая им информация для построения индикатора интереса не представляет.

4. В терминах процесса распространения эпидемии симметричность структуры разреженности является вполне естественным требованием, поскольку, если два местообитания связаны между собой, то передача инфекции является обоюдной. Коэффициенты передачи a_{ij}, фигурирующие в матрице A, могут интерпретироваться как вероятности передачи инфекционного заболевания в паре (j,i) за один временной период (например, за год) при условии отсутствия других путей передачи, включая пути внутри отдельных местообитаний (т.е. обнуления всех элементов матрицы A, кроме рассматриваемого). Различие коэффициентов передачи на расположенных симметрично местах означает различие влияний соответствующих местообитаний друг на друга. Содержательно это может быть связано с различием в плотности населения, уровня медицинского обслуживания, природных условий и т.п. Разбиение на кластеры означает изоляцию их друг от друга, обеспечиваемую как естественными, так и искуственными факторами. Таковыми могут служить запрет на пересечение границ, карантин, самоизоляция.

5. Численные исследования проводились для разреженных матриц как в случае равномерного распределения их ненулевых элементов среди внедиагональных, так и в случае возможной симметричности их структуры разреженности. Программы, ориентированные на разреженные матрицы, были написанны для пакета Maple 7, и включали в себя возможность построения случайных матриц для обоих обозначенных выше случаев. Они оказались весьма эффективными с точки зрения незначительности ресурсов, востребованных для их выполнения. Так, например, в случае $n = 10^4$ расчеты индикатора для некоторых из матриц, описанных в примере 1, занимали на обычном персональном компьютере всего несколько минут. Разумеется, никакой предварительной обработки информации при этом не проводилось, так что получаемые на этом пути результаты можно рассматривать только с точки зрения возможности нахождения предварительных оценок в целях выяснения необходимости проведения более углубленного детального исследования факторов возникновения, развития и распространения изучаемых явлений, таких, как пандемия.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту, ряд полезных замечаний, рекомендаций и соображений которого был учтен при работе над настоящей статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leslie P.H.* On the use of matrices in certain population mathematics// Biometrica. 1945. V. 33. P. 183–212.
2. *Разжевайкин В.Н.* Функционалы отбора в автономных моделях биологических систем с непрерывной возрастной и пространственной структурой// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 338–346.
3. *Логофет Д.О., Белова И.Н.* Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикл. математика. 2007. Т. 13. № 4. С. 145–164.
4. *Lefcovitch L.P.* The study of population growth in organisms grouped by stages. Biometrics. 1965. V. 21. P. 1–18.
5. *Logofet D.O.* Convexity in projection matrices: projection to a calibration problem. Ecological modeling. 2008. V. 216. № 2. P. 217–228.
6. *Разжевайкин В.Н.* Анализ моделей динамики популяций. М.: МФТИ, 2010. С. 174.
7. *Cushing J.M., Yicang Z.* The Net Reproductive Value and Stability in Matrix Population Models. // Nat. Res. Model. 1994. V. 8. № 4. P. 297–333.
8. *Chi-Kwong Li, Hans Schneider.* Applications of Perron–Frobenius theory to population dynamics// J. Math. Biol. 2002. V. 44. P. 450–462.
9. *Protasov V.Ju., Logofet D.O.* Rank-one corrections of nonnegative matrices, with an applications to matrix population models// SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2014. V. 35. № 2. P. 749–764.
10. *Caswell H.* Matrix Population Models: Construction, Analysis and Interpretation, 2nd ed. Sinauer Associates: 629 Sunderland, Mass., USA, 2001. V. 8. № 4. Fall 1994.
11. *Logofet D.O., Razzhevaikin V.N.*. Potential-Growth Indicators Revisited: Higher Generality and Wider Merit of Indication. MATHEMATICS, 2021. V. 9. № 14. 1649. eISSN: 2227–7390. https://doi.org/10.3390/math9141649
12. *Berman A., Plemmons R.J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Philadehia: SIAM, 1994. P. 340.
13. *Разжевайкин В.Н., Тыртышников Е.Е.* О построении индикаторов устойчивости неотрицательных матриц // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 3. С. 407–418.
14. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. С. 548.
15. *Уоткинс Д.* Основы матричных вычислений. М., БИНОМ, Лаборатория знаний. 2017. С. 664.
16. *Джорж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. С. 336.