ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 4, с. 614–628

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА

К. Б. Сабитов[1,2,*]

[1] 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия

[2] 453103 Стерлитамак, пр-т Ленина, 49, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Россия

**e-mail: sabitov_fmf@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.02.2021 г.
Переработанный вариант 17.11.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

В работе для уравнения колебаний прямоугольной пластинки изучены начально-граничная и обратные задачи по отысканию правой части (источника колебаний). Решения задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования. При обосновании существования решения обратной задачи по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственных координат, возникает проблема малых знаменателей от двух натуральных переменных, в связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили доказать существование решения этой задачи в классе регулярных решений, накладывая определенные условия гладкости на данные граничные функции. Библ. 21.

Ключевые слова: уравнение колебаний прямоугольной пластины, начально-граничная и обратные задачи, интегральное уравнение Вольтерра, единственность, ряд, малые знаменатели, существование.

DOI: 10.31857/S0044466923040142, **EDN:** IVVXNL

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h, при этом толщина ее полагается малой по сравнению с другими размерами, со сторонами p и q, описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2\Delta^2 u = F(x,y,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$, EJ — жесткость пластинки, ρ — плотность пластинки, E — модуль упругости материала, J — момент инерции, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $F(x,y,t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки, $u(x,y,t)$ — смещение точки (x,y) пластинки в момент времени t.

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок и оболочек имеют важное прикладное значение в строительной механике, машиностроении, авиастроении, судостроении, ядерных энергетических установках и т.д. Во многих случаях использование пластин связано с условиями закрепления на отдельных участках их контура. Такие задачи изучены в известных работах [2, с. 444–449], [3, с. 132–133], [4, с. 35–69] и многих других.

Рассмотрим уравнение (1) в области

$$Q = D\times(0,T), \quad \text{где} \quad D = \{(x,y)|0 < x < p,\, 0 < y < q\},$$

здесь p и q отмечены выше, размеры пластинки, T — заданная положительная постоянная, и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти определенную в области Q функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y,t) \in C^{4,2}_{xy,t}(\overline{Q}); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &u(0,y,t) = u_{xx}(0,y,t) = u(p,y,t) = u_{xx}(p,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le q, \quad 0 \le t \le T, \\ &u(x,0,t) = u_{yy}(x,0,t) = u(x,q,t) = u_{yy}(x,q,t) = 0, \quad 0 \le x \le p, \quad 0 \le t \le T; \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{5}$$

где $F(x,y,t)$, $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Здесь граничные условия (4) означают, что все стороны пластинки подперты, т.е. свободно могут двигаться вокруг точек закрепления.

Задача 2. Пусть $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$. Найти функции $u(x,y,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5), и, кроме того,

$$g(t) \in C[0,T]; \tag{6}$$

$$u(x_0,y_0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

где $f(x,y)$ и $h(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, (x_0,y_0) – заданная точка из области D.

Задача 3. Пусть $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$. Найти пару функций $u(x,y,t)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющих условиям (2)–(5) и, кроме того,

$$f(x,y) \in C(\overline{D}); \tag{8}$$

$$u(x,y,t_0) = \varphi_0(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{9}$$

где $g(t)$ и $\varphi_0(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции, t_0 – заданная точка из полуинтервала $(0,T]$.

Из постановок этих задач видно, что задача 1 представляет собой прямую начально-граничную задачу для неоднородного уравнения колебаний прямоугольной пластинки. Задачи 2 и 3 являются обратными, поэтому здесь условия (7) и (9) являются дополнительными для определения сомножителей $g(t)$ и $f(x,y)$ правой части $F(x,y,t)$ уравнения (1).

Данная работа является продолжением исследований автора [5–9], посвященных обоснованию корректности постановки начально-граничных и обратных задач для одномерного уравнения балки. Постановка обратных задач 2 и 3 исходит из работ [10–15], где аналогичные задачи изучены для уравнений теплопроводности, струны и операторных уравнений. Решения поставленных задач построены в явном виде как суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений. Отметим, что при обосновании сходимости рядов, представляющих решение задачи 3, возникает проблема малых знаменателей [16], [17], которая создает дополнительные трудности. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой. На основе этой оценки обоснована сходимость рядов в классе регулярных решений уравнения (1).

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ 1

2.1. Энергетическое неравенство. Единственность решения

Теорема 1. *Если существует решение начально-граничной задачи* (2)–(5)*, то при любом* $t \in [0,T]$ *для решения справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]dxdy \le \\ &\le e^T \left[\iint_D [\psi^2 + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)]dxdy + \iiint_Q F^2(x,y,t)dxdydt \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\iint_D [\rho h u_t^2 + EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]dxdy = \rho h \frac{1}{2}\iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]dxdy = \rho h E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной пластинки при нулевых граничных условиях (4).

Действительно, кинетическая энергия движущейся пластинки состоит из поступательного движения элемента $dxdy$ параллельно смещению $u(x,y,t)$ и определяется интегралом

$$K(t) = \frac{1}{2}\iint_D \rho h u_t^2\,dxdy,$$

где ρh есть масса единицы площади пластинки.

Потенциальная энергия колебаний пластинки зависит от жесткости EJ при изгибе и находится интегралом [2, с. 446]

$$\Pi(t) = \frac{1}{2}\iint_D EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)dxdy.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t) = K(t) + \Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний пластинки.

Доказательство теоремы. Рассмотрим тождество

$$u_tLu = \frac{1}{2}[u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]_t' + \alpha^2(u_tu_{xxx} - u_{tx}u_{xx} + u_tu_{xyy} - u_{ty}u_{xy})_x' +$$
$$+ \alpha^2(u_tu_{yyy} - u_{ty}u_{yy} + u_tu_{xxy} - u_{tx}u_{xy})_y'$$

и интегрируя его по области

$$Q_\tau = Q \cap \{t < \tau\}, \quad 0 < \tau \le T,$$

будем иметь

$$E(\tau) - E(0) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \iiint_{Q_\tau} Fu_t\,dxdydt, \tag{11}$$

где

$$J_1 = \alpha^2\iint_{S_1}(u_tu_{xxx} - u_{tx}u_{xx} + u_tu_{xyy} - u_{ty}u_{xy})dydt,$$

$$J_2 = \alpha^2\iint_{S_2}(u_tu_{yyy} - u_{ty}u_{yy} + u_tu_{xxy} - u_{tx}u_{xy})dxdt,$$

$$J_3 = \alpha^2\iint_{S_3}(u_tu_{xxx} - u_{tx}u_{xx} + u_tu_{xyy} - u_{ty}u_{xy})dydt,$$

$$J_4 = \alpha^2\iint_{S_4}(u_tu_{yyy} - u_{ty}u_{yy} + u_tu_{xxy} - u_{tx}u_{xy})dxdt,$$

$S_i, i = \overline{1,4}$ – грани параллелепипеда Q_τ, лежащие соответственно на плоскостях $x = p$, $y = q$, $x = 0$, $y = 0$.

Пусть выполнены граничные условия (4), т.е. $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, и $u = u_{yy} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$. Тогда $u_t = u_y = u_{ty} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, поэтому интегралы $J_1 = J_3 = 0$. Аналогично $u_t = u_x = u_{tx} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$, в силу чего, интегралы $J_2 = J_4 = 0$.

Тогда из равенства (11) следует, что

$$E(\tau) \le E(0) + \frac{1}{2}\iiint_{Q_\tau} F^2(x,y,t)dxdydt + \frac{1}{2}\iiint_{Q_\tau} u_t^2\,dxdydt = A + \frac{1}{2}\int_0^\tau dt\iint_D u_t^2dxdy \le A + \int_0^\tau E(t)dt, \tag{12}$$

где

$$A = E(0) + \frac{1}{2}\iiint_{Q_\tau} F^2(x,y,t)dxdydt.$$

Отсюда, следуя [18, с. 77], получим

$$A + \int_0^T E(t)dt \le Ae^T. \tag{13}$$

Тогда из неравенств (12), (13) следует оценка (10).

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 правая часть $F(x,y,t)$ уравнения (1) равна нулю, то при любом $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\iint_D [\psi^2(x,y) + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)]dxdy, \tag{14}$$

т.е. равенство (14) означает, что полная энергия собственных колебаний однородной пластины остается в течение всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.

Справедливость равенства (14) следует из соотношения (11).

Следствие 2 (теорема единственности). Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственно.

Доказательство. Пусть существуют две функции $u_1(x,y,t)$ и $u_2(x,y,t)$, удовлетворяющие условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t) = u(x,y,t)$ принадлежит классу (2), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в Q, нулевым начальным условиям $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) \equiv 0$ и граничным условиям (4). Для такого решения из равенства (14) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2}\iint_Q [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]dxdy = 0$$

при любом $t \in [0,T]$. Данное равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_{xy} \equiv 0$ и $u_{yy} \equiv 0$ в области Q. Из этих условий следует, что $u(x,y,t) = ax + by + c$, где a, b и c – произвольные постоянные. По условию эта функция должна удовлетворять одному из граничных условий (4) и нулевым начальным условиям. Из граничных условий (4) следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

2.2. Колебания пластины, шарнирно опирающейся на все края

Разделяя переменные $u(x,y,t) = v(x,y)f(t)$ в уравнении (1) при $F(x,y,t) \equiv 0$, относительно функции $v(x,y)$ получим следующую спектральную задачу:

$$\Delta(\Delta v) + \lambda^2 v = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} v(0,y) = u_{xx}(0,y) = v(p,y) = v_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le q, \\ v(x,0) = v_{yy}(x,0) = v(x,q) = v_{yy}(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p. \end{gathered} \tag{16}$$

В качестве решения спектральной задачи (15), (16) возьмем функции

$$v_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}, \tag{17}$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2, \quad m,n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Отметим, что система собственных функций (17) задачи (15), (16) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(D)$ и образует там базис.

Следуя работам [5], [6], введем функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x,y,t)v_{mn}(x,y)dxdy, \tag{19}$$

где $u(x,y,t)$ – решение начально-граничной задачи (2)–(5).

Дифференцируя равенство (19) дважды по $t \in (0, T)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{mn}(t) = \iint\limits_D F(x, y, t) v_{mn}(x, y) dxdy - \alpha^2 \iint\limits_D (u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) v_{mn}(x, y) dxdy. \tag{20}$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (4) и (16), будем иметь

$$\iint\limits_D u_{xxxx} v_{mn}(x, y) dxdy = \left(\frac{m\pi}{p}\right)^4 u_{mn}(t),$$

$$\iint\limits_D u_{yyyy} v_{mn}(x, y) dxdy = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^4 u_{mn}(t),$$

$$\iint\limits_D u_{xxyy} v_{mn}(x, y) dxdy = \left(\frac{m\pi}{p}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2 u_{mn}(t).$$

Подставляя значения этих интегралов в равенство (20), получим

$$u''_{mn}(t) - \alpha^2 \lambda^2_{mn} u_{mn}(t) = F_{mn}(t), \tag{21}$$

здесь

$$F_{mn}(t) = \iint\limits_D F(x, y, t) v_{mn}(x, y) dxdy. \tag{22}$$

Общее решение дифференциального уравнения (21) находится по формуле

$$u_{mn} = a_{mn} \cos \alpha\lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \alpha\lambda_{mn} t + \frac{1}{\alpha\lambda_{mn}} \int\limits_0^t F_{mn}(s) \sin[\alpha\lambda_{mn}(t - s)] ds, \tag{23}$$

где a_{mn} и b_{mn} – произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_{mn} и b_{mn} воспользуемся начальными условиями (5) и формулой (19):

$$u_{mn}(0) = \iint\limits_D u(x, y, 0) v_{mn}(x, y) dxdy = \iint\limits_D \varphi(x, y) v_{mn}(x, y) dxdy = \varphi_{mn}, \tag{24}$$

$$u'_{mn}(0) = \iint\limits_D u_t(x, y, 0) v_{mn}(x, y) dxdy = \iint\limits_D \psi(x, y) v_{mn}(x, y) dxdy = \psi_{mn}. \tag{25}$$

Удовлетворив функции (23) начальным условиям (24) и (25), найдем

$$a_{mn} = \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\alpha\lambda_{mn}}.$$

Подставляя найденные значения a_{mn} и b_{mn} в формулу (23), получим явный вид функций

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \widetilde{F}_{mn}(t), \tag{26}$$

где

$$\widetilde{F}_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int\limits_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t - s)] ds, \quad \omega_{mn} = \alpha\lambda_{mn}. \tag{27}$$

На основании частных решений (26) и (17) решение задачи (2)–(5) можно определить в виде суммы ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x, y). \tag{28}$$

В дальнейшем правую часть $F(x,y,t)$ уравнения (1) представим в виде: $F(x,y,t) = f(x,y)g(t)$, так как в задачах 2 и 3 используется такое представление. Тогда функции (22) и (26) принимают вид:

$$F_{mn}(t) = f_{mn}g(t), \tag{29}$$

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t + f_{mn}g_{mn}(t), \tag{30}$$

где

$$f_{mn} = \iint\limits_D f(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy, \tag{31}$$

$$g_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}}\int\limits_0^t g(s)\sin[\omega_{mn}(t-s)]ds. \tag{32}$$

Лемма 1. *При любом $t \in [0,t]$ справедливы оценки*

$$|u_{mn}(t)| \le C_1\left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}}|\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}}|f_{mn}|\|g\|_{L_2(0,T)}\right), \tag{33}$$

$$|u''_{mn}(t)| \le C_2(\lambda^2_{mn}|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}|\psi_{mn}| + \lambda_{mn}|f_{mn}|\|g\|_{L_2(0,T)}), \tag{34}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, p, q и T.

Справедливость оценок (33) и (34) следует из формул (26), (27) и (29).

Формально из ряда (28) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{35}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\left(\frac{m\pi}{p}\right)^4 v_{mn}(x,y), \tag{36}$$

$$u_{yyyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\left(\frac{n\pi}{q}\right)^4 v_{mn}(x,y), \tag{37}$$

$$u_{xxyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\left(\frac{m\pi}{p}\right)^2\left(\frac{n\pi}{q}\right)^2 v_{mn}(x,y). \tag{38}$$

Ряды (28), (35)–(38) при любых $(x,y,t) \in \overline{Q}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$C_3\sum_{m,n=1}^{\infty}(\lambda^2_{mn}|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}|\psi_{mn}| + \lambda_{mn}|f_{mn}|\|g\|_{L_2(0,T)}). \tag{39}$$

Лемма 2. *Если $\varphi(x,y) \in C^6(\overline{D})$, $\varphi(0,y) = \varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xxxx}(0,y) = \varphi(p,y) = \varphi_{xx}(p,y) = \varphi_{xxxx}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$, $\varphi(x,0) = \varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yyyy}(x,0) = \varphi(x,q) = \varphi_{yy}(x,q) = \varphi_{yyyy}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$; $\psi(x,y) \in C^4(\overline{D})$, $\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi_{xx}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$, $\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$, $f(x,y) \in C^4(\overline{D})$, $f(0,y) = f_{xx}(0,y) = f(p,y) = f_{xx}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$, $f(x,0) = f_{yy}(x,0) = f(x,q) = f_{yy}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$, $g(t)] \in C(0,T) \cap L_2(0,T)$, то справедливы представления:*

$$\begin{gathered}\varphi_{mn} = \left[\pi\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\right]^{-6}(|\varphi^{(6,0)}_{mn}| + 6|\varphi^{(5,1)}_{mn}| + 15|\varphi^{(4,2)}_{mn}| + 20|\varphi^{(3,3)}_{mn}| + \\ + 15|\varphi^{(2,4)}_{mn}| + 6|\varphi^{(1,5)}_{mn}| + |\varphi^{(0,6)}_{mn}|) = \left[\pi\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\right]^{-6}\sum_{\substack{0\le i,j\le 6\\ i+j=6}}|\varphi^{(i,j)}_{mn}|;\end{gathered} \tag{40}$$

$$\psi_{mn} = \left[\pi\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\right]^{-4} \sum_{\substack{0\le i,j\le 4\\ i+j=4}} |\psi_{mn}^{(i,j)}|, \tag{41}$$

$$f_{mn} = \left[\pi\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\right]^{-4} \sum_{\substack{0\le i,j\le 4\\ i+j=4}} |f_{mn}^{(i,j)}|, \tag{42}$$

где $\varphi_{mn}^{(i,j)}$, $\psi_{mn}^{(i,j)}$, $f_{mn}^{(i,j)}$ *– коэффициенты Фурье соответствующих производных*

$$\frac{\partial^{i+j}\varphi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j},\quad \frac{\partial^{i+j}\psi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j},\quad \frac{\partial^{i+j}f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j},$$

по системам функций $\dfrac{\partial^{i+j}v_{mn}(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$*, при этом следующие ряды сходятся:*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|^2 \le \iint_D \left(\frac{\partial^6\varphi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right)^2 dxdy,\quad i+j=6, \tag{43}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \le \iint_D \left(\frac{\partial^4\psi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right)^2 dxdy,\quad i+j=4, \tag{44}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |f_{mn}^{(i,j)}|^2 \le \iint_D \left(\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right)^2 dxdy,\quad i+j=4. \tag{45}$$

Доказательство. Следуя аналогично работе [19, с. 335], интегрируя по частям в интегралах формул (24), (25), (22), получим искомые представления (40)–(42), а оценки (43)–(45) являются аналогами неравенств Бесселя для двойных рядов Фурье.

На основании леммы 2 обоснуем сходимость ряда (39). Из равенства (18) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{l_M}\right)^2 (m^2+n^2) \le \lambda_{mn} \le \left(\frac{\pi}{l_m}\right)^2 (m^2+n^2),\quad l_m = \min\{p,q\};\quad \frac{1}{\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)^2} \le \frac{l_M^2}{(m+n)^2},\quad l_M = \max\{p,q\}. \tag{46}$$

Тогда ряд (39) мажорируется рядом

$$C_4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^2}\left[\sum_{\substack{i+j=6\\ 0\le i,j\le 6}} |\varphi_{mn}^{(i,j)}| + \sum_{\substack{i+j=4\\ 0\le i,j\le 4}} |\psi_{mn}^{(i,j)}| + \sum_{\substack{0\le i,j\le 4\\ i+j=4}} |f_{mn}^{(i,j)}|\right],$$

который в силу сходимости рядов (43)–(45) и неравенства

$$\frac{1}{(m+n)^2} \le \frac{1}{4mn} < \frac{1}{mn}$$

сходится при любом $t\in[0,T]$. Отсюда следует, что ряды (28), (35)–(38) сходятся равномерно на $\overline{Q}$. Тогда сумма ряда (28) удовлетворяет всем условиям задачи (2)–(5).

Следовательно, нами доказана следующая

Терема 2. *Если функции* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y)$ *и* $g(t)$ *удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи* (2)–(5)*, которое определяется суммой ряда* (28).

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи от начальных функций $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и правой части $F(x,y,t)$.

Терема 3. *Для решения* (28) *задачи* (2)–(5) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)} \le C_5(\|\varphi(x,y)\|_{L_2(D)} + \|\psi(x,y)\|_{L_2(D)} + \|F(x,y,t)\|_{L_2(Q)}), \tag{47}$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} \le C_6(\|\varphi(x,y)\|_{C^2(\overline{D})} + \|\psi(x,y)\|_{C(\overline{D})} + \|F(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})}). \tag{48}$$

Доказательство. Поскольку система (17) ортонормирована в $L_2(D)$, то из формулы (28) на основании оценки (33) получим

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u^2_{mn}(t) \le 3C_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty}\left(|\varphi_{mn}|^2 + \frac{1}{\lambda^2_{mn}}|\psi_{mn}|^2 + \frac{1}{\lambda^2_{mn}}|f_{mn}|^2\|g\|^2_{L_2(0,T)}\right) =$$

$$= 3C_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty}(|\varphi_{mn}|^2 + |\psi_{mn}|^2 + |f_{mn}|^2\|g\|^2_{L_2(0,T)}) \le 3C_1^2(\|\varphi(x,y)\|^2_{L_2(D)} + \|\psi(x,y)\|^2_{L_2(D)} + \|F(x,y,t)\|^2_{L_2(Q)}).$$

Отсюда и получим оценку (47).

Пусть (x,y,t) – произвольная точка из $\bar{Q}$. Тогда из (28) с учетом оценки (33) имеем

$$|u(x,y,t)| \le \frac{2C_1}{\sqrt{pq}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}}|\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}}|f_{mn}|\|g\|_{L_2(0,T)}\right). \tag{49}$$

По условию коэффициент φ_{mn} можно представить

$$|\varphi_{mn}| = \left[\pi\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\right]^{-2}(|\varphi^{(2,0)}_{mn}| + 2|\varphi^{(1,1)}_{mn}| + |\varphi^{(0,2)}_{mn}|) = \left[\pi\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)\right]^{-2}\sum_{\substack{0\le i,j\le 2\\ i+j=2}}|\varphi^{(i,j)}_{mn}|. \tag{50}$$

Тогда из неравенства (49) с учетом (50) и (46) и используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|u(x,y,t)| \le \widetilde{C}_1\sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(m+n)^2}\sum_{\substack{0\le i,j\le 2\\ i+j=2}}|\varphi^{(i,j)}_{mn}| + \frac{1}{m^2+n^2}|\psi_{mn}| + \frac{1}{m^2+n^2}|f_{mn}|\|g\|_{L_2(0,T)}\right] \le$$

$$\le \widetilde{C}_1\left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^4}\right)^{1/2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0\le i,j\le 2\\ i+j=2}}|\varphi^{(i,j)}_{mn}|\right)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}|\psi_{mn}|^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \|g\|_{L_2(0,T)}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}|f_{mn}|^2\right)\right]^{1/2} \le \widetilde{C}_2\left(\sum_{\substack{0\le i,j\le 2\\ i+j=2}}\left\|\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right\|_{L_2(D)} + \|\psi(x,y)\|_{L_2(D)} + \|F(x,y,t)\|_{L_2(Q)}\right) \le$$

$$\le C_6(\|\varphi(x,y)\|_{C^2(\bar{D})} + \|\psi(x,y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x,y,t)\|_{C(\bar{Q})}),$$

что и доказывает справедливость оценки (48).

Таким образом, нами полностью доказана корректность постановки задачи (2)–(5). При этом отметим, что при доказательстве теоремы 2 существования решения задачи на начальные условия (5) наложены достаточно сильные условия гладкости. Если ввести понятие обобщенного решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

На основе прямой задачи исследуем задачу 2 по отысканию пары функций $u(x,y,t)$ и $g(t)$.

Для этого удовлетворим функцию (28) граничному условию (7):

$$u(x_0,y_0,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}(t)v_{mn}(x_0,y_0) = h(t), \quad 0\le t\le T. \tag{51}$$

Заменив в (51) функцию $u_{mn}(t)$ ее выражением (30), получим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t g(s)K(t,s)ds = \tilde{h}(t), \quad 0\le t\le T, \tag{52}$$

здесь

$$K(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{\omega_{mn}} \sin[\omega_{mn}(t-s)] v_{mn}(x_0,y_0), \quad 0 \le s \le t \le T, \tag{53}$$

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x_0,y_0). \tag{54}$$

В силу условий теоремы 1 функция $f(x,y)$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{gathered} f(x,y) \in C^4(\bar{D}), \quad f(0,y) = f_{xx}(0,y) = f(x,y) = f_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le q; \\ f(x,0) = f_{yy}(x,0) = f(x,q) = f_{yy}(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p. \end{gathered} \tag{55}$$

В силу условий (55) ряд (53) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по t первого и второго порядков, сходятся равномерно на $0 \le s \le t \le T$, поэтому функции $K(t,s)$, $K_t(t,s)$ и $K_{tt}(t,s)$ непрерывны на указанном множестве.

Если функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то ряд в правой части равенства (54) равномерно сходится на $[0,T]$ и допускает там почленное дифференцирование по t дважды. Следовательно, при условии $h(t) \in C^2[0,T]$ функция $\tilde{h}(t)$ также принадлежит $C^2[0,T]$.

Теперь, продифференцировав интегральное уравнение (52) по t, получим

$$K(t,t)g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} ds = \tilde{h}'(t). \tag{56}$$

Из равенства (53) следует, что $K(t,t) \equiv 0$. Тогда, дифференцируя уравнение (56) еще раз по t, будем иметь

$$\left. \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \right|_{s=t} g(t) + \int_0^t g(s) \frac{\partial K^2(t,s)}{\partial t^2} ds = \tilde{h}''(t). \tag{57}$$

На основании соотношения (53) вычислим

$$\left. \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \right|_{s=t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0). \tag{58}$$

Отсюда видно, что если $f(x_0,y_0) \ne 0$, то уравнение (57) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра II рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Следовательно, интегральное уравнение (57), стало быть, и интегральное уравнение (52), имеют единственное решение $g(t)$ в классе $C[0,T]$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть функции* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1, функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условиям* (55), $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(0) = \varphi(x_0,y_0)$, $h(0) = \psi(x_0,y_0)$. *Тогда, если* $f(x_0,y_0) \ne 0$, *то задача* (2)–(7) *имеет единственное решение. Это решение определяется по формуле* (28), *в которой функция* $g(t)$ *находится из интегрального уравнения* (57).

Теперь выясним, насколько существенно условие $f(x_0,y_0) \ne 0$ в теореме 4. Пусть при некоторых $m = m_0$, $\tilde{x}_0 = x_0/p \in (0,1)$ или $n = n_0$, $\tilde{y}_0 = y_0/q \in (0,1)$ выполняется равенство

$$\sin \frac{m_0 \pi x_0}{p} = \sin m_0 \pi \tilde{x}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{n_0 \pi y_0}{q} = \sin n_0 \pi \tilde{y}_0 = 0.$$

Ясно, что такие $\tilde{x}_0$ и $\tilde{y}_0$ существуют. Пусть выполнено первое из этих равенств. Тогда для функции $f(x,y) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q}$ при любой функции $g(t) \in C[0,T]$ существует ненулевое решение задачи 2 (где $\varphi(x,y) = \psi(x,y) \equiv 0$)

$$u_{m_0 n}(x,y,t) = \sin \frac{m_0 \pi x}{p} \sin \frac{n \pi y}{q} \frac{1}{\omega_{m_0 n}} \int_0^t g(s) \sin[\omega_{m_0 n}(t-s)] ds.$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 3

Решение (28) прямой задачи 1 удовлетворим граничному условию (9). Тогда получаем уравнение

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t_0)v_{mn}(x,y) = \varphi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{0mn}v_{mn}(x,y), \tag{59}$$

здесь

$$\varphi_{0mn} = \iint_D \varphi_0(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy, \tag{60}$$

а $u_{mn}(t_0)$ определяется равенством (30), где коэффициенты f_{mn} пока неизвестны и подлежат нахождению. Из уравнения (59) найдем

$$f_{mn} = \frac{1}{g_{mn}(t_0)}\left(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t - \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right), \tag{61}$$

при условии, что при всех $m,n \in \mathbb{N}$

$$g_{mn}(t_0) \neq 0, \tag{62}$$

где $g_{mn}(t)$ определяется по формуле (32).

Подставляя (61) в равенство (30), построим в явном виде функции

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t + \frac{g_{mn}(t)}{g_{mn}(t_0)}\left(\varphi_{0mn} - \varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t_0 - \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t_0\right). \tag{63}$$

Тогда решение задачи 3 определится как сумма рядов

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{64}$$

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}v_{mn}(x,y), \tag{65}$$

где коэффициенты $u_{mn}(t)$ и f_{mn} находятся соответственно формулами (63) и (61).

Теперь докажем единственность решения задачи. Пусть $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \varphi_0(x,y) \equiv 0$ и выполнены условия (62) при всех $m,n \in \mathbb{N}$. Тогда из равенств (24), (25), (60), (61) и (63) следует, что $u_{mn}(t) \equiv 0$ и $f_{mn} \equiv 0$. Отсюда в силу равенств (19) и (31) получаем, что при всех $t \in [0,T]$ и $m,n \in \mathbb{N}$

$$\iint_D u(x,y,t)v_{mn}(x,y)dxdy = 0, \qquad \iint_D f(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy = 0.$$

Эти равенства в силу полноты системы функций (17) в пространстве $L_2(D)$ означают, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду на $\overline{D}$ при любом $t \in [0,T]$ и $f(x,y) = 0$ почти всюду на $\overline{D}$. Отсюда в силу условий (2) и (8) следует, что $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$ и $f(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$ при любой непрерывной на $[0,T]$ функции $g(t)$.

Если при некоторых t_0, $m = m_0$ или $n = n_0$ выражение $g_{m_0n}(t_0) = 0$ или $g_{mn_0}(t_0) = 0$, то однородная задача 3 (где $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = \varphi_0(x,y) \equiv 0$) при любой непрерывной функции $g(t)$ имеет ненулевое решение

$$u(x,y,t) = f_{m_0n}g_{m_0n}(t)v_{m_0n}(x,y), \qquad f(x,y) = f_{m_0n}v_{m_0n}(x,y),$$

где $f_{m_0n} \neq 0$ – произвольная постоянная.

Теперь возникает вопрос о существовании нулей функций $g_{mn}(t_0)$. Пусть функция $g(s)$ монотонная на $[0,t_0]$. Тогда на основании второй теоремы о среднем имеем

$$\begin{aligned}\omega_{mn}g_{mn}(t_0) &= g(0)\int_0^{\xi}\sin[\omega_{mn}(t_0-s)]ds + g(t_0)\int_{\xi}^{t_0}\sin[\omega_{mn}(t_0-s)]ds = \\ &= \frac{g(0)}{\omega_{mn}}[\cos\omega_{mn}(t_0-\xi)-\cos\omega_{mn}t_0] + \frac{g(t_0)}{\omega_{mn}}[1-\cos\omega_{mn}(t_0-\xi)] = \\ &= \frac{\cos\omega_{mn}(t_0-\xi)}{\omega_{mn}}[g(0)-g(t_0)] + \frac{g(t_0)}{\omega_{mn}} - \frac{g(0)}{\omega_{mn}}\cos\omega_{mn}t_0, \quad 0<\xi<t_0.\end{aligned} \tag{66}$$

Теперь уточним монотонность функции $g(s)$ на $[0,t_0]$. Пусть она возрастающая и неотрицательная. Тогда $g(t_0)=g(0)+\alpha$, $\alpha\ge 0$. Тогда из равенства (66) получим

$$\begin{aligned}\omega_{mn}g_{mn}(t_0) &= \frac{g(0)}{\omega_{mn}}(1-\cos\omega_{mn}t_0) + \frac{\alpha}{\omega_{mn}}(1-\cos\omega_{mn}(t_0-\xi)) \ge \\ &\ge \frac{g(0)}{\omega_{mn}}(1-\cos\omega_{mn}t_0) = \frac{2g(0)}{\omega_{mn}}\sin^2\frac{\omega_{mn}t_0}{2}.\end{aligned} \tag{67}$$

Отсюда видно, что при $g(s)=\text{const}\ne 0$

$$g_{mn}(t_0)=0 \Leftrightarrow \sin\frac{\omega_{mn}t_0}{2}=0 \Leftrightarrow t_0=\frac{\pi k}{\alpha\lambda_{mn}} \quad k,m,n\in\mathbb{N},$$

т.е. при этих значениях t_0 нарушается единственность решения задачи 3.

Следовательно, нами установлен критерий единственности решения задачи 3.

Теорема 5. *Если существует решение задачи* 3*, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех* m, $n\in\mathbb{N}$ *выполнены условия* (62).

Поскольку выражение $g_{mn}(t_0)$ может иметь счетное множество нулей, то возникает проблема малых знаменателей [16], [17], [18, с. 112–118] и поэтому необходимо установить оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой.

Выражение $\sin(\omega_{mn}t_0/2)$ представим в следующем виде:

$$\sin\frac{\omega_{mn}t_0}{2} = \sin\pi N^2\nu_{mn}, \quad N=\max\{m,n\}, \tag{68}$$

где

$$\nu_{mn} = d\left[\left(\frac{qm}{N}\right)^2 + \left(\frac{pn}{N}\right)^2\right], \quad d=\frac{\alpha t_0\pi}{2(pq)^2}.$$

Поскольку ν_{mn} зависит от n и m, то в зависимости от данных задачи α, p, q и t_0 выражение ν_{mn} может принимать только рациональные или иррациональные значения. Если ν_{mn} принимает только рациональные значения, то выражение (68) будет иметь счетное множество нулей. Поэтому остается рассмотреть случай, когда ν_{mn} принимает иррациональные значения. Также заметим, что множество значений ν_{mn} ограничено

$$dl_m^2 < \nu_{mn} \le d(p^2+q^2), \quad l_m=\min\{p,q\}.$$

Предварительно из теории чисел приведем утверждение, которое является аналогом теоремы Рота [20, с. 268].

Утверждение. *Для любого иррационального алгебраического числа* β *степени* $s\ge 2$ *и произвольного положительного числа* $\varepsilon>0$ *найдется положительное число* $C_1>0$ *такое, что при любых целых* p *и* q $(q>0)$ *справедливо неравенство*

$$\left|\beta-\frac{p}{q^2}\right| > \frac{C_1}{q^{4+\varepsilon}}. \tag{69}$$

Лемма 3. *Если ν_{mn} является иррациональным алгебраическим числом степени $s \geq 2$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что при всех $N \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$\left|\sin \pi N^2 \nu_{mn}\right| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}}, \tag{70}$$

где C_2 зависит от m и n.

Доказательство. Для всякого $N \in \mathbb{N}$ можно подобрать $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left|\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right| < \frac{1}{2N^2}. \tag{71}$$

Действительно, следуя [21], число m можно взять таким:

$$k = \begin{cases} [\nu_{mn} N^2], & \text{если} \quad \{\nu_{mn} N^2\} < 1/2, \\ [\nu_{mn} N^2] + 1, & \text{если} \quad \{\nu_{mn} N^2\} > 1/2, \end{cases}$$

где $[\nu_{mn} N^2]$ и $\{\nu_{mn} N^2\}$ – целая и дробная части иррационального числа $\nu_{mn} N^2$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, такое, что выполняется неравенство (71). Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{72}$$

и оценки (69) из соотношения (68) будем иметь

$$\left|\sin \pi N^2 \nu_{mn}\right| = \left|\sin \pi N^2 \left(\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right)\right| > 2N^2 \left|\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right| > \frac{C_2}{N^{2+\varepsilon}} \geq \frac{C_0}{N^{2+\varepsilon}},$$

так как множество значений C_2 от m и n ограничено снизу постоянной $C_0 > 0$ в силу ограниченности множества значений ν_{mn}.

Отметим, что если ν_{mn} является иррациональным числом с неограниченным множеством элементов при разложении в цепные дроби [18, с. 115], [19, с. 267], то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество чисел $k, N \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\left|\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right| < \frac{\varepsilon}{N^4}.$$

Тогда на основании этого неравенства имеем

$$\left|\sin \pi N^2 \nu_{mn}\right| = \left|\sin \pi N^2 \left(\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right)\right| \leq \pi N^2 \left|\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right| < \frac{\pi\varepsilon}{N^2}.$$

Отсюда следует, что для таких чисел ν_{mn} выражение $\sin \pi N^2 \nu_{mn}$, которое является знаменателем, может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому для таких иррациональных чисел ν_{mn} решение обратной задачи в виде рядов (64) и (65) не существует.

Если же множество элементов числа ν_{mn} ограничено, то существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $k, N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\nu_{mn} - \frac{k}{N^2}\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{N^4}.$$

Как известно из теории чисел, что алгебраические числа степени 2, т.е. квадратические иррациональности, имеют ограниченное множество элементов. В этом случае имеет место оценка (70), где только $\varepsilon = 0$.

Для обоснования сходимости рядов (64) и (65) в соответствующих классах (2) и (8) установим оценки для коэффициентов этих рядов.

Лемма 4. *Пусть функции $g(t)$ возрастающая и положительная на сегменте $[0, T]$ и ν_{mn} является алгебраическим иррациональным числом степени $s \geq 2$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|g_{mn}(t)| \leq \frac{2\|g\|_C}{\omega_{mn}^2} = \frac{C_3}{\lambda_{mn}^2} \leq \frac{C_4}{N^2}, \tag{73}$$

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, \tag{74}$$

где $\|g\|_C = \sup\limits_{0\leq t\leq T}|g(t)|$, C_i *— здесь и далее положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от* α, p, q, t_0 *и* $\|g\|_C$.

Доказательство. Из равенства (18) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{l_M}\right)^2 N^2 \leq \lambda_{mn} \leq 2\left(\frac{\pi}{l_m}\right)^2 N^2,$$

где $l_m = \min\{p,q\}$, $l_M = \max\{p,q\}$. Тогда из левой части неравенства (67) следует оценка (73). На основании леммы 1 с учетом правой части соотношения (67), получим оценку (74):

$$|g_{mn}(t_0)| \geq \frac{2g(0)}{\omega_{mn}^2}|\sin\pi\nu_{mn}N^2|^2 \geq \frac{2g(0)C_0^2}{\omega_{mn}^2}\frac{1}{N^{4+2\varepsilon}} = \frac{C_5}{N^{8+2\varepsilon}}.$$

Лемма 5. *Пусть* ν_{mn} *является алгебраическим числом степени* $s \geq 2$. *Тогда при любом* $t \in [0,T]$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки:*

$$|u_{mn}(t)| \leq C_6 N^{4+2\varepsilon}\left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2}|\psi_{mn}|\right), \tag{75}$$

$$|u''_{mn}(t)| \leq C_7 N^{8+2\varepsilon}\left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2}|\psi_{mn}|\right), \tag{76}$$

$$|f_{mn}| \leq C_8 N^{8+2\varepsilon}\left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2}|\psi_{mn}|\right). \tag{77}$$

Доказательство оценок (75)–(77) непосредственно следует из формул (63) и (61) на основе леммы 4.

Формально из ряда (64) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{78}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\left(\frac{m\pi}{p}\right)^4 v_{mn}(x,y), \tag{79}$$

$$u_{yyyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\left(\frac{n\pi}{q}\right)^4 v_{mn}(x,y), \tag{80}$$

$$u_{xxyy} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\left(\frac{m\pi}{p}\right)^2\left(\frac{n\pi}{q}\right)^2 v_{mn}(x,y). \tag{81}$$

Ряды (64), (65), (78)–(81) при любых $(x,y,t) \in \overline{Q}$ на основании леммы 5 мажорируются рядом

$$C_9\sum_{m,n=1}^{\infty} N^{8+2\varepsilon}\left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2}|\psi_{mn}|\right) = \sum_{N=1}^{\infty} N^{8+2\varepsilon}\left(|\varphi_{0mn}| + |\varphi_{mn}| + \frac{1}{N^2}|\psi_{mn}|\right). \tag{82}$$

Для сходимости ряда (82) достаточно потребовать выполнение следующих условий (A): $\varphi(x,y),\varphi_0(x,y) \in C^{10+\delta}(\overline{D})$, $2\varepsilon < \delta < 1$, $\varphi_x^{(i)}(0,y) = \varphi_x^{(i)}(p,y) = \varphi_{0x}^{(i)}(0,y) = \varphi_{0x}^{(i)}(p,y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\varphi_y^{(i)}(x,0) = \varphi_y^{(i)}(x,q) = \varphi_{0y}^{(i)}(x,0) = \varphi_{0y}^{(i)}(x,q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$; $\psi(x,y) \in C^{8+\delta}(\overline{D})$, $\psi_x^{(j)}(0,y) = \psi_x^{(j)}(p,y) = 0$, $0 \leq y \leq q$, $\psi_y^{(j)}(x,0) = \varphi_y^{(j)}(x,q) = 0$, $0 \leq x \leq p$, $j = 0,2,4,6$.

При выполнении этих условий на основании работы [19, с. 335] нетрудно показать справедливость следующих оценок:

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{C_{10}}{N^{10+\delta}}, \quad |\varphi_{0mn}| \leq \frac{C_{10}}{N^{10+\delta}}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{C_{11}}{N^{8+\delta}}. \tag{83}$$

В ряде (82) число членов с заданным N имеет порядок N. Тогда на основании оценок (83) ряд (82) мажорируется сходящимся рядом

$$C_{12}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^{1+\delta-2\varepsilon}}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi(x,y)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi(x,y)$ *удовлетворяют условиям* (A) *и непрерывная функция* $g(t)$ *и числа* ν_{mn} *удовлетворяют условиям леммы* 2. *Тогда существует единственное решение задачи* 3 *и оно определяется рядами* (64) *и* (65).

Отметим, что с решением задачи 3 можно было поступить иначе. Уравнение (59) равносильно интегральному уравнению Фредгольма I рода

$$\iint_D f(\xi,\eta)K(\xi,\eta;x,y)d\xi d\eta = H(x,y), \quad (x,y)\in D, \tag{84}$$

где

$$K(\xi,\eta;x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn}(t_0)v_{mn}(x,y)v_{mn}(\xi,\eta), \tag{85}$$

$$H(x,y) = \varphi_0(x,y) - \sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\varphi_{mn}\cos\omega_{mn}t_0 + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t_0\right)v_{mn}(x,y). \tag{86}$$

Ядро $K(\xi,\eta;x,y)$, определяемое рядом (85), по крайней мере, непрерывно дифференцируемо на замкнутом множестве $\bar{D}\times\bar{D}$, правая часть уравнения (84), т.е. функция $H(x,y)$, определяемая рядом (86), принадлежит классу $C^9(\bar{D})$.

Как известно, интегральные уравнения Фредгольма I рода трудно разрешимы и они относятся к классу некорректных задач. В данном случае при выполнении условий теоремы 3 интегральное уравнение (84) имеет единственное решение, которое определяется по формулам (65) и (61).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с. (изд. 3).
2. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
3. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.
4. *Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О.* Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 216 с.
5. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн.ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
6. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
7. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. ур-ния, 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
8. *Сабитов К.Б., Акимов А.А.* Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
9. *Сабитов К.Б.* Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 6. С. 773–785.
10. *Орловский Д.Г.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
11. *Орловский Д.Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614–1621.
12. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 208 с.
13. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc, 1999. 709 p.

14. *Соловьев В.В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 8. С. 1365–1377.
15. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с. (изд. 2).
16. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи матем. наук. 1963. Т. XVIII. Вып. 6 (114). С. 91–192.
17. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Матем. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276.
18. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с. (изд. 2).
19. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М.: Изд. МГУ, 1987. 358 с.
20. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. СПб.: Лань, 2008. 384 с.
21. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918.