

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

СРАВНЕНИЕ ПРОТИВОПОТОЧНЫХ И СИММЕТРИЧНЫХ
WENO-СХЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ БАЗОВЫХ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ¹⁾© 2023 г. С. Бахнэ^{1,*}, А. И. Трошин¹¹ 140180 Жуковский, ул. Жуковского, 1, ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Россия

*e-mail: bakhne@phystech.edu

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.
Переработанный вариант 14.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Работа посвящена изучению свойств современных схем семейства WENO с целью их дальнейшего применения в вихреразрешающих расчетах методом крупных вихрей (LES). Выбрана схема WENO-ZM5, которая относится к классу WENO-схем с модификацией индикаторов гладкости (“противопоточных”), и схема WENO-SYMBOO6, использующая симметричный шаблон (“симметричная WENO-схема”). Проведено сравнение схем на модельных одномерных задачах (уравнение переноса, Хопфа, Бюргерса) как с гладкими, так и с разрывными решениями. Представлены результаты LES-моделирования распада изотропной турбулентности. Решения, полученные по новым схемам, сопоставлены с решениями по центрально-разностной схеме, классической схеме WENO5 и гибридной схеме. На основе анализа энергетического спектра проведено сравнение уровня диссипативности схем. Аналогичное сравнение проведено в LES-расчете задачи о временном слое смешения, где в дополнение к энергетическому спектру рассмотрены профили средней скорости и напряжений Рейнольдса. Библ. 29. Фиг. 13. Табл. 2.

Ключевые слова: WENO, WENO-ZM, WENO-SYMBOO, LES, распад изотропной турбулентности, турбулентный слой смешения.

DOI: 10.31857/S0044466923060030, **EDN:** UWNSSL

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия все более широкую популярность в области вычислительной аэродинамики набирают схемы семейства ENO [1], [2] с переменным шаблоном, зависящим от решения. Среди них выделяются WENO-схемы [3], обладающие лучшими индикаторами гладкости и большим порядком аппроксимации на одинаковом с ENO шаблоне. Стоит отметить, что расчетные программы, ориентированные на решение практических задач газовой динамики в рамках метода конечного объема, обладают, как правило, вторым порядком точности, поскольку реальное распределение параметров течения на грани ячейки воспроизводится одной гауссовой точкой. При таком подходе схемы ENO и WENO не реализуют свой теоретический порядок точности, однако все равно позволяют существенно снизить уровень ошибки по сравнению с классическими TVD-схемами. Это связано с тем, что коэффициент в разложении в ряд Тейлора перед h^2 оказывается меньшим. Однако эти схемы, являясь противопоточными, обладают численной диссипацией, которая хоть и существенно меньше, чем в случае постоянной или линейной реконструкции, все еще оказывается избыточной для корректного применения в методе крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES).

Наиболее популярным подходом, пригодным для LES-расчетов, является использование гибридной схемы. Она комбинирует какую-либо противопоточную схему с центрально-разностной (Central Difference, CD), номинально не обладающей диссипацией (в случае линейного уравнения переноса), с помощью весовой функции. Это обеспечивает и высокое пространственное разрешение, и устойчивый счет вблизи больших градиентов решения. Однако у этого подхода есть недостатки. Во-первых, как правило, весовая функция является достаточно сложной и

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 21-71-10105), <https://rscf.ru/project/21-71-10105/>.

включает в себя зависящую от течения константу [4]. Во-вторых, гибридная схема не полностью отключает противопоточную составляющую, что затрудняет оценку уровня ее диссипативности. В связи с этим интересен и актуален вопрос изучения схем, которые не являются гибридными и не используют эмпирические константы, но пригодны для LES-расчетов.

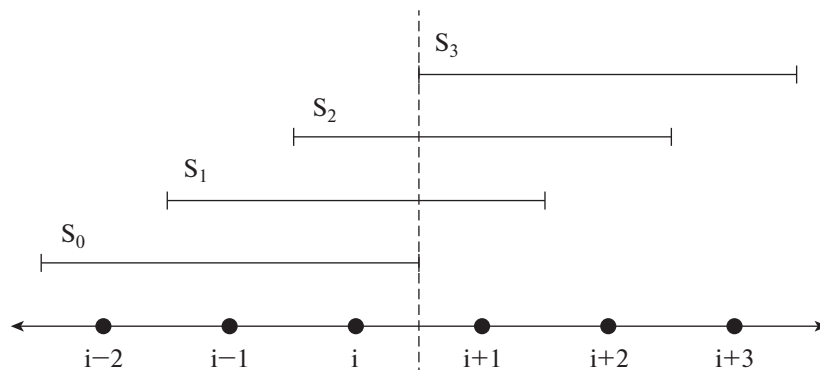
Основная цель данной работы — оценить современные схемы семейства WENO, которые могут составить конкуренцию гибридной схеме [4] в рамках LES. Требование низкого уровня диссипативности приводит к тому, что внимание будет сосредоточено на двух схемах семейства WENO, одна из которых использует в рамках одномерной реконструкции симметричный шаблон [5], [6], а другая использует модифицированные индикаторы гладкости на несимметричном шаблоне [7], [8]. Достаточно полные обзоры по современным схемам семейства WENO можно найти, например, в [9], [10].

Статья состоит из 5 разделов, в первом из которых характеризуются выбранные схемы, наиболее перспективные с точки зрения LES-методов. В разд. 2 приводятся формулировки выбранных численных методов. В третьем разделе рассматриваются результаты одномерных расчетов модельных задач. Четвертый раздел посвящен задаче о распаде изотропной турбулентности. В пятой части работы рассмотрена задача о турбулентном слое смешения. За ней следуют выводы.

1. ИССЛЕДУЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В классической постановке WENO5 для реконструкции функции с левой стороны грани $i + 1/2$ используется 3 трехточечных шаблона (S_0 , S_1 и S_2 на фиг. 1), комбинация которых в случае гладкого решения обеспечивает 5-й порядок аппроксимации. Идея WENO-схем на симметричном шаблоне состоит в том, чтобы добавить еще один трехточечный шаблон (S_3 на фиг. 1) и пересчитать их оптимальные весовые коэффициенты с целью улучшения диссипативных свойств. Пересчет может быть выполнен так, чтобы вместо противопоточной аппроксимации 5-го порядка “оптимальной” стала бездиссипативная центрально-разностная аппроксимация 6-го порядка [6]; другой способ основывается на том, чтобы сдвинуть диссипативную ошибку схемы в область коротких волн, для которых дисперсионная ошибка превышает 10%, из-за чего они в любом случае воспроизводятся неверно. Результатом эволюции второго направления стала схема WENO-SYMBOO6 (Symmetrical Bandwidth and Order-Optimized, 6-точечный шаблон). В данной статье именно эта схема выбрана для сравнения в качестве представителя симметричных WENO-схем.

Другой способ снижения диссипативности схемы WENO5 основан на модификации индикаторов гладкости решения без расширения шаблона. Дело в том, что порядок точности классической схемы WENO5 опускается до 3-го, если обнуляется 1-я производная решения, и до 2-го, если обнуляется также и 2-я производная. В [11] рассматривается возможность использовать функцию преобразования итоговых весовых коэффициентов, что позволяет сохранить 5-й порядок в случае обнуления первой производной (такие схемы принято называть WENO-M), однако данный подход все равно обладает 2-м порядком в случае обнуления обеих производных одновременно. Для решения второй проблемы в [12] предложен дополнительный индикатор гладкости на “широком” шаблоне, использующем все 5 точек. Кроме этого, в [12] было обнаружено, что значение константы ϵ , прибавляемой к индикаторам гладкости в WENO-схемах, влияет на реше-



Фиг. 1. Шеститочечный шаблон для реконструкции значения на грани $x_{i+1/2}$, изображение взято из [6].

ние в окрестности критических точек, поэтому стандартное значение $\varepsilon = 10^{-6}$ (см. [3]) было предложено заменить на $\varepsilon = 10^{-40}$. Полученная схема обладает 4-м порядком в окрестности любых критических точек. Для нее принято обозначение WENO-Z. Объединение подходов WENO-M и WENO-Z рассмотрено в [7], а полученную схему принято называть WENO-ZM5. В ней функция преобразования применяется к весам, полученным в WENO-Z, а не к исходным. Схема WENO-ZM5 будет рассматриваться в данной статье как представитель WENO-схем с модифицированными индикаторами гладкости.

Два вышеперечисленных метода будут сравниваться с классической схемой WENO5 с МР-монотонизатором [13], с центрально-разностной схемой 2-го порядка точности (далее — CD2), а также с гибридной схемой, комбинирующей монотонизированную схему WENO5 с CD2 с помощью весовой функции [4].

2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДОВ WENO-ZM5 И WENO-SYMB006

Без ограничения общности будем рассматривать реконструкцию решения на грань $i + 1/2$ слева. Тогда в случае пятиточечного шаблона итоговую реконструкцию можно представить как линейную комбинацию трех реконструкций по трем точкам:

$$f_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k f_{i+1/2}^{(k)},$$

где

$$f_{i+1/2}^{(0)} = (2f_{i-2} - 7f_{i-1} + 11f_i)/6, \quad f_{i+1/2}^{(1)} = (-f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1})/6, \quad f_{i+1/2}^{(2)} = (2f_i + 5f_{i+1} - f_{i+2})/6,$$

а ω_k — нелинейные весовые коэффициенты, определяемые конкретным методом. В базовой аппроксимации WENO5 веса ω_k определяются через оптимальные веса d_k , индикаторы гладкости IS_k и условие нормировки:

$$\omega_k = \alpha_k / \sum_{l=0}^2 \alpha_l, \quad \alpha_k = d_k / (\varepsilon + IS_k)^2,$$

где оптимальные веса $d_0 = 0.1$, $d_1 = 0.6$, $d_2 = 0.3$. Сами индикаторы гладкости выражаются следующим образом:

$$IS_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2,$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2,$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(f_{i+2} - 4f_{i+1} + 3f_i)^2.$$

Малая положительная константа ε предотвращает деление на ноль вблизи экстремумов и, следуя [12], в данной работе выбрана равной 10^{-40} . В методе WENO-ZM5 сперва необходимо модифицировать индикаторы гладкости [12]:

$$\frac{1}{\beta_k^Z} = C + \left(\frac{\tau_5}{\varepsilon + IS_k} \right)^p, \quad \tau_5 = |IS_0 - IS_2|, \quad \varepsilon = 10^{-40}, \quad p = 1, \quad C = 1.$$

Положительная константа C добавлена для того, чтобы избежать ошибок округления в окрестностях критических точек, где все индикаторы гладкости стремятся к нулю [12].

Далее весовые коэффициенты шаблонов составляются из оптимальных значений d_k и модифицированных индикаторов гладкости: $\alpha_k^Z = d_k / \beta_k^Z$. Затем полученные веса необходимо нормировать так, чтобы сумма всех коэффициентов оставалась равной 1: $\omega_k^Z = \alpha_k^Z / \sum_{l=0}^2 \alpha_l^Z$. Наконец, к полученным весам ω_k^Z необходимо применить функцию, исправляющую потерю порядка в

окрестности гладкого экстремума [7]: $\alpha_k^{\text{ZM}} = g_k(\omega_k^{\text{Z}})$, и снова нормировать: $\omega_k^{\text{ZM}} = \alpha_k^{\text{ZM}} / \sum_{l=0}^2 \alpha_l^{\text{ZM}}$. Сама функция определяется следующим образом [11]:

$$g_k(\omega) = \frac{\omega(d_k + d_k^2 - 3d_k\omega + \omega^2)}{d_k^2 + \omega(1 - 2d_k)}.$$

Окончательные веса ω_k^{ZM} подставляются в формулу для $f_{i+1/2}$ вместо ω_k .

В методе WENO-SYMB006 в реконструкции участвует еще один трехточечный шаблон 3-го порядка: $f_{i+1/2}^{(3)} = (11f_{i+1} - 7f_{i+2} + 2f_{i+3})/6$, так что $f_{i+1/2} = \sum_{k=0}^3 \omega_k f_{i+1/2}^{(k)}$. Соответствующий ему индикатор гладкости задается формулой

$$\text{IS}_3 = \frac{13}{12}(f_{i+1} - 2f_{i+2} + f_{i+3})^2 + \frac{1}{4}(-5f_{i+1} + 8f_{i+2} - 3f_{i+3})^2.$$

Новые оптимальные веса, полученные в [5] применением к схеме [14] процедуры из [6], определяются следующим образом: $d_0 = 0.1 - \psi$, $d_1 = 0.6 - 3\psi$, $d_2 = 0.3 + 3\psi$, $d_3 = \psi$, где $\psi = 0.044973$. При этом вклад от самого правого шаблона ограничивается соответствующим выбором индикатора гладкости: $\beta_k = \text{IS}_k$, $k = 0, 1, 2$; $\beta_3 = \max_k \text{IS}_k$. Далее составляется комбинация оптимальных

весов и индикаторов гладкости: $\alpha_k = d_k \left(1 + \frac{\tau_p}{\varepsilon + \beta_k} \right)$, где $\varepsilon = 10^{-40}$, τ_p — индикатор гладкости, построенный на шеститочечном шаблоне:

$$\tau_p = (-f_{i-2} + 5f_{i-1} - 10f_i + 10f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3})^2,$$

который в случае гладкого решения оказывается на порядок меньше любого из β_k . Таким образом, добавление единицы позволяет выбирать оптимальные веса d_k . Завершающий этап, как и ранее, — это нормировка: $\omega_k = \alpha_k / \sum_{l=0}^3 \alpha_l$.

3. СРАВНЕНИЕ СХЕМ В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В данном разделе свойства выбранных схем анализируются численно на модельных задачах. Для этого была написана программа, позволяющая решать одномерные уравнения переноса, Хопфа и Бюргерса.

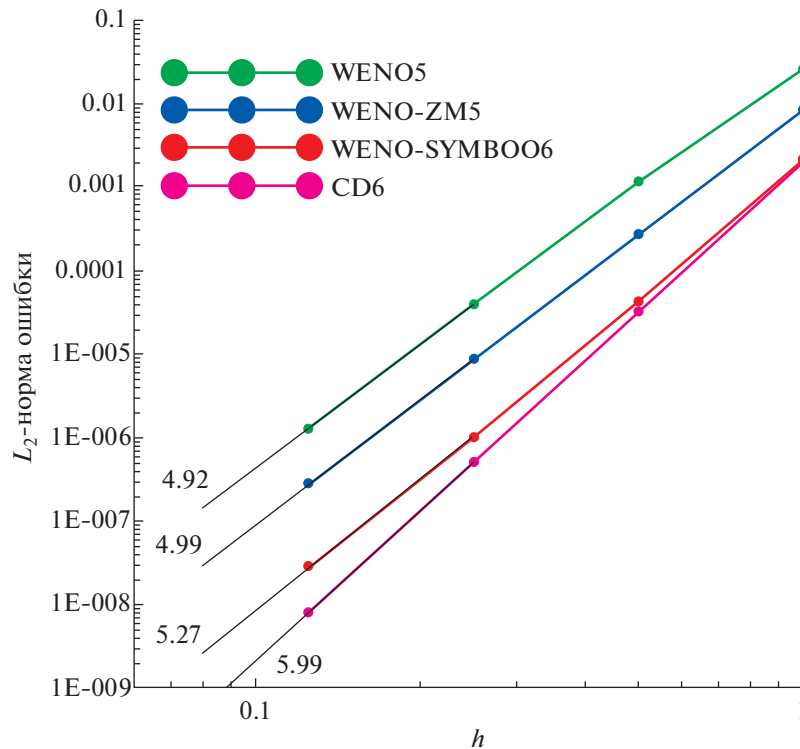
Рассмотрим уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = 1.$$

Будем использовать расчетную область $1 \leq x \leq 3000$ с равномерной сеткой шага $h = 1$. На границах значения функции u фиксированы. Моделируемый промежуток времени $T = 100$. В первом тесте в качестве начальных условий в середине расчетной области задается полупериод синуса в степени 9:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 1480) \cup (1520, 3000], \\ \sin^9[(x - 1480) \cdot \pi/40], & x \in [1480, 1520], \end{cases}$$

что обеспечивает достаточную гладкость начального профиля. Количество узлов выбрано таким, чтобы исключить влияние на решение граничных условий за время задачи. Шаг по времени τ удовлетворяет условию $c\tau/h = 1$. Интегрирование по времени ведется по 9-стадийному методу Рунге—Кутты 7 порядка аппроксимации [15]. Это обеспечивает пренебрежимо малый вклад временной аппроксимации в ошибку, которая вычисляется как L_2 -норма разности между численным решением и точным. На фиг. 2 представлена зависимость ошибки от шага расчетной сетки h для схем WENO5, WENO-ZM5 и WENO-SYMB006. Видно, что все схемы достигают своего теоретического порядка сходимости.



Фиг. 2. Численный порядок сходимости при решении уравнения переноса с гладкими начальными условиями.

Во втором тесте задается разрывное начальное поле в форме прямоугольного импульса:

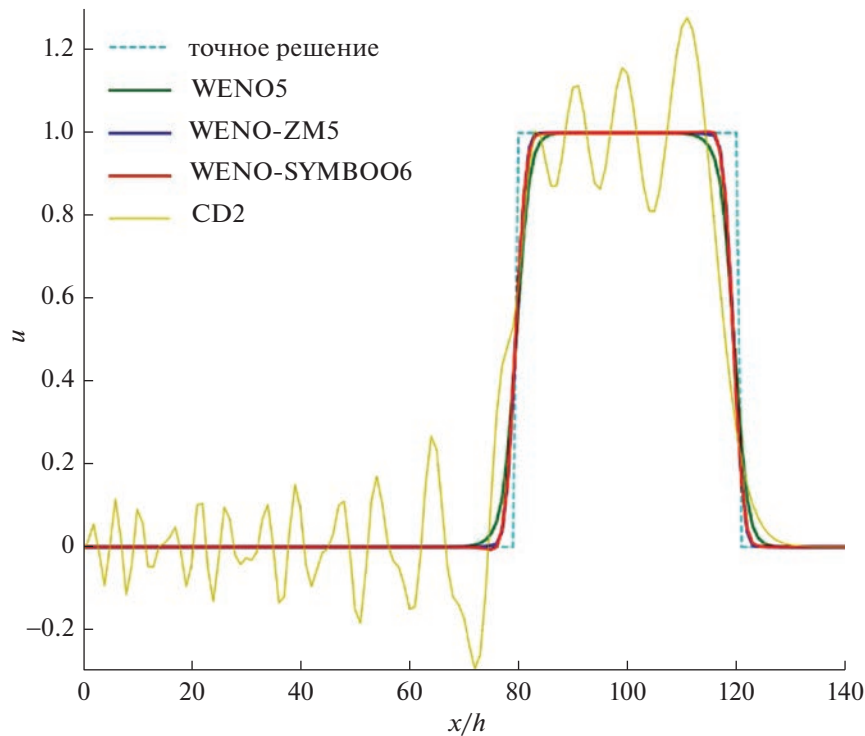
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 1480) \cup (1520, 3000], \\ 1, & x \in [1480, 1520]. \end{cases}$$

Все параметры расчета такие же, как в первом тесте. На фиг. 3 представлено решение в конечный момент времени. Для сравнения приведено решение по центрально-разностной схеме CD2. Эта схема порождает осцилляции Гиббса, которые не затухают со временем. Решения по схемам класса WENO выглядят монотонными, при этом можно заметить, что классическая схема WENO5 сильнее сглаживает решение, чем две новые аппроксимации, качественной разницы между которыми не наблюдается. Однако, если вернуться к фиг. 2, то обнаружится, что в случае гладкого начального условия уровень ошибки схемы WENO-SYMB006 в несколько раз меньше, чем в случае WENO-ZM5 на всех сетках. На разрывах эта разница становится менее существенной, что и демонстрирует фиг. 3.

Сделанные выводы сохраняются при решении уравнения Хопфа с непрерывными начальными условиями, соответствующими волне сжатия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 1480), \\ -1, & x \in (1520, 3000], \\ -(x - 1500)/20, & x \in [1480, 1520]. \end{cases}$$

В табл. 1 представлены величины ошибок по норме L_2 для моментов времени $0.5T_c$ и $2T_c$, где T_c — время, за которое волна сжатия превращается в разрыв. При $T = 0.5T_c$ схема CD2 дает наибольшую ошибку среди рассмотренных схем, что связано с ее относительно высокой дисперсионной ошибкой [9], которая проявляется на негладком решении. Классическая схема WENO5 уступает двум новым вариантам WENO, между которыми, в свою очередь, различие невелико. При $T = 2T_c$ точное решение имеет разрыв, и центрально-разностная схема дает неудовлетворительный уровень ошибки. Все WENO-схемы, напротив, соответствуют точному решению.



Фиг. 3. Перенос прямоугольного импульса (ось абсцисс сдвинута таким образом, что координата 0 соответствует середине расчетной области).

Выводы не меняются и при добавлении в уравнение диффузионного члена (уравнение Бюргера):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Были рассмотрены два значения коэффициента вязкости: $\nu = 1$ и 0.4 . Вторая производная аппроксимировалась по центрально-разностной схеме 2-го порядка аппроксимации. Начальные условия были как в случае уравнения Хопфа. Рассматривалось стационарное решение, точная формула которого имеет вид $u_{\text{ex}} = -\text{th}((x - x_0)/(2\nu))$, где x_0 — середина расчетной области. Ошибки, полученные по разным схемам, приведены в табл. 2.

Таблица 1. Ошибки по норме L_2 для уравнения Хопфа

Схема	$T = 0.5T_c$	$T = 2T_c$
WENO5	0.0454	0
WENO-ZM5	0.0296	0
WENO-SYMBOO6	0.0281	0
CD2	0.0822	9.6099

Таблица 2. Ошибки по норме L_2 для уравнения Бюргера

Схема	$\nu = 1$	$\nu = 0.4$
WENO5	0.0547	0.1093
WENO-ZM5	0.0129	0.0158
WENO-SYMBOO6	0.0143	0.0269
CD2	0.0851	0.5684

При $\nu = 1$ волна сжатия хорошо разрешается сеткой, и ошибки схем находятся примерно в том же соотношении, как и в случае уравнения Хопфа при $T = 0.5T_c$. С коэффициентом вязкости $\nu = 0.4$ сеточное разрешение становится недостаточным, и схема CD2 порождает видимые осцилляции, приводящие к высокому уровню ошибки. С другой стороны, все схемы класса WENO сохраняют монотонный характер решения, причем уровень ошибки классической схемы WENO5 в несколько раз больше, чем двух других схем.

Итак, по результатам одномерных тестов обе аппроксимации — WENO-ZM5 и WENO-SYMB006 — демонстрируют заявленный порядок сходимости при гладком начальном условии, лучшее поведение в окрестности разрывов при сравнении с WENO5 и центральными разностями и приблизительно одинаковый уровень ошибки в случае нелинейных модельных уравнений Хопфа и Бюргерса. Обе схемы превосходят по точности центрально-разностную схему, что позволяет надеяться на хорошие результаты их работы в LES-расчетах газодинамических задач. Единственным отличием между двумя рассмотренными схемами является больший шаблон WENO-SYMB006 и сопутствующие большие вычислительные затраты, которые в случае трехмерной задачи могут стать существенными.

4. РАСЧЕТЫ ЗАТУХАНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для всех трехмерных LES-расчетов в данной работе используется метод конечного объема 2-го порядка точности, реализованный на многоблочной структурированной сетке в расчетном модуле *zFlare*, основанном на ZEUS [16] из пакета программ EWT-ЦАГИ [17]. Диффузионные потоки вычисляются с помощью центрально-разностной схемы 2-го порядка. Для вихреразрешающих расчетов конвективные потоки аппроксимируются с помощью упомянутых выше центральных разностей 2-го порядка (CD2) либо гибридной схемы, которая работает как взвешенное среднее между WENO5 с монотонизатором MP [13] и CD2 с весовой функцией из работы [4]. В ходе данного исследования были также реализованы и верифицированы аппроксимации конвективных потоков по схемам WENO-ZM5 и WENO-SYMB006. Во всех расчетах в качестве временной аппроксимации используется 3-шаговая схема Хойна 3-го порядка точности. Решается полная отфильтрованная система уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа. Система замкнута подсеточной моделью из состава гибридного метода SST-DES [18] с масштабом длины SLA [20]. Это — дифференциальная двухпараметрическая подсеточная модель класса $k - \omega$. Константа C_{DES2} в этой модели, которая является аналогом константы Смагоринского и определяет форму энергетического спектра турбулентности, найдена в [20]: для центрально-разностной схемы она равняется 0.69, а для гибридной схемы — 0.56.

Задача о затухании изотропной турбулентности — широко используемый инструмент для изучения свойств численных схем и подсеточных моделей [21], [22]. Расчетная область для этой задачи представляет собой куб с периодическими граничными условиями. Каждая сторона куба имеет длину $2\pi L$, размерный параметр L выбран равным 1 м. Одна из основных характеристик турбулентности, представляющих интерес в данной задаче, — это форма энергетического спектра $E(k)$, определяемого как интеграл по сферам радиуса k от половины следа спектрального тензора $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ (см. [23]):

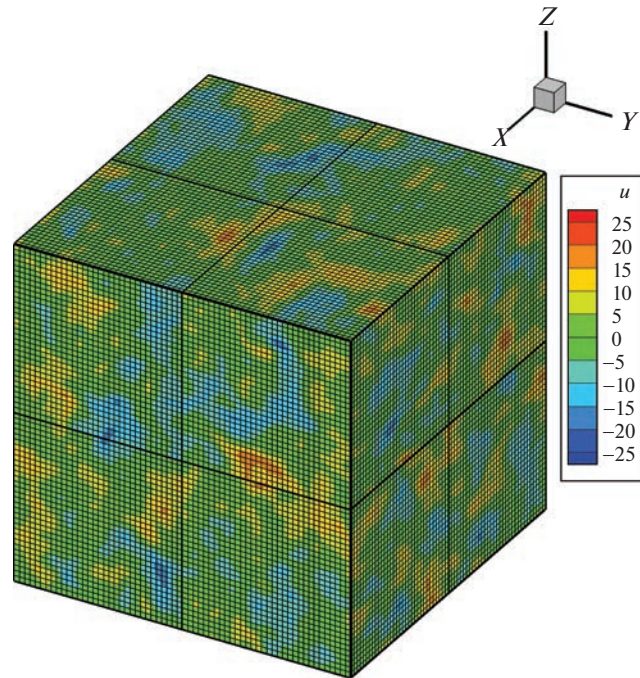
$$E(k) = \frac{1}{2} \oint \Phi_{ii}(\mathbf{k}) dS(k).$$

Здесь $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число, $dS(k)$ — элемент сферы радиуса k . Спектральный тензор, в свою очередь, определяется как 3-мерное преобразование Фурье от корреляционного тензора поля скорости $R_{ij}(\mathbf{r})$:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R_{ij}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \text{где} \quad R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi L)^3} \iiint u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\mathbf{x}.$$

При высоких числах Рейнольдса спектр должен содержать инерционный интервал, подчиняющийся закону Колмогорова: $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, где $\varepsilon = -dE_k/dt$ — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности E_k , C_K — безразмерная константа.

В проведенных расчетах начальное поле скорости создавалось с помощью генератора синтетической турбулентности, реализованного на основе [24]. В начальный момент времени возмущения в виде суммы гармоник вносились во всей расчетной области. Амплитуды гармоник рас-

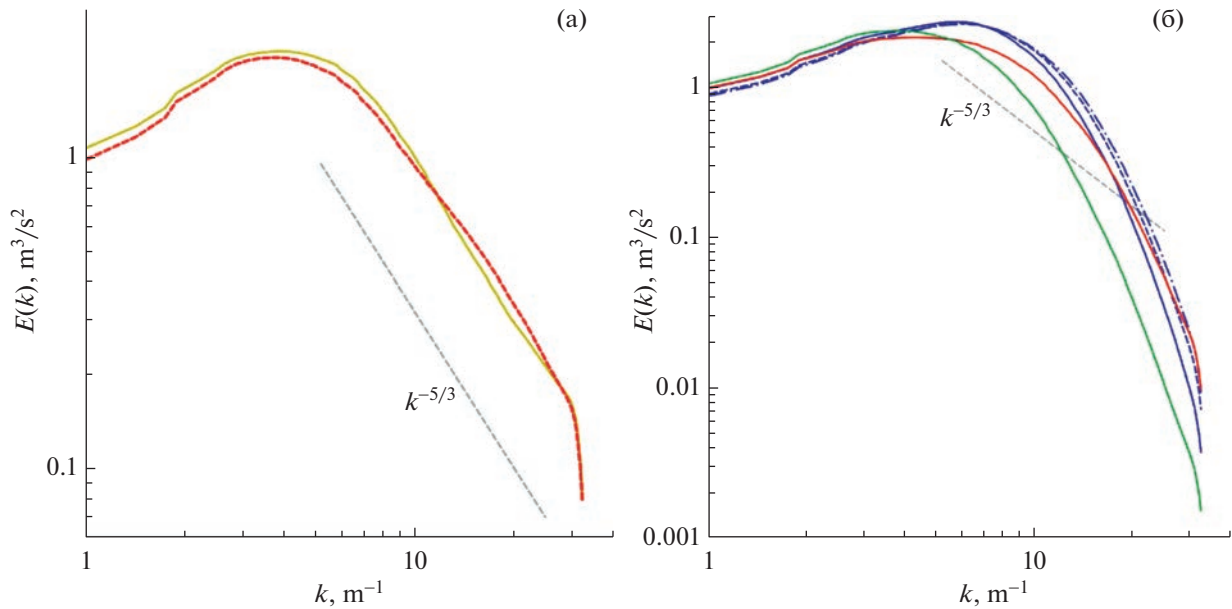


Фиг. 4. Расчетная область, сетка и мгновенное поле скорости в задаче о затухании изотропной турбулентности.

пределялись согласно спектру Кармана [25]. Начальная кинетическая энергия турбулентности E_{k0} составляла $1000 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и соответствовала малому турбулентному числу Маха $M_t \approx 0.08$. Интегральный масштаб турбулентности L_0 был выбран равным $\pi L/2 \approx 1.57 \text{ м}$, т.е., составлял четверть длины расчетной области. Турбулентное число Рейнольдса $\text{Re}_{t0} = \sqrt{E_{k0}} L_0 / \nu \approx 3 \times 10^6$ взято заведомо большим, чтобы всеми эффектами молекулярной диффузии можно было пренебречь. Интегральный масштаб времени $T_0 = L_0 / \sqrt{2E_{k0}/3}$, соответствующий начальному полю, составлял около 0.06 с . Все расчеты проводились до момента физического времени $2T_0$. Предполагается, что за два характерных времени оборота крупных вихрей энергетический спектр турбулентности приходит в равновесие, и его форма в конечный момент времени определяется уже только свойствами подсеточной модели и численного метода. Для задания начального поля параметров подсеточной турбулентности использовалась процедура согласования, описанная в [20]. Расчеты проводились на равномерной кубической сетке с 64 ячейками в каждом индексном направлении. Пример мгновенного поля скорости в расчетной области представлен на фиг. 4.

Энергетические спектры, полученные в расчетах, представлены на фиг. 5. В левой части показаны спектры, которые дают гибридная схема и CD2 с указанными выше значениями константы C_{DES2} . Видно, что оба спектра обладают протяженным инерционным интервалом. В правой части показаны спектры, полученные со схемами семейства WENO. В случае схемы WENO-ZM5 обнаруживается, что с оптимальным для гибридной схемы значением $C_{\text{DES2}} = 0.56$ диссипация в области коротких волн избыточна, и даже при $C_{\text{DES2}} = 0.1$ участок спектра, поддерживающий инерционный интервал, недостаточно протяжен. Аналогичные результаты получены со схемой WENO-SYMB006. Отметим, что классическая схема WENO5 с монотонизатором MP [13], расчеты по которой были проведены для сравнения, оказалась еще более диссипативной.

Таким образом, в случае трехмерных задач, решаемых в рамках конечно-объемного метода с одной гауссовой точкой на грани ячейки, схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMB006 потеряли преимущество перед центрально-разностной схемой, которое было обнаружено выше на одномерных модельных уравнениях. Также они проиграли по диссипативности гибридной схеме. Вероятно, проблема связана с появлением ошибки порядка $O(h^2)$, хоть и малой по величине, но существенно влияющей на наименьшие разрешаемые масштабы течения. Фактически, две



Фиг. 5. Энергетический спектр в задаче о затухании изотропной турбулентности. (а) CD2 — желтая сплошная линия, гибридная схема — красный пунктир. (б) Синие кривые — WENO-ZM5: сплошная — $C_{DES2} = 0.56$, пунктир — $C_{DES2} = 0.3$, штрихпунктир — $C_{DES2} = 0.1$. Красная кривая — WENO-SYMB006 с $C_{DES2} = 0.1$. Зеленая — WENO5 с $C_{DES2} = 0.1$. Линия $E \sim k^{-5/3}$ — серый пунктир.

рассмотренные схемы не выдерживают инерционный интервал даже при малом значении константы C_{DES2} , равном 0.1. Это означает, что в дальнейшем данные схемы следует использовать в режиме ILES (Implicit LES) — без явной подсеточной модели.

5. РАСЧЕТЫ ВРЕМЕННОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ

Во второй задаче рассматривается эволюция турбулентного слоя смешения, разделяющего два неограниченных противоположно направленных потока. В отличие от предыдущей задачи, в этом течении есть механизм производства кинетической энергии турбулентности на градиентах среднего поля скорости. На автомодельном режиме ширина слоя смешения растет линейно по времени, а максимальные значения напряжений Рейнольдса выходят на постоянные значения, пропорциональные ΔU^2 , где ΔU — разность скоростей между потоками. Закон нарастания ширины и профили напряжений Рейнольдса можно сравнить с экспериментальными данными, а в продольном энергетическом спектре в центре слоя смешения должен наблюдаться протяженный инерционный интервал, если число Рейнольдса течения велико.

В данной работе рассматривается расчетная область в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $L_x = 4L$, $L_y = L_z = 2L$ вдоль осей x, y, z соответственно, где $L = 2\pi$ м. Центр параллелепипеда помещен в начало координат. Установлены периодические граничные условия по всем направлениям. Область покрыта кубической расчетной сеткой, состоящей из $512 \times 256 \times 256$ ячеек.

Начальное поле скорости формировалось за два этапа. На первом этапе, следуя [26], задавалось предварительное поле $\tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z) &= f(z) + a(z) \left[\sin(2k_x^0 x) + A_y \cos(k_y^0 y) + A_g g_1(x, y, z) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= a(z) \left[\cos(2k_x^0 x) + A_y \sin(k_y^0 y) + A_g g_2(x, y, z) \right], \\ \tilde{w}(x, y, z) &= a(z) \left[\sin(2k_x^0 x) + A_y \cos(k_y^0 y) + A_g g_3(x, y, z) \right],\end{aligned}$$

где

$$f(z) = \frac{\Delta U}{2} \left[\operatorname{th} \left(\frac{z}{2\theta_0} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{z - L_z/2}{2\theta_0} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{z + L_z/2}{2\theta_0} \right) \right],$$

$$a(z) = A\Delta U \left[\exp \left(-\frac{(z - L_z/2)^2}{\theta_0} \right) + \exp \left(-\frac{z^2}{\theta_0} \right) + \exp \left(-\frac{(z + L_z/2)^2}{\theta_0} \right) \right].$$

Здесь $k_x^0 = 16\pi/L$, $k_y^0 = 32\pi/L$ – начальные волновые числа возмущений вдоль осей x и y соответственно; $A = 0.05$, $A_y = 1$, $A_g = 1$ – относительные амплитуды возмущений; $\theta_0 = L/200$ – начальная толщина слоя смешения. Функция $f(z)$ задает среднее поле скорости (за счет условия периодичности по оси z в расчете реализуется не один слой смешения, а два: в центре и на границе), функция $a(z)$ – это профиль амплитуды возмущений, налагаемых на среднее поле, g_i – случайные нескоррелированные поля, значения которых в каждой точке равномерно распределены на отрезке $[-0.5, 0.5]$. Разность скоростей между потоками ΔU была выбрана равной 69 м/с, что соответствует числу Маха 0.2.

На втором этапе, снова как в [26], вычисляется поправка к $\tilde{\mathbf{V}}$, чтобы “исправленное” поле скорости $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i - \partial p' / \partial x_i$ стало соленоидальным. Для нахождения поля $p'(x, y, z)$ необходимо решить трехмерное уравнение Пуассона $\Delta p' = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}$. В данной работе оно решалось итерационным методом Якоби [27]. Для аппроксимации дивергенции скорости использовалась центрально-разностная схема 2-го порядка. На фоне полученного начального поля скорости проводилась процедура согласования, описанная в [20], от однородных начальных значений $k = (0.05\Delta U)^2$, $\omega = \Delta U / \theta_0$.

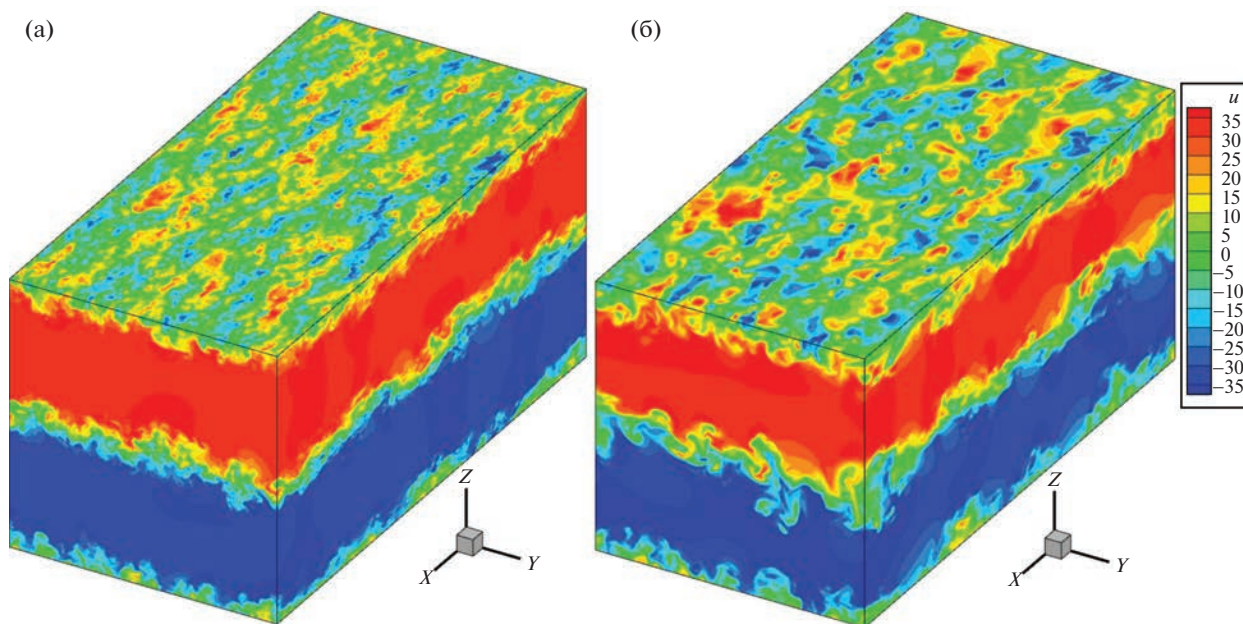
В расчетах данного течения использовались схемы WENO-ZM5, WENO-SYMB006, а также классическая схема WENO5 с монотонизатором MP, центрально-разностная схема CD2 и гибридная схема. Для CD2 и гибридной схемы значения подсеточной константы C_{DES2} задавались как в предыдущей задаче. Для остальных схем полагалось $C_{\text{DES2}} = 10^{-3}$, что фактически соответствует отключению явной подсеточной модели и переходу системы уравнений в режим ILES.

Расчеты велись до момента времени $t = 5L/\Delta U$. Это время ограничено условием изолированности соседних слоев смешения, которое определялось по отсутствию взаимодействия профилей напряжений Рейнольдса между ними.

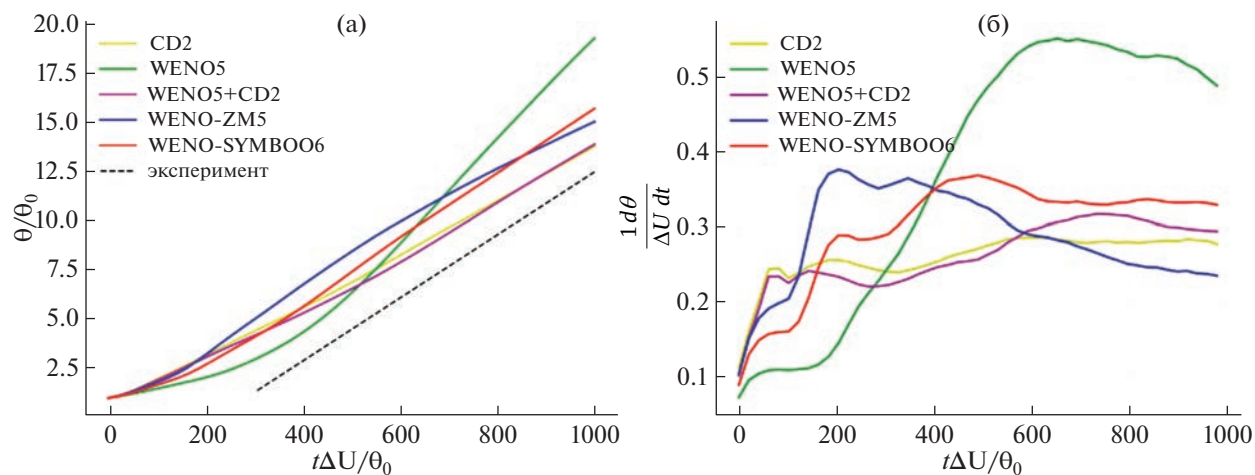
На фиг. 6 изображены поля течения в конечный момент времени, полученные с помощью гибридной схемы и базовой схемы WENO5. Базовая схема сглаживает мелкие структуры за счет численной диссипации заметно сильнее, чем гибридная схема. На фиг. 7а представлена зависимость интегральной толщины слоя смешения

$$\theta = \int_{-L_z/4}^{L_z/4} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{\langle \tilde{u} \rangle}{\Delta U} \right)^2 \right] dz$$

от времени в безразмерных переменных. Здесь угловыми скобками обозначено пространственное осреднение по плоскости $z = \text{const}$, в результате которого получается одномерный профиль осредненного параметра как функция от z . Для сравнения на фиг. 7а также изображен ожидаемый наклон линии, соответствующий эксперименту Bell & Mehta (1990) [28]. Поведение решения, полученного с помощью гибридной схемы, очень близко к поведению решения, которое дает CD2. Все схемы, кроме WENO5, позволяют решению выйти на асимптотическое поведение с наклоном, близким к экспериментальному. Следует отметить, что схема WENO-ZM5 на участке $t\Delta U/\theta_0 \in [800, 1000]$ предсказывает замедление роста ширины слоя смешения. Более явно это можно наблюдать на графике производной θ по времени (фиг. 7б). Видно, что для схем WENO5 и WENO-ZM5 она продолжает меняться до конца расчета, а остальные три схемы выходят на автомодельный режим с постоянным значением производной. Классическая схема WENO5 не выходит на правильное асимптотическое решение, по-видимому, из-за того, что схемная вязкость подавляет мелкомасштабную турбулентность, и развитый энергетический спектр турбулентности не устанавливается. Это согласуется с фиг. 6.

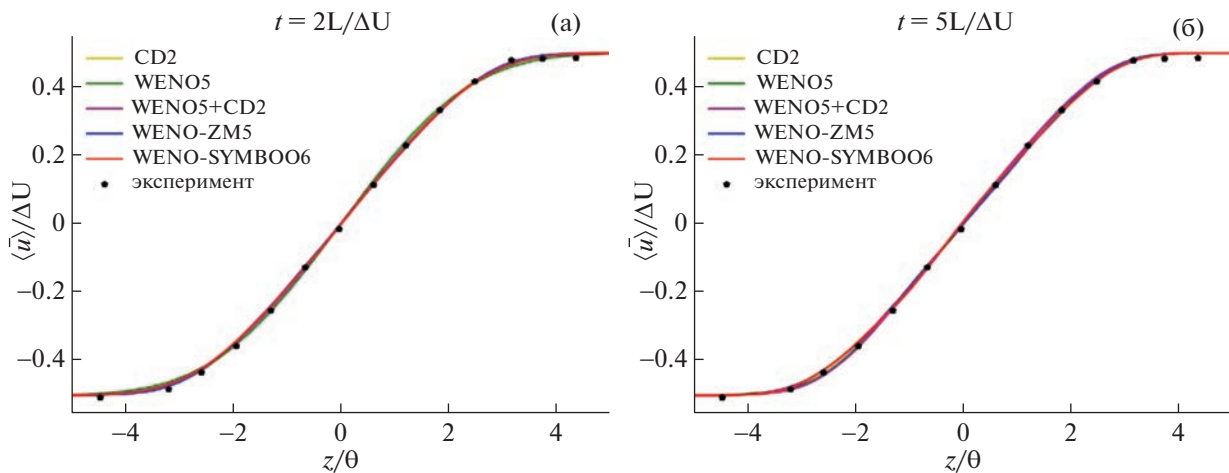


Фиг. 6. Поле продольной компоненты скорости в конечный момент времени при использовании гибридной схемы (а) и схемы WENO5 (б).

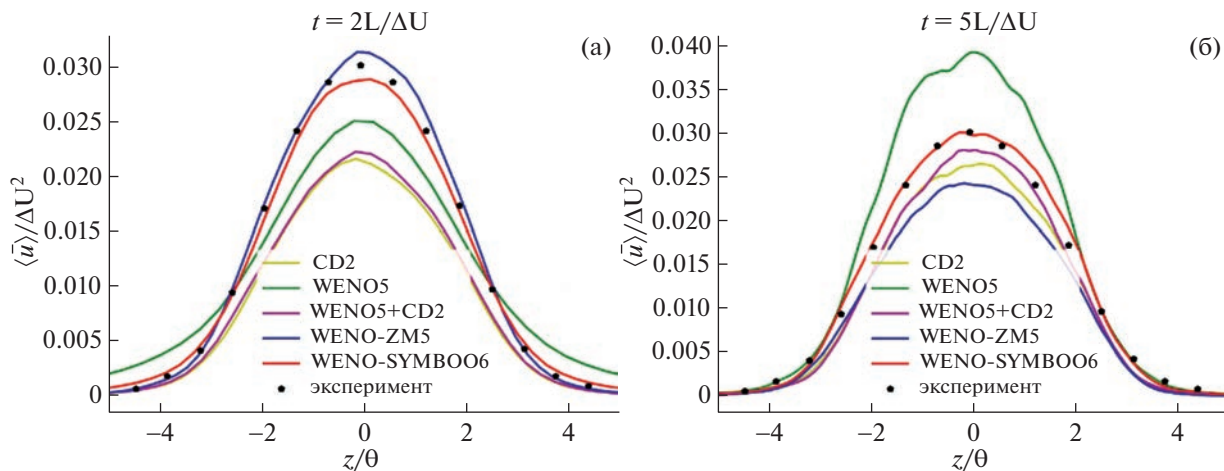


Фиг. 7. Эволюция толщины слоя смешения θ со временем (а) и скорости ее изменения (б).

На фиг. 8 изображены профили средней продольной компоненты скорости поперек слоя смешения в моменты времени $t = 2L/\Delta U$ (соответствует 2/5 общего времени моделирования) и $t = 5L/\Delta U$ (финальный момент). На эти графики, как и на все дальнейшие, наложены экспериментальные данные из [28]. Можно сказать, что все схемы позволяют получить удовлетворительный результат, хорошо воспроизводя среднее поле скорости. Иначе ведут себя схемы с точки зрения определения тензора напряжений Рейнольдса. На фиг. 9 построены профили среднего квадрата пульсаций продольной компоненты скорости $\overline{u'u'}$. Видно, что в момент времени $2L/\Delta U$ уровень пульсаций по гибридной схеме, CD2 и WENO5 занижен. Однако дальше он начинает расти, а в случае WENO-ZM5 — уменьшаться. Рост пульсаций со схемой WENO5 оказывается чрезмерным. В финальный момент времени $5L/\Delta U$ для WENO-ZM5, CD2 и гибридной



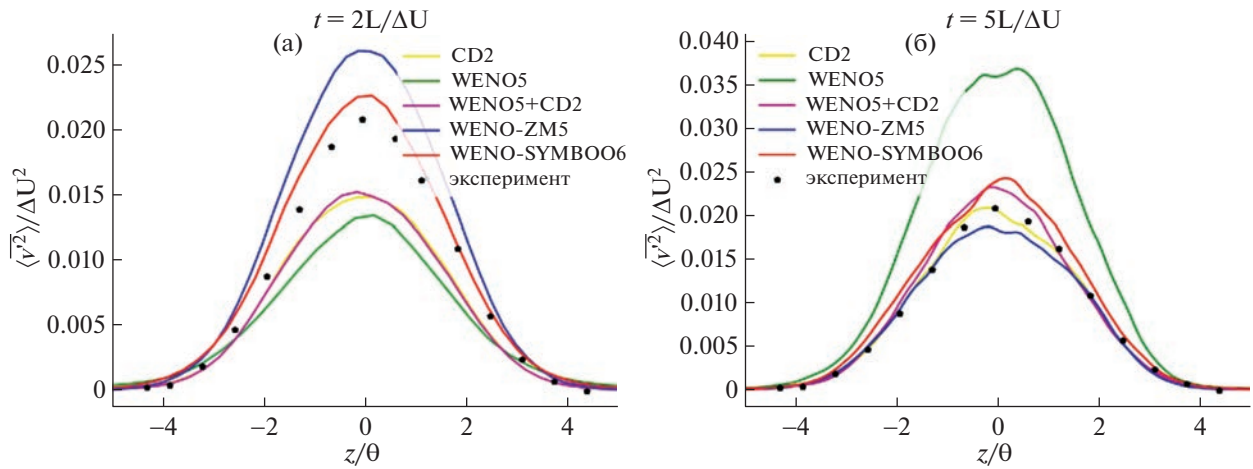
Фиг. 8. Профили $\langle \bar{u} \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



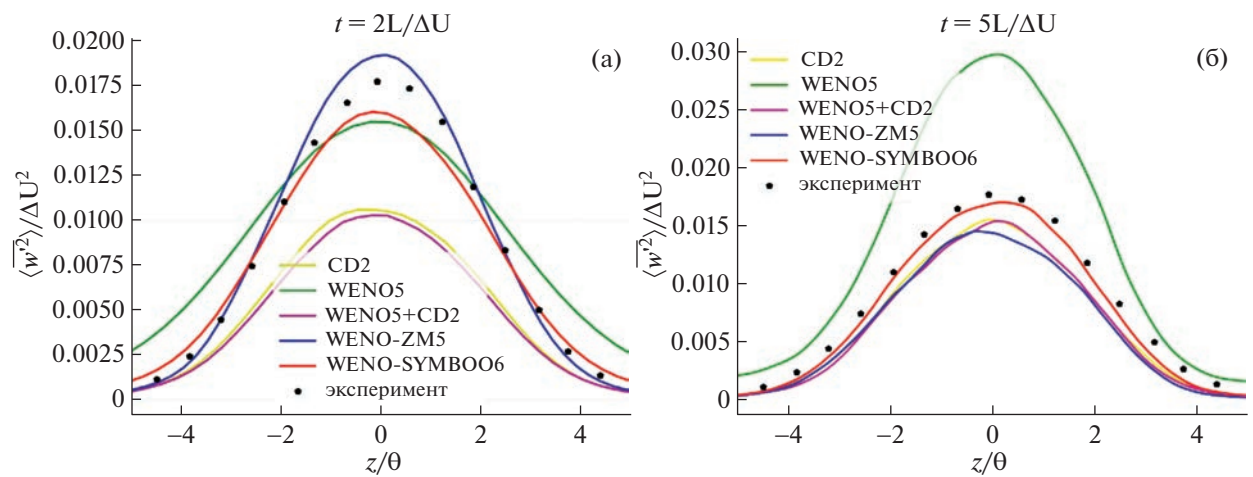
Фиг. 9. Профили $\langle \bar{u}'u' \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.

схемы уровень пульсаций $\langle \bar{u}'u' \rangle$ оказывается меньше экспериментального, причем самые низкие значения демонстрирует WENO-ZM5. Классическая схема WENO5 существенно завышает уровень пульсаций. Возможно, это связано с сильным недоразрешением мгновенной структуры слоя смешения, из-за чего крупные вихри не передают энергию по каскаду с достаточной скоростью. Наиболее близкой к эксперименту оказывается схема WENO-SYMB006.

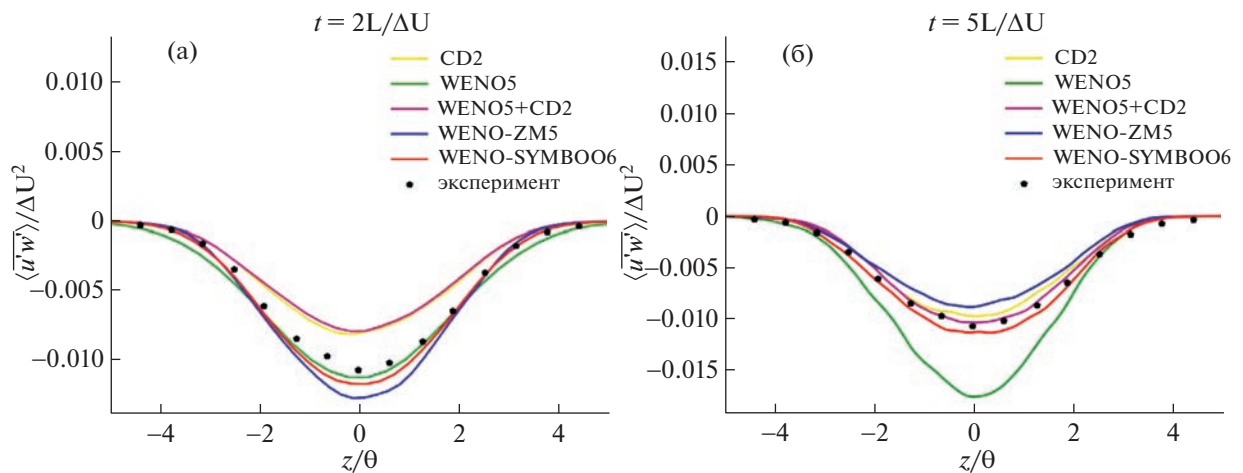
Аналогичные тенденции можно наблюдать в профилях среднего квадрата боковых пульсаций $\langle \bar{v}'v' \rangle$ (фиг. 10). Единственное отличие состоит в том, что в финальный момент времени $5L/\Delta U$ наиболее близкий к экспериментальному результат демонстрирует центрально-разностная схема. Из всех схем выделяется WENO5, которая завышает уровень боковых пульсаций более чем в полтора раза. Похожие закономерности видны на фиг. 11 в профилях среднего квадрата поперечных пульсаций скорости $\langle \bar{w}'w' \rangle$. Наилучший результат здесь в конечный момент времени счета демонстрирует WENO-SYMB006. Решения, полученные с помощью остальных трех схем, качественно не отличаются. Отличия в случае среднего значения произведения $\langle \bar{u}'w' \rangle$ от остальных корреляций состоят в том, что ближайший к эксперименту профиль демонстрируют гибридная схема и WENO-SYMB006 (фиг. 12).



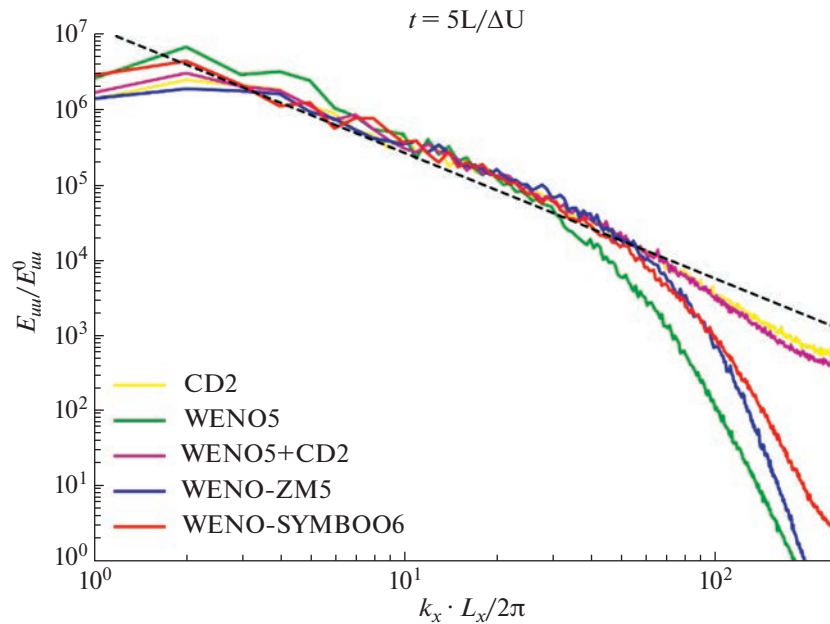
Фиг. 10. Профили $\langle v'^2 \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



Фиг. 11. Профили $\langle w'^2 \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



Фиг. 12. Профили $\langle u'w' \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



Фиг. 13. Одномерные спектры $E_{uu}(k_x)$ в момент времени $5L/\Delta U$. штриховая линия — профиль “ $-5/3$ ”.

Еще одной величиной, представляющей интерес, является одномерный энергетический спектр, вычисленный в центральной плоскости слоя смешения:

$$E_{uu}(k_x) = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \bar{u}(x, y, 0) e^{-ik_x x} dx \right|^2 dy.$$

Он должен содержать протяженный инерционный интервал: $E_{uu}(k_x) \sim k_x^{-5/3}$. На фиг. 13 представлены спектры в финальный момент времени $5L/\Delta U$. В решениях, полученных по схемам WENO5, WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, протяженный инерционный интервал отсутствует. Несмотря на то, что отклонение от ожидаемого наклона спектра для гибридной схемы, CD2, WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 происходит примерно при одном и том же волновом числе, степень отклонения двух новых схем существенно выше. Напомним, что явная подсеточная модель в новых схемах фактически отключена. В противоположность этому, в расчетах по гибридной схеме и CD2 подсеточная модель играет существенную роль. Это следует рассматривать как преимущество, поскольку, варьируя структуру подсеточной модели, можно контролировать описание подсеточной турбулентности и ее взаимодействие с разрешенным полем течения.

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрены современные численные схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 с точки зрения их конкурентоспособности с гибридной схемой [4], популярной в LES- и DES-расчетах турбулентных течений. Проведено сравнение схем в одномерных расчетах модельных задач и в LES-расчетах двух турбулентных течений: распада изотропной турбулентности и развития временного слоя смешения.

В одномерных задачах схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 показали приблизительно одинаковую точность и продемонстрировали преимущества перед схемой WENO5 и центрально-разностной схемой второго порядка точности: меньший уровень ошибки и лучшее поведение в окрестности разрывов. В противоположность этому, трехмерные LES-расчеты выявили избыточно высокий уровень диссипации схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 в рамках метода конечных объемов 2-го порядка с 1 гауссовой точкой на грани ячейки. Даже при полном отключении явной подсеточной модели (режим ILES) энергетический спектр не содержит развитого инерционного интервала. Интересно, что в расчетах временного слоя смешения данный недостаток не мешает схеме WENO-SYMBOO6 демонстрировать корректные статистические харак-

теристики течения: скорость роста ширины турбулентной зоны, профили средней скорости и напряжений Рейнольдса. Тем не менее отсутствие возможности влиять на подсеточные напряжения делает схемы, работающие в режиме ILES, менее предпочтительными, чем гибридная схема, основная часть диссипации в которой создается именно явной моделью подсеточных напряжений. Таким образом, на данный момент при реализации на базе метода конечных объемов с 1 гауссовой точкой на грани ячейки (единственного практически значимого варианта метода конечных объемов) предпочтительной остается гибридная схема. Схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMB006, по крайней мере, в рассмотренных дозвуковых задачах, конкурировать с ней не могут. В будущем целесообразно сравнить эти схемы в расчетах задач с сильными разрывами параметров – например, в сверхзвуковых течениях со скачками уплотнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. Comp. Physics. 1988. V. 77. № 2. P. 439–471.
2. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. II // J. Comp. Physics. 1989. V. 83. № 1. P. 32–78.
3. *Zhang R., Zhang M., Shu C.W.* On the order of accuracy and numerical performance of two classes of finite volume WENO schemes // Comm. Comp. Physics. 2011. V. 9. № 3. P. 807–827.
4. *Guseva E.K., Garbaruk A.V., Strelets M.K.* An automatic hybrid numerical scheme for global RANS-LES approaches // J. Physics: Conference Series. 2017. V. 929. № 1.
5. *Mullenix N.J., Gaitonde D.V.* A bandwidth and order optimized weno interpolation scheme for compressible turbulent flows // AIAA paper 2011-366. 18 p.
6. *Martin M.P., Taylor E.M., Wu M., Weirs V.G.* A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence // J. Comp. Physics. 2006. V. 220. P. 270–289.
7. *Zhao S., Lardjane N., Fedioun I.* Comparison of improved finite-difference weno schemes for the implicit large eddy simulation of turbulent non-reacting and reacting high-speed shear flows // Comp. Fluids. 2014. V. 95. P. 74–87.
8. *Borges R., Carmona M., Costa B., Don W.S.* An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Physics. 2008. V. 227. P. 3191–3211.
9. *Li H., Luo Y., Zhang S.* Assessment of upwind/symmetric WENO schemes for direct numerical simulation of screech tone in supersonic jet // J. Sci. Comput. 2021. V. 87. № 3.
10. *Fu L.* Review of the high-order TENO schemes for compressible gas dynamics and turbulence // Arch. Comput. Methods Eng., 2023.
11. *Henrick A.K., Aslam T.D., Powers J.M.* Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points // J. Comp. Physics. 2005. V. 207. P. 542–567.
12. *Borges R., Carmona M., Costa B., Don W.S.* An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Physics. 2008. V. 227. P. 3191–3211.
13. *Suresh A., Huynh H.* Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // J. Comp. Physics. 1997. V. 136. № 1. P. 83–99.
14. *Yamaleev N.K., Carpenter M.H.* A systematic methodology for constructing high-order energy-stable weno schemes // J. Comp. Physics. 2009. V. 228. P. 4248–4272.
15. *Butcher J.C.* Numerical methods for ordinary differential equations. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2016. 513 p.
16. *Михайлов С.В., Власенко В.В.* Программа ZEUS для расчета нестационарных течений в рамках подходов RANS и LES // Материалы XX школы-семинара “Аэродинамика летательных аппаратов”. п. Володарского. 2009. С. 40–41.
17. *Босняков С.М.* Концепция программного продукта EWT-ЦАГИ и основные этапы ее развития // Труды ЦАГИ. 2007. № 2671, С. 3–19.
18. *Gritskevich M.S., Garbaruk A.V., Schütze J., Menter F.R.* Development of DDES and IDDES formulations for the k- ω shear stress transport model // Flow Turbulence Combust. 2012. V. 88. P. 431–449.
19. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows // Flow Turbulence Combust. 2015. V. 95. P. 709–737.
20. *Bakhne S., Sabelnikov V.* A method for choosing the spatial and temporal approximations for the LES approach // Fluids 2022. V. 7. № 12.

21. *Chumakov S.G., Rutland C.J.* Dynamic structure subgrid-scale models fo large eddy simulation // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2005. V. 47. P. 911–923.
22. *Zhou Z., He G., Wang S., Jin G.* Subgrid-scale model for large-eddy simulation of isotropic turbulent flows using an artificial neural network // *Comp. Fluids*. 2019. V. 195. 104319.
23. *Batchelor G.K.* The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, 1953. 197 p.
24. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // *Flow Turbulence Combust*. 2014. V. 93. P. 63–92.
25. *Etkin B.* Dynamics of atmospheric flight. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.
26. *Sharan N., Matheou G., Dimotakis P.E.* Turbulent shear-layer mixing: initial conditions, and direct-numerical and large-eddy simulations // *J. Fluid Mech*. 2019. V. 877. P. 35–81.
27. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: БИНОМ, 2006.
28. *Bell J.H., Mehta R.D.* Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers // *AIAA J*. 1990. V. 28. № 12. P. 2034–2042.