
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.68

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ПАРАМЕТРОВ В СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2023 г. А. И. Тятюшкин^{1,*}

¹ 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, Россия

*e-mail: tjat@icc.ru

Поступила в редакцию 09.10.2022 г.
Переработанный вариант 10.12.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Для задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты рассматривается итерационный метод поиска численного решения, основанный на редукции к конечномерной задаче и применении к последней алгоритма последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа. Для решения линейных вспомогательных задач на итерациях метода используется метод приведенного градиента. Эффективность учета фазовых ограничений при расчете оптимального управления иллюстрируется численным решением задач из области аэродинамики и робототехники. Библ. 12. Фиг. 2.

Ключевые слова: оптимальное управление, управляющие параметры, фазовые ограничения, градиентные методы, модифицированная функция Лагранжа, метод приведенного градиента.

DOI: 10.31857/S0044466923060194, **EDN:** TRPXCS

ВВЕДЕНИЕ

Для прикладных задач оптимального управления характерны нелинейность управляемой системы, высокая размерность фазового пространства и наличие ограничений как на управление, так и на фазовые координаты (см. [1–10]). Дискретный аналог непрерывной задачи управления предполагает табличное представление управляющих функций на заданной сетке временного интервала. На итерациях численного метода оптимизации обычно осуществляется выбор таких числовых значений управляющих функций в узлах этой сетки, при которых с некоторой заданной точностью будут выполнены все ограничения задачи и улучшено значение целевого функционала. Таким образом, редукция к конечномерной задаче открывает возможность использования богатого арсенала методов нелинейного программирования для приближенного решения сложных задач оптимального управления (см. [2–4]).

Основой алгоритмического обеспечения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями являются специальные методы решения больших задач линейного программирования. Для решения задач линейного программирования, полученных дискретизацией линейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, в [4] рассматриваются различные по трудоемкости и по требованиям к объему памяти алгоритмы, учитывающие специфические свойства этих задач. Например, задачам, в которых доминирующую роль играют фазовые ограничения, соответствуют задачи линейного программирования с большим числом основных ограничений, а задачам с ограничениями только на правом конце траектории — задачи с большим числом переменных. Решение этих задач алгоритмами со специальным правилом выбора опорных строк и столбцов позволяет избежать появления плохо обусловленных матриц. Кроме того, применение специальной мультипликативной формы с плотной записью мультипликаторов для обратной опорной матрицы блочной структуры позволяет решать задачи больших размеров.

Рассматриваемый в настоящей статье численный метод также основан на редукции к конечномерной задаче оптимизации и конструктивно учитывает фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного и нелинейного программирования (см. [3], [4]) для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала — модифицированного лагранжиана (см. [2]) при линеаризованных на полученном приближении фа-

зовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений (см. [7]). Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления (см. [5], [6]), успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники (см. [5–12]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан управляемый процесс с управляющими функциями $u_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, и управляющими параметрами w_i , $i = \overline{1, p}$, в правых частях, а также с параметрами v_i , $i = \overline{1, \gamma}$, в начальных условиях

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w, t), \quad x(t) \in E^n, \quad u(t) \in E^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= \Theta(v), \quad w \in R^p, \quad v \in R^\gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

с терминальными условиями

$$I_i(u, w, v) = h_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

и фазовыми ограничениями

$$J_i(u, w, v) = g_i(x(t), t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3)$$

Управление и параметры стеснены следующими ограничениями:

$$c_i(u, t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, l}, \quad (4)$$

$$u^H(t) \leq u(t) \leq u^B(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

$$v^H \leq v \leq v^B, \quad w^H \leq w \leq w^B. \quad (6)$$

Отметим, что размерности n, m, r, s, l, γ независимы между собой, T — отрезок времени, на котором управляющие функции могут изменять свои значения, а управляющие параметры остаются постоянными. Индексом “н” обозначены нижние границы изменения управляющих функций и параметров, а индексом “в” — верхние границы.

Требуется среди управляющих функций и параметров, удовлетворяющих ограничениям (4)–(6), найти такие, которые обеспечивают выполнение условий (3) для управляемого процесса (1) и приводят его в точку фазового пространства, где с заданной точностью будут выполнены условия (2), а функционал

$$I_0(u, w, v) = \Phi_0(x(t_1)) \quad (7)$$

достигнет наименьшего значения.

1.1. Редукция к конечномерной задаче

Для построения конечномерной задачи на заданном интервале T вводится сетка дискретизации с узлами $t_0, t^1, \dots, t^N$ такими, что

$$t_0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = t_1. \quad (8)$$

Эта сетка может быть и неравномерной.

Управляющие функции $u^i(t)$, $i = \overline{1, r}$, ищутся только в узлах (8), а для получения промежуточных значений $u^i(t)$, $i = \overline{1, r}$, используется либо кусочно-постоянная аппроксимация

$$u^i(t) = u^i(t^j) = u_j^i, \quad t \in [t^j, t^{j+1}],$$

либо кусочно-линейная

$$u^i(t) = \frac{(t^{j+1} - t)u_j^i + (t - t^j)u_{j+1}^i}{(t^{j+1} - t^j)}, \quad t \in [t^j, t^{j+1}]. \quad (9)$$

Тогда конечномерная задача, полученная дискретизацией на сетке (8) задачи (1)–(7), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = \Theta(v), \\ h_i(x(t^N)) &= 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ g_i(x(t^j), t^j) &= 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N}, \\ c_i(u(t^j), t^j) &= 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{0, N}, \\ u^H(t^j) &\leq u(t^j) \leq u^B(t^j), \quad t^j \in T, \\ u_j^H &= u^H(t^j), \quad u_j^B = u^B(t^j), \quad j = \overline{0, N}, \\ v^H &\leq v \leq v^B, \quad w^H \leq w \leq w^B, \\ \Phi(x(t^N)) &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что в задаче (10) управляемый процесс (1) остается непрерывным, а в процессе счета он с требуемой точностью моделируется численным методом интегрирования.

1.2. Градиенты функционалов

Градиенты функционалов $I_j(u, w, v)$ с помощью функций

$$H^j(\psi_j, x, u, w, t) = \psi_j'(t) f(x, u, w, t)$$

и сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_j &= -f_x(x, u, w, t)' \psi_j(t), \\ \psi_j(t_1) &= -h_x'(x(t_1)) \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}, \quad \psi_j(t_1) = -\Phi_x'(x(t_1)) \quad \text{при} \quad j = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

традиционно определяются по формулам

$$\nabla_u I_j(u, w, v) = -H_u^j(\psi_j, x, u, w, v, t), \quad j = \overline{0, m}. \quad (12)$$

Фазовые ограничения (3) будем учитывать только в узлах сетки (8). Для каждого узла t^j , $j = \overline{1, N}$, и каждого ограничения $g_i(x(t^j), t^j) = 0$, $i = \overline{1, s}$, введем в рассмотрение вектор-функцию $\bar{\psi}_i^j(t)$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\bar{\psi}}_i^j = -\frac{\partial f(x, u, w, v, t)}{\partial x} \bar{\psi}_i^j(t), \quad t \in [t_0, t^j], \quad \bar{\psi}_i^j(t^j) = -\frac{\partial g_i^j(x(t^j))}{\partial x}. \quad (13)$$

Введем также соответствующие этим решениям функции $\bar{H}^i(\bar{\psi}_i^j, x, u, w, v, t) = \bar{\psi}_i^j(t)' f(x, u, w, v, t)$. Тогда градиенты функций $g_i(x(t^j), t^j) = 0$, $i = \overline{1, s}$, для каждого узла t^j можно вычислить по формуле

$$\nabla_u J_i^j(u, w, v) = -\bar{H}_u^i(\bar{\psi}_i^j, x, u, w, v, t), \quad t_0 \leq t \leq t^j. \quad (14)$$

1.3. Линеаризация ограничений

Пусть теперь на k -й итерации внешнего метода на сетке (8) найдено $u^k(t^j)$ и ему соответствующее $x^k(t^j)$, $j = \overline{1, N}$. Тогда для расчета градиентов по управлению $\nabla_u I_i(u^k, w^k, v^k)$, $i = \overline{1, m}$, на этом приближении сопряженная система (11) m раз интегрируется от t_1 до t_0 с разными начальными условиями.

Далее по формуле (14) вычисляются градиенты по управлению $\Delta_u J_i^j(u^k, w^k, v^k)$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, N}$. Для этого нужно s раз решить задачу Коши (13) для каждого узла t^j сетки (8), т.е. проинтегрировать систему $s \times N$ раз в среднем на половине отрезка T .

Так как правые части и начальные условия системы (1) зависят еще и от параметров, то необходимо иметь также градиенты функционалов I_i , $i = \overline{1, m}$, и J_i^j , $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, N}$, по этим параметрам (см. [1]):

$$\nabla_v I_i(u^k, w^k, v^k) = -\psi_i(t_0)' \Theta_v(v^k), \quad i = \overline{1, m}, \quad \nabla_w I_i(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t_1} \psi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (15)$$

$$\nabla_w J_i^j(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t^j} \bar{\psi}_i^j(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (16)$$

$$\nabla_v J_i^j(u^k, w^k, v^k) = -\bar{\psi}_i^j(t_0)' \Theta_v(v^k), \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Используя полученные формулы (12)–(17) для расчета градиентов, линеаризуем ограничения (2) на k -м приближении:

$$I(u^k, w^k, v^k) + \sum_{j=0}^N \nabla_u I(u^k, w^k, v^k)'(u_j - u_j^k) + \nabla_w I(u^k, w^k, v^k)'(w - w^k) + \nabla_v I(u^k, w^k, v^k)'(v - v^k) = 0. \quad (18)$$

Здесь $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$, следовательно, имеем m линейных ограничений (18).

Далее линеаризуем ограничения (3) на k -м приближении. В силу громоздкости используем запись линеаризованных функционалов J_i^j , $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, N}$, без аргументов в скобках для градиентов:

$$J_i^j(u^k, w^k, v^k) + \sum_{i=0}^j (\nabla_u J_i^j)'(u_i - u_i^k) + (\nabla_w J_i^j)'(w - w^k) + (\nabla_v J_i^j)'(v - v^k) = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (19)$$

Ограничения (19) представляют собой явную форму (через искомые переменные u , w , v) линеаризованных ограничений (3), причем вместо равенств, заданных для каждого момента $t \in T$, имеем N равенств, определенных в узлах сетки (8), и, следовательно, всего будем иметь $s \times N$ равенств.

Далее линеаризуем также условия (4):

$$c(u^k, t^j) + \nabla_u c(u^k, t^j)'(u_j - u_j^k) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (20)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, следовательно, в (20) имеем систему из l равенств.

Прямые ограничения на управление и параметры оставим без изменений:

$$u_j^H \leq u_j \leq u_j^B, \quad j = \overline{1, N}, \quad (21)$$

$$v_j^H \leq v_j \leq v_j^B, \quad j = \overline{1, \gamma}, \quad w_i^H \leq w_i \leq w_i^B, \quad i = \overline{1, p}. \quad (22)$$

Из полученной системы линейных уравнений (18)–(20) составляется матрица условий A со специальной блочной структурой для задачи линейного программирования. Прямыми ограничениями на переменные в задаче линейного программирования будут ограничения (20), (21).

2. МЕТОД ПРИВЕДЕННОГО ГРАДИЕНТА

Вместо линейной задачи, решаемой на итерациях известного метода линеаризации, в рассматриваемом здесь методе спроектированного лагранжиана на каждой его итерации решается задача минимизации нелинейной модифицированной функции Лагранжа при линеаризованных ограничениях исходной задачи. Эта задача решается методом приведенного градиента, который в отличие от симплекс-метода минимизирует нелинейную целевую функцию, и поэтому на его итерациях, кроме базисных и небазисных переменных, используются еще супербазисные переменные. Так как минимум нелинейной функции на итерациях может достигаться внутри допустимого многогранника решений, то некоторые небазисные переменные не будут принимать граничные значения, поэтому необходимо использовать еще и супербазисные переменные.

2.1. Модифицированная функция Лагранжа

Вводя векторные обозначения для равенств (2)–(4), построим модифицированную функцию Лагранжа для задачи (1)–(7):

$$\begin{aligned} L = & \varphi(x(t_1)) - \lambda^{k'} [h(x(t_1)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2} [h(x(t_1)) - \bar{h}^L]' [h(x(t_1)) - \bar{h}^L] - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \mu^{k'}(t) [g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), t) - \bar{g}^L]' [g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \gamma^k(t) [c(u, t) - \bar{c}^L] dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [c(u, t) - \bar{c}^L]' [c(u, t) - \bar{c}^L] dt, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\bar{h}^L = h(x^k(t_1)) + h_x(x^k(t_1))\delta x(t_1)$, $\bar{g}^L = g(x^k(t), t) + g_x(x^k(t), t)\delta x(t)$, $\bar{c}^L = c(u^k(t), t) + c_u(u^k(t), t)\delta u(t)$, $\delta u = u - u^k$, $\delta x = x - x^k$, $0 \leq \rho \leq 1$, λ^k , $\mu^k(t)$, $\gamma^k(t)$ – множители Лагранжа.

Конечномерный аналог функционала (23), в котором переменные $x^k(t)$ определены через систему (1) по управлению $u^k(t)$, $t^j \in T$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} L = & \varphi(x^N) - \lambda^{k'} [h(x(t^N)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2} [h(x(t^N)) - \bar{h}^L]' [h(x(t^N)) - \bar{h}^L] - \\ & - \sum_{j=0}^N \mu_j^{k'} [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L]' [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] - \\ & - \sum_{j=0}^N \gamma_j^{k'} [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L]' [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L], \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{h}^L &= h(x^k(t^N)) + h_x(x^k(t^N))(x(t^N) - x^k(t^N)), \\ \bar{g}^L &= g(x^k(t^j), t^j) + g_x(x^k(t^j), t^j)(x(t^j) - x^k(t^j)), \\ \bar{c}^L &= c(u^k(t^j), t^j) + c_u(u^k(t^j), t^j)(u_j - u_j^k), \quad j = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

2.2. Матрица линеаризованных ограничений.

Построение вспомогательной задачи

Обозначив через $A[m + (l + s)(N + 1)] \times [r(N + 1) + p + \gamma]$ матрицу коэффициентов линейных равенств (11)–(15), через b – вектор их свободных членов размерности $m + (l + s)(N + 1)$ и через z – вектор искомых переменных $(u_j, j = \overline{0, N}; w; v)$ размерности $r(N + 1) + p + \gamma$ соответственно, поставленную задачу запишем так:

$$L(z) \rightarrow \min, \quad Az = b, \quad z^H \leq z \leq z^B. \quad (25)$$

Для удобства изложения алгоритма будем, как принято в линейном программировании, считать размеры задачи (25) равными m , n . Для вектора z и матрицы A введем разбиение $z = (z_B, z_S, z_N)$, $A = (B, S, N)$, соответствующее базисным, супербазисным и небазисным переменным. Такое разбиение отличается от традиционного наличием супербазисных переменных, которые не достигают граничных значений из-за нелинейности целевой функции, но и не являются базисными.

В соответствии с таким разбиением система уравнений (25) переписывается в виде

$$Bz_B = -Sz_S - Nz_N + b. \quad (26)$$

2.3. Итерации метода приведенного градиента

Шаг. 1. Вычисление градиента целевой функции. Чтобы применить традиционную схему для расчета градиента функции $L(z)$ (через функцию $H^j(\psi, x, u, t) = \dot{\psi}'(t)f(x, u, t) - F(x, u, t)$, где $F(x, u, t)$ – подынтегральная функция целевого функционала) используем непрерывное представление функционала (23):

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, w, t) = & \psi'(t)f(x, u, w, t) + \mu^k(t)'[g(x, t) - \bar{g}^L] - \frac{\rho}{2}[g(x, t) - \bar{g}^L]'[g(x, t) - \bar{g}^L] + \\ & + \gamma^k(t)'[c(u, t) - \bar{c}^L] - \frac{\rho}{2}[c(u, t) - \bar{c}^L]'[c(u, t) - \bar{c}^L], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & -f_x(x, u, w, t)' \psi(t) - \mu^k(t)'[g_x(x, t) - g_x(x^k, t)] + \\ & + \rho[g(x, t) - \bar{g}^L]'[g_x(x, t) - g_x(x^k, t)], \\ \psi(t_1) = & -\phi_x(x(t_1)) + \lambda^{k'}[h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))] - \\ & - \rho[h(x(t_1)) - \bar{h}^L]'[h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))], \end{aligned} \quad (28)$$

тогда

$$\begin{aligned} \nabla_u L = H_u(\psi, x, u, w, t) = & -f_u(x, u, w, t)' \psi(t) + \\ & + [c_u(u, t) - c_u(u^k, t)]'[-\gamma^k(t) + \rho(c(u, t) - \bar{c}^L)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь для $\bar{h}^L$, $\bar{g}^L$, $\bar{c}^L$ использованы те же обозначения, что и в (23). Интегрируя в обратном времени сопряженную систему (27)–(28), будем считать интегралы в формулах для градиентов и запоминать их значения в узлах сетки. Одновременно аналогично вычисляются градиенты по параметрам $\nabla_w L$ и $\nabla_v L$. Таким образом, будет найден градиент $L(z)$:

$$\nabla L(z) = (\nabla_u L, \nabla_v L, \nabla_w L).$$

Обозначим его через g и выполним соответствующее разбиение $g = (g_B, g_S, g_N)$.

Из решения системы $B'\pi = g_B$, где B – базисная матрица, найдем вектор двойственных переменных (потенциалов) π и вычислим $\Delta = g - A'\pi$ – вектор оценок.

Выполним разбиение $\Delta = (\Delta_B, \Delta_S, \Delta_N)$, в котором Δ_S называется вектором приведенного градиента.

При $\|\Delta_S\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданная погрешность, имеем локальный оптимум по супербазисным переменным и проверим следующий критерий оптимальности (п. 2). В противном случае перейдем к п. 3.

Шаг. 2. Проверка критерия оптимальности

$$\Delta_i \geq 0 \quad \text{при} \quad z_i = z_i^H; \quad \Delta_i \leq 0 \quad \text{при} \quad z_i = z_i^B, \quad i \in I_N,$$

и расширение множества супербазисных переменных. При выполнении этих условий процесс прекращается. В противном случае среди небазисных компонент в Δ_N , нарушающих эти условия, находится максимальная по модулю компонента Δ_{j_0} , $j_0 \in I_N$, к матрице S добавляется столбец

A_{j_0} , к вектору Δ_S — компонента Δ_{j_0} . Здесь можно выполнить также перенос и других столбцов матрицы N , оценки Δ_j которых близки по значениям к Δ_{j_0} , в матрицу S , чтобы сократить число дальнейших итераций.

Шаг. 3. Построение направления спуска. Оно строится по супербазисным переменным

$$p_S = \Delta_S, \quad Bp_B = S\Delta_S, \quad p_N = 0,$$

т.е., решив линейную систему, найдем p_B и получим $p = (p_B, p_S, p_N)'$.

Шаг. 4. Определение максимально возможного шага вдоль направления p . Находим максимальное значение α , при котором $z + \alpha p$ остается допустимым: $\alpha_{\max} = \alpha_{i_0} = \min \alpha_i$,

$$\alpha_i = \begin{cases} (z_i^B - z_i)/p_i, & \text{если } p_i > 0, \\ (z_i^H - z_i)/p_i, & \text{если } p_i < 0, \\ \infty, & \text{если } p_i = 0. \end{cases}$$

Если $\alpha_{\max} = 0$, то перейти к п. 6.

Шаг. 5. Определение оптимального шага

$$\alpha^* = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} L(z + \alpha p).$$

Полагаем $z = z + \alpha^* p$. Если $\alpha^* < \alpha_{\max}$, то переходим в п. 1. В этом случае ни одна из компонент z_B и z_S не достигла своей границы.

Шаг. 6. Изменение базиса. При $\alpha^* = \alpha_{\max}$ одна из базисных или супербазисных переменных z_{i_0} достигает своей границы. Тогда она переводится в небазисные, а вместо нее вводим в базис одну из супербазисных переменных. При этом выбирается наиболее удаленная от своих границ переменная, чтобы обеспечить хорошую обусловленность новой базисной матрицы.

Здесь можно также присвоить граничные значения супербазисным переменным, близким к своим границам, чтобы избежать лишних итераций, переводящих их на границы. Однако нужно следить за тем, чтобы вектор z_B , найденный из соотношения (26), удовлетворял заданным ограничениям. В противном случае нужно сделать более жесткий отбор близких к границе переменных (уменьшив ε , по которому определяются близкие элементы). Это сокращает поиск управлений, например, релейного типа, которые состоят в основном из граничных, т.е. небазисных, переменных вектора z .

Далее, изменив разбиение z и A , переходим в п. 1 на повторение итерации метода приведенного градиента.

3. АЛГОРИТМ МЕТОДА СПРОЕКТИРОВАННОГО ЛАГРАНЖИАНА

Рассмотрим теперь полный алгоритм решения исходной задачи (1)–(7).

1. С заданным управлением $u_j^k, j = \overline{0, N}$, интегрируется система (1), и в узлах сетки запоминаются точки фазовой траектории $x_j^k, j = \overline{0, N}$. Здесь k — номер итерации (первый раз $k = 0$).

На полученном решении линеаризуются ограничения исходной задачи и строится вспомогательная задача (18)–(22), (24).

2. Методом приведенного градиента решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа (24) при линейных ограничениях (18)–(22).

В результате будут найдены новые приближения для управления $u_j^{k+1}, j = \overline{0, N}$, параметров w^{k+1} и v^{k+1} , а также для двойственных переменных λ^{k+1} и $\mu_j^{k+1}, j = \overline{0, N}$.

3. Проверяется критерий окончания итерационного процесса, как по прямым, так и по двойственным переменным:

$$\begin{aligned} |I_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})| / (1 + \alpha^{k+1}) &\leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, m}, \\ |J_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})| / (1 + \alpha^{k+1}) &\leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha^{k+1} &= \max \left\{ \|u_j^{k+1}\|, \quad j = \overline{0, N}; \quad |w_i|, \quad i = \overline{1, p}; \quad |v_l|, \quad l = \overline{1, \gamma} \right\}; \\ |\lambda_j^k - \lambda_j^{k+1}| / (1 + \Theta^{k+1}) &\leq \varepsilon, \quad j = \overline{1, m}; \\ |\mu_{ij}^k - \mu_{ij}^{k+1}| / (1 + \Theta^{k+1}) &\leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N}; \\ \Theta^{k+1} &= \max \left\{ |\lambda_j^{k+1}|, \quad j = \overline{1, m}; \quad |\mu_{ij}^{k+1}|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N} \right\}.\end{aligned}$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий выполняется новая $(k+1)$ -я итерация из п. 1. Если же эти неравенства выполняются для заданного $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс прекращается, а найденные u_j^{k+1} , $j = \overline{0, N}$, w^{k+1} и v^{k+1} выдаются в качестве приближенного решения задачи оптимального управления.

Таким образом, на каждой итерации метода спроектированного лагранжиана решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа при линейризованных на k -м приближении ограничениях. При решении вспомогательной задачи находятся новые значения двойственных переменных — множителей Лагранжа λ_j^{k+1} , $j = \overline{1, m}$, и $\mu_j^{k+1}(t)$, $j = \overline{1, s}$, $t \in T$. Связь между значениями λ^k , $\mu^k(t)$ и λ^{k+1} , $\mu^{k+1}(t)$ устанавливается необходимым условием оптимальности для управления u^{k+1} :

Теорема. Если u^{k+1} — оптимальное решение вспомогательной задачи (18)–(22), (24), то найдутся такие λ^{k+1} и $\mu^{k+1}(t)$, $t \in T$, которые будут удовлетворять следующим условиям стационарности:

$$G(t) = -f_u(x^k, u^k, w^k, t)' \eta(t) - f_u(x^{k+1}, u^{k+1}, w^{k+1}, t)' \psi(t) = 0,$$

где $\eta(t)$ и $\psi(t)$ — решения систем

$$\dot{\eta}(t) = -f_x(x^k, u^k, w^k, t)' \eta(t) - g_x(x^k)' (\mu^{k+1}(t) - \bar{\mu}^k(t)), \quad t \in T, \quad \eta(t_1) = \varphi_x(x^k(t_1))' (\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}^k);$$

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(x^{k+1}, u^{k+1}, w^{k+1}, t)' \psi(t) - g_x(x^{k+1})' \bar{\mu}^k, \quad t \in T,$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x^0(x^{k+1}(t_1)) + \varphi_x(x^{k+1}(t_1))' \bar{\lambda}^k;$$

$$\bar{\lambda}^k = \lambda^k - \rho(I(u^{k+1}) - I^L(u^k, u^{k+1})), \quad \bar{\mu}^k(t) = \mu^k(t) - \rho(J(u^{k+1}, t) - J^L(u^k, u^{k+1}, t)),$$

$$t \in T, \quad \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)', \quad g = (g^1, \dots, g^s)'.$$

Доказательство теоремы для аналогичной задачи приведено в [6].

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На основе изложенных в настоящей статье численных методов разработано программное обеспечение (см. [6]), с помощью которого были решены приведенные ниже задачи оптимального управления. Задача п. 4.1 содержит параметры в начальных условиях и имеет ограничения, как на управляющие функции, так и на фазовые координаты, а также терминальные условия типа равенств, что соответствует общей постановке, приведенной в начале статьи. Задача быстрогодействия в этой постановке решается путем объявления времени T — длительности процесса параметром. Задача п. 4.2 иллюстрирует случай, когда фазовые ограничения (3) заданы функциями от фазовых координат и тоже является задачей быстрогодействия — перевода из точки в точку за минимальное время. В обеих задачах управлением является вектор-функция, состоящая из 4 и 2 управляющих функций соответственно.

4.1. Задача об оптимальном развороте самолета (см. [2])

Управляемый процесс описывается системой

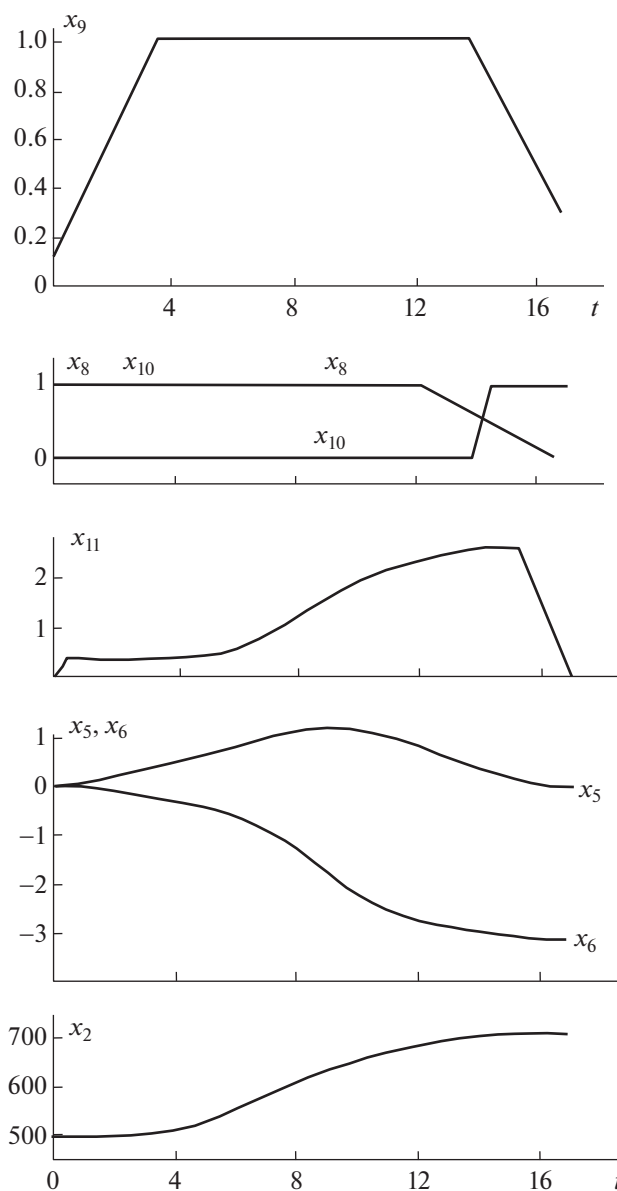
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_4 \cos x_5 \cos x_6, & x_1(0) &= 0, \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \sin x_5, & x_2(0) &= 5000, \\
 \dot{x}_3 &= -x_4 \cos x_5 \sin x_6, & x_3(0) &= 0, \\
 \dot{x}_4 &= g \left[\frac{x_8 P \cos \alpha - C_x q s}{x_7} - \sin x_5 \right], & x_4(0) &= 300, \\
 \dot{x}_5 &= g \frac{x_9 N \cos x_{11} - \cos x_5}{x_4}, & x_5(0) &= 0, \\
 \dot{x}_6 &= -g \frac{x_9 N \sin x_{11}}{\cos x_5}, & x_6(0) &= 0, \\
 \dot{x}_7 &= -C_s, & x_7(0) &= 20\,000, \\
 \dot{x}_8 &= u_1, & x_8(0) &= V_1, \\
 \dot{x}_9 &= u_2, & x_9(0) &= 1/N(0), \\
 \dot{x}_{10} &= u_3, & x_{10}(0) &= V_2, \\
 \dot{x}_{11} &= u_4, & x_{11}(0) &= 0, \quad t \in [0, T], \\
 q &= \frac{(3.3 \times 10^{-10} x_2^2 - 1.155 \times 10^{-5} x_2 + 0.125) x_4^2}{2}, & s &= 55, \quad g = 9.81, \\
 P &= \left(10 - \frac{x_4^2}{a^2(x_2)} \right) \frac{25\,000 - x_2}{12.5}, & C_s &= \frac{[0.7 + 2(x_8 - 0.3)^2] x_8 P}{3600}, \\
 N &= \min \left(\frac{q s}{x_7}, \frac{150\,000}{x_7}, 8 \right), & C_x &= 0.02 + 3.174 \alpha^2 + 0.03 x_{10}, \\
 a(x_2) &= 340.3 - 4.08 \times 10^3 x_2, & \alpha &= x_9 N x_7 / (x_8 P + 4.6 q s),
 \end{aligned}$$

где V_1, V_2 — оптимизируемые параметры.

Требуется найти минимум функционала $I(u) = T$ и удовлетворить ограничениям

$$\begin{aligned}
 x_2(T) &= 7000, & x_5(T) &= 0, & x_6(T) &= -\pi, & x_9(T) &= \frac{1}{N(T)}, & x_{11}(T) &= 0, \\
 0.05 &\leq x_8(t) \leq 1, & 0.01 &\leq x_9(t) \leq 1, & 0 &\leq x_{10}(t) \leq 1, & t &\in [0, T], \\
 |u_1(t)| &\leq 0.2, & |u_2(t)| &\leq 0.25, & |u_3(t)| &\leq 1, & |u_4(t)| &\leq 1.57, & t &\in [0, T].
 \end{aligned}$$

Для сглаживания функции $N(x)$ применялся специальный метод аппроксимации (как и в [2]). Начиная с приближения $T = 21$, $V_1 = 1$, $V_2 = 1$, $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$, $u_4(t) = 1.5 \cos\left(\frac{\pi}{21}t\right) \frac{\pi}{21}$, $t \in [0, T]$, получены наименьшее значение функционала $I = 16.9944$ и следующие значения оптимизируемых параметров $V_1 = 1$, $V_2 = 0$. На найденном решении ограничения выполнялись с максимальной по модулю невязкой, равной 8×10^{-7} . На фиг. 1 приведен вид фазовых координат, графики управляющих функций совпадают с графиками, приведенными в [2].

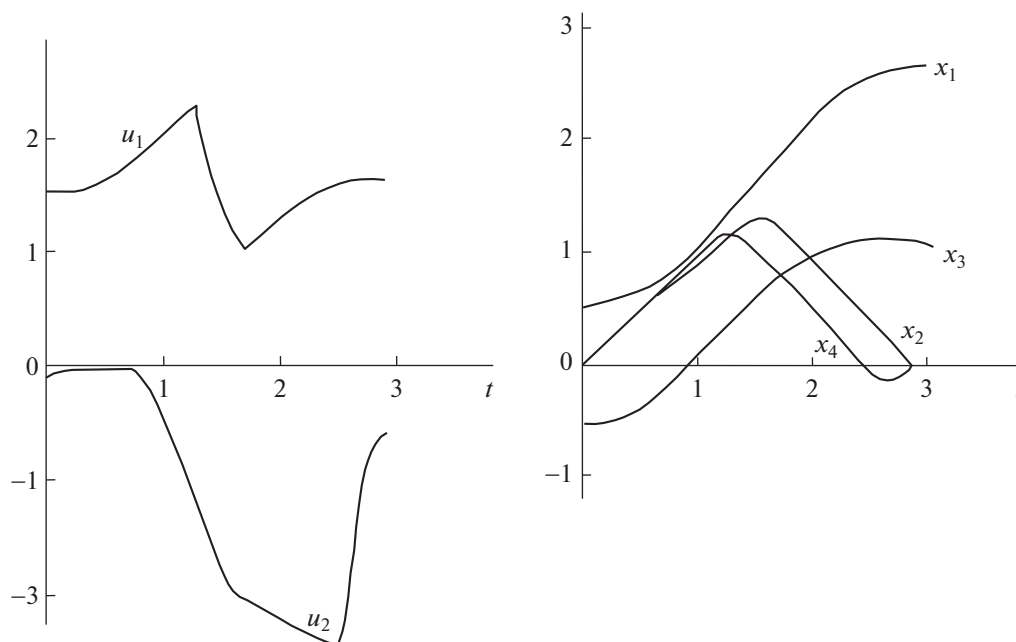


Фиг. 1. Графики фазовых координат в задаче о развороте самолета.

4.2. Задача об оптимальном управлении манипулятором робота

Динамика движения манипулятора промышленного робота описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{[M_1(x, u) - F_1(x)]a_{22} - [M_2(x, u) - F_2(x)]a_{12}(x)}{a_{11}a_{22} - a_{12}(x)a_{21}(x)}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{[M_2(x, u) - F_2(x)]a_{11} - [M_1(x, u) - F_1(x)]a_{21}(x)}{a_{11}a_{22} - a_{12}(x)a_{21}(x)},\end{aligned}$$



Фиг. 2. Графики управлений и фазовых координат для задачи о роботе.

где

$$M_1(x, u) = -c_1(x_1 - u_1), \quad M_2(x, u) = -c_2(x_3 - x_1 - u_2),$$

$$F_1(x) = -m_2 l_1 R_2 \sin(x_3 - x_1) x_2^2, \quad F_2(x) = m_2 l_2 R_2 \sin(x_3 - x_1) x_4^2,$$

$$a_{11} = m_1 \rho_1^2 + m_2 l_1^2, \quad a_{12} = a_{21} = m_2 R_1 l_1 \cos(x_3 - x_1), \quad a_{22} = m_2 \rho_2^2.$$

Для рассматриваемой модели робота $m_1 = 7.62$, $m_2 = 8.73$, $R_1 = 0.239$, $R_2 = 0.251$, $\rho_1 = 0.968$, $\rho_2 = 0.973$, $l_1 = 0.5$, $l_2 = 0.67$, $c_1 = c_2 = 10$. На траекторию движения накладываются ограничения $|M_i(x, u)| \leq 10$, $i = 1, 2$, $\pi/6 \leq x_1(t) \leq 5/6\pi$, $\pi/3 \leq x_1(t) - x_3(t) \leq 5/6\pi$, $t \in [0, T]$.

Необходимо найти управление, переводящее систему из точки $x'(0) = (\pi/6, 0, -\pi/6, 0)$ в точку $x'(T) = (5/6\pi, 0, \pi/3, 0)$ за минимальное время T .

Начиная с приближения $T = 4$, $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = 0$, $t \in [0, T]$, было получено решение, на котором невязки по ограничениям не превысили 10^{-3} , а значение функционала (за минимальное время T) составило 2.88. Вид оптимального управления и соответствующих ему фазовых координат приведен на фиг. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в статье численные методы оптимизации параметров и управляющих функций конструктивно учитывают фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного и нелинейного программирования (см. [3], [4]) для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала — модифицированного лагранжиана при линеаризованных на полученном приближении фазовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная

вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений. Программное обеспечение (см. [6]), разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления и оптимальных параметров, успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники. Применение эффективной технологии расчета управления особенно актуально в управляемых системах реального времени, например, в системах управления летательными аппаратами, обладающими высокой маневренностью. Например, при проектировании СУ-57 (мирового лидера по маневренности) для решения серии задач оптимального маневрирования (см. [11], [12]) использовалось данное программное обеспечение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
2. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
3. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. Минск: Университетское, 1984.
5. *Тятюшкин А.И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1992.
6. *Тятюшкин А.И.* Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006.
7. *Тятюшкин А.И.* Параллельные вычисления в задачах оптимального управления // Сиб. журнал вычисл. матем. 2000. Т. 3. № 2. С. 181–190.
8. *Тятюшкин А.И.* Численные методы решения задач оптимального управления с параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 10. С. 1615–1630.
9. *Тятюшкин А.И.* Многометодная оптимизация управления в сложных прикладных задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 235–246.
10. *Тятюшкин А.И.* Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 189–205.
11. *Тятюшкин А.И., Федунцов Б.Е.* Численное исследование свойств оптимального управления в одной задаче преследования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 3. С. 104–113.
12. *Тятюшкин А.И., Федунцов Б.Е.* Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 111–125.