

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ
РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ

© 2023 г. В. И. Максимов^{1,*}

¹ 620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН, Россия

*e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 02.11.2022 г.
Переработанный вариант 02.11.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Рассматривается задача динамической реконструкции граничного неизвестного входного воздействия для нелинейной системы дифференциальных уравнений с распределенными параметрами типа реакции–диффузии. Представлен алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теории управления с обратной связью. Библ. 19.

Ключевые слова: реконструкция, система реакции–диффузии.

DOI: 10.31857/S0044466923060169, **EDN:** TULVKW

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} x_t(\eta, t) - D_1 \Delta x(\eta, t) + k_1 x(\eta, t) &= -\gamma_1 x(\eta, t) y(\eta, t), & (t, \eta) \in Q, \\ y_t(\eta, t) - D_2 \Delta y(\eta, t) + k_2 y(\eta, t) &= -\gamma_2 x(\eta, t) y(\eta, t), & (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu x(s, t) + b(s, t, x(s, t)) &= u(s, t), & (t, s) \in \Sigma, \\ D_2 \partial_\nu y(s, t) + k_3 y(s, t) &= 0, & (t, s) \in \Sigma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} x(\eta, 0) &= x_0(\eta), & \eta \in \Omega, \\ y(\eta, 0) &= y_0(\eta), & \eta \in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь $Q = T \times \Omega$, $\Sigma = T \times \partial\Omega$, Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n с липшицевой границей $\partial\Omega$, $n \geq 1$, $b(\cdot)$ – фиксированная функция, свойства которой будут уточнены ниже, $T = [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, – конечный момент времени, $u(\cdot)$ – входное воздействие, D_1 и D_2 – положительные постоянные, а k_1, k_2, k_3, γ_1 и γ_2 – неотрицательные постоянные. Символ ∂_ν означает производную по внешней нормали к $\partial\Omega$.

В дальнейшем считаем начальное состояние $\{x_0, y_0\}$ системы (1.1), где $x_0 = x_0(\eta) \in C(\tilde{\Omega})$, $y_0 = y_0(\eta) \in C(\tilde{\Omega})$, $\eta \in \Omega$ – неотрицательные функции, известным.

Здесь и всюду ниже $\tilde{\Omega}$ означает замыкание множества Ω .

Введем пространство

$$W(T) = \{x(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega)) : y_t(\cdot) \in L_2(T; (H^1(\Omega))^*)\}$$

с нормой

$$\|x\|_{W(T)} = \left(\int_0^\vartheta (|x(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + |x_t(t)|_{(H^1(\Omega))^*}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Здесь $H^1(\Omega)$ – пространства Соболева, $(H^1(\Omega))^*$ – сопряженное к $H^1(\Omega)$ пространство, производная $x_t(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений, $L_2(T; H^1(\Omega))$ – пространство эквивалентных классов абстрактных функций $x(\cdot) : T \rightarrow H^1(\Omega)$, $\int_0^{\vartheta} |x(t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt < \infty$ с нормой

$$|x(\cdot)|_{L_2(T; H^1(\Omega))} = \left(\int_0^{\vartheta} |x(t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Можно дать другое (эквивалентное [1, с. 23]) определение пространства $W(T)$. Это есть пространство абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) : T \rightarrow H^1(\Omega)$, которые почти всюду на T дифференцируемы и таковы, что $t \rightarrow dx(t)/dt \in L_2(T; H^1(\Omega))$. Заметим, что пространство $W(T)$ непрерывно вложено в пространство $C(T; L_2(\Omega))$ – пространство непрерывных функций, действующих из T в пространство $L_2(\Omega)$. Поэтому существует постоянная $c^* > 0$ такая, что для всех $x(\cdot) \in W(T)$ выполняется неравенство

$$|x(\cdot)|_{C(T; L_2(\Omega))} \leq c^* |x(\cdot)|_{W(T)}.$$

В дальнейшем считаем выполненными следующие два условия из работы [2].

Условие 1. Нелинейная функция $b(s, t, x) : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной по совокупности переменных и монотонно неубывающей по x при всех $(s, t) \in \Sigma$. Кроме того, функция b дважды непрерывно дифференцируема по x , причем функция $\partial^2 b(s, t, x) / \partial x^2$ является локально липшицевой, т.е. для любого $\rho > 0$ можно указать $L = L(\rho) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_j| \leq \rho$, $j = 1, 2$, и любых $(s, t) \in \Sigma$, выполняется неравенство

$$|\partial^2 b(s, t, x_1) / \partial x_1^2 - \partial^2 b(s, t, x_2) / \partial x_2^2| \leq L(\rho) |x_1 - x_2|.$$

Здесь и всюду ниже символ $|\cdot|$ означает модуль числа.

Условие 2. Справедливо неравенство $b(s, t, 0) \leq u(s, t)$ при почти всех $(s, t) \in \Sigma$. Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |b(\cdot, \cdot, x)|_{C(\bar{Q})} = \infty.$$

Следуя [2], [3], пару функций $\{x(\cdot), y(\cdot)\} : x(\cdot) = x(\cdot; 0, \{x_0, y_0\}, u(\cdot))$, $y(\cdot) = y(\cdot; 0, \{x_0, y_0\}, u(\cdot)) \in (W(T) \cap L_\infty(Q))^2$, назовем решением (слабым) уравнения (1.1), если выполняются равенства

$$x(\cdot, 0) = x_0, \quad y(\cdot, 0) = y_0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\vartheta} \langle x_t(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + \iint_{\Sigma} b(s, t, x(s, t)) \varphi(s, t) ds dt + \iint_Q (D_1 \nabla x(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + \\ & + k_1 x(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_1 x(\eta, t) y(\eta, t) \varphi(\eta, t)) d\eta dt = \iint_{\Sigma} u(s, t) \varphi(s, t) ds dt \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^{\vartheta} \langle y_t(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + k_3 \iint_{\Sigma} y(s, t) \varphi(s, t) ds dt + \\ & + \iint_Q (D_2 \nabla y(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + k_2 y(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_2 x(\eta, t) y(\eta, t) \varphi(\eta, t)) d\eta dt = 0 \end{aligned}$$

при всех $\varphi(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$. Здесь и всюду ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ означает двойственность между соболевскими пространствами $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$, символ ∇ означает градиент соответствующей функции, а символ ds – меру Лебега на внешней границе $\partial\Omega$. В дальнейшем для всякой функции $\varphi(\eta) \in H^1(\Omega)$ под $\varphi(s)$ понимаем след функции φ на границе области Ω .

Прямым следствием теоремы 2.2. из [2] является теорема 1.

Теорема 1. Пусть $x_0(\eta)$ и $y_0(\eta)$ – неотрицательные функции. Тогда, каково бы ни было входное воздействие $u(\cdot) \in L_\infty(\Sigma)$, если функция $b(\cdot)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то существует единственное решение системы (1) $\{x(\cdot), y(\cdot)\} \in (W(T) \cap C(\tilde{Q}))^2$.

Обсуждаемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Имеется система (1.1) с некоторым входным воздействием $u(\cdot)$. Заранее как это воздействие, так и отвечающее ему решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы не заданы. В каждый момент времени $t \in T$ измеряется решение системы (1.1), т.е. измеряются величины $x(t)$ и $y(t)$. Эти измерения неточны: вместо функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ вычисляются функции $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$, $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$ и $\xi_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\partial\Omega))$ со свойствами

$$|x(t) - \xi^h(t)|_{L_\infty(\Omega)} \leq h, \quad |y(t) - \psi^h(t)|_{L_\infty(\Omega)} \leq h \quad \text{при п.в. } t \in T, \tag{1.2}$$

$$\left(\int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s, t) - x(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \leq h \quad \text{при п.в. } t \in T. \tag{1.3}$$

Здесь число $h \in (0, 1)$ характеризует “ошибку” измерений. Задача заключается в том, чтобы построить алгоритм приближенного восстановления неизвестного входного воздействия $u(\cdot)$.

Сформулированная задача относится к классу обратных задач (см. [4–8]). Описываемая ниже методика ее решения развивает подход к решению проблемы динамического восстановления входа, получивший развитие в ряде работ (по поводу этих работ см. монографии [9–12] и обзорную статью [13]). Этот подход основывается на комбинации известного в теории гарантированного управления принципе позиционного управления с моделью (см. [14]), а также одним из основополагающих методов теории некорректных задач – методе сглаживающего функционала (см. [4], [5]). Заметим, что в [9], [10] задачи динамической реконструкции входов изучались для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Вопросы реконструкции граничных входных воздействий для параболических и гиперболических уравнений обсуждались в [15–19]. В настоящей работе, продолжающей цикл цитированных выше работ, мы указываем алгоритм решения задачи реконструкции граничного входного воздействия для системы распределенных уравнений реакции–диффузии.

В соответствии с подходом из цитированных выше работ задача восстановления неизвестного входного воздействия по результатам измерения величин $\{\xi^h(\cdot), \psi^h(\cdot)\}$ заменяется некоторой другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой M (моделью). Таким образом, задача восстановления $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

- 1) задаче выбора вспомогательной системы M (функционирующей “синхронно” с реальной системой);
- 2) задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В гл. I из [11] было отмечено, что для достаточно широкого класса параболических систем в качестве моделей удобно брать “копии” реальных систем. Там же приведены примеры таких систем. Оказывается, что и для рассматриваемой в настоящей работе системы в качестве модели M можно брать ее “копию”. Эта “копия” имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_t^h(\eta, t) - D_1 \Delta z^h(\eta, t) + k_1 z^h(\eta, t) &= -\gamma_1 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ w_t^h(\eta, t) - D_2 \Delta w^h(\eta, t) + k_2 w^h(\eta, t) &= -\gamma_2 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu z^h(s, t) + b(s, t, z^h(s, t)) &= u^h(s, t), \quad (t, s) \in \Sigma, \\ D_2 \partial_\nu w^h(s, t) + k_3 w^h(s, t) &= 0, \quad (t, s) \in \Sigma, \\ z^h(\eta, 0) &= x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ w^h(\eta, 0) &= y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Таким образом, модель состоит из двух независимых подсистем. Первая подсистема представляет собой нелинейное параболическое уравнение с управлением $u^h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} z_t^h(\eta, t) - D_1 \Delta z^h(\eta, t) + k_1 z^h(\eta, t) &= -\gamma_1 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu z^h(s, t) + b(s, t, z^h(s, t)) &= u^h(s, t), \quad (t, s) \in \Sigma, \\ z^h(\eta, 0) &= x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вторая подсистема также описывается параболическим уравнением. Но уже линейным, к тому же не содержащим управления

$$\begin{aligned} w_t^h(\eta, t) - D_2 \Delta w^h(\eta, t) + k_2 w^h(\eta, t) &= -\gamma_2 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_2 \partial_\nu w^h(s, t) + k_3 w^h(s, t) &= 0, \quad (t, s) \in \Sigma, \\ w^h(\eta, 0) &= y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим, что вторая подсистема на выбор управления $u^h(\cdot)$ не влияет. Поэтому при решении задачи ее можно опустить, взяв в качестве модели вместо системы (2.1) подсистему (2.2). Подсистема (2.3) потребуется при доказательстве приведенной ниже теоремы 1. Существование и единственность решений $z^h(\cdot) \in W(T) \cap C(\bar{Q})$ и $w^h(\cdot) \in W(T) \cap C(\bar{Q})$ приведенных выше подсистем следует, например, из [3, теорема 5.5, с. 268].

Управление $u^h(\cdot)$ в модели (2.1) (подсистеме (2.2)) зададим по формуле

$$u^h(s, t) = u^{h,\alpha}(s, t) = 1/2\alpha^{-1}(\xi_1^h(s, t) - z^h(s, t)) \quad \text{при п.в.} \quad (s, t) \in \Sigma, \tag{2.4}$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – вспомогательный параметр.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $q \in (0, 1)$ – некоторая постоянная. Пусть управление $u^h(\cdot)$ находится по формуле (7). Тогда справедливы неравенства

$$\varepsilon(t) \leq v_1(h; q), \quad t \in T, \tag{2.5}$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 + v_2(h; q). \tag{2.6}$$

Здесь

$$v_1(h; q) = d^{(1)}(h + \alpha + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2}), \quad v_2(h; q) = d^{(2)}(h^q + h\alpha^{-1} + h^2 \alpha^{-2} + h^{2-q} \alpha^{-3}),$$

$$\varepsilon(t) = 1/2|\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + 1/2|v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega \{D_1 |\nabla \mu^h(\eta, \tau)|^2 + D_2 |\nabla v^h(\eta, \tau)|^2\} d\eta d\tau + k_3 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (v^h(s, \tau))^2 ds d\tau,$$

$\mu^h(t) = z^h(t) - x(t)$, $v^h(t) = w^h(t) - y(t)$, $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ и $\{z^h(\cdot), w^h(\cdot)\}$ – решения систем (1) и (4) соответственно, $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ – положительные постоянные, не зависящие от $u(\cdot)$, $u^h(\cdot)$, $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $z^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$.

Доказательство. Учитывая правило определения функций $\mu^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$, заключаем, что справедливы равенства

$$\mu^h(\cdot, 0) = 0, \quad v^h(\cdot, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta} \langle \mu_t^h(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^{\vartheta} \int_\Omega \{b(s, t, z^h(s, t)) - b(s, t, x(s, t))\} \varphi(s, t) ds dt + \int_0^{\vartheta} \int_\Omega (D_1 \nabla \mu^h(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + \\ + k_1 \mu^h(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_1 \{\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)\} \varphi(\eta, t) d\eta dt = \int_0^{\vartheta} \int_{\partial\Omega} \{u^h(s, t) - u(s, t)\} \varphi(s, t) ds dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

и

$$\int_0^\vartheta \langle v_t^h(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^\vartheta \int_{\partial\Omega} k_3 v^h(s, t) \varphi(s, t) ds dt + \iint_{\partial\Omega} (D_2 \nabla v^h(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + k_2 v^h(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_2 \{\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)\} \varphi(\eta, t)) d\eta dt = 0. \tag{2.8}$$

Равенства (2.7) и (2.8) справедливы при любых $\phi(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$. Положив в (2.7)

$$\phi(\eta, t) = \begin{cases} \mu^h(\eta, t), & \eta \in \Omega, t \in [0, r], \\ 0, & \eta \in \Omega, t \in (r, \vartheta], \end{cases}$$

а в (2.8)

$$\phi(\eta, t) = \begin{cases} v^h(\eta, t), & \eta \in \Omega, t \in [0, r], \\ 0, & \eta \in \Omega, t \in (r, \vartheta], \end{cases}$$

и сложив полученные выражения, будем иметь

$$\int_0^r (d\varepsilon(t)/dt + I_{1t} + I_{2t}) dt \leq \int_0^r \left(\sum_{j=3}^5 I_{jt}^h \right) dt \quad \forall r \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} I_{1t}^h &= \int_{\partial\Omega} (b(s, t, z^h(t, s)) - b(s, t, x(t, s)))(z^h(s, t) - x(s, t)) ds, \\ I_{2t}^h &= k_1 |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + k_2 |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \\ I_{3t}^h &= \int_{\partial\Omega} \{u^h(s, t) - u(s, t)\} (z^h(s, t) - x(s, t)) ds, \\ I_{4t}^h &= \gamma_1 \int_{\Omega} |\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |\mu^h(\eta, t)| d\eta, \\ I_{5t}^h &= \gamma_2 \int_{\Omega} |\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |v^h(\eta, t)| d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая монотонность функции $b(\cdot)$ (см. условие 1), заключаем, что справедливо неравенство

$$I_{1t}^h \geq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \tag{2.10}$$

В свою очередь, в силу неравенств (1.2) можно указать такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, не зависящие от $h \in (0, 1)$, что при п.в. $t \in T$ справедливы оценки

$$I_{4t}^h \leq C_1 h \int_{\Omega} |\mu^h(\eta, t)| d\eta, \quad I_{5t}^h \leq C_2 h \int_{\Omega} |v^h(\eta, t)| d\eta. \tag{2.11}$$

Из (2.11) получаем в силу неравенства Гёльдера

$$I_{4t}^h \leq C_3 h |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_4 h + C_5 h |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \quad I_{5t}^h \leq C_6 h |v^h(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_7 h + C_8 h |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{2.12}$$

Кроме того, в виду (1.3) имеем

$$\begin{aligned} I_{3t}^h &\leq \pi_t(z, \xi, u, u^h) + \int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s, t) - x(s, t)| \{|u^h(s, t)| + |u(s, t)|\} ds \leq \pi_t(z, \xi, u, u^h) + \\ &+ \left(\int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s, t) - x(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |u^h(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_{\partial\Omega} |u(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \pi_t(z, \xi, u, u^h) + h \{ |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\pi_t(z, \xi, u, u^h) = \int_{\partial\Omega} (z^h(s, t) - \xi_1^h(s, t))(u^h(s, t) - u(s, t)) ds.$$

В силу (2.4) справедливо неравенство

$$\pi_t(z, \xi, u, u^h) + \alpha\{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 - |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2\} \leq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (2.14)$$

Из (2.9), учитывая (2.10), (2.12)–(2.14), получаем

$$\int_0^s (d\varepsilon(t)/dt + \alpha\{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 - |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2\}) dt \leq C_9 h + h \int_0^s (C_5 |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + C_8 |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + \{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\}) dt \quad \forall s \in T. \quad (2.15)$$

Обозначим

$$\gamma_\alpha(t) = \varepsilon(t) + \alpha \int_0^t |u^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 d\tau.$$

Тогда из (2.15) получим

$$d\gamma_\alpha(t)/dt \leq C_{10} h \{1 + |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\} + \alpha |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \quad (2.16)$$

при п.в. $t \in T$. Далее, имеем

$$|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \alpha^{-1} |\xi^h(t) - z^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Поэтому, каково бы ни было $q \in (0, 2)$, ввиду (1.3), при п.в. $t \in T$ имеет место неравенство

$$h |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \leq h^2 \alpha^{-1} + h \alpha^{-1} |\mu^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \leq h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^2 + h^q |\mu^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2. \quad (2.17)$$

Из (2.16), учитывая (2.17), получаем

$$\frac{d\gamma_\alpha(t)}{dt} \leq C_{11} \max\{h, h^q\} \gamma_\alpha(t) + C_{12} (h + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2} + h |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + \alpha |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2) \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (2.18)$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, отсюда получаем

$$\gamma_\alpha(t) \leq C_{13} \{h + \alpha + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2}\}, \quad t \in T. \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует неравенство (2.5). Установим справедливость неравенства (2.6). Если $q \in (0, 1)$, $h \in (0, 1)$, то из (2.18), учитывая (2.19), получаем

$$\alpha \int_0^t |u^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 d\tau \leq \alpha \int_0^t |u(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 d\tau + C_{15} (h + \alpha h^q + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2}).$$

Следовательно,

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 + C_{16} (h^q + h \alpha^{-1} + h^2 \alpha^{-2} + h^{2-q} \alpha^{-3}). \quad (2.20)$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие. Если $\alpha = h^\rho$, $q = 1 - \rho$, $\rho = \text{const} \in (0, 1/2)$, то справедливы неравенства

$$\varepsilon(t) \leq d^{(3)} h^\rho,$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 + d^{(4)} h^{1-2\rho}.$$

Теорема 3. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $h^{2-q} \alpha^{-3}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где $q = \text{const} \in (0, 1)$. Тогда имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в } L_2 = L_2(T; L_2(\partial\Omega)) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Доказательство. Покажем, что, каковы бы ни были последовательности чисел $h_j \rightarrow 0+$ при $j \rightarrow \infty$, а также последовательности функций $\xi^{h_j}(\cdot), \psi^{h_j}(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega)), \xi_1^{h_j}(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\partial\Omega))$ со свойствами (1.2), (1.3) (в (1.2) и (1.3) мы полагаем $h = h_j$), имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в } L_2 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определяются согласно (2.4), где полагается $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем, что найдется подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (для простоты обозначаем ее тем же символом, т.е. $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u_0(\cdot) \quad \text{слабо в } L_2 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \tag{2.21}$$

$$u_0(\cdot) \neq u(\cdot). \tag{2.22}$$

Пусть $q^{h_j}(t) = z^{h_j}(t) - z^0(t), p^{h_j}(t) = w^{h_j}(t) - w^0(t)$, где $\{z^{h_j}(\cdot), w^{h_j}(\cdot)\}$ – решение системы (2.1) при $h = h_j$, а $\{z^0(\cdot), w^0(\cdot)\}$ – решение системы

$$\begin{aligned} z_t^0(\eta, t) - D_1 \Delta z^0(\eta, t) + k_1 z^0(\eta, t) &= -\gamma_1 x(\eta, t) y(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ w_t^0(\eta, t) - D_2 \Delta w^0(\eta, t) + k_2 w^0(\eta, t) &= -\gamma_2 x(\eta, t) y(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu z^0(s, t) + b(s, t, z^0(s, t)) &= u_0(s, t), \quad (t, s) \in \Sigma, \\ D_2 \partial_\nu w^0(s, t) + k_3 w^0(s, t) &= 0, \quad (t, s) \in \Sigma, \\ z^0(\eta, 0) &= x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ w^0(\eta, 0) &= y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.23}$$

В (2.23) $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ означает решение системы (1.1). Аналогично (2.9), устанавливаем неравенство

$$\int_0^s (d\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t)/dt + \tilde{I}_{1t}^{h_j} + \tilde{I}_{2t}^{h_j}) dt \leq \int_0^s \left(\sum_{j=3}^5 \tilde{I}_{jt}^{h_j} \right) dt, \quad s \in T, \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) &= 1/2 |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + 1/2 |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \{D_1 |\nabla q^{h_j}(\eta, \tau)|^2 + D_2 |\nabla p^{h_j}(\eta, \tau)|^2\} d\eta d\tau + k_3 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (p^{h_j}(s, \tau))^2 ds d\tau, \quad t \in T, \\ \tilde{I}_{1t}^{h_j} &= \int_{\partial\Omega} (b(s, t, z^{h_j}(t, s)) - b(s, t, z^0(t, s)))(z^{h_j}(s, t) - z^0(s, t)) ds, \\ \tilde{I}_{2t}^{h_j} &= k_1 |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + k_2 |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \\ \tilde{I}_{3t}^{h_j} &= \int_{\partial\Omega} \{u^{h_j}(s, t) - u_0(s, t)\}(z^{h_j}(s, t) - z^0(s, t)) ds, \\ \tilde{I}_{4t}^{h_j} &= \gamma_1 \int_\Omega |\xi^{h_j}(\eta, t) \psi^{h_j}(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |q^{h_j}(\eta, t)| d\eta, \\ \tilde{I}_{5t}^{h_j} &= \gamma_2 \int_\Omega |\xi^{h_j}(\eta, t) \psi^{h_j}(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |p^{h_j}(\eta, t)| d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая монотонность функции $b(\cdot)$ (см. условие 1), заключаем, что верно неравенство

$$\tilde{I}_{1t}^{h_j} \geq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \tag{2.25}$$

В свою очередь, в силу неравенств (1.2) можно указать такие числа $C_1^* > 0$ и $C_2^* > 0$, не зависящие от $h \in (0, 1)$, что при п.в. $t \in T$ справедливы оценки

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} \leq C_1^* h_j \int_{\Omega} |q^{h_j}(\eta, t)| d\eta, \quad \tilde{I}_{5t}^{h_j} \leq C_2^* h_j \int_{\Omega} |p^{h_j}(\eta, t)| d\eta. \quad (2.26)$$

Из (2.26) получаем, воспользовавшись неравенством Гёльдера,

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} \leq C_3^* h_j |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_4^* h_j + C_5^* h_j |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \tilde{I}_{5t}^{h_j} \leq C_6^* h_j |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_7^* h_j + C_8^* h_j |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.27)$$

Рассмотрим $\tilde{I}_3^{h_j}(t)$. Имеем

$$\tilde{I}_3^{h_j}(t) = \int_{\partial\Omega} (z^{h_j}(s, t) - z(s, t))(u^{h_j}(s, t) - u_0(s, t)) ds + \int_{\partial\Omega} (z(s, t) - z^0(s, t))(u^{h_j}(s, t) - u_0(s, t)) ds.$$

Тогда

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t \tilde{I}_3^{h_j}(\tau) d\tau \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Этот факт вытекает из теоремы 2 и слабой сходимости последовательности функций $u^{h_j}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ (см. (2.21)). В таком случае из (2.24)–(2.28) получаем

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Учитывая (2.29), а также теорему 2, устанавливаем справедливость равенств

$$\sup_{t \in T} |z^0(t) - z(t)|_H = 0, \quad \sup_{t \in T} |y^0(t) - y(t)|_H = 0.$$

Значит,

$$y^0(\cdot) = y(\cdot), \quad z^0(\cdot) = z(\cdot).$$

Поэтому

$$u_0(\cdot) = u(\cdot).$$

Последнее противоречит (2.21), (2.22). Следовательно,

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{слабо в } L_2 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Ввиду известного свойства слабого предела, из (2.30) вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \geq |u(\cdot)|_{L_2}. \quad (2.31)$$

Кроме того, в силу (2.6) имеет место оценка

$$|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2}^2 + v_2(h; q).$$

В таком случае

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leq |u(\cdot)|_{L_2}. \quad (2.32)$$

Значит (см. (2.31), (2.32)),

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leq |u(\cdot)|_{L_2} \leq \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}.$$

Отсюда следует сходимость

$$|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \rightarrow |u(\cdot)|_{L_2} \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Учитывая (2.30) и (2.33), в силу теоремы Ефимова–Стечкина заключаем

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в } L_2 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

Теорема 3 доказана.

3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

При некоторых дополнительных условиях можно указать оценку скорости сходимости алгоритма (см. ниже теорему 4).

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 (см. [11], с. 47). Пусть $V(\cdot) \in L_\infty(T_*; V^*)$ и $\tilde{v}(\cdot) \in W(T_*; V)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t V(\tau) d\tau \right|_{V^*} \leq \varepsilon_*, \quad |\tilde{v}(t)|_V \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда для всех $t \in T_*$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^t \langle V(\tau), \tilde{v}(\tau) \rangle_V d\tau \right| \leq \varepsilon_*(K + \text{var}(T_*; \tilde{v}(\cdot))).$$

Здесь V банахово пространство с нормой $|\cdot|_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – двойственность между V и V^* . Символ $\text{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_* , а символ $W(T_*; V)$ – множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow H_1$ ограниченной вариации.

Теорема 4 Пусть функция $z \rightarrow b(s, t, z)$ липшицева и выполнены условия теоремы 3. Пусть также $u(s, t) = u_*(s, t)$ при п.в. $(s, t) \in \Sigma$, где $u_*(\cdot) \in W(T; H^1(\Omega))$. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$\|u(\cdot) - u^h(\cdot)\|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq c^{(0)} \{v_1^{1/2}(h; q) + v_2(h; q)\},$$

где $c^{(0)}$ – некоторая постоянная, не зависящая от $h \in (0, 1)$.

Доказательство. Введем оператор $B : L_2(\partial\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$ по формуле

$$\langle Bv, \phi \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} v(s)\phi(s) ds \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Пусть

$$\phi_t(\tau) = \begin{cases} \phi, & \tau \in [0, t], \\ 0, & \tau \in (t, \vartheta], \end{cases}$$

где $\phi \in H^1(\Omega)$. Вычтем (2.2) из соответствующих соотношений в (1.1) и умножим полученную разность на $\phi_t(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$. После интегрирования получим

$$\left\langle \int_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau, \phi \right\rangle_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{j=5} |J_{jt}^h| \tag{3.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_{1t}^h(\phi) &= \langle \mu_t^h(t), \phi \rangle_{H^1(\Omega)}, \\ J_{2t}^h(\phi) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} (b(s, \tau, z^h(s, \tau)) - b(s, \tau, z(s, \tau))) \phi(s) ds, \\ J_{3t}^h(\phi) &= D_1 \int_0^t \int_Q \nabla \mu^h(\eta, \tau) \nabla \phi(\eta, \tau) d\eta d\tau, \\ J_{4t}^h(\phi) &= \gamma_1 \int_0^t \int_\Omega (\xi^h(\eta, \tau) \psi^h(\eta, \tau) - x(\eta, \tau) y(\eta, \tau)) \phi(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

$$J_{5r}^h(\varphi) = k_1 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \mu^h(\eta, \tau) \varphi(\eta) d\eta d\tau.$$

Далее, имеем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{1r}^h(\varphi)| \leq c_1 |\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*} \leq c_2 |\mu^h(t)|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Учитывая липшицевость функции $b(\cdot)$, получаем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{2r}^h(\varphi)| \leq c_3 \sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)} |\varphi|_{L_2(\partial\Omega)} d\tau \leq c_4 \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \quad (3.3)$$

Кроме того,

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{3r}^h(\varphi)| \leq c_5 \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \quad (3.4)$$

В свою очередь, в силу (1.2)

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{4r}^h(\varphi)| \leq c_6 h. \quad (3.5)$$

Далее, имеем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{5r}^h(\varphi)| \leq c_7 \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \quad (3.6)$$

Объединив (3.2)–(3.6), получим из (3.1)

$$\left| \int_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau \right|_{(H^1(\Omega))^*} \leq c_8 \left(h + \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau \right). \quad (3.7)$$

Из (3.7) в силу теоремы 2 (см. неравенство (2.5)) вытекает оценка

$$\left| \int_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau \right|_{(H^1(\Omega))^*} \leq c_9 v_1^{1/2}(h; q).$$

Отсюда, учитывая правило определения оператора B , а также лемму 2, получаем

$$\left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} (u^h(s, \tau) - u(s, \tau)) u(s, \tau) d\tau \right| \leq c_{10} v_1^{1/2}(h; q). \quad (3.8)$$

Далее, воспользовавшись (2.6), (3.8), устанавливаем неравенство

$$\|u^h(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2(\Gamma; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq 2 \left| \int_0^{\vartheta} \int_{\partial\Omega} (u(s, \tau) - u : p(s, \tau)) u(s, \tau) ds d\tau \right| + v_2(h; q) \leq c_{11} \{v_1^{1/2}(h; q) + v_2(h; q)\}.$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barbu V.* Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces. N.Y.: Springer, 2010.
2. *Barthel W., John C., Tröltzsch F.* Optimal boundary control of a system of reaction diffusion equations // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 2010. V. 90. P. 966–982.
3. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. AMS, 2010.
4. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1985.
6. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.

7. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. *Kabanikhin S.I.* Inverse and ill-posed problems. Berlin: De Gruyter, 2011.
9. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
10. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.
11. *Maksimov V.I.* Dynamical inverse problems of distributed systems. VSP, Netherlands, 2002.
12. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
13. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
14. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
15. *Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I.* Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9. № 2. P. 149–162.
16. *Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 14–26.
17. *Максимов В.И.* Моделирование неизвестных возмущений в нелинейных параболических системах – вариационных неравенствах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 157–162.
18. *Maksimov V.I., Pandolfi L.* Dynamical reconstruction of inputs for contraction semigroup systems: boundary input case // J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. № 2. P. 401–420.
19. *Maksimov V.* On reconstruction of boundary controls in a parabolic equations // Adv. Differ. Equ. 2009. V. 14. № 11–12. P. 1193–1211.