ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 896–919

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

АПОСТЕРИОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ МЕР ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2023 г.

С. И. Репин[1,2,*]

[1] 191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанка, 27,
СПб отд. Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Россия
[2] 195251 Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29,
СПб Политехнический университет Петра Великого, Россия
**e-mail: repin@pdmi.ras.ru*

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.
Переработанный вариант 01.02.2023 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Получены функциональные тождества, которые выполняются для отклонений от точных решений краевых и начально-краевых задач с монотонными операторами. Тождества выполняются для любых функций из соответствующего функционального класса, который содержит точное решение задачи. Левая часть тождества представляет собой сумму мер отклонений приближенного решения от точного. Показано, что именно такие меры являются естественными характеристиками точности приближенных решений. В некоторых случаях правая часть тождества содержит только известные данные задачи и функции, характеризующие приближенное решение. Такое тождество можно прямо использовать для контроля точности. В других случаях правая часть включает неизвестные функции. Однако их можно исключить и получить полностью вычисляемые двусторонние оценки. При этом необходимо использовать специальные функциональные неравенства, связывающие меры отклонения со свойствами рассматриваемого монотонного оператора. В качестве примера такие оценки и точные значения соответствующих констант получены для класса задач с оператором α-Лапласиана. Показано, что тождества и вытекающие из них оценки позволяют оценивать погрешность любых аппроксимаций независимо от способа их получения. Кроме того, они позволяют сравнивать точные решения задач с различными данными, что дает возможность оценивать ошибки математических моделей, например тех, что возникают при упрощении коэффициентов дифференциального уравнения. В первой части статьи теория и приложения касаются стационарных моделей, а затем основные результаты переносятся на эволюционные модели с монотонными пространственными операторами. Библ. 30. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнения эллиптического и параболического типа, монотонные операторы, оценки отклонения от точного решения, апостериорные тождества и оценки.

DOI: 10.31857/S0044466923060170, **EDN:** TUUBIG

1. ВВЕДЕНИЕ

Численный анализ моделей математической физики фактически сводится к двум основным вопросам. Во-первых, надо предложить и обосновать метод построения последовательности приближений, которая в пределе сходится к точному решению. На практике эта последовательность не может иметь бесконечного числа членов и должна остановиться на некотором последнем приближении. При этом неизбежно возникает второй вопрос: насколько близко это приближение к точному решению? Он особенно актуален при решении нелинейных дифференциальных уравнений, когда успешное использование численных процедур может быть обусловлено рядом дополнительных (и часто трудно проверяемых) условий. К сожалению, инженерные и научные вычисления, как правило, не уделяют должного внимания проверке достоверности полученных результатов. Между тем имеется множество примеров, когда использование той или иной численной процедуры приводит к неверным результатам даже в том случае, когда соответствующий алгоритм и компьютерный код формально написаны верно. Такие примеры известны как для самых простых вычислительных задач, так и для более сложных, связанных с аппроксимацией функций (см., например, [1–3]). Тем более они возникают при решении дифференциальных уравнений, где возможны явления численной неустойчивости, локинга (locking), потери точности из-за большой обусловленности или нарушении сходимости итерационных схем и т.п.

Чисто эвристический подход к математическому эксперименту был долгое время обусловлен отсутствием теории и практических технологий, которые позволяли бы надежно контролировать качество приближенных решений. Априорные асимптотические оценки погрешности для уравнений в частных производных активно изучаются с начала 60-х годов прошлого века (систематическое изложение соответствующей теории можно найти в хорошо известных монографиях [4], [5]). Такие оценки оперируют с бесконечными последовательностями и важны тем, что указывают теоретическую скорость сходимости для аппроксимаций определенного типа. Эти оценки предполагают, что при решении соответствующей конечномерной задачи все вычисления выполняются абсолютно точно при любой ее размерности, что в реальных условиях редко, когда можно гарантировать. Также априорные оценки требуют выполнения весьма жестких условий (повышенная дифференцируемость точного решения, регулярность вычислительных сеток, галеркинская ортогональность приближенного решения), которые часто невозможно гарантировать. Поэтому, за исключением весьма специальных типов задач, эти оценки мало чем могут помочь в решении вопроса о точности конкретного приближенного решения.

Возникшие в начале 80-х годов прошлого века методы апостериорного контроля были в основном нацелены на так называемые индикаторы ошибок (error indicators/estimators), которые должны подсказывать правильные способы адаптации вычислительных сеток в рамках общей концепции адаптивного подхода к решению краевых задач. Этим вопросам посвящено огромное количество публикаций (см., например, [6–8] и приведенные там ссылки). Однако, как правило, индикаторы не дают гарантированных оценок, а только указывают (с той или иной степенью достоверности), где находятся области с максимальной величиной погрешности. Кроме того, их использование также связано с рядом условий и ограничений, которые часто трудно выполнить на практике, особенно, если речь идет о нелинейных уравнениях в частных производных. Нарушение этих условий (например, галеркинской ортогональности) может приводить к неверным выводам.

Верификация результатов численного моделирования должна проводиться с помощью универсальных методов, которые работоспособны независимо от того, каким образом было получено приближенное решение. Получение оценок такого рода является принципиально важным вопросом наряду с доказательством корректности задачи и установлением свойств ее решения. При этом надо, во-первых, установить правильный критерий (меру) $\mathbf{m}(v,u)$ близости функции v к решению задачи u и, во-вторых, уметь оценить его величину для любой заданной функции v из соответствующего функционального класса V. Мера $\mathbf{m}$ генерирует систему открытых окрестностей точного решения

$$\mathbb{O}_\epsilon(u) := \{w \in V \,|\, \mathbf{m}(w,u) < \epsilon\}, \quad \epsilon \to 0, \tag{1.1}$$

а приближение считается тем точнее, чем в меньшую окрестность $\mathbb{O}_\epsilon$ оно попадает. Для моделей, использующих линейные дифференциальные уравнения, выбор меры почти очевиден. Как правило, расстояние измеряется относительно нормы соответствующего (энергетического) функционального пространства V, содержащего u, т.е. $\mathbf{m}(v,u) := \|v-u\|_V$. Тогда проблема сводится к получению явно вычисляемых двусторонних оценок $\|v-u\|_V$, которые были бы применимы для любого $v \in V$. Этой проблеме посвящена монография [9], где рассматриваются методы получения и свойства так называемых *функциональных апостериорных оценок*. Имея такие оценки, можно оценить близость любой функции к точному решению и понять, насколько удачными оказались результаты численного эксперимента. В отличие от апостериорных оценок других типов, эти оценки устанавливаются с помощью чисто функциональных методов и не используют какие-либо специальные свойства аппроксимаций или численного метода. Их вычисление может быть в каких-то случаях простым, а в других более сложным, но если такие оценки получены, то рассматриваемую задачу можно считать *контролируемой* в вычислительном плане, так как близость любой функции к решению может быть надежно проверена.

Контролировать приближенные решения нелинейных задач намного сложнее. Здесь вопрос о том, в какой норме, метрике (или локальной топологии $\mathbb{O}_\epsilon$) следует изучать близость функции к точному решению, требует специального рассмотрения для каждого класса задач. Ряд результатов в этом направлении был ранее получен в [10], [11]. В виде систематического подхода они изложены в монографии [12]. В этих работах тождества и соответствующие оценки были получены для задач вида

$$\inf_{v\in V} J(v), \quad J(v) = G(\Lambda v) + F(v) \tag{1.2}$$

с помощью методов вариационного исчисления. Здесь $G : Y \to \mathbb{R}$ и $F : V \to \mathbb{R}$ – выпуклые и слабо полунепрерывные снизу функционалы, $\Lambda : V \to Y$ – ограниченный линейный оператор, а V и Y – рефлексивные банаховы пространства. Кратко эти результаты обсуждаются в разд. 2.

В настоящей статье предлагается метод, который охватывает существенно более широкий класс задач, а именно, краевые и начально-краевые задачи с монотонными операторами. Как и ряд предыдущих работ (см., например, [10], [13]), статья, в основном, посвящена функциональным тождествам, которые контролируют отклонение произвольной функции от точного решения краевой или начально-краевой задачи. Эти тождества отражают естественные свойства последовательностей приближений (например, минимизирующих последовательностей) и указывают на правильные меры, которые следует использовать для оценки точности аппроксимаций. В [13] тождества для отклонений от точного решения и их следствия были подробно изучены для случая линейного эллиптического оператора дивергентного типа $\Lambda^*A\Lambda$, где Λ^* – оператор сопряженный к Λ, а A – ограниченный оператор. Ниже дается ответ на вопрос о том, в каком смысле эти результаты переносятся на нелинейные эллиптические и параболические уравнения с монотонными операторами.

В разд. 3 рассматривается абстрактная задача для монотонного эллиптического оператора. Здесь устанавливается основное тождество для нелинейных мер отклонения от точного решения. Его доказательство не использует теорию двойственности вариационного исчисления, а само тождество отличается от доказанного ранее (2.16) и может рассматриваться как его обобщение. В самой общей форме основной результат сформулирован в теореме 2.

Анализ нелинейных мер, которые образуют левую часть (3.8), проводится в разд. 4. Показана их связь с другими нелинейными мерами, использующими свойства монотонных операторов и равномерно выпуклых функционалов.

В разд. 5 изучаются следствия тождества (3.8), которые позволяют получать оценки ошибок аппроксимации и сравнивать решения краевых задач с различными данными. Показано, что ранее полученные тождества являются частными случаями (3.8). Например, это относится к тождеству для линейных эллиптических уравнений, которое исследовалось в [13]. При специальном выборе одной из функций тождество (3.8) переходит в (3.14), правая часть которого может быть вычислена. В других случаях оно содержит слагаемое, которое необходимо оценить так, чтобы исключить неизвестную функцию $e = v - u$. Это можно сделать различными способами. В статье рассматривается наиболее общий метод. Он приводит к оценкам (5.7) и (5.8), правые части которых содержат только известные функции.

Раздел 6 посвящен алгебраическим неравенствам для степенных функций, которые в дальнейшем используются для получения оценок.

В качестве примера нелинейной краевой задачи в разд. 7 рассматривается уравнение реакции–диффузии для α-лапласиана (7.1). Для нее основное тождество имеет вид (7.5), а (3.14) переходит в тождество (7.7). Далее показано, как с помощью метода, изложенного в разд. 5, можно получить полностью вычисляемые оценки для мер отклонений от точного решения.

В заключительном разд. 8 обсуждаются обобщения предлагаемого метода на эволюционные задачи с монотонными операторами. Основной результат сформулирован в теореме 3, которая устанавливает тождество (8.5). По структуре это тождество очень похоже на (3.8), но имеет дополнительные члены, связанные с производными по времени.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В вариационном исчислении задача (1.2) изучается вместе с так называемой двойственной задачей

$$\sup_{y^*\in Y^*} I^*(y^*), \quad I^*(y^*) = -G^*(y^*) - F^*(-\Lambda^* y^*). \tag{2.1}$$

Здесь $G^* : Y^* \to \mathbb{R}$ и $F^* : V^* \to \mathbb{R}$ являются функционалами, сопряженными к G и F в смысле Юнга–Фенхеля, т.е.

$$G^*(y^*) := \sup_{y\in Y}\{((y^*,y)) - G(y)\} \quad \text{и} \quad F^*(y^*) := \sup_{v\in V}\{\langle v^*,v\rangle - F(v)\}, \tag{2.2}$$

где Y^* и V^* – пространства, двойственные к Y и V соответственно, $((y^*,y))$ обозначает спаривание элементов $y^* \in Y^*$ и $y \in Y$, а $\langle v^*,v\rangle$ – спаривание $v^* \in V^*$ и $v \in V$. Определим оператор $\Lambda^* : Y^* \to V^*$, сопряженный к Λ, с помощью равенства

$$((y^*,\Lambda v)) = \langle \Lambda^* y^*, v\rangle \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Y^*. \tag{2.3}$$

Для того чтобы гарантировать корректность вариационной задачи, достаточно наложить на функционал G условие коэрцитивности

$$G(y) \to +\infty, \quad \text{если} \quad \|y\|_Y \to +\infty, \tag{2.4}$$

и выполнение неравенства

$$\|w\|_{\mathcal{V}} \le \mathrm{C_F} \|\Lambda w\|_Y \quad \forall w \in V, \tag{2.5}$$

где $\mathrm{C_F} > 0$ не зависит от w. Его можно рассматривать как обобщение известного неравенства Фридрихса для оператора градиента, где в качестве V берется пространство Соболева $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Известно, что $J(v) \ge I^*(y^*)$ для любых $v \in V$ и $y^* \in Y^*$. Одним из наиболее важных утверждений теории двойственности является равенство

$$J(u) = I^*(p^*), \tag{2.6}$$

которое выполняется, если решения задач (1.2) и (2.1) существуют, и это функции u и p^* соответственно (см., например, [14]).

Из (2.6) вытекают условия, которым должны удовлетворять u и p^*. Это равенство означает, что

$$G(\Lambda u) + F(u) + G^*(p^*) + F^*(-\Lambda^* p^*) = 0.$$

Поскольку $((p^*,\Lambda u)) - \langle \Lambda^* p^*, u\rangle = 0$, мы можем переписать его в виде

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, p^*) + \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0, \tag{2.7}$$

где $\mathbb{D}_G$ и $\mathbb{D}_F$ – это так называемые *составные* функционалы (compound functionals), которые определяются соотношениями

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) := G(\Lambda v) + G^*(y^*) - ((y^*,\Lambda v)) \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* y^*) := F(v) + F^*(-\Lambda^* y^*) + \langle \Lambda^* y^*, v\rangle.$$

Вследствие определений сопряженных функционалов (2.2), составные функционалы всегда неотрицательны. Поэтому равенство (2.7) означает, что на решениях u и p^* эти функционалы обращаются в нуль, т.е.

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, p^*) = \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0. \tag{2.8}$$

В свою очередь, (2.8) означает, что

$$p^* \in \partial G(\Lambda u), \quad \Lambda u \in \partial G^*(p^*), \tag{2.9}$$

$$-\Lambda^* p^* \in \partial F(u), \quad u \in \partial F^*(-\Lambda^* p^*). \tag{2.10}$$

Здесь $\partial G(\Lambda u)$ обозначает субдифференциал G для Λu. Если функционал G дифференцируем по Гато, то субдифференциальное включение заменяется на равенство, например, первое из соотношений (2.9) записывается в виде $p^* = G'(\Lambda u)$, а второе – в виде $\Lambda u = G^{*\prime}(p^*)$, где G', $G^{*\prime}$ – это производные Гато функционалов G и G^* соответственно. В дальнейшем мы будем считать эти функционалы дифференцируемыми. Соотношения (2.9) и (2.10) устанавливают связь между функциями u и p^* так, что $p^* = p^*(\Lambda u)$ и $u = u(-\Lambda^* p^*)$.

Установим некоторые свойства составных функционалов.

Лемма 1. *Пусть выпуклые функционалы F и $\widehat{F}$ связаны соотношением,*

$$\widehat{F}(v) = F(v) + \langle g, v\rangle \quad \forall v \in V,$$

где $g \in V^*$. Тогда

$$\mathbb{D}_{\widehat{F}}(v, v^*) = \mathbb{D}_F(v, v^* - g) \quad \forall v \in V, \quad v^* \in V^*. \tag{2.11}$$

Доказательство. Согласно определению

$$\widehat{F}(v^*) = \sup_{v\in V}\{\langle (v^* - g), v\rangle - F(v)\} = F^*(v^* - g).$$

Поэтому

$$\mathbb{D}_{\widehat{F}}(v, v^*) = \widehat{F}(v) + \widehat{F}^*(v^*) - \langle v^*, v\rangle = F(v) + F^*(v^* - g) - \langle v^* - g, v\rangle = \mathbb{D}_F(v, v^* - g).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если для $\eta \in Y$ и $\eta^* \in Y^*$ выполнено равенство $\mathbb{D}_F(\eta, \eta^*) = 0$, то*

$$\mathbb{D}_G(y, y^*) = \mathbb{D}_G(y, \eta^*) + \mathbb{D}_G(\eta, y^*) + ((\eta^* - y^*, y - \eta)) \quad \forall y \in Y, \quad y^* \in Y^*. \tag{2.12}$$

Доказательство. С учетом условия $\mathbb{D}_F(\eta, \eta^*) = 0$ получаем

$$\mathbb{D}_G(y, y^*) = G(\eta) + G^*(y^*) - ((y^*, \eta)) + G(y) + G^*(\eta^*) - ((\eta^*, y)) +$$
$$+ ((y^*, \eta)) + ((\eta^*, y)) - ((\eta, \eta^*)) - ((y, y^*)) = \mathbb{D}_G(\eta, y^*) + \mathbb{D}_G(y, \eta^*) + ((\eta^* - y^*, y - \eta)).$$

Лемма 2 доказана.

С помощью функционалов $\mathbb{D}_G$ и $\mathbb{D}_F$ определим величины

$$\mathbf{m}(v, u) := \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* p^*)$$

и

$$\mathbf{m}^*(y^*, p^*) := \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* y^*).$$

Следующая лемма показывает, что $\mathbf{m}(v, u)$ и $\mathbf{m}^*(y^*, p^*)$ являются естественными мерами отклонения v от u и y^* от p^*.

Лемма 3. *Мера $\mathbf{m}(v, u) = 0$ тогда и только тогда, когда v является минимайзером вариационной задачи* (1.2)*, а $\mathbf{m}^*(y^*, p^*) = 0$ только в том случае, когда y^* является максимайзером* (2.1).

Доказательство. Нетрудно видеть (см. (2.8)), что

$$F(v) + F^*(-\Lambda^* p^*) + \langle \Lambda^* p^*, v\rangle = F(v) - F(u) - \langle \Lambda^* p^*, v - u\rangle,$$
$$G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) = G(\Lambda v) - G(\Lambda u) + ((p^*, \Lambda(v - u))).$$

Складывая эти равенства и учитывая (2.3), получаем

$$\mathbf{m}(v, u) = G(\nabla v) + F(v) - G(\nabla u) - F(u) = J(v) - J(u). \tag{2.13}$$

Следовательно, условие $\mathbf{m}(v, u) = 0$ означает, что v является минимайзером.

Аналогично, равенства

$$G(\Lambda u) + G^*(y^*) - ((y^*, \Lambda u)) = G^*(y^*) - G^*(p^*) + ((p^* - y^*, \Lambda u)),$$
$$F(u) + F^*(-\Lambda^* y^*) + \langle \Lambda^* y^*, u\rangle = F^*(-\Lambda^* y^*) - F^*(-\Lambda^* p^*) + \langle \Lambda^*(y^* - p^*), u\rangle$$

означают, что

$$\mathbf{m}^*(y^*, p^*) = G^*(y^*) + F^*(-\Lambda^* y^*) - G^*(p^*) - F^*(-\Lambda^* p^*) = I^*(p^*) - I^*(y^*). \tag{2.14}$$

Таким образом, если $\mathbf{m}^*(y^*, p^*) = 0$, то y^* является максимайзером в двойственной задаче (2.1). Лемма 3 доказана.

Вместе с доказательством леммы 3 мы получили равенства (2.13) и (2.14), которые показывают, что $\mathbf{m}(v, u)$ и $\mathbf{m}^*(y^*, p^*)$ являются естественными характеристиками точности приближенного решения. В соответствии с (1.1) мера $\mathbf{m}(v, u)$ задает систему открытых выпуклых окрестностей $\mathbb{O}_\epsilon$ для минимайзера u. Любой успешный численный метод предполагает построение минимизирующей последовательности $\{u_i\} \in V$ такой, что $J(u_i) \to J(u)$, если $i \to +\infty$. Равенство (2.13) показывает, что минимизирующая последовательность сходится к u именно в топологии $\mathcal{O}_\epsilon$. Более того, (2.13) позволяет в самой общей форме ответить на вопрос о сходимости галеркинских решений. Этот вопрос является принципиальным и привлекал внимание с середины прошлого века, когда началось систематическое исследование численных методов для уравнений в частных производных (здесь надо отметить работы С.Г. Михлина, см. [15] и указанную там литературу). Приведенная ниже лемма показывает, какой тип сходимости галеркинских аппроксимаций можно гарантировать для нелинейных задач (1.2), и какие условия для этого достаточны.

Напомним некоторые определения. Последовательность конечномерных подпространств $\{V_n\}$, $\dim V_n = n$, $V_n \subset V$, $V_n \subset V_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$, называется *предельно плотной* в V, если для любого малого $\epsilon > 0$ и любого $v \in V$ можно указать номер n_ϵ такой, что при $n > n_\epsilon$ V_n содержит элемент $v_{n,\epsilon}$ такой, что $\|v - v_{n,\epsilon}\|_V \leq \epsilon$. Функцию u_n будем называть *галеркинским решением*, если она минимизирует функционал на подпространстве V_n, т.е.

$$J(u_n) = \inf_{v \in V_n} J(v).$$

Лемма 4. *Пусть $J : V \to \mathbb{R}$ является выпуклым и непрерывным, а последовательность подпространств $\{V_n\}$ предельно плотна в V. Тогда соответствующие галеркинские решения сходятся к точному в топологии $\mathbb{O}_\epsilon$.*

Доказательство. В силу предельной плотности $\{V_n\}$, существует последовательность $\{w_n\}$ такая, что $w_n \in V_n$ и $w_n \to u$ в V. Поскольку функционал J непрерывен, то $J(w_n) \to J(u)$. Для галеркинского решения верно неравенство $J(u_n) \leq J(w_n)$, так что

$$\epsilon_n := J(u_n) - J(u) \to 0, \quad \text{если} \quad n \to +\infty.$$

Из (2.13) следует, что $\mathbf{m}(u_n, u) \to 0$. Поскольку $J(u_{n+1}) \leq J(u_n)$, то $\mathbb{O}_{\epsilon_n}$ содержит все члены последовательности, кроме конечного числа. Лемма 4 доказана.

Аналогичное утверждение для аппроксимаций y_n^* двойственной задачи справедливо относительно меры $\mathbf{m}^*$.

Заметим, что из (2.13) также следует, что для галеркинских аппроксимаций верно равенство

$$\mathbf{m}(u_n, u) = J(u_n) - J(u) \leq J(v_n) - J(v) = \mathbf{m}(v_n, u) \quad \forall v_n \in V_n.$$

Таким образом,

$$\mathbf{m}(u_n, u) \leq \inf_{v_n \in V_n} \mathbf{m}(v_n, u). \tag{2.15}$$

Если $J(v)$ индуцирован V — эллиптической билинейной формой, то (2.15) переходит в хорошо известную проекционную теорему (см., например, [5]).

Тождество для отклонений от точных решений вариационных устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 (см. [10]). *Для любых $v \in V$ и $y^* \in Y^*$ имеет место тождество*

$$\mathbf{m}(v, u) + \mathbf{m}^*(y^*, p^*) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* y^*). \tag{2.16}$$

Левая часть (2.16) представляет собой сумму мер, контролирующих отклонение v от u и y^* от p^* соответственно, а правая часть содержит только известные функции v и y^*. Тождество (2.16) и его следствия для контроля точности приближенных решений и анализа ошибок математических моделей исследованы в монографии [12].

3. ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Тождество (2.16) было установлено с помощью методов теории двойственности вариационного исчисления. В этом разделе излагается другой, более общий, метод получения тождеств такого рода, который не использует вариационные аргументы и может быть использован для широкого круга краевых и начально-краевых задач.

3.1. Класс задач

Рассмотрим следующую абстрактную нелинейную краевую задачу. Требуется найти функции $u \in V$, $p^* \in Y^*$ и $\sigma \in V^*$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{A}u = f, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}u := \Lambda^* p^*(u) + \sigma(u) \tag{3.1}$$

и соотношениям

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, p^*) := G(\Lambda u) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda u)) = 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{D}_R(u, \sigma) := R(u) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, u \rangle = 0. \tag{3.3}$$

Здесь $f \in V^*$, а выпуклые непрерывные функционалы $G : Y \to \mathbb{R}$ и $R : V \to \mathbb{R}$ задают связь между решением u и функциями p^* и σ. В дополнение к (2.5) и (2.4) мы предполагаем, что $G(y) \geq 0$ $R(v) \geq 0$, $G(y) = 0$, только если y совпадает с нулевым элементом пространства Y.

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$, где $p^*(u)$ и $\sigma(u)$ определяются равенствами (3.2) и (3.3), является монотонным.

Лемма 5. *Пусть для* $u_1, u_2 \in V$, $\sigma_1, \sigma_2 \in V^*$, *и* $p_1^*, p_2^* \in Y^*$ *выполнены условия*

$$\mathbb{D}_G(\nabla u_i, p_i^*) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_R(u_i, \sigma_i) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Тогда $\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0$.

Доказательство. Имеем

$$\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = ((p_1^* - p_2^*, \Lambda(u_1 - u_2))) + \langle \sigma_1 - \sigma_2, u_1 - u_2 \rangle. \tag{3.5}$$

С учетом (3.4) правую часть (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} G(\nabla u_1) + G^*(p_1^*) + G(\nabla u_2) + G^*(p_2^*) - ((p_2^*, \nabla u_1)) - ((p_1^*, \nabla u_2)) + \\ + R(u_1) + R^*(\sigma_1) + R(u_2) + R^*(\sigma_2) - \langle \sigma_2, u_1 \rangle - \langle \sigma_1, u_2 \rangle. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = \mathbb{D}_G(\nabla u_1, p_2^*) + \mathbb{D}_G(\nabla u_2, p_1^*) + \mathbb{D}_R(u_1, \sigma_2) + \mathbb{D}_R(u_2, \sigma_1) \geq 0.$$

Лемма 5 доказана.

Корректность задач с монотонными операторами основана на известной теореме Браудера–Минти (F. Browder, J. Minty), в которой утверждается, что ограниченный, монотонный, непрерывный и коэрцитивный оператор сюрективен. При выполнении условий, которые были ранее наложены на G и R, задача (3.1) корректна, а ее обобщенное решение удовлетворяет тождеству

$$((p^*(u), \Lambda w)) + \langle \sigma(u), w \rangle = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in V. \tag{3.6}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) &= G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) + R(v) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, v \rangle = \\ &= G(\Lambda v) + R(v) - G(\Lambda u) - R(u) - ((p^*, \Lambda(v - u))) - \langle \sigma, v - u \rangle = \\ &= G(\Lambda v) + R(v) - G(\Lambda u) - R(u) - \langle f, v - u \rangle = J(v) - J(u), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $J(v) := G(\Lambda v) + R(v) - \langle f, v \rangle$, мы заключаем, что функция u, удовлетворяющая (3.6), (3.2) и (3.3), является минимайзером функционала $J(v)$ на множестве V.

3.2. Основное тождество

Пусть имеются функция $v \in V$, а также $y^* \in Y^*$ и $\tau \in V^*$. Мы хотим оценить их близость к u, $p^*(u)$, и $\sigma(u)$ соответственно. Следующая теорема дает основу для такого анализа.

Теорема 2. *Для* $v \in V$, $y^* \in Y^*$, $\tau \in V^*$ *выполнятся тождество*

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \langle \mathbf{r}_f(y^*, \tau), e \rangle, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{r}_f(y^*, \tau) := -\Lambda^* y^* - \tau + f$, *а*

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) := \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau) + \mathbb{D}_R(v, \sigma).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) = G(\Lambda u) + G^*(y^*) - ((y^*, \Lambda u)) + G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) + \\ + ((y^*, \Lambda u)) + ((p^*, \Lambda v)) - ((p^*, \Lambda u)) - ((y^*, \Lambda v)) = \\ = \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + ((p^* - y^*, \Lambda(v - u))). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_R(v, \tau) = R(v) + R^*(\tau) - \langle \tau, v \rangle = R(u) + R^*(\tau) - \langle \tau, u \rangle + R(v) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, v \rangle + \\ + \langle \tau, u \rangle + \langle \sigma, v \rangle - \langle \sigma, u \rangle - \langle \tau, v \rangle = \mathbb{D}_R(u, \tau) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) + \langle \sigma - \tau, v - u \rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Суммируя (3.9) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) = \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) + \\ + ((p^* - y^*, \Lambda(v - u))) + \langle \sigma - \tau, v - u \rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Для оценки последнего интеграла в (3.11) мы используем равенство

$$((p^*, \Lambda e)) + \langle \sigma, e \rangle = \langle f, e \rangle,$$

которое следует из (3.6) и позволяет представить последние два интеграла в виде

$$((p^* - y^*, \Lambda e)) + \langle \sigma - \tau, e \rangle = \langle -\Lambda^* y^* - \tau + f, e \rangle = \langle \mathbf{r}_f(y^*, \tau), e \rangle. \tag{3.12}$$

Тождество (3.8) следует из (3.11) и (3.12). Теорема 2 доказана.

3.3. Модификации основного тождества

Положим в (3.8)

$$\tau = \tau_f := -\Lambda^* y^* + f. \tag{3.13}$$

Тогда это тождество приобретает вид

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau_f) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau_f). \tag{3.14}$$

Отметим, что правая часть (3.14) содержит только известные функции v, y^* и f. Поэтому его можно непосредственно использовать для оценки близости v к u и y^* к p^*.

Тождество (3.8) сформулировано в терминах пространств Y, Y^*, V и V^*. Нормы первых трех обычно задаются интегралами, которые для широкого класса функций (например, тригонометрических или кусочно-полиномиальных) могут быть вычислены точно. В других случаях можно использовать квадратурные формулы, точность которых контролируется известными методами. Однако норма пространства V^* определяется как супремум по бесконечному набору функций, что делает ее практическое вычисление трудно решаемой задачей. Поэтому желательно переписать (3.8) в таком виде, чтобы тождество оперировало только со слагаемыми интегрального типа. Естественно, что для этого потребуется ввести некоторые ограничения.

Далее мы считаем, что оператор $\mathcal{A}$ связан с краевой задачей в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) с липшицевой границей Γ, $V(\Omega)$ — это пространство функций, определенных в Ω, а $V_0 \subset V$ содержит функции, обращающиеся в нуль на Γ. Мы предполагаем, что $V \subset \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ интегрального типа, и вложение V в $\mathcal{V}$ компактно. Пространства V^* и $\mathcal{V}^*$ являются топологически двойственными к V_0 и $\mathcal{V}$ соответственно. Пространство $\mathcal{V}^*$ также наделено нормой интегрального типа и для пары $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^*$ соответствующий продукт выражается интегралом, т.е. $\langle v^*, v \rangle = \int_\Omega v^* v dx$ для $v^* \in \mathcal{V}^* \subset V^*$. В случае, если $\mathcal{V}$ является гильбертовым пространством, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^*$ можно идентифицировать, и тогда $V_0 \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow V^*$ представляет собой триплет Гельфанда. В примерах, связанных с краевыми задачами, функционалы G и R, как правило задаются интегралами

$$G(y)=\int_\Omega g(y)dx \quad \text{и} \quad R(u):=\int_\Omega \rho(u)dx,$$

где g и ρ — выпуклые и непрерывные функции. Также предполагается, что

$$f\in\mathcal{V}^*. \tag{3.15}$$

Пространство Y содержит векторнозначные функции. С помощью гильбертова пространства U зададим другой триплет пространств $Y\subset U\subset Y^*$. Обычно $U:=L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$, а $((y^*,y))=\int_\Omega yy^*dx$. В общем случае Λ^*y^* это элемент пространства V^*, норма которого не является интегральной. Мы введем более узкое множество

$$Y^*_{\Lambda^*}:=\{y^*\in Y^*|\Lambda^*y^*\in\mathcal{V}^*\}.$$

Заметим, что $p^*\in Y^*_{\Lambda^*}$ Если $\tau\in\mathcal{V}^*$, $y^*\in Y^*_{\Lambda^*}$ и выполнено (3.15), то $\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\in\mathcal{V}^*$ и все слагаемые (3.8) можно записать в виде интегралов:

$$\mathbf{M}(v,y^*,\tau;u,p^*,\sigma)=\mathbb{D}_G(\Lambda v,y^*)+\mathbb{D}_R(v,\tau)-\int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*,\tau)edx. \tag{3.16}$$

Случай $R(v)\equiv 0$ требует специального рассмотрения. Здесь

$$R^*(v^*)=\begin{cases}0, & v^*=0,\\ +\infty, & v^*\neq 0,\end{cases} \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_R(v,v^*)=\begin{cases}0, & v^*=0,\\ +\infty, & v^*\neq 0.\end{cases}$$

Поэтому (3.3) означает, что $\sigma=0$ и для $\tau\neq 0$ тождество (3.8) выполняется в форме $+\infty=+\infty$. Полагая $\tau=\sigma=0$, получаем “усеченное” тождество

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u,y^*)+\mathbb{D}_G(\Lambda v,p^*)=\mathbb{D}_G(\Lambda v,y^*)-\int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*)edx, \tag{3.17}$$

в котором присутствует только функционал $\mathbb{D}_G$, а $\mathbf{r}_f(y^*)=-\Lambda^*y^*+f$.

Замечание 1. Определим функционал $F(w)=R(w)-\langle f,w\rangle$. Используя лемму 1, заключаем, что

$$\mathbb{D}_R(v,\tau_f)=\mathbb{D}_F(v,\tau_f-f)=\mathbb{D}_F(v,-\Lambda^*y^*),$$

$$\mathbb{D}_R(u,\tau_f)=\mathbb{D}_F(u,-\Lambda^*y^*).$$

Поскольку $\sigma=-\Lambda^*p^*+f$, то $\mathbb{D}_R(v,\sigma)=\mathbb{D}_F(v,-\Lambda^*p^*)$. Таким образом, выбор (3.13) приводит тождество (3.8) к виду

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u,y^*)+\mathbb{D}_G(\Lambda v,p^*)+\mathbb{D}_F(u,-\Lambda^*y^*)+\mathbb{D}_F(v,-\Lambda^*p^*)=\mathbb{D}_F(\Lambda v,y^*)+\mathbb{D}_F(v,-\Lambda^*y^*),$$

т.е. в этом специальном случае (3.8) совпадает с (2.16).

3.4. Пример

Проиллюстрируем (3.17) с помощью простого примера. Пусть

$$\Lambda v=\nabla v, \quad f\in L^2(\Omega), \quad G(y):=\frac{1}{2}\int_\Omega Ayydx, \quad R\equiv 0,$$

где A — симметричная положительно определенная матрица, такая что для $c_2\geq c_1>0$ и любого $\zeta\in\mathbb{R}^d$ выполняется $c_1|\zeta|^2\leq|\zeta|^2_A:=A\zeta\zeta\leq c_2|\zeta|^2$. Этот выбор функционалов соответствует задаче

$$\operatorname{div}p^*+f=0, \quad p^*=\nabla u, \tag{3.18}$$

$$u(x)=0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.19}$$

Здесь

$$V=\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \quad \mathcal{V}=L^2(\Omega), \quad V^*=H^{-1}(\Omega), \quad \Lambda^*=-\operatorname{div}v$$

и

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} A\nabla v \nabla v + \frac{1}{2} A^{-1} p^* p^* - \nabla v\, p^*\right) dx = \frac{1}{2}\|\nabla(v-u)\|_A^2.$$

В результате тождество (3.17) принимает вид

$$\frac{1}{2}\|\nabla(v-u)\|_A^2 + \frac{1}{2}\|y^* - p^*\|_{A^{-1}}^2 = \frac{1}{2}\|y^* - A\nabla v\|_{A^{-1}}^2 - \int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*) e dx, \tag{3.20}$$

где $\|y\|_A^2 := \int_\Omega Ayydx$. Тождества такого типа характерны для линейных задач. Они подробно исследованы (см. [9–13]), а их применение для контроля точности сингулярно обусловленных краевых задач обсуждается в [16].

Если на y^* наложить дополнительное условие

$$y^* \in Q_f^* := \{y^* \in Y^* | \langle \Lambda^* y^* - f, w\rangle = 0 \quad \forall w \in V\},$$

то последнее слагаемое в (3.17) исчезает, и мы приходим к тождеству

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*). \tag{3.21}$$

Из (3.21) следует оценка

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) \le \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Q_f^*, \tag{3.22}$$

которую можно считать обобщением на нелинейные задачи оценки гиперциклов, которая была предложена в [17] для задачи линейной теории упругости (другой способ получения основан на использовании вариационных методов из [15]). Для задачи (3.18)–(3.19) оценка (3.22) превращается в известное неравенство

$$\|\nabla(v-u)\|_A \le \|y^* - A\nabla v\|_{A^{-1}} \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Q_f^*,$$

где Q_f^* содержит вектор-функции, подчиненные условию $\operatorname{div} y^* + f = 0$. Заметим, что с практической точки зрения наличие дополнительного дифференциального условия (которое должно быть выполнено почти всюду в Ω) создает серьезные неудобства. Аппроксимации точного потока p^*, полученные с помощью численного метода, часто не удовлетворяют этому условию, что вызывает необходимость использования специальных методов “уравновешивания”. В относительно простых задачах эти методы применимы и дают хорошие оценки (см., например, [18], [19]). Однако в других случаях функция $\mathbf{r}_f$ может иметь более сложную структуру. В частности, для параболических уравнений этот член включает производную по времени v_t, а в задачах с конвекцией соответствующие конвективные слагаемые. При необходимости поточечного удовлетворения условия $\mathbf{r}_f = 0$ это может создать серьезные проблемы. Однако теория показывает, что для получения эффективных и полностью вычисляемых оценок выполнение подобных поточечных условий совсем не является необходимым. Вместо этого получены оценки, которые включают интегралы от $\mathbf{r}_f$ с известными весовыми множителями (см. [9] и оценки в следующем разделе).

4. МЕРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Величина $\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma)$ представляет собой комбинированную меру отклонения функций v, y^* и τ от u, p^* и σ соответственно. Каждая из четырех величин в $\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma)$ сама является некоторой мерой расстояния от одной из компонент до соответствующего точного значения. Если G и R дифференцируемы по Гато, то соответствующие выражения имеют достаточно простой вид (это ограничение не является принципиальным и вводится только для упрощения записи). В этом случае (см. (2.9))

$$p^* = G'(\Lambda u), \quad \Lambda u = G^{*\prime}(p^*), \quad \sigma = R'(u), \quad u = R^{*\prime}(\sigma), \tag{4.1}$$

и мы получаем четыре нелинейных меры:

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = G(\Lambda v) - G(\Lambda u) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v-u))) =: \boldsymbol{\mu}_G(v, u),$$

$$\mathbb{D}_R(v,\sigma) = R(v) - R(u) - \left\langle R'(u), v - u\right\rangle =: \boldsymbol{\mu}_R(v,u),$$

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) = G^*(y^*) - G^*(p^*) - ((y^* - p^*, G^{*\prime}(p^*))) =: \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*, p^*),$$

$$\mathbb{D}_R(u,\tau) = R^*(\tau) - R^*(\sigma) - \left\langle \tau - \sigma, R^{*\prime}(\sigma)\right\rangle =: \boldsymbol{\mu}_R^*(\tau,\sigma),$$

которые в сумме дают полную меру $\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma)$. Рассмотрим их по отдельности. Две первых в сумме составляют величину

$$\mathbf{m}(v,u) := \boldsymbol{\mu}_G(v,u) + \boldsymbol{\mu}_R(v,u),$$

которая характеризует близость v и u. Мера $\boldsymbol{\mu}_G^*(y^*, p^*)$ характеризует близость y^* к p^*, а $\boldsymbol{\mu}_R^*(\tau,\sigma)$ показывает, насколько τ близко к точной функции σ. Теперь мы установим, как эти меры связаны некоторыми другими мерами, используемыми в нелинейном анализе.

4.1. Меры, основанные на монотонности

Так как G — выпуклый функционал, то операторы $G' : Y \to Y^*$ и $R' : V \to V^*$ являются монотонными. Поэтому величины

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u) := ((G'(\Lambda v) - G'(\Lambda u), \Lambda v - \Lambda u)) \quad \text{и} \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}_R(v,u) := \left\langle R'(v) - R'(u), v - u\right\rangle$$

неотрицательны, обращаются в нуль, если $v = u$, и могут рассматриваться как меры расстояния между v и u. Эти меры связаны с $\boldsymbol{\mu}_G(v,u)$ и $\boldsymbol{\mu}_R(v,u)$.

Пусть y^* определено равенством

$$y^* = G'(\Lambda v). \tag{4.2}$$

Тогда $G^*(y^*) + G(\Lambda v) = ((y^*, \Lambda v))$ и, учитывая (4.1), получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_G(v,u) + \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*, p^*) = G(\Lambda v) + G^*(y^*) - G^*(p^*) - G(\Lambda u) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))) - \\ - ((y^* - p^*, \Lambda u)) = ((G'(\Lambda v), \Lambda v)) - ((G'(\Lambda u), \Lambda u))) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))) - \\ - ((G'(\Lambda v) - G'(\Lambda u), \Lambda u)) = ((G'(\Lambda v) - G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))),\end{aligned}$$

т.е. в данном случае сумма этих двух мер совпадает с $\bar{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u)$.

Аналогично, если

$$\tau = R'(v), \tag{4.3}$$

то

$$\boldsymbol{\mu}_R(v,u) + \boldsymbol{\mu}_R^*(\tau,\sigma) = \left\langle R'(v) - R'(u), v - u\right\rangle.$$

В конкретных задачах соотношения (4.2) и (4.3) обычно соответствуют некоторым (физическим или иным) законам, которые определяют свойства математической модели и часто называются *определяющими соотношениями*. Таким образом, если y^* и τ строятся на основе приближенного решения v и этих соотношений (что является одним из часто используемых на практике вариантов), то

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) = \bar{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u) + \bar{\boldsymbol{\mu}}_R(v,u), \tag{4.4}$$

и полная мера совпадает с суммой мер монотонности. Однако в общем случае такого совпадения нет.

4.2. Меры, основанные на равномерной выпуклости

Другая мера расстояния может быть введена для так называемых равномерно выпуклых функционалов. Считается, что функционал G обладает свойством равномерной выпуклости в некотором множестве B, если существует нетривиальный неотрицательный функционал $\Phi : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$ такой, что $\Phi(y, y) = 0$ для любых $y \in Y$ и

$$G\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \Phi(y_1, y_2) \le \frac{1}{2}G(y_1) + \frac{1}{2}G(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in B. \tag{4.5}$$

В зависимости от конкретного функционала множество B может совпадать со всем пространством или, например, ограничивается некоторым шаром. Для функционала G можно ввести меру

$$\underline{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u) := 2\Phi(\Lambda v, \Lambda u).$$

Если R также является равномерно выпуклым, т.е.

$$R\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) + \phi(v_1,v_2) \le \frac{1}{2}R(v_1) + \frac{1}{2}R(v_2), \tag{4.6}$$

то определим $\underline{\boldsymbol{\mu}}_R(v,u) := 2\phi(v,u)$. Для степенных функций неравенства равномерной выпуклости известны как неравенства Кларксона (см. [20], а также разд. 6 ниже).

Лемма 6. *Если G и R дифференцируемы и равномерно выпуклы в V, то*

$$\underline{\mathbf{m}}(v,u) \le \mathbf{m}(v,u) \le \overline{\mathbf{m}}(v,u) \quad \forall v \in V, \tag{4.7}$$

где

$$\underline{\mathbf{m}}(v,u) := \underline{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u) + \underline{\boldsymbol{\mu}}_R(v,u) \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{m}}(v,u) := \overline{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u) + \overline{\boldsymbol{\mu}}_R(v,u).$$

Доказательство. Так как $D_G(\Lambda u, p^*) = 0$, то $p^* = G'(\Lambda u)$ и

$$\boldsymbol{\mu}_G(v,u) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) = G(\Lambda v) - G(\Lambda u) -$$
$$- ((G'(\Lambda u), \Lambda(v-u))) \le ((G'(\Lambda v), \Lambda(v-u))) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v-u))) = \overline{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u).$$

Аналогично,

$$\boldsymbol{\mu}_R(v,u) = \mathbb{D}_R(v,\sigma) = R(v) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, v\rangle =$$
$$= R(v) - R(u) - \langle \sigma, v-u\rangle \le \langle R'(v), v-u\rangle - \langle R'(u), v-u\rangle = \overline{\boldsymbol{\mu}}_R(v,u).$$

Суммируя эти неравенства, получаем правую часть (4.7).

Для доказательства левой части заметим, что из (4.5) и (4.6) следует равномерная выпуклость функционала J:

$$J\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) + \Phi(\Lambda v_1, \Lambda v_2) + \phi(v_1,v_2) \le \frac{1}{2}J(v_1) + \frac{1}{2}J(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$

и мы заключаем, что

$$\Phi(\Lambda v, \Lambda u) + \phi(v,u) \le \frac{1}{2}\mathcal{J}(v) + \frac{1}{2}\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Так как $\mathcal{J}(u) = \inf\limits_{v\in V} J(v) \le \mathcal{J}\left(\frac{u+v}{2}\right)$, то отсюда следует неравенство

$$\underline{\mathbf{m}}(v,u) \le \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u).$$

С другой стороны, (3.7) показывает, что $\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) = \mathbf{m}(v,u)$, что и дает оценку меры снизу. Лемма 6 доказана.

Замечание 2. Если $R(v) \equiv 0$ или этот функционал является выпуклым, но не равномерно выпуклым, то $\phi = 0$ и соответствующие ему части мер исчезают, так что мера $\mathbf{m}(v,u)$ совпадает с $\boldsymbol{\mu}_G(v,u)$ и ограничена снизу и сверху мерами $\underline{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u)$ и $\overline{\boldsymbol{\mu}}_G(v,u)$.

5. ОЦЕНКИ

Тождество (3.16) позволяет получить полностью вычисляемые оценки величины $\boldsymbol{\mu}_G(v,u)$ и других мер отклонения для любых $v \in V_0$, $y^* \in Y^*$ и $\tau \in \mathcal{V}$. Это требует применения функциональных неравенств, которые должны выполняться для пространств V и Y, оператора Λ и используемых мер. Нам потребуется одно из следующих неравенств:

$$\varphi(\|\Lambda(v-u)\|_Y) \le C_\varphi \boldsymbol{\mu}_G(v,u) \quad \forall u, v \in V, \tag{5.1}$$

$$\psi(\|v-u\|_V) \le C_\psi \boldsymbol{\mu}_R(v,u), \tag{5.2}$$

где φ, ψ – монотонные неотрицательные функции, такие что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, а C_φ и C_ψ – положительные постоянные не зависящие от u и v. Вообще говоря, для получения оценок достаточно одного из этих неравенств, однако, если выполняются оба, это можно использовать, чтобы сделать оценку более эффективной. Ниже рассматривается именно такой вариант.

С учетом обозначений, введенных в разд. 4, тождество (3.16) имеет вид

$$\boldsymbol{\mu}_G(v,u) + \boldsymbol{\mu}_R(v,u) + \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*,p^*) + \boldsymbol{\mu}_R^*(\tau,\sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v,\tau) - \int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*,\tau)e\,dx. \tag{5.3}$$

Для получения полностью вычисляемой оценки необходимо оценить последний интеграл. Это можно сделать различными способами (включая, например, те, что используют решение вспомогательных задач, см. [13], [16]). Здесь мы используем самый простой вариант, основанный на применении неравенств (2.5), (5.1) и (5.2).

Пусть $\kappa(x)$ – некоторая функция, заданная в Ω и принимающая значения в [0,1]. Свобода в выборе этой функции может быть в дальнейшем использована для оптимизации оценки. Ясно, что

$$\left|\int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*,\tau)e\,dx\right| \le \|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\|e\|_{\mathcal{V}} + \|(1-\kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\|e\|_{\mathcal{V}}. \tag{5.4}$$

Используя (2.5) и неравенство Юнга с $\beta > 0$, получаем

$$\begin{gathered}\|\kappa\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\|e\|_{\mathcal{V}} \le C_F\|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\|\Lambda e\|_Y \le \\ \le \beta\varphi^*\left(\frac{C_F}{\beta}\|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\right) + \beta\varphi(\|\Lambda e\|_Y) \le \beta\varphi^*\left(\frac{C_F}{\beta}\|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\right) + \beta C_\varphi\boldsymbol{\mu}_G(v,u),\end{gathered} \tag{5.5}$$

где $\varphi^*(\zeta^*) := \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{R}}(\zeta^*\zeta - \varphi(\zeta))$.

Вторая часть (5.4) оценивается аналогично ($\gamma > 0$):

$$\begin{gathered}\|(1-\kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\|e\|_{\mathcal{V}} \le \gamma\psi^*\left(\frac{1}{\gamma}\|(1-\kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\right) + \gamma\psi(\|e\|_V) \le \\ \le \gamma\phi^*\left(\frac{1}{\gamma}\|(1-\kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\right) + \gamma C_\psi\boldsymbol{\mu}_R(v,u).\end{gathered} \tag{5.6}$$

Определим величину

$$\Sigma_f(y^*,\tau,\kappa\beta,\gamma) := \beta\varphi^*\left(\frac{C_F}{\beta}\|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\right) + \gamma\psi^*\left(\frac{1}{\gamma}\|(1-\kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|_{\mathcal{V}^*}\right).$$

Она зависит только от известных функций и параметров. Из (5.3), (5.5) и (5.6) вытекает оценка сверху

$$\begin{gathered}(1-\beta C_\varphi)\boldsymbol{\mu}_G(v,u) + (1-\gamma C_\psi)\boldsymbol{\mu}_R(v,u) + \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*,p^*) + \boldsymbol{\mu}_R^*(\tau,\sigma) \le \\ \le \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v,\tau) + \Sigma_f(y^*,\tau,\kappa\beta,\gamma),\end{gathered} \tag{5.7}$$

где $\beta \le 1/C_\varphi$ и $\gamma \le 1/C_\psi$.

Левая часть (5.7) содержит сумму мер с весовыми множителями (которые можно варьировать за счет изменения констант β и γ), а правая часть не содержит неизвестных функций и может быть прямо вычислена.

Также мы получаем оценку снизу

$$\begin{gathered}(1+\beta C_\varphi)\boldsymbol{\mu}_G(v,u) + (1+\gamma C_\psi)\boldsymbol{\mu}_R(v,u) + \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*,p^*) + \boldsymbol{\mu}_R^*(\tau,\sigma) \ge \\ \ge \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v,\tau) - \Sigma_f(y^*,\tau,\kappa\beta,\gamma).\end{gathered} \tag{5.8}$$

Для использования оценок (1.2) и (2.1) надо знать постоянные C_F, C_φ, C_ψ. Методы получения оценок C_F хорошо разработаны (обзор результатов можно найти в [12]). Вопрос с C_φ и C_ψ обсуждается в следующем разделе в контексте моделей с потенциалами степенного роста.

Тождества могут также использоваться для сравнения решений различных математических моделей. Например, вместе с (3.1)–(3.3) мы можем рассмотреть задачу с измененным оператором $\widetilde{\mathcal{A}}$, для которого (3.2) и (3.3) выполняются с функционалами $\widetilde{G}$ и $\widetilde{R}$ вместо G и R, так что соответствующие решения $\tilde{u}$, $\tilde{p}^*$ и $\tilde{\sigma}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbb{D}_{\widetilde{G}}(\Lambda\tilde{u},\tilde{p}^*) := \widetilde{G}(\Lambda\tilde{u}) + \widetilde{G}^*(\tilde{p}^*) - ((\tilde{p}^*,\Lambda\tilde{u})) = 0, \tag{5.9}$$

$$\mathbb{D}_{\widetilde{R}}(\tilde{u},\tilde{\sigma}) := \widetilde{R}(\tilde{u}) + \widetilde{R}^*(\tilde{\sigma}) - \langle\tilde{\sigma},\tilde{u}\rangle = 0. \tag{5.10}$$

Поскольку $\mathbf{r}_f(\tilde{y}^*,\tilde{\sigma}) = 0$, то из (5.3) следует, что

$$\boldsymbol{\mu}_G(\tilde{u},u) + \boldsymbol{\mu}_G^*(\tilde{p}^*,p^*) + \boldsymbol{\mu}_R(\tilde{u},u) + \boldsymbol{\mu}_R^*(\tilde{\sigma},\sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda\tilde{u},\tilde{p}^*) + \mathbb{D}_R(\tilde{u},\tilde{\sigma}). \tag{5.11}$$

В частности, $\widetilde{\mathcal{A}}$ можно рассматривать как упрощение оператора $\mathcal{A}$ за счет отбрасывания несущественных деталей в поведении коэффициентов. В современном математическом моделировании такие приемы часто используются (defeaturing of models). В этом случае функции $\tilde{u}$, $\tilde{p}^*$, $\tilde{\sigma}$ являются решениями упрощенной задачи. Правая часть (5.11) зависит только от этих функций, а левая характеризует ошибку, которая возникла в результате упрощения модели.

Используя (5.9) и (5.10), это тождество можно также переписать в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mu}_G(\tilde{u},u) + \boldsymbol{\mu}_G^*(\tilde{p}^*,p^*) + \boldsymbol{\mu}_R(\tilde{u},u) + \boldsymbol{\mu}_R^*(\tilde{\sigma},\sigma) = \\ = G(\Lambda\tilde{u}) - \widetilde{G}(\Lambda\tilde{u}) + G^*(\tilde{p}^*) - \widetilde{G}^*(\tilde{p}^*) + R(\tilde{u}) - \widetilde{R}(\tilde{u}) + R^*(\tilde{\sigma}) - \widetilde{R}^*(\tilde{\sigma}).\end{gathered} \tag{5.12}$$

6. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе мы установим некоторые неравенства, которые позволяют обосновать оценки (5.1) и (5.2) для функционалов вида

$$G(v) = \frac{1}{\alpha}\int_\Omega |\nabla v|^\alpha\,dx.$$

Далее эти оценки используются в приложении к задаче (7.2)–(7.3).

Наиболее простой способ использует сильную (равномерную) выпуклость степенных функций с показателем $\alpha > 1$. Для $\alpha \geq 2$ сильная выпуклость следует из известного алгебраического неравенства

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^\alpha + \left|\frac{a-b}{2}\right|^\alpha \leq \frac{1}{2}(|a|^\alpha + |b|^\alpha) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^d. \tag{6.1}$$

Поэтому для скалярных и векторнозначных функций, суммируемых в Ω с нужной степенью, выполняется (4.5) с $\Phi(y_1,y_2) = \dfrac{1}{2^\alpha}\int_\Omega |y_1 - y_2|^\alpha\,dx$. Для $\alpha \in (1,2)$ неравенство (4.5) также выполняется, но функция Φ имеет более сложный вид (см. [21–24]).

Далее мы получим другую (более точную) оценку снизу для меры $\boldsymbol{\mu}_G(v,u)$ в случае, когда G является степенным функционалом. Сначала мы установим алгебраическое неравенство для функции $\mu_\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ вида

$$\mu_\alpha(a,b) := \frac{1}{\alpha}|a|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*}|b|^\alpha - ab|b|^{\alpha-2}.$$

Лемма 7. *Если* $\alpha \geq 2$, *то*

$$\mu_\alpha(a,b) \geq c_\alpha|a-b|^\alpha \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$

где $c_\alpha = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(1+\lambda_0)^{2-\alpha}$, *а* λ_0 *является корнем уравнения* (6.4).

Если $a = b$, то обе части (6.2) равны нулю и неравенство верно с любой константой.

Для рассмотрения любых других случаев введем параметры $\lambda \geq 0$ и $\theta \in [-1,1]$ такие, что $|a| = \lambda|b|$ и $ab = \theta|a||b| = \theta\lambda|b|^2$.

Нетрудно видеть, что

$$c_\alpha = \min_{\lambda,\theta} \frac{1}{\alpha} S_\alpha(\lambda,\theta), \quad \text{где} \quad S_\alpha(\lambda,\theta) := \frac{\lambda^\alpha + \alpha - 1 - \alpha\lambda\theta}{\left|1 - 2\lambda\theta + \lambda^2\right|^{\alpha/2}},$$

и минимум берется по всем $\lambda > 0$ и $\theta \in [1,1]$, за исключением $\lambda = \theta = 1$. Поскольку $|\theta| \le 1$, то $1 - 2\lambda\theta + \lambda^2 \ge 0$. Вычислим производную

$$\frac{\partial S_\alpha(\lambda,\theta)}{\partial\theta} = \alpha\lambda \frac{\lambda^\alpha - \lambda^2 + (\alpha-2)(1-\lambda\theta)}{|1 - 2\lambda\theta + \lambda^2|^{1+\alpha/2}} \ge \alpha\lambda \frac{\phi(\lambda)}{|1 - 2\lambda\theta + \lambda^2|^{1+\alpha/2}}, \tag{6.3}$$

где $\phi(\lambda) := \lambda^\alpha - \lambda^2 + (\alpha-2)(1-\lambda)$ является неотрицательной функцией. Действительно, $\phi(0) = \alpha - 2 \ge 0$, а производная $\phi'(\lambda) = \alpha\lambda^{\alpha-1} - 2\lambda + 2 - \alpha$ обращается в нуль в единственной точке $\lambda = 1$, где $\phi''(1) = \alpha(\alpha-1) - 2 \ge 0$. Поэтому $\phi'(\lambda) \ge 0$ и, следовательно, $\phi(\lambda) \ge 0$.

Оценка (6.3) показывает, что $S_\alpha(\lambda,\theta)$ достигает минимального и максимального значений соответственно при $\theta = -1$ и $\theta = 1$. Таким образом,

$$c_\alpha = \min_{\lambda\ge 0} \frac{1}{\alpha} S(\lambda,-1), \quad S(\lambda,-1) = \frac{\lambda^\alpha + \alpha - 1 + \alpha\lambda}{(1+\lambda)^\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} S(\lambda,-1) = \alpha - 1$ и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda,-1) = 1$. Поскольку

$$\frac{\partial S(\lambda,-1)}{\partial\lambda} = \alpha \frac{s(\lambda)}{(1+\lambda)^{1+\alpha}}, \quad \text{где} \quad s(\lambda) := \lambda^{\alpha-1} + \lambda(1-\alpha) + 2 - \alpha,$$

приходим к уравнению $s(\lambda) = 0$.

Функции $S(\lambda,-1)$ и $s(\lambda)$ изображены на фиг. 1а. Видно, что $s(0) \le 0$ и $s(\lambda) \to +\infty$, если $\lambda \to +\infty$. Поэтому имеется число λ_0 такое, что

$$\lambda_0^{\alpha-1} + \lambda_0(1-\alpha) - 2 + \alpha = 0. \tag{6.4}$$

Так как $\alpha > 2$, то линейная и степенная функции в (6.4) могут совпадать лишь в одной точке, так что корень единственный. При этом

$$s'(\lambda_0) = (\alpha-1)(\lambda_0^{\alpha-2} - 1) = \frac{\alpha-1}{\lambda_0}(\lambda_0^{\alpha-1} - \lambda_0) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\lambda_0}(1+\lambda_0)$$

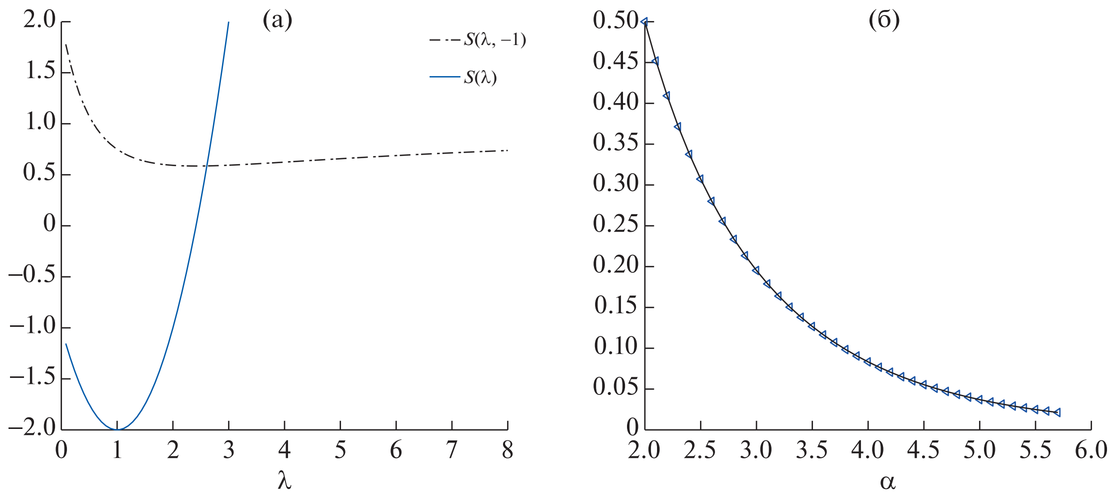
и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial^2 S(\lambda,-1)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \alpha\left(\frac{s'(\lambda_0)}{(1+\lambda_0)^{1+\alpha}}\right) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{\lambda_0(1+\lambda_0)^\alpha} > 0.$$

Таким образом, минимум $S(\lambda,-1)$ достигается при $\lambda = \lambda_0$. Так как $\lambda_0^\alpha = (\alpha-2)\lambda_0 + (\alpha-1)\lambda_0^2$, приходим к заключению, что $c_\alpha = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(1+\lambda_0)^{2-\alpha}$.

Замечание 3. Так как $S(\lambda,+1) = \dfrac{\lambda^\alpha - 1 + \alpha(1-\lambda)}{|\lambda-1|^\alpha}$ стремится к $+\infty$, если $\lambda \to 1_{+0}$, то при $\alpha > 2$ неравенство, обратное к (6.2), не имеет места. Мера $\mu_\alpha(a,b)$ эквивалентна норме $|a-b|^\alpha$ только при $\alpha = 2$ ($c_\alpha = 0.5$).

Замечание 4. Оценка (6.2) существенно лучше, чем оценка, которая следует из равномерной выпуклости и определяется функцией $\underline{\mu}_\alpha(a,b) := (1/2^\alpha)|a-b|^\alpha$ в соответствии с (6.1). Например, при $\alpha = 3$ $c_\alpha \cong 0.1953$, а $(1/2^\alpha) = 0.125$. При $\alpha = 4$ $c_\alpha \cong 0.8333$ (см. фиг. 1), а $(1/2^\alpha) = 0.0625$.



Фиг. 1. Функции $S(\lambda,-1)$ и $s(\lambda)$ при $\alpha = 3$ (а) и значения c_α (б).

Из неравенства (6.2) следует ряд других оценок, в частности,

$$\mu_\alpha(b,a) := \frac{1}{\alpha}|b|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*}|a|^\alpha - ab|a|^{\alpha-2} \geq c_\alpha|a-b|^\alpha \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^d, \quad \alpha\geq 2, \tag{6.5}$$

$$\mu_{\alpha^*}(a,b) := \frac{1}{\alpha^*}|a|^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha}|b|^{\alpha^*} - ab|b|^{\alpha^*-2} \geq c_{\alpha^*}|a-b|^{\alpha^*} \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^d, \quad \alpha\in(1,2], \tag{6.6}$$

$$\mu_{\alpha^*}(b,a) := \frac{1}{\alpha^*}|b|^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha}|a|^{\alpha^*} - ab|a|^{\alpha^*-2} \geq c_{\alpha^*}|a-b|^{\alpha^*} \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^d, \quad \alpha\in(1,2]. \tag{6.7}$$

Подстановка $\overline{a} = |a|^{\alpha^*-2}a$ и $\overline{b} = |b|^{\alpha^*-2}b$ приводит к равенствам

$$\mu_\alpha(\overline{b},\overline{a}) = \mu_{\alpha^*}(a,b) \quad \text{и} \quad \mu_\alpha(\overline{a},\overline{b}) = \mu_{\alpha^*}(b,a).$$

Применив (6.5), получаем

$$\mu_{\alpha^*}(a,b) \geq c_\alpha\left||a|^{\alpha^*-2}a - |b|^{\alpha^*-2}b\right|^\alpha \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^d, \quad \alpha\geq 2. \tag{6.8}$$

При изучении задач со степенным ростом (в частности, для получения оценок в разд. 7) полезны некоторые другие неравенства для степенных функций. Многие из них исследованы в [25], где было показано, что для $\alpha\in[1,2]$ выполняется

$$\left||b|^{\alpha-2}b - |a|^{\alpha-2}a\right| \leq 2^{2-\alpha}|b-a|^{\alpha-1} \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^d.$$

Для $\alpha > 2$ такое неравенство не выполняется, но можно установить другое, которое оценивает выражение в левой части через модуль разности аргументов.

Лемма 8. *Для $\alpha\geq 2$ имеет место неравенство*

$$\left||b|^{\alpha-2}b - |a|^{\alpha-2}a\right| \leq \kappa_\alpha|b-a|\left(|b|^{\alpha-2} + |a|^{\alpha-2}\right) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^d, \tag{6.9}$$

где $\kappa_\alpha = 1$*, если* $\alpha\in[2,3]$*, и* $\kappa_\alpha = \dfrac{\alpha-1}{2}$*, если* $\alpha > 3$.

Доказательство. Рассуждая так же, как и в лемме 7, заключаем, что

$$\kappa_\alpha^2 = \sup_{\lambda\geq 0,\theta\in[-1,1]}\frac{1+\lambda^{2\alpha-2}-2\theta\lambda^{\alpha-1}}{(1-2\theta\lambda+\lambda^2)(1+\lambda^{\alpha-2})^2}.$$

Анализ этой задачи показывает, что супремум достигается при $\theta = 1$. Если $\alpha > 3$, то супремум выражения $\dfrac{1-\lambda^{\alpha-1}}{(1-\lambda)(1+\lambda^{\alpha-2})}$ достигается при $\lambda \to 1$, а для $\alpha \in (2,3)$ супремум достигается при $\lambda = 0$. Лемма 8 доказана.

Замечание 5. В ряде случаев меры, входящие в функциональные тождества, совпадают с мерами $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, использующими монотонность операторов (см. (4.4)). В этой связи возникает функция

$$\mu_\alpha^s(a,b) := (|b|^{\alpha-2}b - |a|^{\alpha-2}a)(b-a),$$

которая также является мерой расстояния между векторами a и b. Нетрудно видеть, что

$$\mu_\alpha^s(a,b) = \mu_\alpha(a,b) + \mu_\alpha(b,a),$$

так что $\mu_\alpha^s(a,b)$ является удвоенной симметризацией меры $\mu_\alpha(a,b)$.

Известно, что (см. [26])

$$\mu_\alpha^s(a,b) \geq \kappa_0|a-b|^\alpha, \quad \text{если} \quad \alpha \geq 2, \quad \text{и} \quad \mu_\alpha^s(a,b) \leq \kappa_1|a-b|^\alpha, \quad \text{если} \quad \alpha \in (1,2),$$

где положительные постоянные κ_0 и κ_1 зависят только от α. В [25] был установлен ряд оценок величины $\mu_\alpha^s(a,b)$, в частности,

$$\mu_\alpha^s(a,b) \geq \frac{1}{2}(|b|^{\alpha-2} + |a|^{\alpha-2})|b-a|^2 \geq \hat{c}_\alpha|b-a|^\alpha, \quad \hat{c}_\alpha = 2^{2-\alpha}, \quad \alpha \geq 2,$$

$$\mu_\alpha^s(a,b) \leq \frac{1}{2}(|b|^{\alpha-2} + |a|^{\alpha-2})|b-a|^2, \quad \alpha \in (1,2].$$

Неравенства (6.2), (6.5)–(6.7), влекут соответствующие функциональные неравенства для мер, которые удобно использовать при изучении соответствующих классов краевых задач. Одна из таких задач рассматривается далее.

7. ПРИМЕР. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ α-ЛАПЛАСИАНА

В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение реакции–диффузии

$$-\operatorname{div}|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u + \sigma(u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \tag{7.1}$$

для функции u, обращающейся в нуль на границе Γ ограниченной области Ω. Здесь $\alpha > 1$, а $\sigma(u)$ определяется согласно (3.3). В этом случае

$$g(y) = \frac{1}{\alpha}|y|^\alpha, \quad g^*(y^*) = \frac{1}{\alpha^*}|y^*|^{\alpha^*}, \quad G(\nabla v) = \frac{1}{\alpha}\|\nabla v\|_{\alpha,\Omega}^\alpha, \quad R(v) = \int_\Omega \rho(v)dx, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|_{\alpha,\Omega}$ обозначает норму пространства $L^\alpha(\Omega)$. Для $\alpha = 2$ используется сокращенное обозначение $\|\cdot\|_\Omega$.

Если функция ρ дифференцируема, то приходим к краевой задаче

$$-\operatorname{div}|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u + \rho'(u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7.2}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{7.3}$$

Мы предполагаем, что $f \in L^{\alpha^*}(\Omega)$ и, если $\alpha < d$, то функция ρ дополнительно удовлетворяет условию $\rho(v) \leq d_1 + d_2|\rho|^\theta$ с $\theta = \alpha d/(d-\alpha)$ и некоторыми положительными константами d_1 и d_2. В таком случае пространства определяются следующим образом:

$$V = W^{1,\alpha}(\Omega), \quad V_0 = \overset{\circ}{W}{}^{1,\alpha}(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^\alpha(\Omega),$$

$$\mathcal{V}^* = L^{\alpha^*}(\Omega), \quad V^* = W^{-1,\alpha^*}(\Omega), \quad Y^* = L^{\alpha^*}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Заметим, что вследствие (2.9) функции ∇u и p^* связаны соотношениями

$$p^* = |\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u \quad \text{и} \quad \nabla u = |p^*|^{(2-\alpha)/(\alpha-1)}p^*. \tag{7.4}$$

Для $a, b \in \mathbb{R}^d$ и $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ определим функции

$$\mu_\alpha(a,b) := \frac{1}{\alpha}|a|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*}|b|^\alpha - ab|b|^{\alpha-2}, \quad \mu_{\alpha^*}(a,b) := \frac{1}{\alpha^*}|a|^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha}|b|^{\alpha^*} - ab|b|^{\alpha^*-2},$$

$$D_\alpha(a,b) := \frac{1}{\alpha}|a|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*}|b|^{\alpha^*} - ab, \quad D_\rho(\xi,\zeta) = \rho(\xi) + \rho^*(\zeta) - \xi\zeta$$

и нелинейные меры

$$\boldsymbol{\mu}_G(v,u) := \int_\Omega \mu_\alpha(\nabla v, \nabla u)dx, \quad \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*, p^*) := \int_\Omega \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*)dx, \quad \boldsymbol{\mu}_R(v,u) := \int_\Omega D_\rho(v,\sigma)dx.$$

При $\alpha = 2$ дифференциальный оператор в (7.2) совпадает с классическим оператором линейной диффузии. В этом (и только в этом) случае меры задаются нормами

$$\boldsymbol{\mu}_G(v,u) = \frac{1}{2}\|\nabla(v-u)\|_\Omega^2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mu}_G^*(y^*,p^*) = \frac{1}{2}\|y^* - p^*\|_\Omega^2.$$

Вид функционала D_ρ определяется функцией ρ, которая в прикладных задачах часто связана с химическими реакциями. В частности, если $\rho(v) = \frac{\delta}{2}|v|^2$, $\delta > 0$, то имеет место линейный закон $\sigma = \delta u$. В этой модели $\mathbb{D}_R(v,\tau) = \frac{1}{2\delta}\|\delta v - \tau\|_\Omega^2$ и $\mathbb{D}_R(v,\sigma) = \frac{\delta}{2}\|v-u\|_\Omega^2$.

Для задачи (7.2)–(7.3) тождество (3.16) принимает вид

$$\int_\Omega (\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) + D_\rho(v,\sigma) + D_\rho(u,\tau))dx = \int_\Omega (D_\alpha(\nabla v, y^*) + D_\rho(v,\tau) - \mathbf{r}(y^*,\tau)e)dx, \tag{7.5}$$

где $\mathbf{r}(y^*,\tau) = \operatorname{div} y^* - \tau + f$.

В случае $\rho = 0$ надо положить $\tau = 0$ и использовать тождество (3.17), которое теперь выглядит так:

$$\int_\Omega (\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*))dx = \int_\Omega (D_\alpha(\nabla v, y^*) - \mathbf{r}(y^*)e)dx. \tag{7.6}$$

Отметим, что при $\alpha = 2$ (7.6) переходит в тождество (3.20) (с единичной матрицей A).

Полагая в (7.6) $\tau = \tau_f$, мы получаем вариант тождества (3.14):

$$\int_\Omega (\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) + D_\rho(v,\sigma) + D_\rho(u,\tau_f))dx = \int_\Omega (D_\alpha(\nabla v, y^*) + D_\rho(v,\tau_f))dx. \tag{7.7}$$

Правая часть (7.7) содержит только известные функции v, y^* и τ_f, и поэтому это тождество сразу дает вычисляемые оценки мер в левой части.

Тождества (7.5) и (7.6) содержат неизвестную функцию e. Если речь идет о численных аппроксимациях, то, как правило, $\mathbf{r}(y^*,\tau) \neq 0$. Поэтому для получения полностью вычисляемых оценок надо оценить соответствующий интеграл. Различные варианты таких оценок для задач со степенным ростом были ранее получены в [23], [27], [28], а для задач с нестандартным ростом в [29]. Используя тождества, мы теперь получим такие оценки для введенных выше нелинейных мер. Это можно сделать с помощью метода, описанного в разд. 5, и оценок, полученных в разд. 6.

Из леммы 7 следует, что для любых $v, u \in V_0$ и $\alpha \geq 2$ верно функциональное неравенство

$$\int_\Omega \mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) \geq c_\alpha \|\nabla(v-u)\|_{\alpha,\Omega}^\alpha. \tag{7.8}$$

Оно показывает, что (5.1) выполняется с функцией $\varphi_\alpha(\zeta) = \frac{1}{\alpha}|\zeta|^\alpha$ и постоянной $C_\alpha = 1/(\alpha c_\alpha)$. Оценка (2.5) в рассматриваемом случае соответствует неравенству

$$\|w\|_{\alpha,\Omega} \le C_{\alpha,F}\,\|\nabla w\|_{\alpha,\Omega} \qquad \forall w \in V_0.$$

Применим эти неравенства для получения оценок.

7.1. Случай $\alpha \ge 2$

В качестве первого примера рассмотрим задачу (7.2)–(7.3) с $\alpha \ge 2$ и

$$\rho(v) = \frac{\delta}{m}|v|^m, \quad \delta > 0, \quad m \ge 2. \tag{7.9}$$

В этом случае $\sigma = \delta|u|^{m-2}u$, а $\rho^*(\zeta^*) = \frac{1}{m^*\delta^{m^*-1}}|\zeta^*|^{m^*}$. Тогда

$$\mathbb{D}_R(v,\tau) = \int\limits_\Omega D_\rho(v,\tau)dx = \int\limits_\Omega\left(\frac{\delta}{m}|v|^m + \frac{|\tau|^{m^*}}{m^*\,\delta^{m^*-1}} - \tau v\right)dx$$

и в соответствии с (6.2)

$$\boldsymbol{\mu}_R(v,u) = \int\limits_\Omega D_\rho(v,\sigma)dx = \int\limits_\Omega\left(\frac{\delta}{m}|v|^m + \frac{\delta}{m^*}|u|^m - \delta|u|^{m-2}uv\right)dx = \delta\int\limits_\Omega \mu_m(v,u)dx \ge \delta c_m\,\|v-u\|^m_{m,\Omega}.$$

Таким образом, (5.2) выполняется с функцией $\psi(\zeta) = \frac{\delta}{m}|\zeta|^m$ и постоянной $C_\psi = 1/(c_m m)$. Соответствующие сопряженные функции легко найти:

$$\psi^*_m(\zeta^*) = \frac{\delta^{1-m^*}}{m^*}|\zeta|^{m^*} \quad \text{и} \quad \varphi^*_\alpha(\zeta^*) = \frac{1}{\alpha^*}|\zeta^*|^{\alpha^*}.$$

Определим величину

$$\Sigma_f(y^*,\tau,\kappa\alpha,\beta,\gamma) := \frac{1}{\alpha^*}\frac{C^{\alpha^*}_{\alpha,F}}{\beta^{\alpha^*-1}}\|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|^{\alpha^*}_{\alpha^*,\Omega} + \frac{1}{m^*}\frac{1}{(\delta\gamma)^{m^*-1}}\|(1-\kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*,\tau)\|^{m^*}_{\alpha^*,\Omega}.$$

В соответствии с (5.7) получаем оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega\left(\left(1-\frac{\beta}{\alpha c_\alpha}\right)\mu_\alpha(\nabla v,\nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*,p^*) + \left(1-\frac{\gamma}{mc_m}\right)\mu_m(v,u) + D_\rho(u,\tau)\right)dx \le \\ \le \int\limits_\Omega\big(D_\alpha(\nabla v,y^*) + D_\rho(v,\tau)\big)\,dx + \Sigma_f(y^*,\tau,\kappa,\alpha,\beta,\gamma),\end{gathered} \tag{7.10}$$

где $\beta \le \alpha c_\alpha$ и $\gamma \le mc_m$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\rho = 0$. Если $\alpha \ge 2$, то, преобразуя (7.6), получаем оценку

$$\int\limits_\Omega\left(\left(1-\frac{\beta}{\alpha c_\alpha}\right)\mu_\alpha(\nabla v,\nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*,p^*)\right)dx \le \int\limits_\Omega D_\alpha(\nabla v,y^*)dx + \frac{1}{\alpha^*}\frac{C^{\alpha^*}_{\alpha,F}}{\beta^{\alpha^*-1}}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|^{\alpha^*}_{\alpha^*,\Omega}. \tag{7.11}$$

В частности, если $\alpha = 2$, то $c_\alpha = 1/2$, $\mu_\alpha(\nabla v,\nabla u) = \frac{1}{2}\|\nabla(v-u)\|^2_\Omega$ и (7.11) переходит в известную оценку

$$(1-\beta)\,\|\nabla(v-u)\|^2_\Omega + \|y^*-p^*\|^2_\Omega \le \|\nabla v - y^*\|^2_\Omega + \frac{C_F^2}{\beta}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|^2_\Omega, \quad \beta \le 1.$$

7.2. Случай $\alpha \in (1,2]$

Если $\rho \neq 0$ (например/задано в виде (7.9)), то можно использовать оценку (7.10) с $\kappa(x) = 0$ и $\beta = 0$. Если $\rho = 0$ в Ω или в некоторой подобласти $\omega \subset \Omega$, то надо использовать другой метод. Рассмотрим его для случая, когда $\rho = 0$ во всей области Ω.

Преобразуем интеграл в тождестве (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*)e\,dx \le \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\|e\|_{\alpha,\Omega} \le C_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\|\nabla e\|_{\alpha,\Omega} \le \\ \le C_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\left(\left\|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2}y^*\right\|_{\alpha,\Omega} + \left\||y^*|^{\alpha^*-2}y^* - |p^*|^{\alpha^*-2}p^*\right\|_{\alpha,\Omega}\right).\end{aligned} \tag{7.12}$$

Так как $\alpha^* > 2$, последнюю норму в (7.12) можно оценить с помощью (6.9):

$$\left\||y^*|^{\alpha^*-2}y^* - |p^*|^{\alpha^*-2}p^*\right\|_{\alpha,\Omega} \le \kappa_{\alpha^*}\|y^* - p^*\|_{\alpha^*,\Omega}(\|y^*\|^{\alpha^*-2}_{\alpha^*,\Omega} + \|p^*\|^{\alpha^*-2}_{\alpha^*,\Omega}). \tag{7.13}$$

Чтобы оценить норму p^*, используем априорную оценку точного решения. Так как

$$\int_\Omega |\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx \quad \forall w \in V_0,$$

то $\|\nabla u\|^{\alpha-1}_{\alpha,\Omega} \le C_{\alpha,F}\|f\|_{\alpha^*,\Omega}$, что дает оценку

$$\|\nabla u\|^{\alpha}_{\alpha,\Omega} \le (C_{\alpha,F}\|f\|_{\alpha^*,\Omega})^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Нетрудно видеть, что $\|p^*\|^{\alpha^*}_{\alpha^*,\Omega} = \|\nabla u\|^{\alpha}_{\alpha,\Omega}$ и, следовательно, $\|p^*\|_{\alpha^*,\Omega} \le C_{\alpha,F}\|f\|_{\alpha^*,\Omega}$. Определим величину

$$S_{\alpha^*}(y^*, f) = \|y^*\|^{\alpha^*-2}_{\alpha^*,\Omega} + C^{\alpha^*-2}_{\alpha,F}\|f\|^{\alpha^*-2}_{\alpha^*,\Omega}.$$

Теперь правую часть (7.12) можно оценить так:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*)e\,dx \le C_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\left\|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2}y^*\right\|_{\alpha,\Omega} + \\ + \kappa_{\alpha^*}C_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\|y^* - p^*\|_{\alpha^*,\Omega}S_{\alpha^*}(y^*, f) \le C_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\left\|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2}y^*\right\|_{\alpha,\Omega} + \\ + \frac{\beta}{\alpha^*}\|y^* - p^*\|^{\alpha^*}_{\alpha^*,\Omega} + \frac{1}{\alpha\beta^{\alpha-1}}\kappa^{\alpha}_{\alpha^*}C^{\alpha}_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|^{\alpha}_{\alpha^*,\Omega}S^{\alpha}_{\alpha^*}(y^*, f),\end{aligned} \tag{7.14}$$

где $\beta > 0$. Используем тот факт, что для $\alpha^* > 2$ имеет место неравенство, аналогичное (7.8):

$$\int_\Omega \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*)dx \ge c_{\alpha^*}\|y^* - p^*\|^{\alpha^*}_{\alpha^*,\Omega}. \tag{7.15}$$

С помощью (7.14) и (7.15) получаем оценку

$$\int_\Omega \mathbf{r}_f(y^*)e\,dx \le \Sigma_f(v, y^*, \kappa_{\alpha^*}, \alpha, \beta) + \frac{\beta}{\alpha^* c_{\alpha^*}}\int_\Omega \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*)dx, \tag{7.16}$$

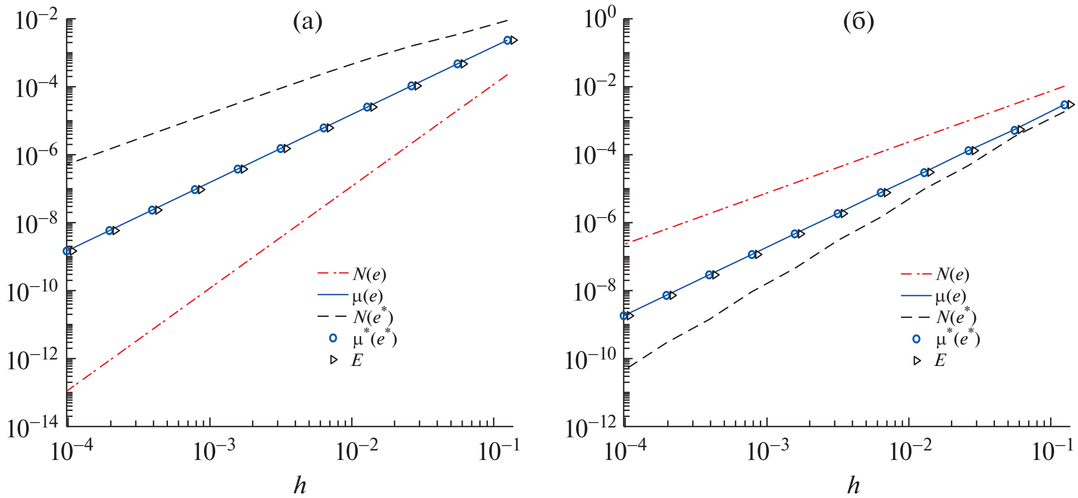
где

$$\Sigma_f(v, y^*, \kappa_{\alpha^*}, \alpha, \beta) := C_{\alpha,F}\|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}\left\|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2}y^*\right\|_{\alpha,\Omega} + \frac{\kappa^{\alpha}_{\alpha^*}C^{\alpha}_{\alpha,F}}{\alpha\beta^{\alpha-1}}S^{\alpha}_{\alpha^*}(y^*, f)\|\mathbf{r}_f(y^*)\|^{\alpha}_{\alpha^*,\Omega}.$$

Из (7.6) и (7.16) следует оценка

$$\int_\Omega\left(\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^* c_{\alpha^*}}\right)\mu_{\alpha^*}(y^*, p^*)\right)dx \le \int_\Omega D_\alpha(\nabla v, y^*)dx + \Sigma_f(v, y^*, \kappa_{\alpha^*}, \alpha, \beta), \tag{7.17}$$

правая часть которой не содержит неизвестных функций и может быть вычислена по результатам математического эксперимента. Параметр β должен быть подчинен условию $\beta > \alpha^* c_{\alpha^*}$. Отметим, что структура оценки (7.17) вполне аналогична (7.11).



Фиг. 2. Сходимость интерполянта к точному решению, $\alpha = 3$ (а) и $\alpha = 1.5$ (б).

Замечание 6. Разницу в использовании мер $\boldsymbol{\mu}_G$ и $\boldsymbol{\mu}_G^*$ вместо норм пространств $L^{\alpha}(\Omega)$ и $L^{\alpha^*}(\Omega)$ иллюстрирует следующий простой пример. Пусть функция $u(x)$ является минимайзером задачи $\min\limits_{v\in V_0}\int_0^1\left(\frac{1}{\alpha}|u'|^{\alpha} - fu\right)dx$, а в качестве приближенного решения выбирается стандартный кусочно-аффинный интерполянт $v_h = \pi_h u$ на равномерной сетке с шагом h. Аппроксимация функции p^* выбирается в соответствии с (7.4), т.е. $y_h^* = |v_h'|^{\alpha-2}v_h'$.

На фиг. 2 показано, как ведут себя величины

$$N(e) = \frac{1}{\alpha}\|(v_h - u)'\|^{\alpha} \quad \text{и} \quad N^*(e^*) = \frac{1}{\alpha^*}\|y_h^* - p^*\|^{\alpha^*}$$

и меры $\boldsymbol{\mu}_G(v_h, u)$ (на фиг. 2 – сплошные линии) и $\boldsymbol{\mu}_G^*(y_h^*, p^*)$ (символы $\circ$), когда h уменьшается и интерполянт все лучше приближает точное решение (в данном примере $u(x) = x^2(1-x)$).

При $\alpha = 3$ величина $N(e)$ (штрихпунктирная линия) сходится к нулю очень быстро. Однако малость этой величины не означает, что для соответствующей реконструкции двойственной переменной (функции y_h^*) величина $N^*(e^*)$ (штриховая линия) также мала. Напротив, эта величина сходится гораздо медленнее и может отличаться от $N(e)$ на несколько порядков. Изменение функционала (энергии) $E = J(v_h) - J(u)$ также происходит с меньшей скоростью (символы $\triangleleft$). Поэтому контролируя точность с помощью $N(e)$, мы можем прийти к слишком оптимистическим выводам. При $\alpha = 1.5$ ситуация обратная: $N^*(e^*)$ убывает значительно быстрее, чем $N(e)$, и существенно быстрее, чем E. В этом случае контроль точности с помощью $N^*(e^*)$ может не вполне правильно отражать ситуацию.

При этом меры $\boldsymbol{\mu}_G(v_h, u)$ и $\boldsymbol{\mu}_G^*(y_h^*, p^*)$ убывают с одинаковой скоростью. Более того, они убывают именно с той скоростью, с которой изменяется E, и адекватно отражают качество обоих приближенных решений v_h и y_h^*.

8. ОБОБЩЕНИЯ НА НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотренный выше метод получения тождеств типа (3.8) переносится на уравнения параболического типа. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t + \mathcal{A}(u) = f \quad \text{в} \quad Q_T := (0,T)\times\Omega, \tag{8.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S_T := (0,T)\times\Gamma, \tag{8.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{8.3}$$

на конечном временном интервале $[0,T]$. Оператор $\mathcal{A}$ определен (3.1) и соотношениями (3.2) и (3.3), которые выполняются при любом t. Введем пространства Бохнера

$$\mathbb{V}(Q_T) := L^q((0,T);V(\Omega)) \quad \text{и} \quad \mathbb{V}_0(Q_T) := L^q((0,T);V_0(\Omega)), \quad q > 1,$$

а также пространство $\mathbb{V}^*(Q_T) = L^{q'}((0,T);V^*(\Omega))$, где $q' = q/(q-1)$. Для описания двойственной переменной используем пространство

$$\mathbb{Y}^*(Q_T) := \{y^* = L^{q'}((0,T),Y^*(\Omega)) \,|\, \Lambda^* y^* \in \mathbb{V}^*(Q_T)\}.$$

Умножая (8.1) на пробную функцию и используя (3.1), получаем интегральное тождество

$$\int_0^T \Big(\langle u_t, w\rangle + ((p^*, \Lambda w)) + \langle \sigma - f, w\rangle\Big) dt = 0 \quad \forall w \in \mathbb{V}_0(Q_T), \tag{8.4}$$

которое вместе с (3.2) и (3.3) определяет обобщенное решение задачи (8.1)–(8.3).

Далее мы предполагаем, что (8.4) имеет единственное решение $u \in \mathbb{V}_0(Q_T)$ и $p^* \in \mathbb{Y}^*(Q_T)$, $\sigma \in \mathbb{V}^*(Q_T)$. Функции $v(x,t)$, $y^*(x,t)$ и $\tau(x,t)$ рассматриваются как аппроксимации $u(x,t)$, $p^*(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ соответственно. Покажем, что в этом случае имеет место тождество, являющееся обобщением того, что было установлено в теореме 2.

Теорема 3. *Для функций* $(v, y^*, \tau) \in \mathcal{H}(Q_T) := \mathbb{V}_0(Q_T) \times \mathbb{Y}^*(Q_T) \times \mathbb{V}^*(Q_T)$ *выполняется тождество*

$$\int_0^T \Big(\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) + \langle e_t, e\rangle\Big) dt = \int_0^T \Big(\mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \langle \mathbf{r}(y^*, \tau, v),\ e\rangle\Big) dt, \tag{8.5}$$

где $\mathbf{r}(y^*, \tau, v) := -\Lambda^* y^* - \tau + f - v_t$, *а мера определена также, как и в теореме* 2.

Доказательство. Поскольку равенства (3.9) и (3.10) выполняются при любом t (это следует из соотношений (3.2), (3.3) и леммы 2), то

$$\int_0^T \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) dt = \int_0^T \Big(\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + ((p^* - y^*, \Lambda(v - u)))\Big) dt \tag{8.6}$$

и

$$\int_0^T \mathbb{D}_R(v, \tau) dt = \int_0^T \Big(\mathbb{D}_R(v, \sigma) + \mathbb{D}_R(u, \tau) + \langle \sigma - \tau, v - u\rangle\Big) dt. \tag{8.7}$$

Выбрав в (8.4) $w = e \in \mathbb{V}_0(Q_T)$, получаем равенство

$$\int_0^T \Big(((p^*, \Lambda e)) + \langle \sigma, e\rangle\Big) dt = \int_0^T \langle f - u_t, e\rangle\, dt,$$

которое с учетом (2.3) показывает, что

$$\int_0^T \Big(((p^* - y^*), \Lambda e)) + \langle \sigma - \tau, e\rangle\Big) dt = \int_0^T \langle \Lambda^* y^* - \tau + f - v_t, e\rangle\, dt + \int_0^T \langle e_t, e\rangle\, dt. \tag{8.8}$$

Суммируя (8.6) и (8.7) и используя (8.8), приходим к равенству

$$\int_0^T \Big(\mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) dt + \mathbb{D}_R(v, \tau)\Big) dt = \int_0^T \mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) + \int_0^T \langle \Lambda^* y^* - \tau + f - v_t, e\rangle\, dt + \int_0^T \langle e_t, e\rangle\, dt,$$

которое эквивалентно (8.5). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 дает самую общую формулировку тождества. Предположим, что

$$f \in \widetilde{\mathbb{V}}^*(Q_T) := L^{q'}((0,T);\mathcal{V}^*) \subset \mathbb{V}^*(Q_T)$$

и что решения обладают повышенной регулярностью (аналогично (3.15) в случае эллиптического уравнения):

$$\sigma, u_t \in \widetilde{\mathbb{V}}^*(Q_T), \quad p^* \in \widetilde{\mathbb{Y}}^*(Q_T) := \{y^* \in L^{q'}((0,T), Y^*(\Omega)) \,|\, \Lambda^* y^* \in \widetilde{\mathbb{V}}^*(Q_T)\},$$

где

$$\widetilde{\mathbb{V}}^*(Q_T) := L^{q'}((0,T); \mathcal{V}^*) \subset \mathbb{V}^*(Q_T).$$

Вполне естественно предположить, что аппроксимации обладают такими же свойствами, как и точные решения, т.е.

$$\tau, v_t \in \widetilde{\mathbb{V}}^*(Q_T) \quad \text{и} \quad y^* \in \widetilde{\mathbb{Y}}^*(Q_T).$$

Тогда $\langle \mathbf{r}(y^*, \tau, v), e \rangle$ можно представить в виде интеграла $\int_\Omega \mathbf{r}(y^*, \tau, v) e dx$, а

$$2\int_0^T \langle e_t, e \rangle dt = 2\int_0^T \int_\Omega e_t e dx dt = \int_\Omega \int_0^T \frac{d}{dt} e^2 dx dt = \int_\Omega \left(\|e(x,T)\|^2 - \|e(x,0)^2\| \right) dx =: [\|e\|_\Omega^2]_0^T.$$

Теперь тождество (8.5) можно записать так:

$$\int_0^T \mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) + \frac{1}{2}[\|e\|_\Omega^2]_0^T = \int_0^T (\mathbb{D}_G(\nabla v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \int_\Omega \mathbf{r}(y^*, \tau, v) e dx) dt. \tag{8.9}$$

Положим в (8.9) $\tau = \tau_f := \operatorname{div} y^* + f - v_t$. Тогда (8.9) переходит в тождество

$$\begin{gathered}\int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\nabla u, y^*) + \mathbb{D}_G(\nabla v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau_f) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) \right) dt + \frac{1}{2}[\|e\|_\Omega^2]_0^T = \\ = \int_0^T \left(c D_G(\nabla v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau_f) \right) dt,\end{gathered} \tag{8.10}$$

в котором все функции в правой части известны. Тождество (8.10) можно считать обобщением (3.16) на параболические уравнения.

Если $\rho = 0$, то $\sigma = 0$, и, рассуждая так же, как и при получении (3.17), мы полагаем $\tau = 0$ и приходим к тождеству

$$\int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\nabla u, y^*) + \mathbb{D}_G(\nabla v, p^*) \right) dt + \frac{1}{2}[\|e\|_\Omega^2]_0^T = \int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\nabla v, y^*) + \int_\Omega (\Lambda^* y^* - f + v_t) e dx \right) dt. \tag{8.11}$$

Тождество (8.11) было ранее установлено в [30], где также изучены его некоторые следствия. Интеграл в правой части (8.11) оценивается точно так же, как и в разд. 5, что приводит к полностью вычисляемой оценке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rump S.M.* Algorithms for verified inclusions–theory and practice. In: Reliability in Computation (ed. R.E. Moore), Academic Press, New York, 1988. P. 109–126.
2. *Trefethen L.N.* Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.
3. *Brandts J., Krizek M., Zhang Z.* Paradoxes in numerical calculations // Neural Network World. 2016. V. 26. № 3. P. 317–330.
4. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer Ser. in Comput. Math., 15. New York, 1991.
5. *Ciarlet P.* The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam, 1987.
6. *Babuška I., Rheinboldt W.C.* Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. Numer. Anal. 1978. V. 15. P. 736–754.
7. *Verfürth R.* A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
8. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Int. J. Num. Meth. Engng. 1987. V. 24. P. 337–357.

9. *Repin S.* A posteriori estimates for partial differential equations. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
10. *Repin S.* Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations. In: Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society V. IX, P. 143–171, translation in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
11. *Repin S.* A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // Math. Comp. 2000. V. 69 № 230. P. 481–500.
12. *Repin S., Sauter S.* Accuracy of Mathematical Models, Tracts in Mathematics 33 Europ Math Soc, Berlin, 2020.
13. *Репин С.И.* Тождество для отклонений от точного решения задачи $\Lambda^* \mathcal{A}\Lambda u + \ell = 0$ и его следствия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. V. 61. № 12. P. 1986–2009.
14. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. North-Holland, Amsterdam, 1976.
15. *Mikhlin S.G.* Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press, Oxford, 1964.
16. *Репин С.И.* Контроль точности приближенных решений одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. V. 62. № 11. P. 1822–1839.
17. *Prager W., Synge J.L.* Approximations in elasticity based on the concept of functions space // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. P. 241–269.
18. *Braess D.* Finite elements. Cambridge Univer. Press, Cambridge, 1997.
19. *Braess D., Schöberl J.* Equilibrated residual error estimator for edge elements // Math. Comp. 2008. V. 77. № 262. P. 651–672.
20. *Clarkson J.A.* Uniformly convex spaces// Transact. Am. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 396–414.
21. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд.-во ЛГУ, 1950.
22. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
23. *Bildhauer M., Repin S.* Estimates from the deviation from the minimizer for variational problems with power growth functionals // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. V. 336. P. 5–24.
24. *Pastukhova S.E., Khripunova A.S.* Gamma-closure of some classes of nonstandard convex integrands // J. Math. Sci. (N.Y.). 2011. V. 177. № 1. P. 83–108.
25. *Lindqvist P.* Notes on the p-Laplace equation. University of Jyväskylä Depart. of Math. and Statist., Rep. 161, 2017.
26. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. Springer-Verlag, New York, 1993.
27. *Repin S.* A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growtn functionals // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. V. 249. P. 244–255.
28. *Fuchs M., Repin S.* A posteriori error estimates of functional type for variational problems related to generalized Newtonian fluids // Math. Meth. Appl. Sci. 2006. V. 29. № 18. P. 2225–2244.
29. *Пастухова С.Е.* Апостериорные оценки отклонения от точного решения в вариационных задачах с нестандартными условиями коэрцитивности и роста // Алгебра и анализ. 2020. V. 32. № 1. P. 51–77.
30. *Repin S.* Error identities for parabolic initial boundary value problems // Zap. Nauchn. Sem. POMI. 2021. V. 508. P. 147–172.