ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.5+004.421.6

ВЫЧИСЛЕНИЕ УСЛОВИЯ СИЛЬНОГО РЕЗОНАНСА В СИСТЕМЕ ГАМИЛЬТОНА

А. Б. Батхин[1,2,*], З. Х. Хайдаров[3,]**

[1] *125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Россия*

[2] *141701, Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9, МФТИ, Россия*

[3] *140104 Самарканд, Университетский бул.,15, СамГУ им. Ш. Рашидова, Узбекистан*

**e-mail: batkhin@gmail.com*

***e-mail: zafarxx@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.11.2022 г.
Переработанный вариант 05.01.2023 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Для исследования областей формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы в случае общего положения предложен способ символьного вычисления условия существования резонанса третьего и четвертого порядков. Это условие формулируется в виде нулей квазиоднородного полинома от коэффициентов характеристического многочлена линейной части системы Гамильтона. Методами компьютерной алгебры (базисы Грёбнера исключающих идеалов) и степенной геометрии (степенные преобразования) для различных резонансных векторов это условие представляется в виде рациональных алгебраических кривых, с помощью которых получено описание разбиения области устойчивости по линейному приближению в пространстве коэффициентов характеристического многочлена на такие части, где отсутствуют сильные резонансы. Приведен пример описания резонансных множеств для двупараметрической системы маятникового типа. Все вычисления выполнены в системе компьютерной алгебры Maple. Библ. 20. Фиг. 3.

Ключевые слова: система Гамильтона, положение равновесия, нормальная форма, формальная устойчивость, резонансное условие, исключающий идеал.

DOI: 10.31857/S0044466923050071, **EDN:** PJRPGA

1. ВВЕДЕНИЕ

В колебательных системах резонансы играют существенную роль. Их присутствие, с одной стороны, приводит к появлению сложной динамики, когда энергия колебаний “перекачивается” между теми степенями свободы, чьи соответствующие частоты находятся в резонансе. С другой стороны, наличие нетривиальных решений резонансного уравнения позволяет получить дополнительные формальные первые интегралы и, как следствие, позволяет провести анализ устойчивости положения равновесия или асимптотически проинтегрировать систему уравнений движения, приведенную к нормальной форме.

Условно можно указать три основных типа устойчивости для теоретико-механических задач (см. [1]):

- строгая устойчивость (устойчивость по Ляпунову);
- формальная устойчивость (устойчивость по Мозеру);
- практическая устойчивость.

Устойчивость по Ляпунову является наиболее строгой и гарантирует равномерную ограниченность решений на бесконечном интервале времени относительно множества возмущений по начальным условиям и параметрам. Устойчивость по Мозеру слабее, но гарантирует скорость разбегания траекторий медленнее, чем любая степенная функция с произвольным положительным показателем. Практическая устойчивость означает только ограниченность решения на конечном интервале времени относительно набора малых возмущений по начальным условиям или параметрам системы.

Далее рассматриваем автономную гамильтонову систему с аналитической функцией $H(\mathbf{z};\mathbf{P})$, положение равновесия (ПР) которой совпадает с началом координат. Тогда гамильтониан $H(\mathbf{z};\mathbf{P})$ раскладывается в сходящийся ряд однородных полиномов H_k степени k от своих фазовых переменных $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$:

$$H(\mathbf{z};\mathbf{P}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{z};\mathbf{P}), \tag{1}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор параметров.

Известно, что устойчивость ПР в первом приближении можно определить только для случая, когда квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ знакоопределенная (теорема Лагранжа–Дирихле, см. [2]).

Если число степеней свободы не более двух, то

– устойчивость определяется теоремой Арнольда—Мозера (см. [3], гл. 4, п. 1) при отсутствии резонансов порядка четыре и меньше, что требует вычисления нормальной формы гамильтониана (1) до четвертого порядка;

– для резонансов порядка менее четырех условия устойчивости были получены в работах Маркеева и Сокольского (см. [3], гл. 4).

Когда число степеней свободы больше двух, устойчивость для большинства начальных условий определяется теоремой Арнольда (см., например, [3], гл. 5, п. 1).

С практической точки зрения вполне достаточна более слабая, чем устойчивость по Ляпунову, формальная устойчивость, предложенная Мозером (см. [4]).

Цель работы состоит в описании схемы исследования формальной устойчивости ПР системы Гамильтона с тремя степенями свободы, а также в получении явного представления условий существования резонансов кратности 1 в терминах коэффициентов характеристического многочлена линейной части гамильтоновой системы. Предварительные результаты работы были опубликованы в препринте авторов (см. [5]). В настоящей статье предъявлено в явном виде условие существования резонанса с резонансным вектором $\mathbf{p}^* = (q,1,1)$, $q \in \mathbb{Z}$, а также исправлены замеченные опечатки и устранены неточности.

Будем использовать следующие обозначения:

– полужирные символы типа $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — столбцы-векторы в n-мерных вещественных $\mathbb{R}^n$ или комплексных $\mathbb{C}^n$ пространствах;

– полужирные символы типа $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ — векторы в n-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$;

– $|\mathbf{p}| = \sum_{j=1}^{n} |p_j|$ — норма вектора;

– для $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^\top$ и $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)^\top$ обозначим через $\mathbf{x}^\mathbf{p} \equiv \prod_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$ моном и через $\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ скалярное произведение пары векторов.

2. МНОЖЕСТВО УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

В случае общего положения ряд (1) начинается с квадратичного гамильтониана $H_2(\mathbf{z};\mathbf{P})$, определяющего локальную динамику вблизи ПР. Поведение фазового потока в первом приближении описывается линейной гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{z}} = B(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad B(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{z}^2}. \tag{2}$$

Напомним здесь основные свойства линейной гамильтоновой системы.

1. Если λ_j есть собственное число (СЧ) матрицы B, то $-\lambda_j$ также является ее СЧ (см. [2]). Все СЧ λ_j, $j = 1,\ldots,2n$, матрицы B могут быть упорядочены таким образом, что $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1,\ldots,n$. Обозначим через вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ множество *базисных собственных значений*.

2. Характеристический многочлен $\check{f}(\lambda)$ матрицы B содержит только четные степени λ, поэтому он является многочленом от $\mu = \lambda^2$. Такой многочлен назван в [6] *полухарактеристическим*:

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(\mathbf{P})\mu^k, \quad f_0 \equiv 1. \tag{3}$$

3. Если $\operatorname{Re}\lambda_j \neq 0$ для некоторого j, то ПР неустойчиво.

4. Если все $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, то поведение фазового потока в его окрестности может быть получено только при учете нелинейных членов.

Существует два типа задач об устойчивости многопараметрических систем:

• для определенных значений вектора параметров $\mathbf{P}$ выяснить устойчивость ПР (частная задача);

• найти в пространстве параметров Π все значения $\mathbf{P}$, для которых ПР $\mathbf{z} = 0$ системы (1) устойчива, т.е. вычислить так называемое множество устойчивости Σ системы (1) (общая задача).

Здесь рассматривается схема решения общей задачи.

Определение 1. Множество устойчивости Σ линейной системы (2) — это множество всех значений параметров $\mathbf{P} \in \Pi$, для которых ПР $\mathbf{z} = 0$ устойчиво по Ляпунову.

В терминах корней многочлена (3) условие устойчивости ПР дается следующей теоремой.

Теорема 1 (см. [6]). *Положение равновесия* $\mathbf{z} = 0$ *линейной гамильтоновой системы* (2) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда*

а) *все корни* μ_k *многочлена* (3) *вещественны и неположительны*;

б) *все элементарные делители матрицы B просты.*

Невыполнение условия а) приводит к экспоненциальному разбеганию решений, которое не перекрывается нелинейными добавками, привносящими только степенной эффект в поведение решений. Невыполнение условия б) приводит к степенной неустойчивости, которая может быть перекрыта нелинейными добавками.

Условие вещественности и неположительности корней многочлена $f(\mu)$ определяется следующей теоремой.

Теорема 2. *Для того чтобы все корни многочлена $f(\mu)$ степени n были вещественны и неположительны, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$a_j(\mathbf{P}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad D^{(k)}(f) \geq 0, \quad k = 0, \ldots, n-2,$$

где $D^{(k)}(f)$ есть k-й субдискриминант многочлена $f(\mu)$ (см. [7], [8]).

3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА

В дальнейшем считаем, что выполнено условие а) устойчивости теоремы 1. Если не выполнено условие б) теоремы 1, то устойчивость определяется по нормальной форме (НФ) общими методами.

Согласно [9, теорема 12] существует каноническое формальное преобразование в виде степенного ряда, которое приводит исходную систему Гамильтона к ее *нормальной форме*

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}},$$

задаваемой нормализованным гамильтонианом $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}, \quad \sigma_j = \pm 1, \tag{4}$$

который содержит только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, удовлетворяющие условию

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{5}$$

Здесь $0 \le \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \ge 2$ и $h_{\mathbf{pq}}$ – постоянные коэффициенты.

Резонансное уравнение (5) имеет два вида решений, которым соответствуют два вида резонансных членов в НФ (4):

• *вековые члены* вида $h_{\mathbf{pp}}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, которые всегда присутствуют в гамильтоновой нормальной форме из-за особой структуры матрицы B линейной части системы (2); вековые члены являются мономами только четных степеней от фазовых переменных и входят в соответствующие однородные формы;

• *строго резонансные члены*, которые соответствуют нетривиальным целочисленным решениям уравнения

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{6}$$

Сама процедура нормализации обычно выполняется в комплексных переменных. Для перехода к комплексным переменным используется линейное преобразование $\Phi : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\zeta, \overline{\zeta})$, которое преобразует исходный гамильтониан к виду

$$h(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum h_{\mathbf{pq}} \zeta^{\mathbf{p}} \overline{\zeta}^{\mathbf{q}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ и $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \ge 2$. Значение $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$ называется *порядком* соответствующего члена разложения.

Определение 2. Функция Гамильтона $h(\zeta, \overline{\zeta})$ называется *комплексной нормальной формой* вещественной системы Гамильтона для случая полупростых СЧ, если 1) его квадратичная часть h_2 имеет вид

$$h_2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j \zeta_j \overline{\zeta}_j, \quad \sigma_j = \pm 1;$$

2) разложение (7) содержит только члены $h_{\mathbf{pq}} \zeta^{\mathbf{p}} \overline{\zeta}^{\mathbf{q}}$, которые удовлетворяют резонансному уравнению (5). Константы σ_j являются инвариантами НФ.

Если резонансы отсутствуют, то имеется НФ Биркгофа (см. [10])

$$h(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k}(\zeta, \overline{\zeta}),$$

состоящая из однородных форм четных степеней $2k$, зависящих только от переменных вида $\zeta_j \overline{\zeta}_j$, $j = 1, \ldots, n$, при этом каждая из величин $\zeta_j \overline{\zeta}_j$ является формальным первым интегралом. В переменных действие–угол $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\rho})$ НФ Биркгофа может быть записана в виде $h(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\boldsymbol{\rho})$, где $\rho_j = \zeta_j \overline{\zeta}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

В этом случае система интегрируема, но преобразование Биркгофа обычно расходящееся, а в случае гладкой зависимости от параметров $\mathbf{P}$ резонансные значения располагаются всюду плотно в пространстве параметров. Таким образом, сколь угодно малые изменения параметров приводят к появлению резонансных членов в НФ.

Дальнейшие результаты связаны с существованием резонансов в системе Гамильтона, поэтому напомним их определение и укажем условие, с помощью которого последующие результаты проще формулируются.

Определение 3 (см. [11], гл. I, п. 3). *Кратность резонанса* $\mathfrak{k}$ – это число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ резонансного уравнения $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. *Порядок резонанса* равен $\mathfrak{q} = \min |\mathbf{p}|$ по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \ne 0$, $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. Если решение резонансного уравнения содержит только два собственных значения, то такой резонанс называется *двухчастотным резонансом*, если более двух – то *многочастотным резонансом*. Резонансы порядков 2, 3 и 4 назовем *сильными*, бóльших порядков – *слабыми* резонансами.

Условие A_k^n (см. [12]). Будем говорить, что для нормализованной системы Гамильтона выполняется условие A_k^n, если резонансное уравнение (6) не имеет целочисленных решений $\mathbf{p}$ с $|\mathbf{p}| \le k$.

4. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Определение 4. Положение равновесия $\mathbf{z} = 0$ системы с функцией Гамильтона $H(\mathbf{z})$ *формально устойчиво*, если существует возможно расходящийся степенной ряд $G(\mathbf{z})$, который является формальным положительно-определенным первым интегралом $\{G, H\} = 0$.

В [12] было дано схематическое описание метода изучения формальной устойчивости ПР. Этот метод основан на следующих ключевых результатах:

– вычисляется НФ системы Гамильтона в окрестности ПР,

– применяется теорема Брюно (см. [13]) о формальной устойчивости,

– используются q-аналоги объектов классической теории исключений.

При этом были сделаны следующие предположения:

– число степеней свободы системы больше двух,

– квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ в разложении (1) невырожденна и не является знакоопределенной,

– функция Гамильтона $H(\mathbf{z};\mathbf{P})$ гладко зависит от вектора параметров $\mathbf{P}$.

Пусть имеет место условие A_4^n, т.е. $\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \neq 0$ для $\mathbf{L} \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |\mathbf{L}| \leq 4$, тогда существует аналитическое каноническое преобразование $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ такое, что новый гамильтониан g имеет вид

$$g(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}) = g_1(\boldsymbol{\rho}) + g_2(\boldsymbol{\rho}) + r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}),$$

где $g_1(\boldsymbol{\rho}) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho} \rangle$, $g_2(\boldsymbol{\rho}) = \langle C\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle$, $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$, и $r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ является сходящимся степенным рядом переменных $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi})$ степени три или выше в $\boldsymbol{\rho}$.

При отсутствии сильных резонансов между собственными значениями линейной части гамильтоновой системы в окрестности ПР условие ее формальной устойчивости определяется следующей теоремой.

Теорема 3 (см. [13]). *Если условие A_4^n выполнено и для любых ненулевых целых векторов $\mathbf{L}$, которые являются решением уравнения*

$$\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0,$$

квадратичная форма $\langle C\mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle \neq 0$ при $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то ПР $\mathbf{z} = 0$ гамильтоновой системы формально устойчиво.

Таким образом, для применения теоремы 3 о формальной устойчивости необходимо найти границы областей в пространстве параметров Π, определяемых резонансными многообразиями (понятие резонансного многообразия дано ниже), соответствующих сильным резонансам.

Определение 5. *Резонансным многообразием* $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в пространстве $\mathbf{K}$ коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ полухарактеристического многочлена $f_n(\mu)$ степени n назовем такое алгебраическое многообразие, на котором вектор базовых собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ соответствующего характеристического многочлена $\check{f}(\lambda)$ является нетривиальным решением резонансного уравнения (6) для фиксированного целочисленного вектора $\mathbf{p}$. Аналитическое представление многообразия $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в неявной или параметрической формах далее обозначим через $R_n^{\mathbf{p}}$.

Постановка задачи. Для исследования формальной устойчивости ПР гамильтоновой системы необходимо в пространстве параметров Π найти множество устойчивости Σ линеаризованной системы, в ней определить области, в которых квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ не является знакоопределенной; в найденных областях выделить их части S_k, в которых отсутствуют сильные резонансы, а затем в каждой из таких частей S_k выполнить процедуру нормализации гамильтониана до четвертого порядка включительно и применить теорему 3. Для этого будет достаточно выбрать какую-либо точку в каждой из частей S_k в пространстве параметров и воспользоваться одним из алгоритмов нормализации функции Гамильтона. Поскольку в каждой внутренней точке части S_k все собственные числа λ_k, $k = 1, \ldots, n$, простые, то в этом случае легко применим алгоритм инвариантной нормализации (см. [14]).

В настоящей работе рассматривается описание резонансных многообразий порядков 2, 3 и 4 в пространстве коэффициентов $\mathbf{K}$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ для системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Основная задача – для многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы дать описание областей в пространстве параметров системы, в которых отсутствуют сильные резонансы порядков 2, 3 и 4.

Рассмотрим более подробно, при каких условиях реализуются резонансы указанных выше порядков:

• порядок $\mathfrak{q} = 2$: $p = (1,1,0)$ – это случай кратных корней, который описывается дискриминантным множеством $R_3^{(1,1,0)} \equiv D(f) = 0$;

• порядок $\mathfrak{q} = 3$: для двухчастотного случая $p = (2,1,0)$, описывается q-дискриминантом $R_3^{(2,1,0)} \equiv D_4(f) = 0$;

• порядок $\mathfrak{q} = 4$: для двухчастотного случая $p = (3,1,0)$, описывается q-дискриминантом $R_3^{(3,1,0)} \equiv D_9(f) = 0$;

• в трехчастотном случае: для порядка 3 описывается условием $R_3^{(1,1,1)} = 0$, а для порядка 4 – условием $R_3^{(2,1,1)} = 0$.

Для решения этой задачи следует получить описание границ областей, свободных от сильных резонансов. Эти границы состоят из участков алгебраических многообразий, на которых резонансное уравнение (6) имеет нетривиальное решение.

Основную задачу разобьем на две вспомогательных: 1) получить аналитическое представление $R_3^{\mathbf{p}}$ в пространстве коэффициентов $\mathbf{K} = (a_1, a_2, a_3)$ кубического многочлена резонансных многообразий $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$ для всех векторов $\mathbf{p}$ порядков 2, 3 и 4;

2) выяснить взаимное расположение всех найденных выше резонансных многообразий, т.е. определить, каким образом указанные выше резонансные многообразия касаются или пересекаются в пространстве $\mathbf{K}$.

5. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Общее описание процедуры получения условия существования двухчастотного и многочастотного резонансов выглядит следующим образом.

1. Для некоторого вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}_n$, удовлетворяющего резонансному уравнению $\langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$, составляется полиномиальный идеал

$$\mathcal{J} = \left\{ \langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle, \lambda_j^2 - \mu_j, \ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

2. Вычисляется базис Грёбнера $\mathcal{G}$ этого идеала с подходящим мономиальным порядком переменных λ_j, μ_j, $j = 1, \ldots, n$ (подробнее см. [15], гл. 2, 3), так, чтобы первый полином этого базиса содержал только переменные μ_j. Этот полином является квазиоднородным полиномом в переменных μ_j, $j = 1, \ldots, n$. Он определяет условие существования резонанса для заданного вектора $\mathbf{p}^*$.

3. Для получения соответствующего резонансного условия для коэффициентов a_j, $j = 1, \ldots, n$, многочлена $f(\mu)$ строится новый исключающий базис Грёбнера $\mathcal{F}$ идеала $\mathcal{I}$, содержащего полученное в п. 2 условие для μ_j и связи коэффициентов исходного полухарактеристического полинома с его корнями в виде элементарных симметрических полиномов третьей степени. При этом указывается порядок исключения переменных последовательно μ_j и a_j, $j = 1, \ldots, n$. Первый полином вычисленного базиса $\mathcal{F}$, зависящий только от коэффициентов a_j, является условием существования резонанса, записанный в коэффициентах многочлена (3).

Описанная выше последовательность действий для нахождения условия существования резонансных соотношений реализована с помощью прикладной программы, а именно, использовалась система компьютерной алгебры (СКА) Maple. Для ее реализации применяются следующие пакеты и процедуры:

• Для вычисления и исследования идеалов $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ (см. выше пункты 1 и 3 соответственно) используется процедура Basis построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры пакета Groebner.

• Для определения рода кривой использовалась команда genus, а для нахождения параметризации – parametrization из пакета algcurves.

Эта реализация апробирована на модельном примере, описанном в разд. 6.

5.1. Вычисление условия двухчастотного резонанса

Рассмотрим случай двухчастотного резонанса $\mathbf{p}^* = (q,1,0)$, где $q \in \mathbb{N}$. Здесь имеется пара соизмеримых СЧ, а третье СЧ несоизмеримо ни с каким из них. В пространстве параметров такой резонанс описывается в терминах резонансного множества $\mathcal{R}_{q^2}(f)$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ (см. [16]).

Вычислим по выше указанной последовательности условие двухчастотного резонанса для $\mathbf{p}^* = (q,1,0)$. Для начала составим идеал $\mathcal{J}$, содержащий соотношения зависимости между корнями характеристического и полухарактеристического многочленов вида $\lambda_j^2 - \mu_j$, $j = 1,2,3$, а также резонансное соотношение $q\lambda_1 + \lambda_2$. Первый многочлен исключающего базиса Грёбнера $\mathcal{G}$ этого идеала с последовательным порядком исключения переменных λ_j, μ_j, $j = 1,2,3$, есть многочлен

$$q^2\mu_1 - \mu_2. \tag{8}$$

Равенство нулю данного многочлена дает условие на корни полухарактеристического полинома. Согласно п. 3, чтобы получить условие на коэффициенты, составляем новый идеал $\mathcal{I}$, включающий в себя полученное условие (8) и их связь с коэффициентами a_j многочлена (3) через элементарные симметрические многочлены

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + a_1, \quad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - a_2, \quad \mu_1\mu_2\mu_3 + a_3. \tag{9}$$

Для идеала $\mathcal{I}$ вычисляем исключающий базис Грёбнера $\mathcal{F}$ с соответствующим порядком исключения переменных μ_j, a_j, $j = 1,2,3$. Равенство нулю первого его многочлена:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3^{(q,1,0)} \overset{\text{def}}{=} \Big\{&(q^4 + q^2 + 1)^3 a_3^2 + q^4(q^2+1)^2 a_2^3 + q^4(q^2+1)^2 a_1^3 a_3 - q^6 a_1^2 a_2^2 - \\ &- q^2(q^4+q^2+1)(q^4+4q^2+1)a_1a_2a_3 = 0\Big\},\end{aligned} \tag{10}$$

зависящего только от a_j, является условием существования двухчастотного резонанса в общем виде для некоторого натурального значения q.

Проверим полученный результат, сравнивая с полученными ранее условиями для случая, когда $q = 1,2,3$. Если в полученных в [17] формулах обобщенных субдискриминантов для f_3 положить $\omega = 0$, а $q = q^2$, то получим совпадающие с точностью до знака выражения для соответствующих резонансных многообразий:

• при $q = 1$ условие принимает вид

$$R_3^{(1,1,0)} \overset{\text{def}}{=} 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_2^3 + 27a_3^2 = 0,$$

• при $q = 2$ –

$$R_3^{(2,1,0)} \overset{\text{def}}{=} 400a_1^3a_3 - 64a_1^2a_2^2 - 2772a_1a_2a_3 + 400a_2^3 + 9261a_3^2 = 0,$$

• а при $q = 3$ –

$$R_3^{(3,1,0)} \overset{\text{def}}{=} 8100a_1^3a_3 - 729a_1^2a_2^2 - 96642a_1a_2a_3 + 8100a_2^3 + 753571a_3^2 = 0. \tag{11}$$

5.2. Вычисление условия трехчастотного резонанса

Рассмотрим для начала случай трехчастотного резонанса, для которого алгебраическая сумма трех собственных значений равна нулю, т.е. $\sum_{j=1}^{3} p_j\lambda_j = 0$. Такой резонанс может иметь кратность 1 или 2. Если кратность $\mathfrak{k} = 2$, то это означает, что имеет место попарная соизмеримость между базисными частотами λ_j характеристического многочлена. Такая ситуация исследуется с помощью условий существования двухчастотного резонанса. Далее рассматриваем только случай кратности 1.

Например, в случае базисных частот $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -2$, СЧ попарно несоизмеримы, но их сумма равна нулю. Следовательно, резонансным вектором $\mathbf{p}^*$ служит вектор $(1,1,1)$, что означает наличие трехчастотного резонанса кратности $\mathfrak{k} = 1$ порядка $\mathfrak{q} = 3$. Таким образом, будем рассматривать случай, когда взвешенная алгебраическая сумма всех трех базисных собственных чисел λ_j, $j = 1,2,3$, равна нулю для некоторого вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}^3$, т.е. $\langle \mathbf{p}^*, \lambda \rangle = 0$.

Для случая трехчастотного резонанса $\mathbf{p}^* = (1,1,1)$ аналогично, по выше указанной последовательности действий, вычислим условие существования резонанса. Составляем идеал, содержащий соотношения зависимости между корнями характеристического и полухарактеристического многочленов вида $\lambda_j^2 - \mu_j$, $j = 1,2,3$, а также резонансное соотношение $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Первый многочлен базиса Грёбнера этого идеала, с последовательным порядком исключения переменных λ_j, μ_j, $j = 1,2,3$, есть многочлен

$$\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 - 2\mu_3\mu_1 + \mu_2^2 - 2\mu_3\mu_2 + \mu_3^2.$$

Равенство нулю данного многочлена дает условие на корни полухарактеристического полинома. Для того чтобы получить условие на коэффициенты, составляем новый идеал, включающий в себя полученное условие на корни и их взаимосвязи с коэффициентами исходного полинома вида (9). Вычислив исключающий базис Грёбнера для этого идеала, получим искомое условие, т.е. резонансное многообразие $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$, которое задается первым полиномом этого базиса вида

$$R_3^{(1,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} a_1^2 - 4a_2 = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим трехчастотный резонанс порядка 4, задаваемый вектором $\mathbf{p}^* = (2,1,1)$. Так же и для предыдущего случая составляем идеал из резонансного соотношения $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ и зависимостей между λ_j и μ_j. Вычисляем его базис Грёбнера и, приравнивая его первый многочлен к нулю, получаем условия на корни полинома f_3:

$$16\mu_1^2 - 8\mu_1\mu_2 - 8\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 - 2\mu_2\mu_3 + \mu_3^2 = 0.$$

Далее составляем еще один идеал с этим многочленом и полиномами (9). Также первый полином исключающего базиса Грёбнера этого идеала задает условие на коэффициенты вида

$$R_3^{(2,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} 16a_1^6 - 264a_1^4a_2 + 36a_1^3a_3 + 1425a_1^2a_2^2 - 630a_1a_2a_3 - 2500a_2^3 + 9261a_3^2 = 0. \tag{13}$$

Проделанные выше вычисления обобщаются на более общий случай трехчастотного резонанса кратности 1, где $\mathbf{p}^* = (q,1,1)$. Здесь резонансное соотношение выглядит как $q\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, где $q \in \mathbb{Z}$. Составляем идеал $\mathcal{J}$ из этого полинома и соотношений зависимости λ_j и μ_j и вычисляем его исключающий базис Грёбнера $\mathcal{G}$. Первый полином полученного идеала представляет собой квадратичную форму относительно корней μ_j, $j = 1,2,3$, полухарактеристического многочлена f_3:

$$q^4\mu_1^2 - 2q^2\mu_1\mu_2 - 2q^2\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 - 2\mu_3\mu_2 + \mu_3^2.$$

Равенство нулю этой квадратичной формы дает условие существования трехчастотного резонанса. Теперь составляем новый идеал $\mathcal{I}$, состоящий из указанной выше квадратичной формы и многочленов из (9), и вычисляем его исключающий базис Грёбнера $\mathcal{F}$. Его первый полином от коэффициентов a_j, $j = 1,2,3$, и целого числа q задает условие существования резонанса вида

$$\begin{gathered} R_3^{(q,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} q^4a_1^6 - 2q^2(q^4+4q^2+1)a_1^4a_2 + 2(q^4-3q^2-2)(q^2-1)^2a_1^3a_3 + (q^4+10q^2+1)\times \\ \times(q^2+1)^2a_1^2a_2^2 - 2(q^4-9)(q^4-1)(q^2-1)a_1a_2a_3 - 4(q^2+1)^4a_2^3 + (q^2-1)^3(q^2+3)^3a_3^2 = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Если в (14) положить $q = 1$ или $q = 2$, то можно получить резонансные условия $R_3^{(1,1,1)}$ или $R_3^{(2,1,1)}$ соответственно.

Правые части полученных в формулах (10), (12)–(14) условий существования двух и трехчастотных резонансов в коэффициентах $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ многочлена $f_3(\mu)$ представляют собой квазиоднородные многочлены. Это означает, что носитель каждого из многочленов (т.е. множество векторных показателей степеней его мономов в пространстве $\mathbb{R}^3$) лежит в плоскости, нормаль которой – это вектор $\mathbf{N} = (1,2,3)$. Вектор $\mathbf{N}$ принадлежит пространству $\mathbb{R}^3_*$, сопряженному пространству показателей степеней $\mathbb{R}^3$. Если выполнить такое линейное преобразование, задаваемое унимодулярной матрицей $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^3$, $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\det M = \pm 1$, которая вектор $\mathbf{N}$ переведет внутрь одномерного координатного подпространства, то соответствующее преобразование в $\mathbb{R}^3$ с матрицей M^{-1} переведет каждый из носителей многочленов на плоскость, параллельную координатной плоскости (см. [18]). Следовательно, соответствующее этой матрице M степенное преобразование $\mathbf{a} \to \mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$:

$$\ln \mathbf{a} = M^{-1} \ln \mathbf{v}, \tag{15}$$

преобразует каждый из квазиоднородных многочленов $R_3^{\mathbf{p}}$ от трех переменных a_1, a_2, a_3 к многочленам вида $\nu_3^k \tilde{R}_3^{\mathbf{p}}(\nu_1, \nu_2)$. Таким образом, каждое из условий существования резонанса можно представить в виде плоской алгебраической кривой.

Унимодулярная матрица легко вычисляется с помощью известного алгоритма Эйлера, одна из реализаций которого приведена в [19].

Для вектора $\mathbf{N} = (1,2,3)$ соответствующая унимодулярная матрица M может быть выбрана вида

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad M \cdot \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, степенное преобразование (15) определяется матрицей

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и имеет вид

$$a_1 = \alpha_1 \nu_3, \quad a_2 = \alpha_2 \nu_1 \nu_3^2, \quad a_3 = \alpha_3 \nu_2 \nu_3^3, \tag{16}$$

где ненулевые множители α_j, $j = 1,2,3$, можно подбирать для дальнейшего упрощения коэффициентов многочленов $R_3^{\mathbf{p}}$. Здесь α_j выбраны следующим образом:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1. \tag{17}$$

Поскольку по условиям теоремы 2 коэффициенты a_k, $k = 1,2,3$, многочлена $f(\mu)$ должны быть неотрицательны, то из степенного преобразования (16) следует, что параметры ν_k, $k = 1,2,3$, также должны быть неотрицательны. Следовательно, нас будет интересовать взаимное расположение кривых, соответствующих резонансным многообразиям, в первом квадранте координатной плоскости (ν_1, ν_2).

5.3. Параметризация и упрощение резонансных условий

Используя степенные преобразования, упростим вычисленные резонансные условия. В эти выражения для резонансов подставим выражения в переменных ν_k, $k = 1,2,3$, а именно, $a_1 = 3\nu_3$, $a_2 = 3\nu_1\nu_3^2$, $a_3 = \nu_2\nu_3^3$. Аналитическое представление резонансных многообразий $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$ в новых переменных далее обозначается $\tilde{R}_3^{\mathbf{p}}$.

Для общего двухчастотного резонансного условия (10) подстановка (16), (17) после сокращения на множитель ν_1^6 дает алгебраическую кривую

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3^{(q,1,0)} = 27q^4(q^2+1)^2\nu_1^3 - 81q^6\nu_1^2 - 9q^2(q^4+q^2+1)(q^4+4q^2+1)\nu_1\nu_2 + \\ + (q^4+q^2+1)^3\nu_2^2 + 27q^4(q^2+1)^2\nu_2 = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнения (18) можно получить условия $\tilde{R}_3^{(1,1,0)}$, $\tilde{R}_3^{(2,1,0)}$ и $\tilde{R}_3^{(3,1,0)}$ соответственно для $q = 1,2,3$.

Поступая аналогично с резонансным условием (14) подстановка (16), (17) после сокращения на множитель ν_1^6 дает алгебраическую кривую

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3^{(q,1,1)} = -108(q^2+1)^4\nu_1^3 + 81(q^4+10q^2+1)(q^2+1)^2\nu_1^2 - 18(q^4-9)(q^4-1)(q^2-1)\nu_1\nu_2 + \\ + (q^2-1)^3(q^2+3)^3\nu_2^2 - 486q^2(q^4+4q^2+1)\nu_1 + 54(q^4-3q^2-2)(q^2-1)^2\nu_2 + 729q^4 = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Из уравнения (19) для $q = 1$ и $q = 2$ получаем условия для многообразий $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ и $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ соответственно:

$$\tilde{R}_3^{(1,1,1)} = -4\nu_1 + 3, \quad \tilde{R}_3^{(2,1,1)} = -2500\nu_1^3 + 4275\nu_1^2 - 210\nu_2\nu_1 + 343\nu_2^2 - 2376\nu_1 + 36\nu_2 + 432.$$

Для каждой из полученных пяти алгебраических кривых был вычислен род, который получился равным нулю во всех случаях. Это говорит о том, что все они рациональные кривые, допускающие рациональную параметризацию. Эти параметризации имеют следующий вид:

$$\text{для } \tilde{R}_3^{(1,1,0)}\colon \left\{\nu_1 = -\frac{(9t_1-5)(t_1-1)}{4(2t_1-1)^2},\ \nu_2 = \frac{(t_1-1)^2(7t_1-4)}{4(2t_1-1)^3}\right\};$$

$$\text{для } \tilde{R}_3^{(2,1,0)}\colon \left\{\nu_1 = -\frac{(49t_1-16)(743t_1-812)}{400(4t_1-7)^2},\ \nu_2 = \frac{(49t_1-16)^2(97t_1-100)}{400(4t_1-7)^3}\right\};$$

$$\text{для } \tilde{R}_3^{(3,1,0)}\colon \left\{\nu_1 = -\frac{(8281t_1-729)(972271t_1-803439)}{218700(27t_1-91)^2},\ \nu_2 = \frac{(8281t_1-729)^2(2617t_1-2025)}{54675(27t_1-91)^3}\right\};$$

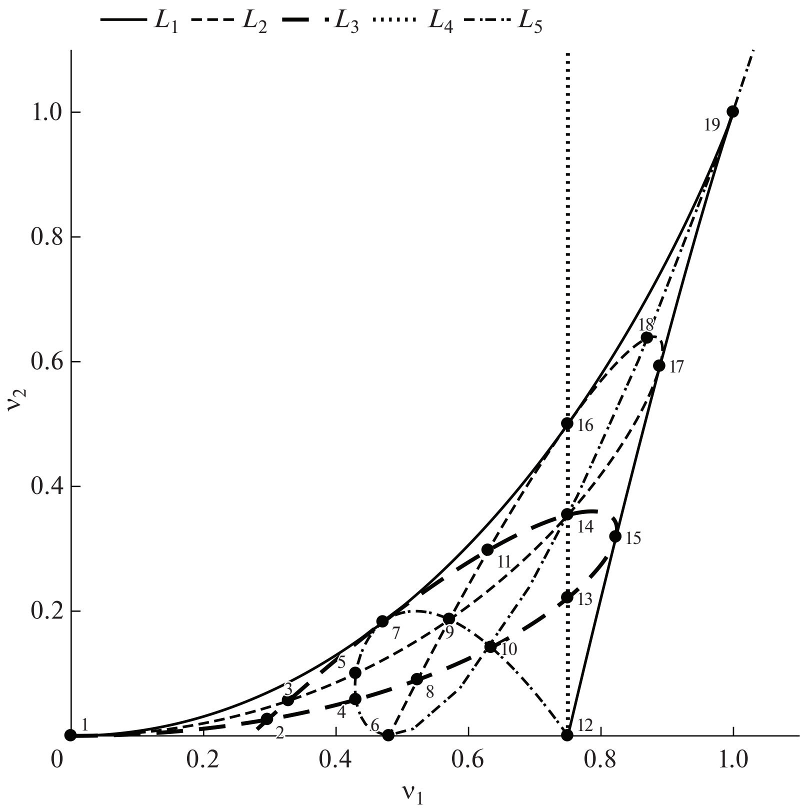
$$\text{для } \tilde{R}_3^{(1,1,1)}\colon \left\{\nu_1 = \frac{3}{4}, \nu_2 = t_1\right\};$$

$$\text{для } \tilde{R}_3^{(2,1,1)}\colon \left\{\nu_1 = \frac{39739t_1^2 - 77430t_1 + 54075}{4(111t_1-175)^2},\ \nu_2 = -\frac{(t_1+15)(-225+353t_1)^2}{(111t_1-175)^3}\right\}.$$

Пользуясь параметрическим представлением, можно построить плоские алгебраические кривые на координатной плоскости (ν_1, ν_2).

Для полного представления о взаимном расположении многообразий, соответствующих сильным резонансам, дадим описание фиг. 1. Кривые обозначим символами L_k, $k = 1,\ldots,5$. Их особые точки, а также точки их взаимного пересечения обозначим символами P_j, где нумерация индексов j точек выбрана в соответствии с увеличением расстояния от начала координат.

Кривая L_1 играет особую роль, она задает границу области устойчивости ПР по линейному приближению. Эта кривая является образом дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_3)$, которое делит пространство коэффициентов $\mathbf{K}$ многочлена третей степени на две части. В одной части все корни многочлена вещественные, а в другой части имеется пара комплексно-сопряженных корней и один вещественный корень. Согласно теореме 2, криволинейный треугольник $P_1P_{19}P_{12}$ является границей области Σ. Остальные резонансные кривые полностью или частично располагаются внутри этой области. Резонансные кривые L_2 и L_3, соответствующие двухчастотному резонансу, полностью располагаются в ней, касаясь кривой L_1. Это связано с тем, что если есть две частоты, участвующие в резонансе, то они как корни характеристического уравнения должны быть одной природы – либо одновременно вещественные, либо одновременно комплексные. Но пара комплексно-сопряженных корней не может находиться в резонансе, а третий корень всегда должен быть вещественным. Отметим, что ранее кривые L_1, L_2 и L_3 были изображены в [16], но их параметризации были получены другим способом.



Фиг. 1. Резонансные многообразия в переменных ν_1, ν_2.

Еще два резонансных многообразия, образами которых являются кривые L_4 и L_5, соответствуют трехчастотным резонансам. В них, в отличие от двух частотных резонансов, могут участвовать корни различной природы. Это говорит о том, что трехчастотные резонансные многообразия будут находиться и в области вещественности корней, и в области, где существуют комплексные корни. Во всех изображенных точках на кривых кратность резонанса $\tilde{\ell}$ становится равной 2. Легенда фиг. 1 следующая:

1. Кривая L_1 определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(1,1,0)} = 0$. Она изображена сплошной линией. На ней имеется одна особая точка $P_{19} = (1,1)$ – точка возврата. Этой точке соответствует резонанс $(1,1,1)$ кратности 2, потому что имеются два набора независимых решений. В качестве примера можно привести резонансы вида $(1,1,0)$ и $(1,0,1)$, для которых алгебраическая сумма трех собственных значений равна нулю.

2. Кривая L_2, изображенная тонкой штриховой линией, определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(2,1,0)} = 0$ и является самопересекающейся кривой с точкой самопересечения $P_9 = (4/7, 64/343)$. Структура резонанса, соответствующая этой точке, будет описана ниже в п. 5, поскольку она одновременно принадлежит и кривой L_5. Кривая L_2 также касается дискриминантной кривой L_1 в точках $P_{16} = (3/4, 1/2)$, $P_{17} = (8/9, 16/27)$.

3. Полужирной штриховой линией изображена кривая L_3. Она определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(3,1,0)} = 0$ и является кривой самопересечения с особой точкой $P_2 = (27/91, 19683/753571)$. Она также касается дискриминантной кривой L_1 в точках $P_7 = (57/121, 243/1331)$, $P_{15} = (297/361, 2187/6859)$. Кривая L_3 пересекается с кривой L_2 в четырех точках с координатами $P_3 = (552/1681, 3888/68921)$, $P_8 = (1107/2116, 2187/24334)$, $P_{11} = (216/343, 34992/117649)$, $P_{14} = (3/4, 243/686)$.

4. Прямая пунктирная линия, обозначенная L_4, определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(1,1,1)} = 0$. Она не имеет никаких особенностей и пересекается с указанными выше кривыми в точках P_{12}, P_{13}, P_{14} и P_{16}, где $P_{12} = (3/4, 0)$, $P_{13} = (3/4, 86/2197)$.

5. Последняя кривая L_5, изображенная штрихпунктирной линией, определяется уравнением $\tilde{R}_3^{(2,1,1)} = 0$. Она является самопересекающейся кривой с особой точкой $P_{10} = (111/175, 243/1715)$, которая также является точкой пересечения с кривой L_3. С кривой L_1 она касается в точке P_7 и пересекается в точках P_{12} и P_{19}. С кривой L_2 она пересекается в точках P_5, P_6, P_9, P_{14} и P_{18}, где $P_5 = (43/100, 1/10)$, $P_6 = (12/25, 0)$, $P_{18} = (732/841, 15552/24389)$. С кривой L_3 она также касается в точке P_7, а пересекается с ней в точках $P_4 = (1497/3481, 11907/205379)$ и P_{14}, описанной выше в п. 3.

Для проверки выполнения резонансных условий в вышевычисленных точках рассмотрим наглядно некоторые из них. Выполнение условий резонанса проверим для точки P_9, которая является особенной для двухчастотной резонансной кривой L_2 и точкой пересечения с трехчастотной резонансной кривой L_5. Подставив в выражения степенного преобразования (16) значения переменных ν_1, ν_2, являющихся координатами точки P_9, и выполнив замену $\nu_3 = -t$ при $t > 0$, получим однопараметрические выражения коэффициентов многочлена f_3. Сам многочлен примет вид

$$f_3 = (7\mu + t)(7\mu + 16t)(7\mu + 4t)/343.$$

Однопараметрическим семейством корней этого полухарактеристического многочлена являются

$$\mu_1 = -t/7, \quad \mu_2 = -4t/7, \quad \mu_3 = -16t/7.$$

Учитывая, что в каждом из них имеется общий множитель вида $t/7$, то все семейство корней будет пропорционально числам $(-1, -4, -16)$. Пользуясь равенством зависимости корней характеристического и полухарактеристического полиномов, вычислим все значения λ_j, $j = 1, \ldots, 6$, они будут пропорциональны значениям

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \mp 2i, \quad \lambda_{3,6} = \pm 4i.$$

Зная значения корней, можно убедиться в выполнении резонансных соотношений. Так как точка P_9 принадлежит двум резонансным многообразиям, проверим эти условия для каждого из них.

1. Поскольку данная точка для L_2 является точкой самопересечения, то имеются две пары соизмеримых корней с отношением 2 : 1, т.е. резонансное соотношение $\mathbf{p}^* = (2,1,0)$ выполняется для корней в виде равенства $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 = 2\lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

2. В принадлежащей кривой L_5 точке должен выполнятся трехчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (2,1,1)$. Так, соотношение 2 : 1 : 1 выполняется в виде $2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 = \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$.

Такую же проверку выполним для точки P_{10}. Она является особой для резонансной кривой L_5 и точкой пересечения с кривой L_3. Выполнив подобные вышеприведенным подстановки, получим выражение для f_3:

$$f_3 = (35\mu + 27t)(35\mu + 3t)(7\mu + 15t)/8575.$$

А соответствующее ему однопараметрическое семейство корней имеет вид

$$\mu_1 = -3t/35, \quad \mu_2 = -15t/7, \quad \mu_3 = -27t/35.$$

Если учесть, что в каждом из них имеется общий множитель вида $3t/35$, то все семейство корней будет пропорционально числам $(-1, -25, -9)$. А λ_j в данном случае будут пропорциональны

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \mp 5i, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3i.$$

Зная значения корней, можно аналогично убедиться в выполнении резонансных соотношений. Так как точка P_{10} принадлежит двум резонансным многообразиям, проверим эти условия для каждого из них.

1. Поскольку данная точка для L_5 является точкой самопересечения, то имеются две тройки соизмеримых корней с отношением 2 : 1 : 1, т.е. резонансные соотношения $\mathbf{p}^* = (2,1,1)$ выполняются для корней в виде равенств $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

2. В принадлежащей кривой L_3 точке должен выполняться двухчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (3,1,0)$. Так, соотношение $3:1$ выполняется для корней в виде равенств $3\lambda_1 + \lambda_6 = \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$.

В аналогичной последовательности рассмотрим выполнение условия резонанса в точке P_{14}. Она, в свою очередь, не является особой для какой-либо кривой, но является точкой пересечения сразу четырех алгебраических кривых: L_2, L_3, L_4 и L_5. Следовательно, в ней должно выполняться сразу четыре резонансных условия. Чтобы проверить это, также найдем корни многочлена f_3. Выразим коэффициенты этого многочлена через параметр t и разложим его на множители:

$$f_3 = (14\mu + 3t)(7\mu + 6t)(14\mu + 27t)/1372,$$

а соответствующее однопараметрическое семейство корней примет вид

$$\mu_1 = -3t/14, \quad \mu_2 = -6t/7, \quad \mu_3 = -27t/14.$$

Если учесть, что в них имеется общий множитель вида $3t\ /\ 14$, то все семейство корней будет пропорционально числам $(-1,-4,-9)$. А λ_j в данном случае будут пропорциональны значениям

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \mp 2i, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3i.$$

Зная значения корней, можно аналогично убедиться в выполнении резонансных соотношений. Так как точка P_{14} принадлежит четырем резонансным многообразиям, проверим эти условия для каждого из них.

1. Точка P_{14} принадлежит L_2, тогда должно выполняться резонансное соотношение $\mathbf{p}^* = (2,1,0)$, а для корней оно примет вид $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_4 + \lambda_5 = 0$.

2. В принадлежащей кривой L_3 точке должен выполняться двухчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (3,1,0)$. Так, соотношение 3 : 1 выполняется для корней в виде $3\lambda_1 + \lambda_6 = \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$.

3. Для точки, принадлежащей кривой L_4, должен выполняться трехчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (1,1,1)$. Так, соотношение $1:1:1$ выполняется следующим образом: $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

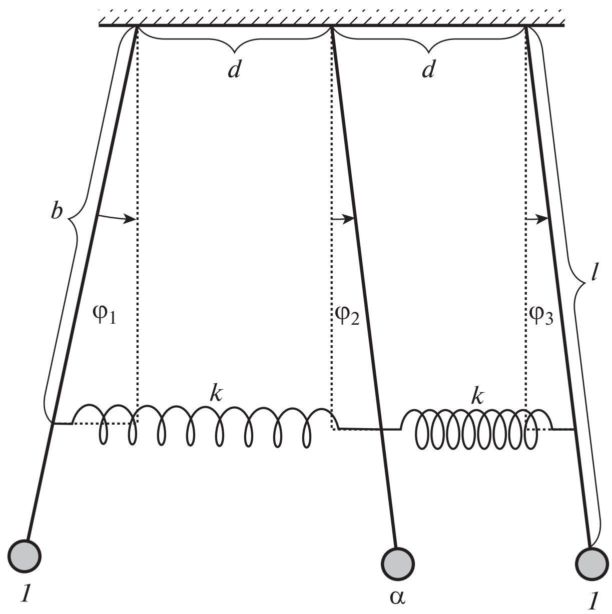
4. Для точки, принадлежащей кривой L_5, должен выполняться трехчастотный резонанс $\mathbf{p}^* = (2,1,1)$. Так, соотношение 2 : 1 : 1 выполняется для корней в виде равенства $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

6. ПРИМЕР

Рассмотрим три математических маятника одинаковой длины l, точки подвеса которых расположены на равных расстояниях d на горизонтальной прямой, а массы маятников выбраны равными $\mathbf{m} = (1,\alpha,1)$ соответственно. Пусть маятники соединены между собой невесомыми линейно-упругими пружинами жесткости k длиной d в недеформированном состоянии. Точки прикрепления пружин расположены на расстоянии $b \le dl$ от точек подвеса маятников (см. фиг. 2).

Выбрав в качестве обобщенных координат $\boldsymbol{\varphi}$ углы φ_i, $i = 1,2,3$, отклонения маятников от вертикали, запишем функцию Лагранжа этой системы:

$$L(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2}\langle T\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}\rangle + \Pi. \tag{20}$$



Фиг. 2. Три плоских математических маятника, соединенные невесомыми пружинами.

Матрица T диагональна: $T = \operatorname{diag}(l^2, \alpha l^2, l^2)$. Потенциальная энергия Π есть сумма потенциальной энергии упругой деформации пружин Π_1 и энергии Π_2 математических маятников в однородном поле силы тяжести:

$$\Pi_1 = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{\sqrt{\left(\Delta_j^{(1)}\right)^2 + \left(\Delta_j^{(2)}\right)^2} - d\right\}, \quad \Pi_2 = -gl\sum_{j=1}^{3}\cos\varphi_j - gl(\alpha - 1)\cos\varphi_2,$$

где $\Delta_j^{(1)} = b\left(\cos\varphi_{j+1} - \cos\varphi_j\right)$, $\Delta_j^{(2)} = b(\sin\varphi_{j+1} - \sin\varphi_j) + d$ суть проекции величин деформаций пружин между j-м и $(j+1)$-м маятниками на оси абсцисс и ординат соответственно.

Следуя [20], введем безразмерные переменные $\tau = \sqrt{g/l}t$, $\beta = b^2k/(gl)$.

Перейдем к гамильтоновой форме уравнений движения, но при этом будем использовать новые канонические переменные, определяемые нормальными модами колебаний. Для этого раскладываем функцию Лагранжа (20) в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\varphi} = 0$, получим линейную систему уравнений Лагранжа с СЧ

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(1, \sqrt{1+\beta}, \sqrt{\beta\alpha + 2\beta + 1}\right).$$

Этим частотам соответствуют амплитудные векторы

$$\mathbf{u}_1 = (1,\ 1,\ 1)^\top, \quad \mathbf{u}_2 = (-1,\ 0,\ 1)^\top, \quad \mathbf{u}_3 = (1,\ -2/\alpha,\ 1)^\top,$$

которые задают матрицу перехода $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ к новым переменным $\mathbf{Q}$:

$$\boldsymbol{\varphi} = U\mathbf{Q}.$$

Переход к канонически сопряженным импульсам $\mathbf{P}$ осуществляется с помощью матрицы $\left(U^*\right)^{-1}$:

$$\mathbf{p} = \left(A^*\right)^{-1}\mathbf{P}, \quad \text{где} \quad \mathbf{p} = gl\left\langle \mathbf{m}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}\right\rangle.$$

Здесь звездочка означает транспонирование.

Тогда в новых переменных разложение функции Гамильтона вблизи начала координат имеет вид

$$H(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = H_2(\mathbf{Q},\mathbf{P}) + H_4(\mathbf{Q},\mathbf{P}) + \cdots, \tag{21}$$

где первые два члена разложения следующие:

$$H_2 = \frac{2P_1^2}{2+\alpha} + P_2^2 + \frac{\alpha P_3^2}{2+\alpha} + \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)Q_1^2 + (\beta+1)Q_2^2 + \left(\frac{2}{\alpha}+1\right)\left(\beta+1+\frac{2\beta}{\alpha}\right)Q_3^2,$$

$$\begin{gathered} H_4 = -\frac{2+\alpha}{24}Q_1^4 - \left(\beta+\frac{1}{2}\right)Q_1^2Q_2^2 - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)\left(2\beta+1+\frac{4\beta}{\alpha}\right)Q_1^2Q_3^2 - \\ -\left(3\beta+1+\frac{2\beta}{\alpha}\right)Q_1Q_2^2Q_3 - \left(1-\frac{4}{\alpha^2}\right)\left(\beta+\frac{1}{3}+\frac{2\beta}{\alpha}\right)Q_1Q_3^3 - \\ -\frac{4\beta+1}{12}Q_2^4 - \left(2\beta+\frac{1}{2}+\frac{2\beta}{\alpha}\right)Q_2^2Q_3^2 - \frac{(2+\alpha)}{3\alpha^3}\left(\alpha^2-2\alpha+4\right)\left(\beta+\frac{1}{4}+\frac{2\beta}{\alpha}\right)Q_3^4. \end{gathered} \tag{22}$$

Все дальнейшие вычисления выполнялись в СКА Maple согласно схемы разд. 5.

Поскольку в (21) $H_3(\mathbf{Q},\mathbf{P}) \equiv 0$, то резонансы порядка $\mathfrak{q} = 3$ проявят себя при приведении к НФ только в формах степени 6 и выше. Следовательно, в данном случае можно ограничиться исследованием резонансов порядка $\mathfrak{q} = 4$, а именно,

- в случае двухчастотного резонанса исследуем многообразие $\mathcal{R}_3^{(3,1,0)}$,
- в случае трехчастотного резонанса исследуем многообразие $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$.

Обозначим через $A(H_2)$ матрицу квадратичной формы (22), тогда полухарактеристический многочлен матрицы $JA(H_2)$, соответствующей линейной системы Гамильтона, есть

$$f(\mu) = \mu^3 + \left(2\beta+3+\frac{2\beta}{\alpha}\right)\mu^2 + \left(\beta^2+4\beta+\frac{2\beta^2}{\alpha}+3+\frac{4\beta}{\alpha}\right)\mu + \left(\beta+1+\frac{2\beta}{\alpha}\right)(\beta+1). \tag{23}$$

Таким образом, пространство параметров $\Pi \equiv (\alpha,\beta)$ задачи двумерно и значения параметров должны быть неотрицательны: $\{\alpha,\beta \geq 0\}$. Квадратичная форма (22) в указанной области пространства параметров является знакоопределенной, следовательно, нижнее равновесное положение маятников является устойчивым по Ляпунову. Поэтому далее будет приведено описание резонансных множеств 4-го порядка.

Подставляем коэффициенты a_1, a_2, a_3 многочлена (23) в уравнение (11) резонансного многообразия $\mathcal{R}_3(3,1,0)$, раскладываем его на множители и отбираем среди них только те, нули которых располагаются в первом квадранте плоскости (α,β). Аналогично поступаем и с уравнением (13) резонансного многообразия $\mathcal{R}_3(2,1,1)$. В результате получается пять резонансных кривых — три соответствуют двухчастотному резонансу, а две — трехчастотному:

$$\mathcal{R}_a^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 8\alpha/(2+\alpha), \tag{24}$$

$$\mathcal{R}_b^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 8, \tag{25}$$

$$\mathcal{R}_c^{(3,1,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 4\alpha/(1-4\alpha), \tag{26}$$

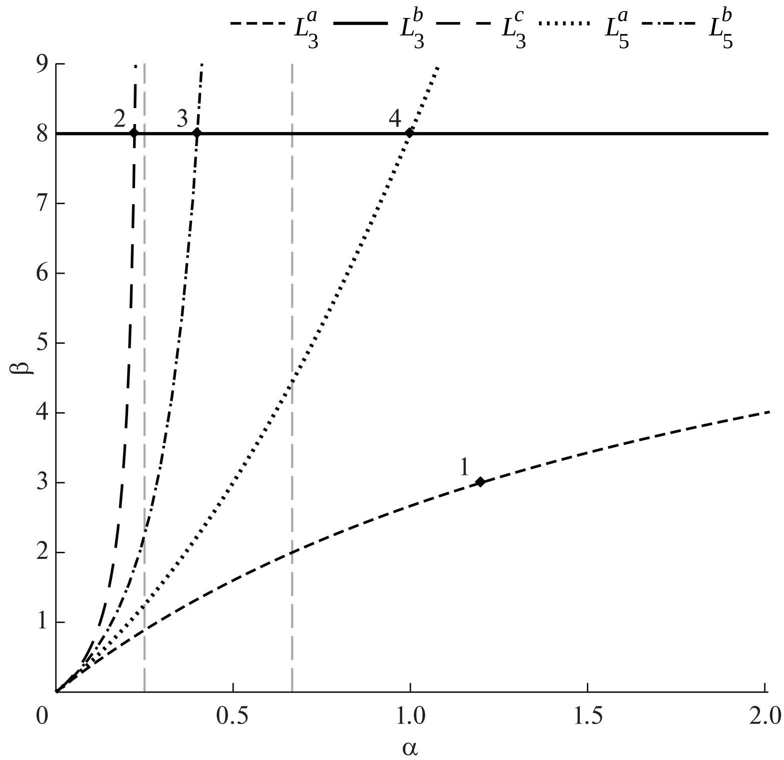
$$\mathcal{R}_a^{(2,1,1,)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 4\alpha^2 + 4\alpha, \tag{27}$$

$$\mathcal{R}_b^{(2,1,1)} \stackrel{\text{def}}{=} \beta = 8\alpha(2-\alpha)/(3\alpha-2)^2. \tag{28}$$

Эти кривые показаны на фиг. 3: двухчастотные резонансные кривые изображены сплошными и штриховыми линиями, а трехчастотные — штрихпунктирными.

Кривые обозначим символами L_k^i, $k = 3,5$, $i = a,b,c$, где нижний индекс соответствует индексу кривых L_k, описанных в пунктах 3 и 5 подраздела 5.3. Их точки взаимного пересечения обозначим символами P_j, где нумерация индексов j точек выбрана в соответствии с увеличением расстояния от начала координат. Дадим краткое описание структуры СЧ на соответствующих резонансных кривых.

1. На кривой L_3^a, которая изображена длинной штриховой линией, с уравнением (24) СЧ следующие: $\lambda_{1,4} = \pm i$, $\lambda_{2,5} = \pm i\sqrt{(9\alpha+2)/(\alpha+2)}$, $\lambda_{3,6} = \pm 3i$. Таким образом, для всех значений пара-



Фиг. 3. Резонансные многообразия примера в переменных α, β.

метра α имеет место двухчастотный резонанс, кроме значения $\alpha = 6/5$, соответствующего точке P_1 (см. ниже).

2. На прямой L_3^b, показанной в виде сплошной линии, с уравнением (25) СЧ следующие: $\lambda_{1,4} = \pm i$, $\lambda_{2,5} = \pm 3i$, $\lambda_{3,6} = \pm i\sqrt{(9\alpha + 16)/\alpha}$. Эта прямая пересекается с другими кривыми в трех точках: P_2, P_3, P_4.

3. На кривой L_3^c, которая изображена короткой штриховой линией, с уравнением (26) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \pm\frac{i}{\sqrt{1 - 4\alpha}}, \quad \lambda_{3,6} = \pm\frac{3i}{\sqrt{1 - 4\alpha}}.$$

4. На кривой L_5^a, изображенной пунктирной линией, с уравнением (27) СЧ следующие:

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \pm i(2\alpha + 1), \quad \lambda_{3,6} = \pm i(2\alpha + 3).$$

На этой кривой для всех значений α имеет место трехчастотный резонанс, кроме значения $\alpha = 1$, соответствующего точке P_4.

5. На кривой L_5^b, изображенной штрихпунктирной линией, с уравнением (28) СЧ следующие:

$$\text{при} \quad 0 \le \alpha < 2/3: \quad \lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \pm i\frac{\alpha + 2}{2 - 3\alpha}, \quad \lambda_{3,6} = \pm i\frac{6 - \alpha}{2 - 3\alpha};$$

$$\text{при} \quad \alpha > 2/3: \quad \lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \pm i\frac{\alpha + 2}{3\alpha - 2}, \quad \lambda_{3,6} = \pm i\frac{6 - \alpha}{3\alpha - 2}.$$

На этой кривой для всех значений α имеет место трехчастотный резонанс, кроме точек P_2, P_3, P_4.

Кривая L_3^a пересекается только с одной ветвью кривой L_5^b в точке $P_1 = (6/5, 3)$. Подставив в выражения (23) значения переменных α, β, являющихся координатами точки P_1, получим

$$f_3 = (\mu + 1)(\mu + 4)(\mu + 9).$$

Корнями этого полухарактеристического многочлена являются значения

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -4, \quad \mu_3 = -9.$$

А в корнях характеристического уравнения они запишутся в виде

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \pm 2i, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3i.$$

Зная значения корней, проверим выполнение резонансных соотношений. Так как точка P_1 принадлежит двум резонансным многообразиям, соответствующим двухчастотному и трехчастотному резонансам, проверим эти условия для каждого из них:

1. Для $\mathcal{R}_a^{(3,1,0)}$ имеются две пары соизмеримых корней с отношением $3:1$, т.е. $3\lambda_1 + \lambda_6 = 3\lambda_4 + \lambda_3 = 0$.

2. Для $\mathcal{R}_b^{(2,1,1)}$ также должно выполняться соотношение $2:1:1$, которое выглядит как $\lambda_1 + 2\lambda_5 + \lambda_3 = \lambda_4 + 2\lambda_2 + \lambda_6 = 0$.

Кривая L_3^b пересекается с кривой L_3^c в точке $P_2 = (2/9, 8)$, с кривой L_5^b – в точках $P_3 = (2/5, 8)$ и $P_4 = (1, 8)$. В точке P_4 она также пересекается с кривой L_5^a. Подставив в выражения (23) значения переменных α, β, являющихся координатами этих точек, получим соответствующие выражения для f_3:

$$P_2\colon f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 81),$$
$$P_3\colon f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 49),$$
$$P_4\colon f_3 = (\mu + 1)(\mu + 9)(\mu + 25).$$

Аналогично, как и в вышеуказанном случае, здесь можно убедиться в выполнении резонансных соотношений.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для системы Гамильтона с тремя степенями свободы получено описание разбиения области устойчивости в пространстве коэффициентов **K** полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ на такие части, в которых гарантированно отсутствие сильных резонансов между СЧ линейной системы (2). Это позволяет, с одной стороны, выполнить исследование формальной устойчивости ПР для каждой из таких частей с помощью НФ четвертого порядка и теоремы 3, а с другой стороны, в случае наличия резонанса кратности 1 получить дополнительные формальные интегралы и выполнить асимптотическое интегрирование уравнений нормализованной системы Гамильтона.

Авторы выражают благодарность А.Д. Брюно за указанные замечания и полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.* О типах устойчивости в системах Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 21. С. 1–24.
2. *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
3. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. *Moser J.K.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
5. *Батхин А.Б., Хайдаров З.Х.* Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2022. № 59. С. 1–28.
6. *Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Приклад. матем. и мех. 2012. Т. 76. № 1. С. 80–133.

7. *Калинина Е.А., Утешев А.Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. СПб: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
8. *Basu S., Pollack R., Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computations in Mathematics 10. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 2006. ix p.
9. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.
10. *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999. 408 с.
11. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
12. *Bruno A.D., Batkhin A.B.* Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics // Axioms. 2021. V. 10. № 4. https://www.mdpi.com/2075-1680/10/4/293.
13. *Брюно А.Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 325—330.
14. *Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
15. *Кокс Д., Литтл Д., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.
16. *Батхин А.Б.* Резонансное множество многочлена и проблема формальной устойчивости // Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Матем. Физ. 2016. № 4 (35). С. 5—23.
17. *Батхин А.Б.* Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // Программирование. 2018. № 2. С. 5—17.
18. *Брюно А.Д., Солеев А.* Локальная униформизация пространственной кривой и многогранники Ньютона // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 1. С. 67—102.
19. *Брюно А.Д., Азимов А.А.* Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований // Программирование. 2023. № 1. С. 38—47.
20. *Маркеев А.П.* О движении связанных маятников // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 1. С. 27—38.