ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 2, с. 227–229

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 512.643

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИВЕДЕНИИ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ ПАРЫ ЮНИТОИДНЫХ МАТРИЦ

Х. Д. Икрамов[1,*]

[1] *119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия*

**e-mail: ikramov@cs.msu.su*

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.
Переработанный вариант 06.07.2022 г.
Принята к публикации 14.10.2022 г.

Пусть A и B – эрмитовы $n \times n$-матрицы, причем матрица A невырожденна. Согласно известной теореме матричного анализа, приведение этих матриц к диагональному виду посредством одной и той же эрмитовой конгруэнции возможно в том и только том случае, если матрица $C = A^{-1}B$ имеет вещественный спектр и диагонализуема подобием. Формулируется и доказывается обобщение этого утверждения на случай одновременного приведения к диагональному виду пары юнитоидных матриц. Библ. 2.

Ключевые слова: эрмитова конгруэнция, юнитоид, коквадрат, блочно-диагональная матрица.

DOI: 10.31857/S0044466923020084, **EDN:** BMSMML

1. Приведение матриц к диагональному виду, о котором говорится в названии статьи, осуществляется посредством эрмитовых конгруэнций, называемых также * –конгруэнциями. Это преобразования вида

$$A \to P^*AP,$$

где P – невырожденная матрица.

Известная теорема матричного анализа утверждает следующее (см., например, [1, п. 4.5.15]).

Теорема 1. *Пусть A и B – эрмитовы $n \times n$-матрицы, причем матрица A невырожденна. Приведение этих матриц к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции возможно в том и только том случае, если матрица $C = A^{-1}B$ имеет вещественный спектр и диагонализуема подобием, т.е. найдется невырожденная матрица R такая, что*

$$R^{-1}CR = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Квадратная комплексная матрица A называется юнитоидной, или юнитоидом, если A может быть приведена к диагональному виду посредством эрмитовой конгруэнции. Юнитоидны все эрмитовы и, более общо, все нормальные матрицы. Но юнитоидом является и всякая матрица A, конгруэнтная некоторой нормальной матрице, независимо от того, нормальна ли сама A.

Наша цель в этой статье – обобщить теорему 1 на случай пары юнитоидов A и B. Доказательство этой теоремы существенно использует определяющее свойство эрмитовых матриц

$$(Ay, x) = (y, Ax) \quad \forall x, y \in \mathbf{C}^n,$$

а также вещественность чисел λ_i в (1). Оба этих обстоятельства отсутствуют в ситуации неэрмитовых юнитоидов, что приводит к необходимости изменения условий теоремы, основанном на следующем наблюдении: матрица S, приводящая A и B к диагональному виду, приводит в то же время к диагональному виду матрицы A^* и B^*. Поэтому утверждение, доказываемое в статье, формулируется как

Теорема 2. *Пусть A и B — юнитоидные $n \times n$-матрицы, причем A — невырожденная матрица. Тогда:*

а) *Если A и B могут быть приведены к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции, то матрицы $C = A^{-1}B$ и $D = A^{-1}B^*$ диагонализуемы одним и тем же подобием, т.е. найдется невырожденная матрица R такая, что*

$$R^{-1}CR = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{2}$$

и

$$R^{-1}DR = M = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n). \tag{3}$$

б) *Предположим, что не вырождены оба юнитоида A и B, причем канонические углы матрицы B попарно различны по модулю π. В этом случае из соотношений* (2) *и* (3) *следует, что A и B могут быть приведены к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции.*

Доказательство теоремы 2 проводится в п. 3 после напоминания нужных сведений в п. 2. Комментарий к теореме дан в заключительном п. 4.

2. Невырожденной матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-*}A,$$

называемую коквадратом матрицы A. Жорданова форма коквадрата в значительной мере определяет каноническую форму A относительно эрмитовых конгруэнций.

Для юнитоидной матрицы A все собственные значения ее коквадрата имеют модуль 1. В частности, ее канонической форме F соответствует в качестве коквадрата диагональная унитарная матрица.

Рассмотрим противоположную ситуацию: Γ – диагональная унитарная матрица такая, что

$$\begin{gathered} \Gamma = e^{i\phi_1}I_{m_1} \oplus e^{i\phi_2}I_{m_2} \oplus \cdots \oplus e^{i\phi_k}I_{m_k}, \\ \phi_j \in [0, 2\pi), \quad j = 1, 2, \ldots, k, \end{gathered} \tag{4}$$

где числа ϕ_j попарно различны и $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Нужно найти все матрицы A, для которых Γ является коквадратом.

Рассуждая, как в [2], можно показать, что искомые матрицы A описываются формулой

$$A = \pm e^{i\phi_1/2}H_{m_1} \oplus \pm e^{i\phi_2/2}H_{m_2} \oplus \cdots \oplus \pm e^{i\phi_k/2}H_{m_k}, \tag{5}$$

где $H_{m_1}, \ldots, H_{m_k}$ – произвольные (невырожденные) эрмитовы матрицы указанных порядков $m_1, \ldots, m_k$.

3. Утверждение а) почти очевидно. Пусть R приводит A и B, а заодно и B^* к диагональному виду:

$$R^*AR = \Omega, \quad R^*BR = \Theta, \quad R^*B^*R = \Theta^*.$$

Тогда

$$R^{-1}(A^{-1}B)R = \Omega^{-1}\Theta, \quad R^{-1}(A^{-1}B^*)R = \Omega^{-1}\Theta^*.$$

Переходя к доказательству утверждения б), предположим, что выполнены соотношения (2) и (3). Из (2) выводим

$$R^{-1}(A^{-1}B)R = \Lambda \to BR = AR\Lambda$$

и

$$R^*BR = R^*AR\Lambda. \tag{6}$$

Аналогично из (3) находим

$$R^*B^*R = R^*ARM. \tag{7}$$

Положим $S = R^*BR$. Следствием (6) и (7) является равенство

$$S\Lambda^{-1} = S^*M^{-1},$$

или равенство

$$S^{-*}S = M^{-1}\Lambda \equiv \Gamma. \tag{8}$$

Будучи конгруэнтна B, матрица S есть юнитоид. Согласно (8), диагональная матрица $\Gamma = M^{-1}\Lambda$ – это коквадрат матрицы S. Поэтому Γ – унитарная матрица. Представив ее в форме (4), приходим к тому, что S обязана иметь вид матрицы (5). Теперь из (6) следует, что матрица $T = R^*AR$ также блочно-диагональная, причем ее блочная структура вкладывается в блочную структуру матрицы S. Так как роли обеих невырожденных матриц в рассматриваемой задаче одинаковы, то S и T должны иметь одну и ту же, возможно, более мелкую, блочно-диагональную структуру с диагональными блоками порядков $n_1,\dots,n_l$ ($n_1 + \dots + n_l = n$). При этом для каждого j, $j = 1,\dots,l$, одноименные блоки S_{jj} и T_{jj} суть нормальные матрицы, различающиеся лишь скалярным множителем. Как следствие, S и T можно привести к диагональному виду дополнительной конгруэнцией, задаваемой унитарной матрицей U такой же блочной структуры. Для $j = 1,\dots,l$ блок U_{jj} матрицы U должен диагонализовать j-е диагональные блоки матриц S и T. Существование такой матрицы U доказывает утверждение б).

4. Дополним теорему 2 следующим замечанием. Из соотношений (2) и (3) вытекает

$$M^{-1}\Lambda = (R^{-1}DR)^{-1}(R^{-1}CR) = R^{-1}(D^{-1}C)R = R^{-1}(B^{-*}B)R.$$

Таким образом, матрицу R для этих соотношений следует искать среди матриц, диагонализующих коквадрат $B^{-*}B$.

И, в заключение, еще одно небезынтересное наблюдение. Пусть A и B – невырожденные $n\times n$-матрицы, причем A и B^* коммутируют:

$$AB^* = B^*A. \tag{9}$$

Тогда коммутируют также пары (A^{-1}, B^*), (A, B^{-*}) и (A^{-*}, B).

Вычислим коквадраты матриц AB и BA:

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{AB} &= (AB)^{-*}(AB) = A^{-*}B^{-*}AB = A^{-*}(B^{-*}A)B = \\ &= A^{-*}(AB^{-*})B = (A^{-*}A)(B^{-*}B) = \mathscr{C}_A\mathscr{C}_B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_{BA} &= (BA)^{-*}(BA) = B^{-*}A^{-*}BA = B^{-*}(A^{-*}B)A = \\ &= B^{-*}(BA^{-*})A = (B^{-*}B)(A^{-*}A) = \mathscr{C}_B\mathscr{C}_A.\end{aligned}$$

Тем самым при выполнении условия (9) произведению матриц A и B соответствует в качестве коквадрата произведение коквадратов $\mathscr{C}_A$ и $\mathscr{C}_B$.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую признательность рецензенту этой статьи, указавшему на серьезную неточность, допущенную в первоначальной формулировке теоремы 2. Эта неточность устранена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
2. *Икрамов Х.Д.* К опыту спектральной теории для преобразований эрмитовой конгруэнции // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2019. Т. 482. С. 114–119.