ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 3, с. 390–407

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.865

АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМОВ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИНВЕСТИЦИЙ НА НЕСОВЕРШЕННОМ РЫНКЕ КАПИТАЛА[1)]

© 2023 г. Н. К. Обросова[1,2,3,*], А. А. Шананин[1,2,3,]**

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Россия

[2] 119992 Москва, Ленинские горы, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[3] 141701 Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9, Московский физико-технический институт (НИУ), Россия

*e-mail: nobrosova@ya.ru

**e-mail: alexshan@ya.ru

Поступила в редакцию 23.06.2022 г.
Переработанный вариант 23.06.2022 г.
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Проблема возобновления рыночных инвестиций в реальном секторе российской экономики тесно связана с состоянием предпринимательской среды в условиях несовершенного рынка капитала в России и проблемой оценки доходности инвестиционных проектов. Трудности с определением показателя доходности в условиях несовершенной денежно-кредитной системы связаны с существенным расхождением процентных ставок по депозитам и кредитам и могут быть преодолены в рамках подхода Кантора–Липмана, который позволяет вычислить показатель доходности пула инвестиционных проектов, доступных инвестору. С точки зрения собственника производства рыночные инвестиции зависят от состояния предпринимательской среды и конкурируют с инвестициями в потребление. Возникает проблема оценки порогового значения показателя доходности, при котором собственнику выгодно отложить потребление в пользу рыночных инвестиций. Мы предлагаем подход к решению этой проблемы в терминах математической модели инвестиционного поведения собственника производства в условиях несовершенного рынка капитала, формализованной в виде задачи оптимального управления с фазовым ограничением на бесконечном горизонте. Решение задачи основано на построении вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Показано, что инвестиционная стратегия собственника производства может существенно зависеть от состояния предпринимательской среды. Результаты исследования задачи позволили предложить подход к объяснению перехода российской экономики из режима восстановительного роста в режим стагнации в конце 2007 г., сопровождавшийся спадом инвестиционной активности в производственной сфере. Библ. 20. Фиг. 7.

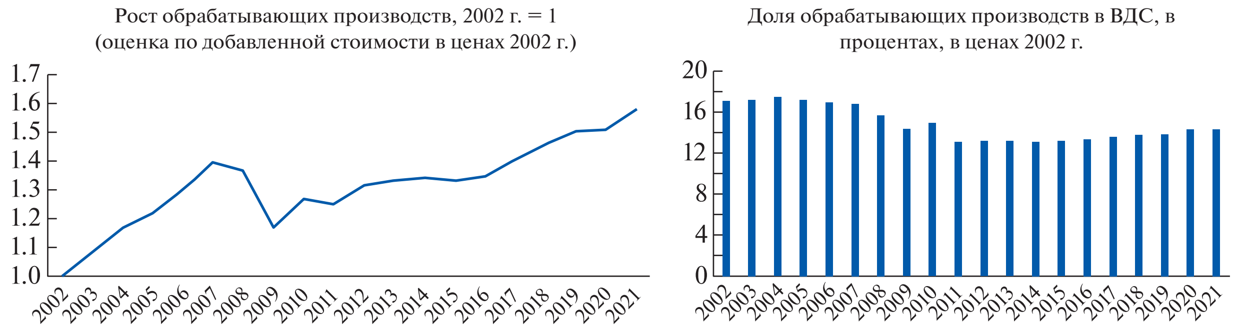
Ключевые слова: модель Кантора–Липмана, доходность инвестиций, оптимальное управление, модель инвестиций, несовершенный рынок, вязкостное решение, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

DOI: 10.31857/S0044466923030109, **EDN:** DZHUJG

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных проблем современной российской экономики является проблема стимулирования инвестиционной активности в обрабатывающем секторе с целью его технологической модернизации и повышения темпов роста производства. Решение этой проблемы важно как с точки зрения повышения конкурентоспособности продукции сектора, так и с точки зрения повышения уровня жизни населения, так как обрабатывающий сектор является наиболее трудоемким сектором экономики.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-11-00129).



Фиг. 1. Статистические показатели динамики развития обрабатывающего сектора РФ.

Ввиду исторически сложившихся особенностей российская экономика характеризуется неоднородностью ее секторов, связанной с высокой конкурентоспособностью на мировом рынке продукции добывающих (капиталоемких) отраслей и технологической отсталостью обрабатывающих (трудоемких) отраслей экономики, проигрывающих в конкуренции импортным аналогам (подробнее см. [1]). В постсоветский период экономика России прошла через несколько эволюционных этапов. Однако неоднородность и технологическая отсталость трудоемкого сектора сохранились. Перечислим кратко особенности основных этапов развития российской экономики за последние три десятилетия.

Этап 1. Трансформационный спад (1990–1998 гг.), сопровождавшийся упрощением структуры производства за счет вытеснения неэффективных технологических цепочек и замены их импортными аналогами, что привело к снижению мультипликатора в производстве с 2 до 1.3.

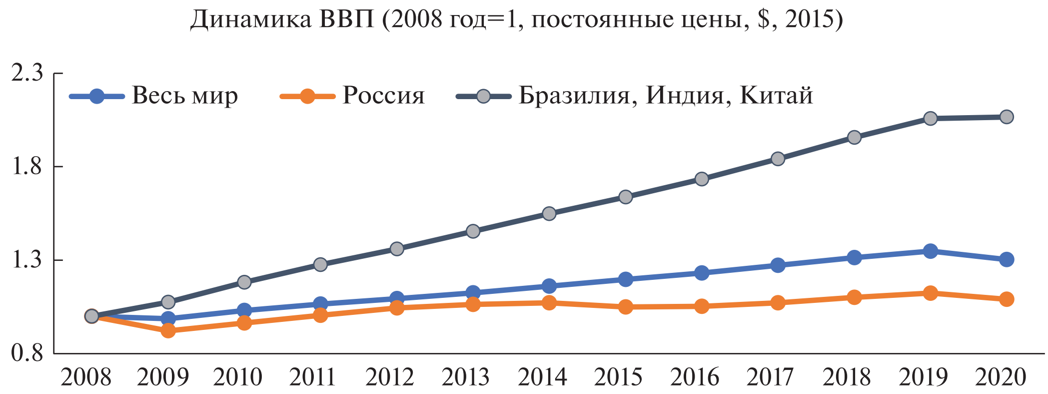
Этап 2. Восстановительный рост (1998–2008 гг.), сопровождавшийся процессами импортовытеснения в ряде отраслей, ростом мультипликатора до 1.8. В этот период важное значение имело бюджетное финансирование перспективных направлений (национальных проектов), имеющих высокую доходность (в основном, в инфраструктурных отраслях).

Этап 3. Период стагнации экономики, начавшийся к концу 2007 г. и продолжающийся до настоящего времени. В этот период в связи с выросшими транзакционными издержками снизилась доходность крупных национальных проектов в инфраструктурных отраслях, замедлились темпы экономического роста и произошел спад инвестиционной активности в производственной сфере.

На фиг. 1 представлены динамика роста в обрабатывающем секторе (левый график) и доля обрабатывающего сектора в валовой добавленной стоимости (ВДС) в России (правый график) на втором и третьем этапе эволюции экономики (источник: сайт Росстата РФ www.rosstat.gov.ru). Анализ статистических рядов подтверждает замедление темпов роста в обрабатывающем секторе после 2007 г., а также сокращение доли обрабатывающего сектора в ВДС, которая до настоящего времени не вернулась к уровню начала 2000-х годов.

Следует отметить, что тенденции общемировой динамики экономического роста и аналогичных показателей для крупных развивающихся экономик существенно отличаются от показателей роста российской экономики России в период стагнации. По данным Всемирного Банка за период 2008–2019 гг. экономика России выросла на 12.4%, в то время как мировая экономика выросла на 34.9%. Данная ситуация проиллюстрирована на фиг. 2, где приведены статистические данные о динамике валового внутреннего продукта (ВВП) не только для российских данных, но и для общемировых показателей, а также для агрегированного показателя трех крупных развивающихся экономик мира (Бразилии, Индии и Китая).

Спад инвестиционной активности в обрабатывающем секторе отечественной экономики в период стагнации требует объяснения, учитывающего особенности российской ситуации. Естественным подходом к решению данного вопроса являются математические модели экономики, основанные на описании интересов и логики поведения основных экономических агентов с учетом особенностей сложившихся экономических отношений и позволяющие анализировать косвенные причины изменения стратегий поведения агентов. Значительный опыт таких исследований накоплен научной школой академиков Н.Н. Моисеева и А.А. Петрова (см. [2], [3]). В настоящей статье мы продолжаем исследования в данном направлении и строим математическую модель инвестиционного поведения собственника в производственной сфере, учитывающую



Фиг. 2. Динамика ВВП крупных развивающихся экономик и всего мира.

особенности рынка инвестиций в России. Результаты исследования модели позволяют предложить подход к объяснению механизмов восстановления роста в обрабатывающем секторе отечественной экономики.

Одной из важных особенностей российских экономических условий является несовершенство рынка капитала, характеризующееся значительным расхождением процентных ставок по кредитам и депозитам финансовых организаций. Наша гипотеза заключается в том, что причиной сокращения рыночных инвестиций на рубеже 2008 г. и перехода в режим стагнации российской экономики стало изменение состояния предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала. Для анализа состоятельности данной гипотезы необходимо ответить на следующие вопросы.

- Что такое предпринимательская среда и как ее моделировать в российских условиях?
- Как описывать изменение состояния предпринимательской среды и как построить числовую характеристику этого состояния?
- Как моделировать поведение собственника капитала в зависимости от характеристики состояния предпринимательской среды?

Ответы на эти вопросы неочевидны и требуют учета отмеченных выше особенностей сложившихся экономических отношений.

Описание предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала мы предлагаем проводить в рамках подхода Кантора–Липмана, который впервые был предложен в [4], [5] и развит в более поздних публикациях многих авторов (см. [6–13]). В разд. 1 мы приводим описание модели Кантора–Липмана и даем краткий обзор результатов исследований и развития модели. Эти результаты обосновывают использование модели Кантора–Липмана для описания предпринимательской среды в условиях несовершенного рынка капитала и позволяют вычислить числовую характеристику предпринимательской среды, являющуюся показателем доходности пула всех доступных инвестору инвестиционных проектов. Такой показатель доходности при некоторых дополнительных предположениях может быть вычислен как минимальный положительный корень инвестиционной функции, которая строится в терминах модели. Тем самым мы предлагаем ответ на первые два поставленных выше вопроса.

В разд. 2 мы переходим к рассмотрению третьего вопроса и показываем, что классические модели потребительского поведения типа модели Рамсея (см. [15]) плохо подходят для целей нашего исследования, а именно, не позволяют описать существенную связь между стратегией поведения инвестора на несовершенном рынке капитала и характеристикой предпринимательской среды, вычисленной в терминах модели Кантора–Липмана. Далее в разд. 3 мы предлагаем подход к моделированию поведения инвестора на несовершенном рынке капитала, который позволяет проанализировать такую связь. Мы строим математическую модель инвестиционного поведения собственника производства в сложившейся предпринимательской среде с показателем доходности r, который может быть вычислен в терминах подхода Кантора–Липмана и является входным параметром модели. Для описания потребительского поведения собственника мы используем новый подход, который предполагает заинтересованность собственника в накоплении средств потребления (объектов недвижимости, предметов роскоши и т.п.) наряду с инвестиционной деятельностью. Модель формализована в виде задачи оптимального управления с фазовым ограничением на бесконечном горизонте. Исследование задачи основано на изучении свойств решения аналогичной задачи оптимального управления на конечном горизонте времени и дальнейшем построении обобщенного (вязкостного) решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, соответствующего исходной задаче. Данная задача оптимального управления проанализирована авторами в [16]. В разд. 4 статьи мы приводим схему исследования задачи и основные результаты. Экономическая интерпретация полученных результатов обсуждается в разд. 5. Результаты исследования модели позволяют проявить зависимость инвестиционного поведения собственника предприятия от начального уровня его капитала и характеристики состояния предпринимательской среды. Показано, что активность инвестиционной деятельности малого и среднего бизнеса в производственном секторе зависит от характеристик предпринимательской среды, сложившейся на несовершенном рынке капитала и рост доходности предпринимательской среды приводит к переключению поведения собственника из режима приоритетного потребления в режим приоритетного инвестирования. В то же время представители крупного бизнеса оказываются нейтральны по отношению к изменению состояния предпринимательской среды.

В разд. 6 мы возвращаемся к описанию предпринимательской среды в терминах подхода Кантора–Липмана применительно к ситуации в России на рубеже 2008 г. На основе результатов исследования модели поведения собственника мы приводим возможное объяснение механизма переключения из режима восстановительного роста в режим стагнации в обрабатывающем (трудоемком) секторе отечественной экономики при ухудшении характеристик предпринимательской среды.

2. ОПИСАНИЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСКОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОГО РЫНКА КАПИТАЛА. МОДЕЛЬ КАНТОРА–ЛИПМАНА

В ситуации несовершенного рынка капитала перестают работать традиционно используемые в теории корпоративных финансов подходы к оценке инвестиционных проектов, основанные на расчете доходности с помощью показателя NPV (Net Present Value) – чистой приведенной стоимости денежных потоков, связанных с проектом. В рамках данного подхода инвестиционный проект описывается распределенными во времени финансовыми потоками $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, связанными с вложением средств ($a_i < 0$) и получением выплат ($a_i > 0$) по проекту в i-й период времени от начала проекта, $i = 0,1,\ldots,n$, где n – конечно, т.е. предполагается, что проект полностью завершается через определенный период времени. Если платежи осуществляются через некоторые равные промежутки времени, то NPV проекта с вектором потоков платежей $\mathbf{a}$ вычисляется по формуле

$$NPV(\mathbf{a}, r) = a_0 + a_1 e^{-r} + \ldots + a_n e^{-rn}, \tag{2.1}$$

где r – дефлятор денежных потоков, позволяющий привести все финансовые потоки проекта к начальному моменту времени. В теории корпоративных финансов в качестве такого дефлятора предлагается рассматривать показатель доходности общедоступного для инвесторов альтернативного способа вложения средств. Предполагается, что проект $\mathbf{a}$ следует считать рентабельным и поддерживать, если рассчитанный с использованием дефлятора r показатель $NPV(\mathbf{a}, r) > 0$, и считать нерентабельным, если $NPV(\mathbf{a}, r) < 0$. Возникает вопрос о выборе дефлятора денежных потоков r, так как от его величины существенно зависит оценка рентабельности проектов по критерию NPV. Очевидно, что величина дефлятора r заключена между процентными ставками по депозитам r_{D} и кредитам r_{L}, т.е. $r_{\mathrm{D}} \le r \le r_{\mathrm{L}}$. Поэтому вопрос выбора дефлятора r не так важен в условиях совершенного рынка капитала (в странах с развитой рыночной экономикой), так как процентные ставки по кредитам и депозитам в этом случае близки друг к другу и значение r определяется достаточно точно $r \approx r_{\mathrm{D}} \approx r_{\mathrm{L}}$. В ситуации несовершенного рынка капитала, характерного для России, расхождение процентных ставок велико, $r_{\mathrm{D}} < r_{\mathrm{L}}$, и рентабельность проекта существенно зависит от выбора значения дефлятора r из диапазона $r_{\mathrm{D}} \le r \le r_{\mathrm{L}}$. Поэтому на несовершенном рынке капитала возникает проблема выбора значения дефлятора денежных потоков r инвестиционного проекта. Для определения значения дефлятора следует формализовать понятие общедоступных альтернативных проектов по вложению средств. На несовершенном рынке капитала доходности таких вложений зависят не только от показателей экономической среды, но и от индивидуальных характеристик инвестора, что приводит к их неоднозначности.

Решение этой проблемы было предложено в работах Кантора и Липмана (см. [4], [5]), в которых доходность инвестиционных проектов вычисляется на основе решения задачи управления интенсивностью реализации проекта с целью максимизации дохода инвестора при условии завершения всей инвестиционной деятельности к терминальному моменту времени. Модель Кантора—Липмана позволяет формализовать описание предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала как полного пула общедоступных инвесторам проектов по вложению средств и вычислить единую величину дефлятора денежных потоков r, характеризующего этот пул проектов. Значение этого дефлятора отражает доходность альтернативного способа вложения денег в условиях сформировавшейся предпринимательской среды.

В модели Кантора—Липмана предпринимательская среда описывается пулом всех доступных инвестору проектов

$$\mathbf{a}^m = \left(a_0^m, a_1^m, \ldots, a_n^m\right), \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

где $n+1$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов (если проект заканчивается раньше, то соответствующие компоненты дополняются нулями). Для решения задачи оценки дефлятора r как доходности альтернативного общедоступного способа вложения денег следует предположить, что все входящие в пул проекты являются стационарными и тиражируемыми. Стационарность проекта означает, что проект является доступным в неизменном виде в любой момент времени. Тиражируемость проекта означает, что в каждый момент времени t проект m может запускаться с произвольной постоянной для данного проекта интенсивностью $u_m(t) \geq 0$. Принимая решение относительно финансовых вложений, инвестор формирует инвестиционную стратегию $\{u_m(t) \,|\, m = 1, 2, \ldots, M;\ t = 0, 1, \ldots, T - n - 1\}$ при условии, что к моменту времени T вся инвестиционная деятельность должна завершиться. Тогда динамика остатка расчетного счета $s(t)$ инвестора описывается соотношением

$$s(t+1) = s(t) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t-k), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Заметим, что пул проектов включает, в том числе, проекты депонирования под процент r_{D} и кредитования под процент r_{L}, если они доступны инвестору. Поэтому дополнительных возможностей занимать и вкладывать деньги у инвестора нет и выполняется условие самофинансирования $s(t) \geq 0,\ t = 1, 2, \ldots, T$. В модели Кантора—Липмана рассматривается следующая задача об оптимальной стратегии инвестирования:

$$s(T) \to \max, \tag{2.2}$$

$$s(t+1) = s(t) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t-k), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{2.3}$$

$$s(t) \geq 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{2.4}$$

$$s(0) = x_0 > 0, \tag{2.5}$$

$$u_m(t) \geq 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M; \quad t = 0, 1, \ldots, T-n-1, \tag{2.6}$$

$$u_m(t) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M; \quad t = -n, -n+1, \ldots, -1, \quad t = T-n, T-n+1, \ldots, T-1. \tag{2.7}$$

Отметим, что условие полного завершения инвестиционной деятельности к терминальному моменту времени приводит к ограничению (2.7). Выполнение условия (2.7) гарантирует, что инвестиционный процесс не является финансовой пирамидой, из которой нельзя выйти, фиксировав доход. Именно это условие гарантирует единственность значения дефлятора денежных потоков проекта в результате решения задачи (подробнее см. [8], [12]).

Обозначим через V_T оптимальное значение функционала в задаче (2.2)—(2.7).

Введем понятие инвестиционной функции $F(r)$, которая определяется как поточечный максимум показателей NPV (см. (2.1)) всех проектов, входящих в доступный пул проектов инвестора:

$$F(r) = \max_{1 \leq m \leq M} \sum_{k=0}^{n} a_k^m e^{-rk}, \quad r \in [0, +\infty). \tag{2.8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (Д.Г. Кантор, С.А. Липман, см. [4], [5]).

1. Если $F(0) \le 0$, то для любого $T \ge 0$, $V_T = x_0$ (пул инвестиционных проектов убыточен).

2. Если $F(r) > 0$ для всех $r \in [0,\infty)$, то существует $T_0 > 0$ такое, что для любого $T \ge T_0$ справедлива оценка $V_T = +\infty$ (пул инвестиционных проектов допускает арбитраж).

3. Если $F(0) > 0$, существует $\tilde{r} > 0$ такое, что $F(\tilde{r}) < 0$, и $\rho > 0$ — наименьший положительный корень уравнения $F(r) = 0$, то ρ является доходностью пула инвестиционных проектов, т.е. $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{\ln(V_T)}{T} = \rho$.

4. Если ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$, причем ρ — простой корень, т.е. $\left|\left\{m \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^m e^{-\rho k} = F(\rho)\right.\right\}\right| = 1$ и $F'(\rho) \ne 0$, то существуют положительные константы $0 < c < C$ такие, что $ce^{\rho T} \le V_T \le Ce^{\rho T}$.

Из теоремы 1 следует, что в условиях несовершенного рынка капитала темп роста доходов r при реализации пула инвестиционных проектов (дефлятор денежных потоков) может быть найден как минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$. Тем самым теорема Кантора–Липмана позволяет решить вопрос об оценке дефлятора r, используемого в (2.1) для вычисления NPV проекта. В рамках этого подхода также удается решить проблему множественности альтернативной характеристики проекта — величины IRR (internal rate of return), ставкой дисконта, при которой NPV проекта обращается в нуль.

Предложенный Д.Г. Кантором и С.А. Липманом подход к построению оценки доходности пула тиражируемых инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала получил развитие в [4–14]. В работе Л. Адлера и Д. Гейла с использованием теоремы А. Пуанкаре была установлена связь условия оценки Кантора–Липман (см. [4, 5]) доходности пула тиражируемых инвестиционных проектов с теоремой об арбитраже. В [7, 8] И.М. Сонина и Э.Л. Пресмана переформулировали постановку задачи об оптимальной стратегии инвестирования в терминах динамики вектора, задающего финансовую позицию инвестора. Компоненты этого вектора определяют текущие и будущие запасы ликвидных средств инвестора при условии, что он не начинает новых инвестиционных проектов. В терминах динамики вектора финансовых позиций исследованы режимы сбалансированного роста, введено понятие ликвидных финансовых состояний и охарактеризованы режимы, являющиеся финансовыми пирамидами. Подход И.М. Сонина и Э.Л. Пресмана получил развитие в работе В.З. Беленького (см. [9]), в которой модель Кантора–Липмана интерпретировалась как обобщенная модель экономического роста Неймана–Гейла, а результаты ее исследования трактовались как анализ магистральных эффектов в соответствующей краевой задаче.

В [12–14] задача об оценке финансового состояния инвестора формализована в виде уравнения Беллмана, решение которого позволяет строить оценки финансовых состояний инвестора и оценивать их ликвидность на основе принадлежности к конусу ликвидных состояний. В [12] показано, что невырожденное решение уравнения Беллмана в конусе ликвидных состояний существует только в том случае, если в качестве дефлятора денежных потоков выбран минимальный положительный корень инвестиционной функции (построенной как поточечный максимум преобразований Лапласа денежных потоков всего пула инвестиционных проектов, доступных инвестору). Классический вариант модели Кантора–Липмана сформулирован для дискретного времени, когда моменты времени поступления денежных потоков синхронизированы. В [11] подход Кантора–Липмана обобщен на случай непрерывного времени, для которого доказан аналог теоремы 1. Это позволяет расширить возможности применения модели Кантора–Липмана в моделях экономической динамики. В [8] исследована более общая постановка задачи инвестора, в которой авторы отказываются от условия (2.7). Доказано, что в этом случае инвестиционная стратегия с доходностью, превышающей минимальный корень инвестиционной функции, требует постоянных реинвестиций для поддержания роста, т.е. из такого инвестиционного процесса нельзя выйти и фиксировать доход (ситуация “финансовой пирамиды”).

Результаты исследования модели и ее модификаций показывают, что подход Кантора–Липмана позволяет

• формализовать описание предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала;

• однозначно решить вопрос о выборе дефлятора финансовых потоков r на несовершенном рынке капитала при расчете показателя $NPV(\mathbf{a}, r)$ инвестиционного проекта $\mathbf{a}$, определенного в (2.1); тем самым дать однозначный ответ о рентабельности проекта $\mathbf{a}$;

• вычислить значение дефлятора финансовых потоков r, используемого в выражении (2.1) для расчета показателя $NPV(\mathbf{a}, r)$, как минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$, определенной в (2.8).

• корректно ввести понятие состояния предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала, определяя его как значение дефлятора финансовых потоков r, вычисленного в терминах модели.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННИКА ПРОИЗВОДСТВА НА НЕСОВЕРШЕННОМ РЫНКЕ КАПИТАЛА

Предположим, что собственник капитала принимает инвестиционные решения в производственном секторе в условиях сформировавшейся предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала, которую мы будем описывать с помощью модели Кантора–Липмана. Тогда характеристика состояния предпринимательской среды r (доходность пула доступных инвестиционных проектов), определяемая как минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$, является экзогенным входным параметром при описании инвестиционного поведения собственника.

Замечание 1. В условиях существенного расхождения процентных ставок по депозитам и кредитам доходность предпринимательской среды r, вычисленная в терминах модели Кантора–Липмана, будет ниже процента по кредитам, т.е. $r < r_{\mathrm{L}}$. Поэтому на несовершенном рынке капитала собственнику невыгодно поддерживать инвестиционную деятельность за счет кредитных средств, а источником рыночных инвестиций в производство является, преимущественно, чистая прибыль собственника от производственной деятельности.

Предположим, что инвестиционное поведение собственника производства определяется выбором одной из двух альтернатив: рыночные инвестиции в производство с доходностью r или расходование полученной от производственной деятельности чистой прибыли на собственные нужды, т.е. на потребление. Целью нашего исследования является анализ гипотезы о том, что состояние предпринимательской среды в условиях несовершенного рынка капитала может влиять на решения собственника о способе вложения свободных средств. Поэтому в математической модели должна быть учтена существенная зависимость между поведением собственника производства и характеристикой состояния предпринимательской среды r.

Классическим подходом к описанию потребительского поведения являются модели рамсеевского типа, в которых экономический агент максимизирует дисконтированное потребление при бюджетном ограничении (см. [15]). Однако, как мы покажем далее, такой тип моделей плохо подходит для целей нашего исследования.

Рассмотрим финансовую деятельность собственника производства, который в каждый момент времени $t \geq 0$ получает мгновенную чистую прибыль π от производственной деятельности (после уплаты всех налогов и обязательных платежей). Предположим, что собственник может расходовать прибыль либо на конечное потребление в объеме $C(t) \geq 0$, либо на инвестиции в производство в предпринимательской среде, характеризующейся доходностью r.

Предположим, что в начальный момент времени собственник обладает положительным начальным капиталом $M_0 > 0$. Тогда с учетом сделанных предположений динамика капитала $M(t)$ собственника производства определяется следующим уравнением:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \pi - C(t) + rM(t), \quad M(0) = M_0 > 0, \tag{3.1}$$

где $rM(t)$ – доход от инвестиций в производство в предпринимательской среде с показателем доходности r.

Напомним, что заемные средства не могут обеспечивать инвестиционную деятельность на несовершенном рынке капитала (см. замечание 1), поэтому должно выполняться условие неотрицательности капитала собственника

$$M(t) \geq 0. \tag{3.2}$$

Пример. Следуя традиционной схеме Рамсея, предположим, что целью собственника является максимизация дисконтированного с коэффициентом $\delta > 0$ потребления $C(t)$ за конечный период времени $[0,T]$. Тогда с учетом (3.1), (3.2) получим, что выбор стратегии $C(t) \geq 0$ потребительского поведения собственника определяется как решение следующей задачи оптимального управления с фазовым ограничением:

$$\int_0^T C(t)e^{-\delta t}dt \to \max, \tag{3.3}$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \pi - C(t) + rM(t), \tag{3.4}$$

$$M(0) = M_0 > 0, \tag{3.5}$$

$$M(t) \geq 0, \tag{3.6}$$

$$C(t) \geq 0. \tag{3.7}$$

Предложение 1. *Оптимальное поведение собственника в задаче* (3.3)–(3.7) *в зависимости от соотношения параметров модели определяется одним из двух режимов.*

Режим 1. Если $r < \delta$ (низкая доходность инвестиций), то оптимальная стратегия собственника заключается в потреблении всего начального запаса капитала M_0 в нулевой момент времени и дальнейшее поддержание потребления на максимальном уровне за счет всей прибыли от производственной деятельности в условиях полного отсутствия инвестиций, т.е.

$$C(0) = \delta(t)M_0, \quad C(t) \equiv \pi, \quad M(t) \equiv 0 \quad \text{при всех} \quad t \in (0,T],$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция.

Режим 2. Если $r > \delta$ (высокая доходность инвестиций), то собственник откладывает потребление до конца временного горизонта планирования своей деятельности, инвестирует всю прибыль в производство, а в конце периода потребляет все накопленные средства, т.е.

$$C(t) \equiv 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [0,T), \quad C(T) = \delta(t-T)M(T),$$

где $\delta(t-T)$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке T.

Доказательство. Рассмотрим значение функционала (3.3) для режимов 1 и 2 и покажем, что для любой другой допустимой траектории $C(t)$ значение функционала не может увеличиться.

1. Пусть $r < \delta$. Обозначим функционал в задаче (левая часть (3.3)) через $\Phi(T)$ и найдем его значение $\Phi_1(T)$ в режиме 1:

$$\Phi_1(T) = \int_0^T C(t)e^{-\delta t}dt = M_0 + \frac{\pi}{\delta}\left(1 - e^{-\delta T}\right).$$

Предположим, что существует траектория $C(t)$, отличная от режима 1, в которой значение функционала $\Phi(T)$ будет больше, чем $\Phi_1(T)$. Из (3.4) имеем

$$C(t) = \pi - \frac{dM(t)}{dt} + rM(t). \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в функционал (3.3) и интегрируя по частям, получим

$$\Phi(T) = \int_0^T \left(\pi - \frac{dM(t)}{dt} + rM(t)\right)e^{-\delta t}dt =$$

$$= M_0 + \frac{\pi}{\delta}\left(1 - e^{-\delta T}\right) - M(T)e^{-\delta T} + \int_0^T (r-\delta)M(t)e^{-\delta t}dt \leq M_0 + \frac{\pi}{\delta}\left(1 - e^{-\delta T}\right) = \Phi_1(T).$$

Последнее неравенство очевидно следует из соотношения $r - \delta < 0$ и условия (3.6). Противоречие.

2. Пусть $r > \delta$. Обозначим значение функционала $\Phi(T)$ в режиме 2 через $\Phi_2(T)$. В режиме 2 уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{dM(t)}{dt} = \pi + rM(t), \quad t \in [0, T).$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$M(t) = -\frac{\pi}{r} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{rt}, \tag{3.9}$$

тогда

$$\Phi_2(T) = -\frac{\pi}{r}e^{-\delta T} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{(r-\delta)T}.$$

Предположим, что существует траектория $C(t)$, отличная от режима 2, в которой значение функционала $\Phi(T)$ будет больше, чем $\Phi_2(T)$. Аналогично случаю 1, имеем

$$\Phi(T) = \int_0^T \left(\pi - \frac{dM(t)}{dt} + rM(t)\right)e^{-\delta t}dt = M_0 + \frac{\pi}{\delta}\left(1 - e^{-\delta T}\right) - M(T)e^{-\delta T} + \int_0^T (r-\delta)M(t)e^{-\delta t}dt.$$

Учитывая (3.9), получим

$$\int_0^T (r-\delta)M(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^T (r-\delta)\left(-\frac{\pi}{r} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{rt}\right)e^{-\delta t}dt =$$
$$= \frac{(\delta - r)}{\delta r}\pi\left(1 - e^{-\delta T}\right) + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)\left(e^{(r-\delta)T} - 1\right).$$

С учетом (3.6) легко показать, что

$$\Phi(T) = -\frac{\pi}{r}e^{-\delta T} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{(r-\delta)T} - M(T)e^{-\delta T} = \Phi_2(T) - M(T)e^{-\delta T} \le \Phi_2(T).$$

Получили противоречие. Тем самым режимы 1 и 2 являются оптимальным решением в задаче (3.3)–(3.7). Предположение 1 доказано.

Решение задачи (3.3)–(3.7) показывает, что оптимальные режимы потребления и инвестиций в рассмотренном варианте модели являются тривиальными, нет оптимального режима с одновременным потреблением и инвестициями. При этом поведение системы однотипное при любых значениях начальных условий. При стремлении горизонта планирования к бесконечности интеграл (3.3) расходится, если $r > \delta$, т.е. решение задачи не существует. Рассмотрение более общих вариантов моделей потребительского поведения рамсеевского типа позволяет подробно описывать динамику потребительского поведения домашних хозяйств и их поведения на рынке депозитов и кредитования (см., например, [17], [18]), однако, аналогично рассмотренной в примере модели, не позволяют дать содержательный ответ на вопрос о зависимости инвестиционных решений собственника от доходности предпринимательской среды. Таким образом, в рамках моделей рамсеевского типа не удается объяснить переключение из режима инвестиционного роста в режим стагнации в производственной сфере.

В настоящей работе мы предлагаем альтернативный подход, в котором целью собственника является развитие сектора потребления, обладающего своими потребительскими мощностями (недвижимость, предметы роскоши т.п.). Предположим, что собственник заинтересован в максимизации дисконтированного уровня средств потребления $k(t) \ge 0$ в потребительском секторе. Исходя из уровня накопленных к текущему моменту средств потребления $k(t)$, собственник планирует расходы на приобретение новых средств потребления в объеме $\zeta k(t)$, где $\zeta \ge 0$ – параметр, характеризующий максимальный темп роста средств потребления. Однако в зависимости от состояния конъюнктуры реализация планов может происходить не в полном объеме. Таким образом, в каждый момент времени t собственнику доступны два способа вложения свободных средств:

• реализация доли $v(t)$ новых потребительских планов $\zeta k(\mathrm{t})$, где $v(t) \in [0,1]$ – параметр управления;

• рыночные инвестиции в производство в предпринимательской среде с доходностью r.

Тогда динамика средств потребления собственника описывается уравнением

$$\frac{dk}{dt} = v\zeta k,$$

где $k(0) = k_0 > 0$, а изменение капитала собственника определяется уравнением

$$\frac{dM}{dt} = \pi - v\zeta k + rM,$$

с начальным условием $M(0) = M_0 > 0$.

Цель собственника – максимизация дисконтированных с коэффициентом $\delta > 0$ средств потребления на бесконечном горизонте:

$$\int_0^{+\infty} k(t)e^{-\delta t}dt \to \max. \tag{3.10}$$

Замечание 2. 1) Выбор бесконечного горизонта интегрирования в целевом функционале (3.10) имеет естественную интерпретацию. Предположим, что горизонт планов собственника $T > 0$ конечен, но заранее собственнику неизвестен и является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с некоторым показателем $\gamma > 0$. В условиях неопределенности окончания деятельности естественно рассматривать задачу о максимизации математического ожидания дисконтированных средств потребления собственника, функционал в которой будет равен

$$\int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma T}\int_0^T k(t)e^{-\delta t}dtdT = \int_0^{+\infty} k(t)e^{-\delta t}\int_t^{+\infty} \gamma e^{-\gamma T}dTdt = \int_0^{+\infty} k(t)e^{-(\delta+\gamma)t}dt.$$

Таким образом, задача по-прежнему формализуется в виде (3.10), где в качестве нового коэффициента дисконтирования следует рассматривать величину $\gamma + \delta$.

2) Будем предполагать, что собственник строит планы новых потребительских проектов $\zeta k(\mathrm{t})$, исходя из предположения об их “реальности”. Формально это означает, что выполняется условие $\zeta < \delta$, гарантирующее сходимость интеграла (3.10).

В рамках сделанных предположений модель инвестиционного поведения собственника производства формализуется в виде следующей задачи:

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty} k(t)e^{-\delta t}dt \to \max_v, \quad \frac{dk}{dt} = v\zeta k, \quad k(0) = k_0 > 0,\\ \frac{dM}{dt} = \pi - v\zeta k + rM, \quad M(0) = M_0 > 0\ , \quad M(t) \ge 0, \quad 0 \le v \le 1.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Задача (4.2), называемая далее P_∞, представляет собой задачу оптимального управления на бесконечном горизонте с ограничением на фазовую переменную $M(t) \ge 0$, которое отражает условие несовершенства рынка капитала в рассматриваемой модели (см. замечание 1). Такая постановка приводит к техническим трудностям в ходе исследования модели. Исследование задачи оптимального управления P_∞ приведено авторами в [16]. В следующем разделе настоящей работы мы приведем краткую схему исследования и сформулируем основные результаты, доказательство которых можно найти в [16].

4. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННИКА. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу оптимального управления на конечном интервале времени T:

$$\begin{gathered}\int_0^T k(t)e^{-\delta t}dt \to \max_v, \quad \frac{dk}{dt} = v\zeta k, \quad \frac{dM}{dt} = \pi - v\zeta k + rM, \\ k(0) = k_0 > 0, \quad M(0) = M_0 > 0, \quad M(t) \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Решение задачи (4.1), называемой далее P_T, проанализировано в [16]. Схема исследования сводится к применению принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовым ограничением, приведенного, например, в [19, с. 185], и дальнейшему изучению поведения траекторий прямой и сопряженной систем задачи P_T в зависимости от значений параметров задачи и начальных условий. Приведем формулировки результатов.

Утверждение 1 (см. [16]). Рассмотрим случай $r < \delta$. Справедливы следующие утверждения.

1) В области значений начальных условий (M_0, k_0), определяемой соотношением

$$0 < M_0 < k_0\frac{\zeta}{\zeta - r}\left(e^{(\zeta - r)T} - 1\right) + \frac{\pi}{r}\left(e^{-rT} - 1\right), \tag{4.2}$$

уравнение

$$M_0e^{r\hat{T}} + \frac{\pi}{r}\left(e^{r\hat{T}} - 1\right) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta\hat{T}} - e^{r\hat{T}}\right) = 0$$

имеет единственный корень $\hat{T} \in [0, T)$, и решение задачи P_T определяется следующими соотношениями:

$$v(t) = \begin{cases}1, & 0 \leq t < \widehat{T}, \\ \dfrac{\pi}{\zeta k(t)}, & \hat{T} < t \leq T;\end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases}k_0e^{\zeta t}, & 0 \leq t < \widehat{T}, \\ k_0e^{\zeta\hat{T}} + \pi\left(t - \hat{T}\right), & \hat{T} < t \leq T;\end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases}M_0e^{rt} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \dfrac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta t} - e^{rt}\right), & 0 \leq t < \widehat{T}, \\ 0, & \hat{T} < t \leq T.\end{cases}$$

2) В области значений начальных условий (M_0, k_0), удовлетворяющих неравенству

$$M_0 \geq k_0\frac{\zeta}{\zeta - r}\left(e^{(\zeta - r)T} - 1\right) + \frac{\pi}{r}\left(e^{-rT} - 1\right), \tag{4.3}$$

решение задачи P_T при любых $t \in [0, T]$ определяется соотношениями

$$v(t) = 1,$$

$$k(t) = k_0e^{\zeta t},$$

$$M(t) = M_0e^{rt} + \frac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta t} - e^{rt}\right).$$

Утверждение 2. Рассмотрим случай $r > \delta$. Справедливы следующие утверждения.

1) В области значений начальных условий (M_0, k_0), определяемой неравенствами (4.2), т.е.

$$0 < M_0 < k_0\frac{\zeta}{\zeta - r}\left(e^{(\zeta - r)T} - 1\right) + \frac{\pi}{r}\left(e^{-rT} - 1\right),$$

существует единственное решение $(\tilde{T},\hat{T})$ системы уравнений

$$\begin{cases} M_0 e^{r\hat{T}} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{r\hat{T}} - 1\right) - \dfrac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta(\hat{T}-\tilde{T})} - e^{r(\hat{T}-\tilde{T})}\right) = 0, \\ \dfrac{r}{\delta(r-\zeta)}\left(1 - e^{r(\hat{T}-T)}\right)\left(e^{(\delta-\zeta)(\tilde{T}-\hat{T})} - e^{(\delta-r)(\tilde{T}-\hat{T})}\right) + \dfrac{1}{\delta-\zeta}\left(1 - e^{(\delta-\zeta)(\tilde{T}-\hat{T})}\right) = 0, \end{cases}$$

причем $0 \le \tilde{T} < \hat{T} \le T$.

Решение задачи P_T определяется соотношениями

$$v(t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le t \le \tilde{T}, \\ 1, \quad \tilde{T} \le t \le \hat{T}, \\ \dfrac{\pi}{\zeta\left(k_0 e^{\zeta(\hat{T}-\tilde{T})} + \pi\left(t-\hat{T}\right)\right)}, \quad \hat{T} \le t \le T; \end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases} k_0, \quad 0 \le t \le \widetilde{T}, \\ k_0 e^{\zeta(t-\tilde{T})}, \quad \tilde{T} \le t \le \widehat{T}, \\ k_0 e^{\zeta(\hat{T}-\tilde{T})} + \pi\left(t-\hat{T}\right), \quad \hat{T} \le t \le T; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right), \quad 0 \le t \le \widetilde{T}, \\ M_0 e^{rt} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \dfrac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta(t-\tilde{T})} - e^{r(t-\tilde{T})}\right), \quad \tilde{T} < t \le \widehat{T}, \\ 0, \quad \hat{T} < t \le T. \end{cases}$$

2) В области значений начальных условий (M_0, k_0), удовлетворяющих неравенству (4.3), т.е.

$$M_0 \ge k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r}\left(e^{(\zeta-r)T} - 1\right) + \frac{\pi}{r}\left(e^{-rT} - 1\right),$$

решение задачи P_T при любых $t \in [0,T]$ определяется соотношениями

$$v(t) = 1,$$

$$k(t) = k_0 e^{\zeta t},$$

$$M(t) = M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta t} - e^{rt}\right).$$

Замечание 3. 1) Утверждения 1, 2 позволяют разделить фазовую плоскость (M_0, k_0) на две области с разными режимами оптимального управления для задачи P_T. Граница между областями определяется равенством

$$M_0 = k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r}\left(e^{(\zeta-r)T} - 1\right) + \frac{\pi}{r}\left(e^{-rT} - 1\right). \tag{4.4}$$

2) При $T \to \infty$ линейная граница (4.4) на плоскости (M_0, k_0) стремится к прямой:

$$k_0 = (rM_0 + \pi)\frac{(r-\zeta)_+}{r\zeta}. \tag{4.5}$$

Вернемся теперь к исходной задаче P_∞ с бесконечным горизонтом. Необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче P_∞ – существование функции цены, удовлетворяющей уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана для задачи P_∞, в котором закон управления, соответствующий оптимальной траектории, является максимизатором.

Задаче оптимального управления P_∞ соответствует уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана вида (см. [20, гл. 1, ч. 3])

$$\delta V = k + \zeta k\left(\frac{\partial V}{\partial k} - \frac{\partial V}{\partial M}\right)_+ + \frac{\partial V}{\partial M}(\pi + rM). \tag{4.6}$$

Анализ решения задачи P_T на конечном горизонте позволяет найти вязкостное (обобщенное) (см. [20]) решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для задачи P_∞ и построить позиционное оптимальное управление в исходной модели. В [16] доказаны следующие основные результаты.

Теорема 2 (см. [16]). Пусть $r < \delta$. Тогда для задачи P_∞ справедливы следующие утверждения.

1) Оптимальное управление определяется выражением

$$v(k,M) = \begin{cases} 1, & M > 0, \\ \min\left(\dfrac{\pi}{\zeta k}, 1\right), & M = 0. \end{cases}$$

2) Функция цены

$$V_1(k,M) = \begin{cases} \dfrac{k}{\delta - \zeta} - \dfrac{\zeta k}{\delta(\delta - \zeta)} e^{-(\delta-\zeta)\hat{T}(M,k)} + \dfrac{\pi}{\delta^2} e^{-\delta\hat{T}(M,k)}, & \text{если} \quad rM + \pi < \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta}, \\ \dfrac{k}{\delta - \zeta}, \quad \text{если} \quad rM + \pi \ge \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta}, \end{cases}$$

является дифференцируемой функцией и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.6). Величина $\hat{T}(M,k) > 0$ является единственным корнем уравнения

$$\left(rM + \pi - \frac{r\zeta k}{r - \zeta}\right) e^{r\hat{T}} = \pi - \frac{r\zeta k}{r - \zeta} e^{\zeta\hat{T}}$$

при $rM + \pi < \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta}$, $r - \zeta > 0$. В противном случае положим $\hat{T}(M,k) = +\infty$.

3) Фазовые траектории системы, соответствующие оптимальному управлению, имеют вид

$$k(t) = \begin{cases} k_0 e^{\zeta t}, & 0 \le t < \hat{T}(M_0,k_0), \\ k_0 e^{\zeta\hat{T}(M_0,k_0)} + \pi\left(t - \hat{T}(M_0,k_0)\right), & t \ge \hat{T}(M_0,k_0); \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \dfrac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta t} - e^{rt}\right), & 0 \le t < \hat{T}(M_0,k_0), \\ 0, \quad t \ge \hat{T}(M_0,k_0). \end{cases}$$

Теорема 3 (см. [16]). *Пусть* $r > \delta$. *Тогда для задачи* P_∞ *справедливы следующие утверждения.*

1) *Оптимальное управление определяется выражением*

$$v(k,M) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad rM + \pi < \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta}, \\ 1, & \text{если} \quad rM + \pi \ge \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta}. \end{cases}$$

2) *Функция цены*

$$V(k,M) = \begin{cases} \dfrac{k}{\delta}\left(1 + \dfrac{\zeta}{(\delta - \zeta)}\left(\dfrac{(r - \zeta)(rM + \pi)}{r\zeta k}\right)^{\frac{\delta}{r}}\right), & \text{если} \quad rM + \pi \le \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta}, \\ \dfrac{k}{\delta - \zeta}, \quad \text{если} \quad rM + \pi > \dfrac{r\zeta k}{r - \zeta} \end{cases}$$

является вязкостным решением уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана (4.6).

3) Фазовые траектории системы, соответствующие оптимальному управлению, имеют вид

$$k(t) = \begin{cases} k_0, & 0 \le t \le \widetilde{T}, \\ k_0 e^{\zeta(t-\tilde{T})}, & t \ge \tilde{T}; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right), & 0 \le t \le \widetilde{T}, \\ M_0 e^{rt} + \dfrac{\pi}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \dfrac{\zeta k_0}{\zeta - r}\left(e^{\zeta(t-\tilde{T})} - e^{r(t-\tilde{T})}\right), & t \ge \tilde{T}, \end{cases}$$

где

$$\tilde{T} = \left(\frac{1}{r}\ln\frac{\zeta k_0}{(r-\zeta)(rM_0+\pi)}\right)_+. \tag{4.7}$$

Замечание 4. Пусть $r > \delta$. Если $\tilde{T} > 0$ (см. (4.7)), то фазовые траектории задачи P_∞, соответствующие оптимальному управлению, при $t \ge \tilde{T}$ имеют вид

$$k(t) = k_0 e^{\zeta(t-\tilde{T})}, \quad M(t) = \frac{\zeta k_0}{r-\zeta} e^{\zeta(t-\tilde{T})} - \frac{\pi}{r}$$

и связаны линейным соотношением

$$rM(t) + \pi = \frac{r\zeta k(t)}{r-\zeta}.$$

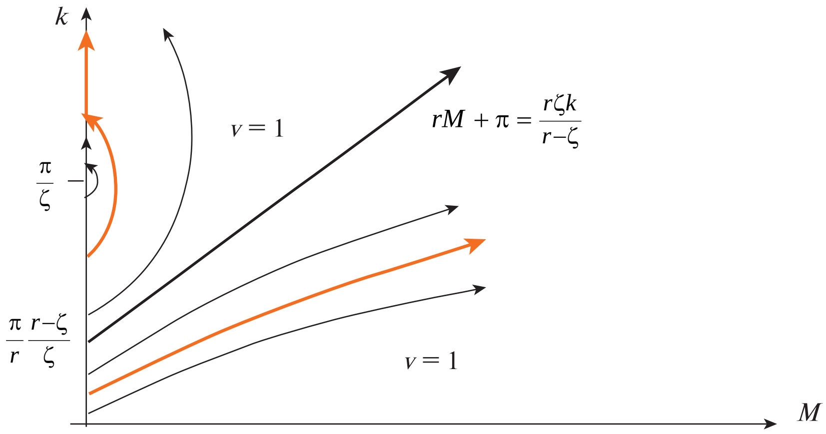
5. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты исследования модели инвестиционного поведения собственника производства в предпринимательской среде с доходностью r на несовершенном рынке капитала позволяют проанализировать зависимость оптимальных стратегий собственника от параметров модели и начальных условий.

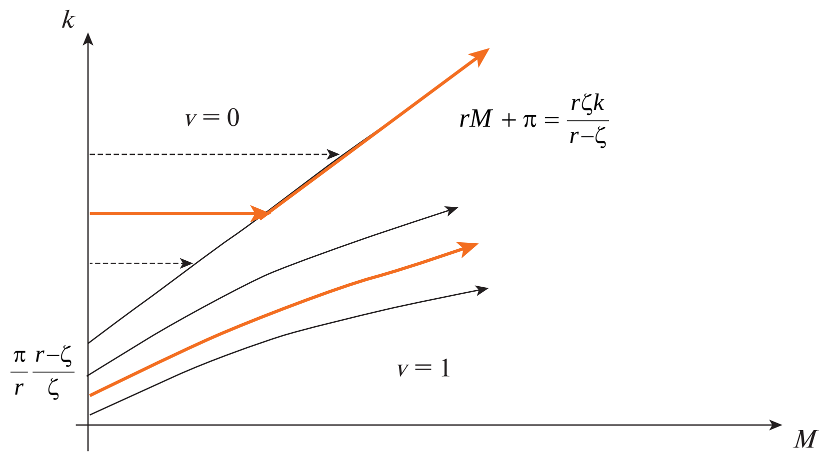
1. В условиях низкой доходности инвестиций ($r < \delta$) оптимальной стратегией поведения собственника является приоритетное расходование прибыли от производственной деятельности на личное потребление (теорема 2). На фиг. 3 представлен типичный фазовый портрет траекторий системы в задаче (P_∞) при условиях $r > \delta$, $r > \zeta$. Заметим, что на фазовой плоскости существуют две области значений фазовых переменных исходной задачи, в которых наблюдается разный тип поведения собственников. Граница между областями — прямая, определенная в (4.5) (при $r < \zeta$ прямая (4.5) вырождается в прямую $k(t) = 0$ и нижняя область исчезает). Траектории системы, стартующие в верхней области на фиг. 3, соответствуют собственникам, которые обладают меньшим начальным капиталом M_0, чем агенты, чьи траектории расположены в нижней области на фиг. 3. Поэтому естественно интерпретировать агентов из верхней области как собственников малого и среднего бизнеса, а агентов из нижней области — как крупных собственников. Анализ полученных в теореме 2 результатов позволяет утверждать, что для собственников малого и среднего бизнеса при низкой доходности предпринимательской среды характерно интенсивное накопление средств потребления до полного исчерпания капитала M, а далее расходование на приобретение средств потребления всего текущего дохода от производственной деятельности (верхняя область на фиг. 3).

Представители крупного бизнеса имеют другой тип поведения. Их финансовое состояние позволяет наращивать средства потребления с максимально возможным темпом ζ, а оставшуюся часть прибыли направлять на инвестиции в производство независимо от прочих соотношений параметров модели (нижняя область на фиг. 3).

2. В условиях высокой доходности инвестиций ($r > \delta$) представителям малого и среднего бизнеса оказывается выгодно отсрочить личное потребление и наращивать капитал за счет доходов от рыночных инвестиций (теорема 3). На фиг. 4 представлен типичный фазовый портрет траекторий системы в задаче P_∞ при условии $r > \delta$. Аналогично п. 1, на фазовой плоскости (M, k) можно выделить две области: верхняя соответствует представителям малого и среднего бизнеса,



Фиг. 3. Фазовый портрет системы в случае $r < \delta$.



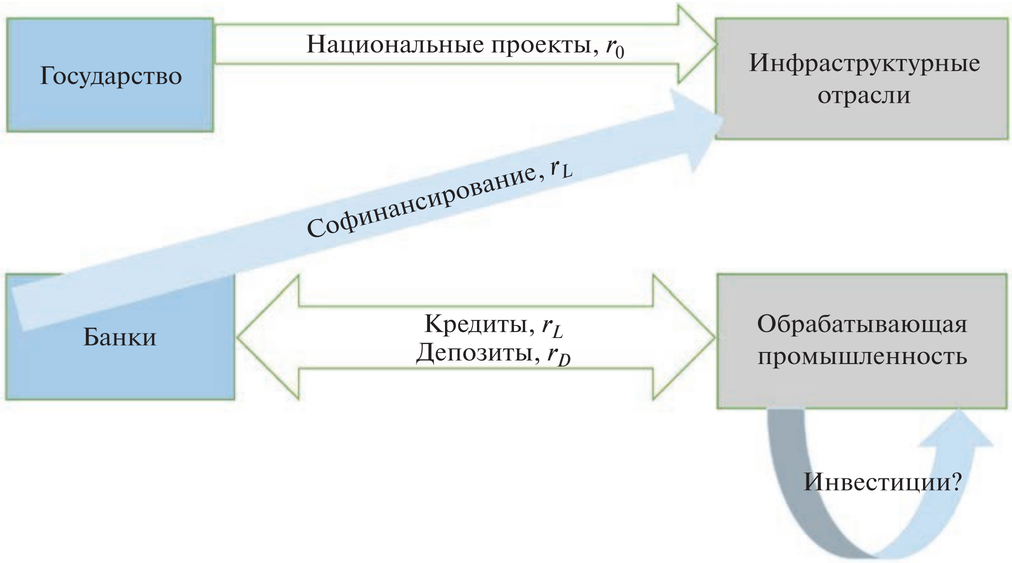
Фиг. 4. Фазовый портрет системы в случае $r > \delta$.

а нижняя – представителям крупного бизнеса. Заметим, что поведение крупных собственников (нижняя область на фиг. 4) не отличается от рассмотренного в п. 1 в ситуации низкой доходности предпринимательской среды. Таким образом, на крупных инвесторов не оказывает влияние состояние предпринимательской среды и целесообразно использовать другие методы стимулирования инвестиционной активности. В отличие от этого представители малого и среднего бизнеса инвестируют в развитие производства до определенного уровня своего благосостояния и только потом начинают вкладывать прибыль от основной деятельности в накопление средств потребления и одновременно инвестировать в производство с одинаковым максимально возможным темпом ζ (верхняя область на фиг. 4).

6. ОБЪЯСНЕНИЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ИЗ РЕЖИМА ВОССТАНОВИТЕЛЬНОГО РОСТА В РЕЖИМ СТАГНАЦИИ НА ОСНОВЕ ПОДХОДА КАНТОРА–ЛИПМАНА

В результате исследования модели инвестиционного поведения собственника на несовершенном рынке капитала показано, что улучшение состояния предпринимательской среды (рост доходности r) может привести к переключению поведения собственников малого и среднего бизнеса из режима потребления в режим инвестирования. Наоборот, ухудшение характеристик инвестиционной среды (снижение доходности r) приводит к сворачиванию инвестиционной деятельности представителей малого и среднего бизнеса.

В заключение работы на основе подхода Кантора–Липмана опишем возможный механизм переключения из режима восстановительного роста в режим стагнации российской экономики



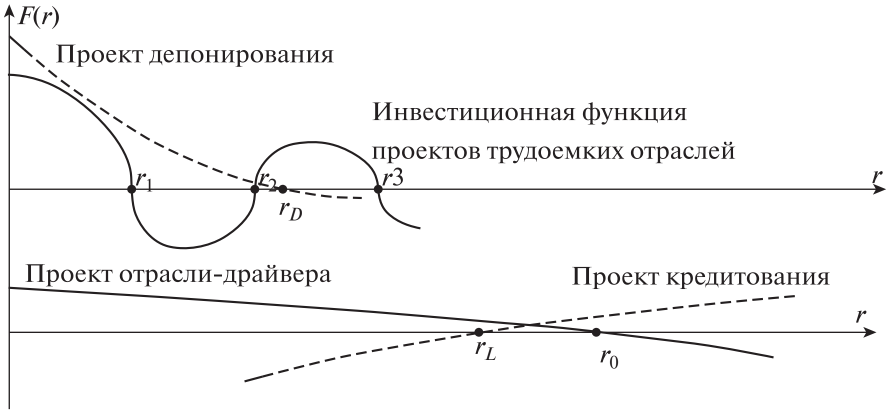
Фиг. 5. Схема взаимодействия агентов в российской экономике.

на рубеже 2008 г. Напомним, что в терминах модели Кантора–Липмана величина доходности r на несовершенном рынке капитала может быть найдена как минимальный подложительный корень инвестиционной функции $F(r)$, определенной в (2.8).

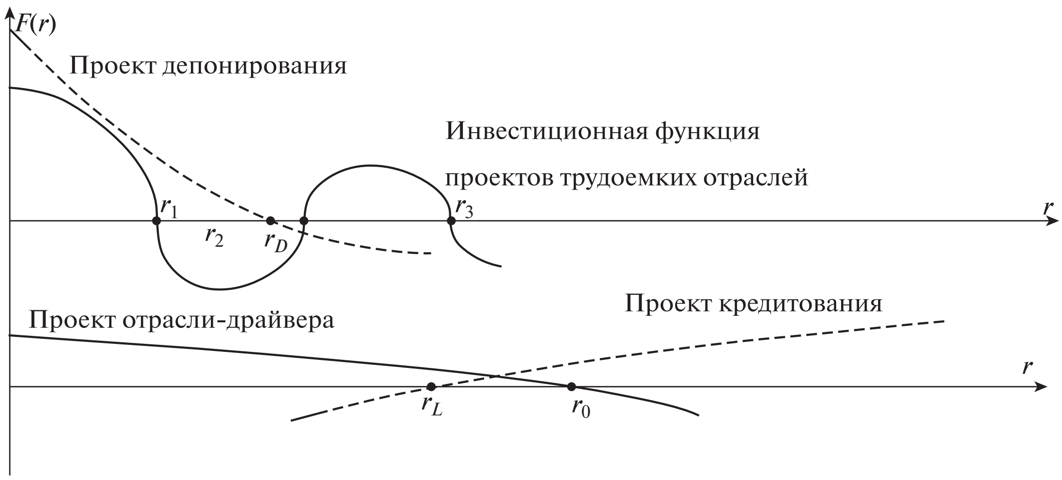
На фиг. 5 приведена типичная для рассматриваемого периода схема взаимодействия экономических агентов, поведение которых могло повлиять на прекращение роста в производственной сфере российской экономики.

Период восстановительного роста сопровождался крупными высокодоходными (процент по доходу $r_0 > 0$) национальными проектами по реформированию инфраструктурных отраслей (реформа электроэнергетики, связь, транспортные проекты). Государство выделяло средства на эти проекты при условии рыночного софинансирования. Источником такого софинансирования являлась система коммерческих банков. В ситуации высокой доходности r_0 национальных проектов банки могли назначать достаточно высокие проценты по кредитам $0 < r_L < r_0$. Партнером банков являлись собственники предприятий обрабатывающей промышленности, которые пользовались услугами кредитования под процент r_L и депонирования средств под процент $0 < r_D < r_L$, который также назначался банками. При этом расхождение этих процентных ставок оказывалось значительным в условиях несовершенного рынка капитала, однако величина процента по депозитам r_D могла поддерживаться банками на достаточно высоком уровне при высокой процентной ставке r_0. В рамках подхода Кантора–Липмана это означает, что инвестиционный полином (2.8), описывающий предпринимательскую среду собственника в производственной сфере, мог иметь несколько корней (далее мы рассматриваем ситуацию трех корней r_1, r_2, r_3, см. фиг. 6, 7), но высокий процент r_D экранировал два из трех его положительных корней (фиг. 6), что приводило к удержанию относительно высокой ставки доходности r_3 предпринимательской среды в производственной сфере. Эта ситуация проиллюстрирована на фиг. 6.

Со временем рост транзакционных издержек в инфраструктурных отраслях привел к снижению доходности r_0 национальных проектов. Соответственно, банки снизили процент по кредитам $r_L < r_0$. Следствием этого явилось снижение процента по депозитам r_D, который не может превышать r_L. Снижение r_D было более значительным, поскольку система коммерческих банков к этому моменту накопила большой объем ликвидности и не была более заинтересована в привлечении депозитов. В результате падения процента r_D минимальный положительный корень инвестиционной функции в производственной сфере перескочил из значения r_3 в значение $r_1 < r_3$. Данная ситуация проиллюстрирована на фиг. 7. В результате доходность предпринимательской среды в обрабатывающем секторе производства резко снизилась. Собственники пред-



Фиг. 6. Ситуация высокой доходности предпринимательской среды: $r_2 < r_D < r_L < r_0$.



Фиг. 7. Ситуация низкой доходности предпринимательской среды: $r_D < r_2 < r_L < r_0$.

приятий могли либо продолжать инвестиции под невыгодные проценты r_1, либо положить средства на депозит под более высокий процент $r_D > r_1$ (режим рантье). Можно предположить, что коэффициент дисконтирования доходов собственника производства фактически приблизился к значению процента по депозиту $\delta \approx r_D$, поэтому проект депонирования стал альтернативой производственной деятельности. Такая ситуация могла привести к спаду инвестиционной активности в производственной сфере и способствовать переходу в режим стагнации российской экономики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шананин А.А.* Анализ финансового состояния инвестора на основе модели Кантора–Липмана // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 293–306.
2. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
3. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* От госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. UK: The Edwin Mellen Press, 1999.
4. *Cantor D.G., Lipman S.A.* Investment selection with imperfect capital markets // Econometrica. 1983. V. 51. № 4. P. 1121–1144.
5. *Cantor D.G., Lipman S.A.* Optimal investment selection with a multitude of projects // Econometrica. 1995. V. 63. № 5. P. 1231–1240.

6. *Adler L., Gale D.* Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // Mathematical Finance. 1997. V. 7. № 1. P. 73–81.
7. *Sonin I.M.* Growth rate, internal rates of return and turn pikes in an investment model // Economic Theory. 1996. V. 5. P. 383–400.
8. *Presman E.L., Sonin I.M.* Growth rate, internal rates of return and financial bubbles. Moscow: CEMI Rus. Acad. Sci., 2000.
9. *Беленький В.З.* Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана–Гейла. М.: Рос. экон. шк., 2002.
10. *Ващенко М.П.* Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях неопределенности // Матем. моделирование. 2009. Т. 21. № 3. С. 18–30.
11. *Ващенко М.П., Шананин А.А.* Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 3. С. 70–86.
12. *Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.* Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39. № 7. P. 929–935.
13. *Шананин А.А.* Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 265–274.
14. *Шананин А.А.* Анализ финансового состояния инвестора на основе модели Кантора–Липмана // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 293–306.
15. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of savings // Econ. J. 1928. № 38. P. 543–559.
16. *Obrosova N.K., Shananin A.A., Spiridonov A.A.* A Model of investment behavior of enterprise owner in an imperfect capital market // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43. № 4. P. 1023–1036.
17. *Рудева А.В., Шананин А.А.* Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1799–1803.
18. *Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А.* Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
19. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
20. *Bardi M. Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhauser, 1997.