ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 3, с. 380–389

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.865

МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОЙ ПИРАМИДЫ С “КВАЗИРАЦИОНАЛЬНЫМИ” УЧАСТНИКАМИ[1)]

© 2023 г. Н. С. Кукушкин[1,2,*]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Россия

[2] 141701 Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

*e-mail: ququns@inbox.ru

Поступила в редакцию 02.05.2022 г.
Переработанный вариант 23.10.2022 г.
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Предлагается модель финансовой пирамиды, где каждый участник принимает решения о входе в пирамиду и выходе из нее на основе принципа гарантированного результата, опираясь на свои представления о характеристиках других участников. Если организаторы пирамиды имеют возможность провести весь процесс достаточно быстро (так, чтобы выплаты агентам, поучаствовавшим в пирамиде и вовремя ее покинувшим, не имели слишком большого значения), то в результате неудачниками окажутся в точности те агенты, кто имел завышенную оценку доли неудачников в общей массе агентов. Библ. 14.

Ключевые слова: финансовая пирамида, ограниченная рациональность, принцип гарантированного результата, неподвижная точка.

DOI: 10.31857/S0044466923030080, **EDN:** DYIZFX

1. ВВЕДЕНИЕ

Период “рыночных реформ” 1990-х годов в РФ ознаменовался, помимо прочего, обилием финансовых пирамид. Одного этого факта должно быть достаточно, чтобы оправдать интерес к такого рода феноменам, тем более что они наблюдались и наблюдаются не только в этот период и не только в РФ.

Надо сказать, что чередование взлетов и падений цен каких-то активов, часто выглядящее совершенно необъяснимым, характерно для рыночной экономики и отнюдь не обделено вниманием экономической науки (см. [1–12]). Далеко не все колебания такого рода являются результатом чьих-то целенаправленных манипуляций.

Здесь нет и речи об этой проблематике в ее полной общности; принимая финансовую пирамиду как данность, будем думать о логике агентов, несущих (или не несущих) туда свои деньги, понимая, что они имеют дело именно с пирамидой.

Разумеется, поведение жертв финансовых пирамид можно объяснять просто глупостью; однако универсальный характер такого объяснения делает его не особенно интересным. Более того, не все участники оказываются жертвами, так что утверждение об их глупости может быть подвергнуто сомнению. Например, Исаак Ньютон правильно расценил South Sea Bubble как пузырь (в сущности, пирамиду), но вошел туда и вскоре вышел с прибылью (см. [13]) (правда, он позже вошел еще раз и потерял свои инвестиции).

Автору неоднократно приходилось слышать примерно такую мотивировку для участия: “да, я понимаю, что это просто пирамида и кто-то останется в дураках, но пока оно все лопнет, я еще успею получить свой небольшой выигрыш”. Именно эта позиция и будет предметом анализа.

В предлагаемой здесь модели фигурируют агенты, в принципе, готовые участвовать в возникающей на их глазах пирамиде, но различающиеся своими представлениями о безопасном размере пирамиды. Каждый имеет оценку снизу числа “неудачников”, т.е. агентов, которые войдут в пирамиду и не успеют из нее выйти. Опираясь на эту свою оценку, каждый агент принимает все решения, исходя из принципа наибольшего гарантированного результата, т.е. вполне рацио-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-11-00129).

нальным образом (см. [14]). Единственное слабое место – сама оценка, которая вполне может оказаться (и оказывается у кого-то) ошибочной; в этом смысле поведение агентов только "квази" рационально.

Сосредотачиваясь именно на этом аспекте проблемы, на результатах взаимодействия различных представлений об окружающей действительности, мы игнорируем все прочие. В частности, мы полностью исключаем какой-либо обман, дезинформацию, хотя в некоторых реальных примерах именно этот аспект был решающим (Madoff's case). У нас все участники вполне отдают себе отчет, что они имеют дело именно с финансовой пирамидой, и что весь процесс неизбежно закончится тем, что кто-то лишится своих денег; просто каждый полагает, что уж он-то не попадет в число проигравших. Более того, мы предполагаем, что организаторы своевременно и точно информируют действительных и потенциальных участников о текущем положении дел, и что участники, решившие покинуть пирамиду до момента краха, не встретят никаких препятствий.

Не совсем традиционный характер предлагаемой модели требует нетрадиционной организации изложения: приходится начинать с середины, как бы предполагая, что все концы можно связать, и только затем действительно связывать их с помощью точных формулировок и доказательств. В следующем разд. 2 описывается общий облик модели и вводятся необходимые обозначения. В разд. 3 анализируется принятие решений отдельным агентом, который вынужден воспринимать пирамиду как природный процесс, не доступный его влиянию, и устанавливается "оптимальная гарантирующая" стратегия агента. В разд. 4 доказываются существование и единственность процесса, порождаемого таким "оптимальным" поведением агентов. Наконец, в разд. 5 ситуация анализируется с точки зрения организаторов пирамиды и устанавливаются условия, при которых число неудачников, в исходной формулировке определяемое лишь постфактум, по результатам всего процесса, оказывается в действительности определяемым исходными данными модели.

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

В самых общих чертах наша модель выглядит так: есть два типа действующих лиц – команда организаторов пирамиды (выступающая как один агент, "Организатор") и потенциальные участники (в т.ч. будущие жертвы) пирамиды. В дальнейшем изложении слово "агент" относится только к потенциальным участникам пирамиды. Весь процесс развивается в непрерывном времени; каждый агент в какой-то момент добровольно принимает решение: сто́ит ли ему участвовать, стремясь максимизировать свою "гарантированную" прибыль, опираясь на свою априорную оценку и доступную в момент принятия решения информацию.

Не участвующие агенты ничего не приобретают и ничего не теряют при любом развитии событий. Каждый участвующий агент вносит на свой счет фиксированную сумму денег (единицу) сразу при входе, затем этот счет растет с непрерывно начисляемым сложным процентом. В любой момент участник может потребовать закрытия счета; тогда вся сумма немедленно выплачивается. В любой момент Организатор может завершить процесс и исчезнуть со всеми оставшимися деньгами. Таким образом, постфактум все участники пирамиды делятся на два подмножества: тех, кто успел вовремя ее покинуть, и тех, кто не успел. Первые получают обратно первоначальный взнос плюс накопившиеся проценты; вторые теряют первоначальный взнос. Организатор получает взносы всех неудачников минус проценты, выплаченные покинувшим пирамиду вовремя.

Все агенты составляют бесконечно делимую массу, каждый агент бесконечно мал. Агенты не проявляют никакой инициативы; в каждый момент времени некоторая (бесконечно малая) их часть получает предложение/возможность вступить в пирамиду, и каждый из них реагирует так, как считает нужным. В дальнейшем этот процесс называется "сканированием" агентов. Как именно происходит это сканирование, не имеет значения для наших целей: можно представлять себе как самопроизвольную диффузию информации о пирамиде среди массы агентов, так и целенаправленную кампанию Организатора. Ключевое предположение – независимость внутренних характеристик агентов и момента сканирования; другими словами, контингент, сканируемый в каждый отдельный момент, имеет те же характеристики, что и вся масса.

Агент, вошедший в пирамиду в момент t и успевший покинуть ее в момент $t + \Delta$, получает обратно $\exp(\delta \cdot \Delta)$, т.е. его чистый выигрыш составляет $\exp(\delta \cdot \Delta) - 1$; для организатора эта величина – потери. Повторного предложения вступить агенту, однажды отказавшемуся или ранее вышедшему из пирамиды, не бывает; наш полный набор предположений обеспечивает, что такое предложение все равно было бы отвергнуто.

В какой-то момент t^*, выбираемый Организатором, он заканчивает процесс и исчезает с деньгами. Агент, решивший войти в пирамиду в момент t^*, просто теряет свои деньги. Если какой-то агент, бывший в пирамиде, решает покинуть ее в этот самый последний момент t^*, то считается, что он успеет забрать свои деньги, а уж потом (но в тот же самый момент!) Организатор исчезнет. Последнее предположение обосновывается тем, что доля агентов, покидающих пирамиду в любой конкретный момент, оказывается бесконечно малой, поэтому выплаты в момент t^* не влияют на доход Организатора; для участников же обеспечивается существование “оптимальной”, “условно гарантирующей”, стратегии.

Динамика процесса описывается двумя функциями времени: $\sigma(t)$ – доля массы агентов, просканированная к моменту t, и $m(t)$ – доля, состоящая в пирамиде на момент t. В начальный момент $t = 0$, естественно, $\sigma(0) = m(0) = 0$. Финальное значение $m(t^*)$ характеризует долю неудачников или “дураков” в популяции. В соответствии с нашей общей установкой на максимальную открытость, текущее значение $m(t)$ общеизвестно в любой момент t.

Допустимым режимом сканирования будем называть отображение $\sigma : [0,\bar{t}] \to [0,1]$ (где константа $\bar{t} > 0$ входит в описание режима), удовлетворяющее условиям: строго возрастает, непрерывно, $\sigma(0) = 0$ и $\sigma(\bar{t}) = 1$. В дальнейшем рассматриваются и ситуации, когда режим сканирования устанавливается Организатором, и ситуации, когда он задан экзогенно. Выбор $t^* \in [0,\bar{t}]$ в любом случае остается за Организатором.

Функция $m(\cdot)$ определяется как режимом сканирования $\sigma(\cdot)$, так и решениями индивидуальных (“бесконечно малых”) агентов. Поскольку решение о выходе может быть принято любым агентом в любой момент, априори нельзя исключить скачки $m(t)$ вниз. Скачки же вверх невозможны из-за непрерывности $\sigma(\cdot)$. Другими словами,

$$\liminf_{t'\to t-0} m(t') \geq m(t) \geq \limsup_{t'\to t+0} m(t') \tag{2.1}$$

при всех $t \in\ ]0,t^*[$. Это свойство (“полунепрерывность слева снизу и справа сверху”) имеет простое, но полезное следствие.

Лемма 1. *Пусть* $0 \leq t^- < t^+ \leq t^*$ *и* $m(t^-) < \alpha \leq m(t^+)$*; обозначим* $t^0 := \inf\{t \in [t^-,t^+] \mid \alpha \leq m(t)\}$. *Тогда* $m(t^0) = \alpha$.

Доказательство. Правое неравенство в (2.1) при $t = t^0$ обеспечивает неравенство $m(t^0) \geq \alpha$ и, следовательно, $t^0 > t^-$. Теперь левое неравенство в (2.1) обеспечивает неравенство $m(t^0) \leq \alpha$.

3. СТРАТЕГИИ АГЕНТОВ

Если говорить о решениях, принимаемых каждым отдельным агентом, то, прежде всего, он должен решить входить ли в пирамиду, когда (если) до него дойдет процесс сканирования. В случае отказа последствия сразу ясны – нулевой выигрыш, и больше никаких решений принимать не придется. При вступлении же в пирамиду, вообще говоря, агент должен будет в каждый следующий момент решать, не пора ли выходить. В случае своевременного выхода агент получит строго положительный выигрыш, если же Организатор убежит раньше (в том числе, в самый момент входа), то “выигрыш” агента окажется отрицательным. И в том, и в другом случае, принимающему решение агенту известны текущие момент времени t и объем пирамиды $m(t)$. Более того, мы будем считать известной и всю предысторию, т.е. функцию $m(\cdot)$.

Помимо этой текущей информации, каждый агент имеет свое индивидуальное представление о всей совокупности агентов, а именно, свою субъективную оценку снизу доли неудачников. Принимая решение о входе в пирамиду или выходе из нее, агент максимизирует гарантированный (если верить этой оценке) доход. Подчеркнем, что эта оценка постоянна, никакого обучения в процессе участия в пирамиде не предусмотрено (процесс занимает слишком малое время).

Соответствующие формальные конструкции развернуты ниже; сначала мы дадим неформальное описание и объяснение оптимальной стратегии.

Пусть $\delta > 0$ и агент, просканированный в момент t, уверен, что доля $m(t^*)$ неудачников в общей массе агентов не меньше α. Если $m(t) \geq \alpha$, то в его картине мира вполне возможно, что Организатор убежит в этот самый момент ($t^* = t$), что приведет к отрицательному “выигрышу” агента в случае входа в пирамиду; воздержавшись же от входа, агент имеет гарантированный нулевой результат. Напротив, при $m(t) < \alpha$, агент уверен, что пирамида продержится еще какое-то время, поэтому можно входить безбоязненно, рассчитывая на положительный выигрыш.

Аналогично, если в момент t агент уже находится в пирамиде и $m(t) \geq \alpha$, то Организатор может убежать в этот самый момент ($t^* = t$) и "выигрыш" агента окажется отрицательным; приняв же решение о выходе, агент фиксирует положительный выигрыш. Если же $m(t) < \alpha$, то, по мнению агента, Организатор убежит в какой-то момент $t^* > t$, когда будет $m(t^*) \geq \alpha$. Согласно лемме 1, сначала должен произойти момент $\tau \in [t, t^*]$, в который $m(\tau) = \alpha$, поэтому агент спокойно покинет пирамиду в этот самый момент τ, опять-таки фиксируя положительный выигрыш. В итоге, агент остается в пирамиде.

Перейдем теперь к формальному описанию стратегий агентов. По общим правилам теории игр стратегией следует считать набор отображений, преобразующих информацию, доступную агенту в соответствующий момент, в принимаемое решение. С решениями разобраться проще всего: будем обозначать $\mathcal{D}$ множество $\{\top, \bot\}$, интерпретируемое как множество элементарных решений агента ($\top$ означает вход в пирамиду или продолжение участия, $\bot$ – отказ от входа или выход).

Доступной наблюдению информацией будем считать текущий момент времени и реализованную до сих пор траекторию $m(\cdot)$. Будем обозначать $\mathcal{M}$ множество пар $\langle t^0, m(\cdot)\rangle$, где $t^0 \geq 0$, а $m(\cdot)$ – функция $[0, t^0] \to [0,1]$, у которой $m(0) = 0$, неравенства (2.1) справедливы при всех $t \in]0, t^0[$, а при $t = t^0$ справедливо левое неравенство в (2.1). Будем обозначать $\mathcal{S}$ множество отображений $\mathcal{M} \to \mathcal{D}$; тогда стратегии каждого агента образуют множество $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ – при решении вопроса о входе применяется первая компонента, при решении вопроса о выходе – вторая.

Запишем теперь выигрыш агента, применяющего определенную стратегию $\overline{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, если в какой-то момент t^0 ему предоставится возможность войти в пирамиду. Этот выигрыш, естественно, зависит от всей динамики пирамиды (которая неизвестна агенту в момент t^0); соответственно, обозначать его будем $U(\overline{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle)$. Для точных формулировок потребуется еще одно обозначение. Пусть $\langle t^*, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}$ и $t^0 \leq t^*$; будем обозначать $m(\cdot | t^0)$ ограничение функции $m(\cdot)$ на отрезок $[0, t^0]$.

Итак, если $s_1(\langle t^0, m(\cdot | t^0)\rangle) = \bot$ (агент не вошел в пирамиду), то $U(\overline{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) := 0$ независимо от всего остального. Пусть $s_1(\langle t^0, m(\cdot | t^0)\rangle) = \top$ (агент вошел в пирамиду); обозначим

$$T^* := \{t \in [t^0, t^*] | s_2(\langle t, m(\cdot | t)\rangle) = \bot\}. \tag{3.1}$$

Если $T^* = \varnothing$ (агент оставался в пирамиде до конца), то $U(\overline{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) := -1$. В противном случае (агент успел выйти из пирамиды), обозначая $\Delta := \inf T^* - t^0$, положим $U(\overline{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) := \exp(\delta \cdot \Delta) - 1$.

Замечание 1. *Если $T^* \neq \varnothing$, то агент успевает выйти из пирамиды, однако точный момент выхода может остаться неопределенным, если $s_2(\langle t^0 + \Delta, m(\cdot | t^0 + \Delta)\rangle) = \top$; тем не менее, выигрыш,* $\exp(\delta \cdot \Delta) - 1$*, определен однозначно, поскольку он зависит от момента выхода непрерывным образом.*

Пусть $\alpha \in [0,1]$; определим отображение $s^\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$ следующим образом:

$$s^\alpha(\langle t, m(\cdot)\rangle) := \begin{cases} \bot, & m(t) \geq \alpha; \\ \top, & m(t) < \alpha. \end{cases} \tag{3.2}$$

Теперь предложенная в начале раздела стратегия агента записывается как $\overline{s}^\alpha := (s^\alpha, s^\alpha) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Замечание 2. *В стратегии $\overline{s}^\alpha$ не используются две возможности, предусмотренные общим определением стратегии: решения о входе и о выходе принимаются по одному и тому же правилу, а информация о всей предыстории, $m(\cdot | t^0)$, вообще никак не используется. Тем не менее, чтобы утвер-*

ждать ненужность этих возможностей, было необходимо сначала включить их в определение стратегии.

Будем обозначать $\mathcal{M}^\alpha$ (при $\alpha \in [0,1]$) множество пар $\langle t^*, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих условию $m(t^*) \geq \alpha$.

Предложение 1. *Пусть* $\alpha \in [0,1]$, $\langle t^*, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}^\alpha$, $t^0 \leq t^*$, *и* $\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$. *Тогда найдется* $t^{**} \in [t^0, t^*]$, *при котором* $\langle t^{**}, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}^\alpha$ *и*

$$U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) \geq U(\bar{s}; t^0, \langle t^{**}, m(\cdot)\rangle). \tag{3.3}$$

Доказательство. Мы рассмотрим две базовые альтернативы. Пусть $s^\alpha(\langle t^0, m(\cdot|t^0)\rangle) = \perp$; тогда $m(t^0) \geq \alpha$ и $U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) = 0$. Теперь, если $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0)\rangle) = \perp$, то $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) = 0$ и (3.3) выполняется (как равенство) при $t^{**} = t^*$. Если же $s_1(\langle t^0, m(\cdot)\rangle) = \top$, то $U(\bar{s}; t^0, \langle t^0, m(\cdot)\rangle) = -1$, $\langle t^0, m(\cdot|t^0)\rangle \in \mathcal{M}^\alpha$ и (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при $t^{**} = t^0$.

Пусть теперь $s^\alpha(\langle t^0, m(\cdot|t^0)\rangle) = \top$ и, следовательно, $m(t^0) < \alpha$. Поскольку $\langle t^*, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}^\alpha$, для T^α, определенного аналогично T^* при замене в равенстве (3.1) s_2 на s^α, имеем $t^* \in T^\alpha \neq \varnothing$. Обозначив $t^{\rightarrow} := \inf T^\alpha$ и применяя лемму 1 с $t^- = t^0$ и $t^+ = t^*$, получаем $m(t^{\rightarrow}) = \alpha$. Таким образом, $U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) = \exp(\delta \cdot (t^{\rightarrow} - t^0)) - 1 > 0$.

Если теперь $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0)\rangle) = \perp$, то $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) = 0$ и (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при $t^{**} = t^*$. Если же $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0)\rangle) = \top$, то мы определяем T^* равенством (3.1). Если теперь $T^* = \varnothing$, то $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) = -1$ и (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при $t^{**} = t^*$. В противном случае обозначаем $t^{\Rightarrow} := \inf T^*$; если $t^{\Rightarrow} \leq t^{\rightarrow}$, то (3.3) выполняется опять-таки при $t^{**} = t^*$ (как строгое неравенство или как равенство). Наконец, если $t^{\Rightarrow} > t^{\rightarrow}$, то (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при $t^{**} = t^{\rightarrow}$. Предложение доказано.

Следствие 1. *При любых* $\alpha \in [0,1]$ *и* $\bar{s} \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$ *справедливо*

$$\inf\{U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) | \langle t^*, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}^\alpha \ \&\ t^0 \leq t^*\} \geq \inf\{U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot)\rangle) | \langle t^*, m(\cdot)\rangle \in \mathcal{M}^\alpha \ \&\ t^0 \leq t^*\}. \tag{3.4}$$

Замечание 3. *Следствие 1 к предложению 1, вроде бы, само по себе утверждает, что* $\bar{s}^\alpha$ *— оптимальная гарантирующая стратегия. Оно, однако, не исключает ситуации, когда инфимум в* (3.4) *для* $\bar{s}^\alpha$ *достигается, а какая-то другая стратегия* $\bar{s} \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$ *обеспечивает тот же инфимум, но при этом не достигающийся (и тем самым* $\bar{s}$ *оказывается "все же несколько надежнее"* $\bar{s}^\alpha$*). Предложение 1 исключает и такую возможность.*

4. ДИНАМИКА ПРОЦЕССА

В этом разделе развитое до сих пор полуформальное описание динамики роста пирамиды преобразуется в формально-математические конструкции.

Итак, вся совокупность агентов представляет собой единичный квадрат $\mathrm{A} := [0,1]\times[0,1]$; каждый отдельный агент характеризуется парой $(\beta, \alpha) \in \mathrm{A}$, где ордината α выражает оценку агентом доли неудачников во всей массе агентов, а абсцисса β — что-то вроде "номера в очереди на сканирование". На A задана мера — прямое произведение мер на координатных отрезках: стандартная мера Лебега (равномерное распределение) на оси абсцисс, а на оси ординат распределение, заданное непрерывной функцией плотности p, удовлетворяющей условиям $p(a) \geq 0$ для всех a и $\int_0^1 p(a)\mathrm{d}a = 1$. Таким образом, мера всего множества A равна 1. Удобно рассматривать "дополнительную" функцию распределения ординаты: $P(\alpha) := \int_\alpha^1 p(a)\mathrm{d}a$, "вероятность того, что случайно выбранный агент оценивает долю неудачников в массе агентов числом бóльшим (бóльшим или равным) α"; функция P непрерывна и убывает от 1 до 0.

Пусть заданы допустимый режим сканирования $\sigma : [0,\overline{t}\,] \to [0,1]$ и момент завершения процесса $t^* \in [0,\overline{t}\,]$ (пока неважно, кем и как заданы). Поскольку $\sigma(\cdot)$ непрерывна и строго возрастает, существует также непрерывная и строго возрастающая обратная функция $\vartheta : \sigma([0,t^*]) \to [0,t^*]$, так что $\vartheta(\beta)$ – момент сканирования агентов с данным β.

Динамика состояния пирамиды задается семейством измеримых подмножеств $\Pi(t) \subseteq \mathrm{A}$ $(t \in [0,t^*])$, где $(\beta,\alpha) \in \Pi(t)$ означает, что агент (β,α) состоит в пирамиде в момент t. Меру множества $\Pi(t)$ будем обозначать $m(t)$.

Сформулированные выше полуформально предположения, включая предположение, что каждый агент принимает решения о входе-выходе, руководствуясь стратегией (3.2), могут теперь быть выражены одним условием:

$$(\beta,\alpha) \in \Pi(t) \Leftrightarrow [\beta \le \sigma(t)\ \&\ \forall t' \in [\vartheta(\beta),t][\alpha > m(t')]]. \tag{4.1}$$

Имеет смысл обсудить этот момент подробнее. Для того, чтобы агент (β,α) в момент t оказался в пирамиде, необходимо, во-первых, чтобы он на этот момент был уже просканирован (первый член конъюнкции в правой части (4.1)) и, во-вторых, чтобы с самого его момента сканирования $\vartheta(\beta)$ и до текущего момента t выполнялось условие в нижней строке (3.2) (второй член конъюнкции в правой части). Это необходимое условие одновременно и достаточно.

Теорема 1. *При любой непрерывной плотности распределения* $p(\cdot)$*, любом допустимом режиме сканирования* $\sigma : [0,\overline{t}\,] \to [0,1]$ *и любом* $t^* \in [0,\overline{t}\,]$ *существует единственное семейство измеримых подмножеств* $\Pi(t) \subseteq \mathrm{A}$ $(t \in [0,t^*])$*, удовлетворяющее условию* (4.1).

Доказательство. Для доказательства теоремы используем следующую лемму.

Лемма 2. *Если система подмножеств* $\Pi(t)$ *удовлетворяет условию* (4.1), *то в любой момент* $t \in [0,t^*]$ *справедливо равенство*

$$\Pi(t) = [0,\sigma(t)] \times\,]m(t),1]. \tag{4.2}$$

Доказательство леммы 2. Вложение $\Pi(t) \subseteq [0,\sigma(t)] \times\,]m(t),1]$ сразу следует из (4.1); оно может быть строгим лишь в том случае, если $T^* := \{t' \in [0,t] \mid m(t') > m(t)\}$ не пусто (заметим, что $t \notin T^*$ в любом случае). Чтобы вывести из непустоты T^* противоречие, потребуется сравнительно длинное рассуждение.

Пусть $t^0 \in T^*$, т.е. $m(t^0) > m(t)$; обозначим $w^0 := \sup_{\tau\in[t^0,t]} m(\tau) \ge m(t^0)$. Если $w^0 = m(t^0)$, то мы у цели: поскольку $\alpha > m(t^0) \ge m(\tau)$ при всех $(\beta,\alpha) \in \Pi(t^0)$ и $\tau \in [t^0,t]$, получаем, что второй член конъюнкции в правой части (4.1) остается истинным вплоть до текущего момента t, откуда $\Pi(t^0) \subseteq \Pi(t)$, что несовместимо с неравенством $m(t^0) > m(t)$.

В противном случае, т.е. при $w^0 > m(t^0)$, выберем $t^1 \in [t^0,t]$, для которого $m(t^1) > \max\{w^0 - 1/2, m(t^0)\}$, и обозначим $w^1 := \sup_{\tau\in[t^1,t]} m(\tau) \ge m(t^1)$. Если теперь $w^1 = m(t^1)$, то получаем $\Pi(t^1) \subseteq \Pi(t)$ и то же самое противоречие.

Если же $w^1 > m(t^1)$, то продолжаем в том же духе: выбираем $t^2 \in [t^0,t]$, для которого $m(t^2) > \max\{w^1 - 1/4, m(t^1)\}$, обозначаем $w^2 := \sup_{\tau\in[t^2,t]} m(\tau) \ge m(t^2)$ и т.д. В результате мы получаем либо $\Pi(t^k) \subseteq \Pi(t)$ на каком-то шаге k, т.е. искомое противоречие, либо бесконечную последовательность $\{t^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, у которой $t > t^{k+1} > t^k$, $m(t^{k+1}) > m(t^k) > m(t)$ и $w^k \ge w^{k+1}$ при всех k. В последнем случае обозначим $t^\infty := \sup_k t^k (=\lim_{k\to\infty} t^k)$, $w^\infty := \sup_k m(t^k)(=\lim_{k\to\infty} m(t^k))$ и $\Delta := (m(t^0) - m(t))/2(>0)$. Важно заметить, что способ выбора t^k на каждом шаге обеспечивает равенства $w^\infty = \inf_k w^k = \lim_{k\to\infty} w^k$.

Поскольку $m(t^k) \to w^\infty \leftarrow w^k$, а P непрерывна, имеем $P(m(t^k)) - P(w^k) < \Delta$ для достаточно больших k; зафиксируем одно такое k. Как отмечено в самом начале доказательства леммы, имеет место вложение $\Pi(t^k) \subseteq [0,\sigma(t^k)] \times]m(t^k),1]$, следовательно,

$$\Pi(t^k) = \{(\beta,\alpha) \in \Pi(t^k) | m(t^k) < \alpha \le w^k\} \cup \{(\beta,\alpha) \in \Pi(t^k) | w^k < \alpha\}.$$

Выбор k обеспечивает, что мера первой "половины" $\Pi(t^k)$ меньше Δ. Учитывая, что $m(t^k) - m(t) > 2\Delta$, получаем, что мера второй "половины", $\Pi(t^k) \cap ([0,\sigma(t^k)] \times]w^k,1])$, превышает $m(t)$, меру множества $\Pi(t)$. С другой стороны, для любого агента (β,α) из этой второй "половины" второй член конъюнкции в правой части (4.1) остается истинным вплоть до момента t, откуда $\Pi(t^k) \cap ([0,\sigma(t^k)] \times]w^k,1]) \subseteq \Pi(t)$ – опять то же самое, на этот раз окончательное, противоречие. Лемма доказана.

Равенство (4.2) немедленно дает нам равенство

$$m(t) = \sigma(t)P(m(t)) \tag{4.3}$$

при всех $t \in [0,t^*]$.

При произвольном $\beta \in [0,1]$ определим отображение $f_\beta : [0,1] \to [-1,1]$ равенством $f_\beta(\alpha) := \beta P(\alpha) - \alpha$; поскольку P непрерывна и убывает, $f_\beta(0) = \beta$ и $f_\beta(1) = -1$, существует единственное решение $\mu(\beta)$ уравнения $f_\beta(\mu(\beta)) = 0$:

$$\mu(\beta) = \beta P(\mu(\beta)). \tag{4.4}$$

Поскольку $f_\beta(\alpha)$ строго возрастает по β при любом $\alpha \in [0,1]$, функция μ строго возрастает на $[0,1]$.

Учитывая (4.4), равенство (4.3) можно переписать как

$$m(t) = \mu(\sigma(t)), \tag{4.5}$$

а отсюда

$$\Pi(t) = [0,\sigma(t)] \times]\mu(\sigma(t)),1] \tag{4.6}$$

при всех $t \in [0,t^*]$.

Поскольку отображение μ определяется исключительно функцией P, равенство (4.6) сразу доказывает единственность системы подмножеств $\Pi(t)$. Если же, наоборот, использовать его в качестве определения $\Pi(t)$, то получаем и существование: мерой каждого множества $\Pi(t)$ будет $\sigma(t) \cdot P(\mu(\sigma(t)))$, что, согласно (4.4), совпадает с $\mu(\sigma(t))$, а отсюда сразу следует (4.2); последнее же равенство сразу влечет условие (4.1). Теорема доказана.

Равенства (4.4) и (4.5) сразу дают важное свойство:

$$m(t) = \alpha \Leftrightarrow \sigma(t) = \alpha / P(\alpha). \tag{4.7}$$

Другими словами, текущий объем пирамиды и объем просканированной массы агентов связаны жестким образом, не зависящим от режима сканирования, который определяет лишь связь между α и t в (4.7).

По завершении процесса вся совокупность агентов оказывается разделенной на три подмножества: те, кто вообще не участвовал в пирамиде, $A^0 := A \setminus \bigcup_{t\in[0,t^*]} \Pi(t)$; неудачники, кто вошел в пирамиду и не успел вовремя ее покинуть, $A^+ := \Pi(t^*)$; наконец, те, кто вошел и успел выйти, $A^- := A \setminus (A^0 \cup A^+)$. ("Плюсы" и "минусы" расставлены с точки зрения Организатора.) Важно, что это разбиение не зависит от режима сканирования и определяется исключительно объемом пирамиды в момент завершения.

Предложение 2. *Пусть заданы допустимый режим сканирования* $\sigma : [0,\bar{t}] \to [0,1]$ *и* $t^* \in [0,\bar{t}]$. *Имея в виду процесс, определенный в теореме 1, обозначим* $\alpha^* := m(t^*)$ *и* $\beta^* := \alpha^* / P(\alpha^*)$. *Тогда справедливы равенства* $A^0 = (]\beta^*,1] \times [0,1]) \cup \{(\beta,\alpha) \in [0,\beta^*] \times [0,\alpha^*] | \beta > \alpha / P(\alpha)\}$; $A^+ = \Pi(t^*) = [0,\beta^*] \times]\alpha^*,1]$; $A^- = \{(\beta,\alpha) \in [0,\beta^*] \times [0,\alpha^*] | \beta \le \alpha / P(\alpha)\}$.

Доказательство. Согласно равенству (4.7), $\sigma(t^*) = \beta^*$. Следовательно, агенты с $\beta > \beta^*$ не будут просканированы и заведомо останутся вне пирамиды; этим объясняется первая компонента в выражении для A^0. Если $\alpha > \alpha^*$, то агент (β, α) обязательно войдет в пирамиду, если будет просканирован, т.е. если $\beta \le \beta^*$, и не выйдет до самого конца; отсюда $A^+ \supseteq [0, \beta^*] \times]\alpha^*, 1]$.

Если, наконец, $\alpha \le \alpha^*$, то агент (β, α) с $\beta \le \beta^*$ будет приглашен в пирамиду, причем он откажется, если $\beta > \alpha/P(\alpha)$, и согласится в противном случае, выйдя в момент равенства $m(t) = \alpha$, т.е. при $\sigma(t) = \alpha/P(\alpha)$. В результате никто из этих агентов не попадет в A^+. Предложение доказано.

Положим $\alpha^+ := \mu(1)$ – максимально возможный объем пирамиды, который реализуется, если просканированы все агенты; α^+ является единственной неподвижной точкой отображения P, т.е. $\alpha^+ = P(\alpha^+)$. Очевидным образом, $0 < \alpha^+ < 1$.

5. ЗАДАЧА ОРГАНИЗАТОРА

Выигрыш Организатора является разностью между суммарным взносом неудачников и процентами, выплаченными агентам, поучаствовавшим в пирамиде и вовремя ее покинувшим. С доходной частью все сразу понятно, это $m(t^*) = \mu(\sigma(t^*))$; как и выше, будем использовать обозначение $\alpha^* := m(t^*)$.

Агент с $\alpha > \alpha^*$, войдя однажды в пирамиду, не покинет ее до конца; поэтому никаких денег такие агенты не унесут. Агенты с $\alpha \le \alpha^*$ будут входить в пирамиду, если $\beta \le \alpha/P(\alpha)$, и покинут ее одновременно при $\sigma(t) = \alpha/P(\alpha)$. Таким образом, все агенты с каждым $\alpha \in [0, \alpha^*]$ унесут вместе

$$p(\alpha) \int_0^{\alpha/P(\alpha)} [\exp(\delta[\vartheta(\alpha/P(\alpha)) - \vartheta(\beta)]) - 1] d\beta. \tag{5.1}$$

А выигрыш Организатора составит

$$U(\alpha^*) := \alpha^* - \int_0^{\alpha^*} p(a) \int_0^{a/P(a)} [\exp(\delta[\vartheta(a/P(a)) - \vartheta(b)]) - 1] db\, da. \tag{5.2}$$

Предложение 3. *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения $p(\cdot)$ и $\delta > 0$, если Организатор может выбрать допустимый режим сканирования $\sigma(\cdot)$ и момент окончания t^* любым образом, то оптимального выбора не существует, а верхняя грань возможных значений выигрыша Организатора равна α^+.*

Доказательство. Организатор может назначить режим сканирования $\sigma(t) := Kt$ $(K > 0)$, так что $\overline{t} = 1/K$, и момент окончания $t^* := \overline{t}$. В результате финальный объем пирамиды будет α^+. При любом $\varepsilon > 0$ можно выбрать $K > \delta/\log(1+\varepsilon)$; тогда сумма всех выплат ушедшим агентам будет меньше ε. Таким образом, верхняя грань выигрыша Организатора не меньше α^+.

С другой стороны, из (5.2) сразу видно, что выигрыш не может быть больше, чем α^+. Даже равенство $U(\alpha^*) = \alpha^+$ невозможно, поскольку $1 - P(\alpha^+) > 0$, а интеграл в (5.1) строго положителен при всех $\alpha \in]0, \alpha^+]$. Предложение доказано.

Предложение 4. *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения $p(\cdot)$ и допустимый режим сканирования $\sigma(\cdot)$, если Организатор может выбрать $\delta > 0$ и момент окончания t^* любым образом, то оптимального выбора не существует, а верхняя грань возможных значений выигрыша Организатора равна α^+.*

Доказательство. Поскольку подынтегральное выражение в (5.1) не превосходит $\exp(\delta \cdot \overline{t}) - 1$, надлежащим выбором $\delta > 0$ сумма всех выплат ушедшим агентам может быть сделана сколь угодно малой. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство предложения 3.

Если же предположить, что допустимый режим сканирования $\sigma(\cdot)$ и $\delta > 0$ заданы экзогенно, а Организатор может выбрать только момент окончания t^*, то, вообще говоря, ситуация усложняется.

При заданном режиме сканирования выбор момента окончания t^* эквивалентен выбору финального объема пирамиды $\alpha^* = m(t^*)$. Как показывает (5.2), выигрыш Организатора оказывается непрерывной функцией от α^*, а значит, $\max_{\alpha}^* U(\alpha^*)$ достигается.

Отчетливый результат может быть получен в предположении, что сканирование происходит “достаточно быстро”. Пусть $K > 0$; будем называть допустимый режим сканирования $\sigma(\cdot)$ *K-быстрым*, если $\sigma(t'') - \sigma(t') \geq K(t'' - t')$ всякий раз, когда $\bar{t} \geq t'' \geq t' \geq 0$. Очевидным образом, $\sigma(\cdot)$ является K-быстрым тогда и только тогда, когда обратное отображение $\vartheta(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/K$.

Предложение 5. *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения $p(\cdot)$ и $\delta > 0$, существует такое $K > 0$, что при любом K-быстром допустимом режиме сканирования оптимальным для Организатора будет момент окончания $t^* = \bar{t}$, т.е. просканированы будут все агенты.*

Доказательство. Из равенства (5.2) немедленно вытекает дифференцируемость функции $U(\alpha)$, а также явное выражение для ее производной:

$$U'(\alpha) = 1 - p(\alpha) \int\limits_0^{\alpha/P(\alpha)} [\exp(\delta[\vartheta(\alpha/P(\alpha)) - \vartheta(\beta)]) - 1]\mathrm{d}\beta. \tag{5.3}$$

Рассуждая аналогично доказательству предложения 3, получаем существование такого $K > 0$, что интеграл в (5.1) окажется сколь угодно мал при любом α, а отсюда $U(\alpha)$ строго возрастает. Следовательно, максимум $U(\alpha)$ достигается при $\alpha = \alpha^+$. Предложение доказано.

Предложение 6. *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения $p(\cdot)$ и допустимый режим сканирования $\sigma(\cdot)$, существует такое $\delta > 0$, что оптимальным для Организатора будет момент окончания $t^* = \bar{t}$, т.е. просканированы будут все агенты.*

Доказательство. Совершенно аналогично доказательству предложения 5, при малом $\delta > 0$ интеграл в (5.1) окажется сколь угодно мал при любом α, и поэтому $U(\alpha)$ строго возрастает.

Иллюстративный пример. *Пусть распределение оценки числа неудачников равномерное, $p(a) = 1$ для всех $a \in [0,1]$; тогда $P(a) = 1 - a$ и $\alpha^+ = 1/2$. Режим сканирования тоже пусть будет равномерным, $\sigma(t) := Kt$ ($K > 0$); следовательно, $\bar{t} = 1/K$. Из равенства (5.3) сразу следует, что $U'(\alpha)$ убывает по α, а значит, для оптимальности выбора $t^* = \bar{t}$, т.е. сканирования всей совокупности агентов, необходимо и достаточно, чтобы $U'(1/2) \geq 0$. Учитывая, что $\vartheta(b) = b/K$ для всех $b \in [0,1]$, получаем условие*

$$\int\limits_0^1 [\exp(\delta[1 - b]/K) - 1]\mathrm{d}b \leq 1 \tag{5.4}$$

или

$$\exp(\delta/K) \leq 1 + 2\delta/K.$$

Это условие заведомо выполняется при $\delta/K \leq 1.2$ (рецензент предложил более точную оценку $\delta/K < 1.2564\ldots$); если, например, $K = 1$, то “достаточно малым” будет уже $\delta = 1$, т.е. ставка 100%. При $\delta/K \geq 1.3$ условие (5.4) перестает выполняться, так что сканирование всех агентов уже не оптимально для Организатора. В результате “в дураках” окажутся некоторые агенты с $\alpha \leq \alpha^+$ (и малых β), а некоторые агенты с $\alpha > \alpha^+$ (и больших β), наоборот, не попадут в пирамиду.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модель финансовой пирамиды, позволяющая в определенной степени рационализировать участие в ней. Каждый агент принимает решения, исходя из принципа наибольшего гарантированного результата и опираясь на свою оценку числа неудачников среди общей массы агентов. “Оптимальной гарантирующей” стратегией оказывается участие в пирамиде, пока ее действительный размер не достиг этой оценки и отказ от участия или, соответственно, выход, если оценка достигнута. Предполагая непрерывное распределение величины оценки в массе агентов, доказаны существование и единственность соответствующего динамического процесса, обеспечивающего, в частности, непрерывный и монотонный рост объема пирамиды. В результате агенты с бóльшими оценками соглашаются участвовать на более длинном интервале времени, а агенты со “слишком” большими оценками остаются до конца и теряют свои инвестиции. Если весь процесс происходит достаточно быстро (так, чтобы выплаты агентам, поучаствовавшим в пирамиде и вовремя ее покинувшим, не имели слишком большого значения), то “слишком” большими оказываются оценки, превышающие неподвижную точку дополнительной функции распределения.

Автор благодарит А.А. Шананина за ценные замечания к первоначальной версии работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barlevy G., Veronesi P.* Rational panics and stock market crashes // J. Econom. Theory. 2003. V. 110. P. 234–263.
2. *Blanchard O.J.* Speculative bubbles, crashes and rational expectations // Economics Lett. 1979. V. 3. P. 387–389.
3. *Boldrin M., Levine D.K.* Growth cycles and market crashes // J. Econom. Theory. 2001. V. 96. P. 13–39.
4. *Epstein L.G., Wang T.* Uncertainty, risk-neutral measures and security price booms and crashes // J. Econom. Theory. 1995. V. 67. P. 40–82.
5. *Kocherlakota N.* Injecting rational bubbles // J. Econom. Theory. 2008. V. 142. P. 218–232.
6. *Liu F., Conlon J.R.* The simplest rational greater-fool bubble model // J. Econom. Theory. 2018. V. 175. P. 38–57.
7. *Miao J.* Introduction to economic theory of bubbles // J. Math. Economics. 2014. V. 53. P. 130–136.
8. *Miao J.* Introduction to economic theory of bubbles II // J. Math. Economics. 2016. V. 65. P. 139–140.
9. *Milgrom P., Stokey N.* Information, trade, and common knowledge // J. Econom. Theory. 1982. V. 26. P. 17–27.
10. *Moinas S., Pouget S.* The bubble game: An experimental study of speculation // Econometrica. 2013. V. 81. P. 1507–1539.
11. *Schiller R.J.* Irrational Exuberance. Princeton: Princeton Univer. Press, 2000.
12. *Tirole J.* On the possibility of speculation under rational expectations // Econometrica. 1982. V. 50. P. 1163–1181.
13. *Chancellor E.* Devil Take the Hindmost. N.Y.: Plume, 1999.
14. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.