

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.928

СХОДИМОСТЬ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО ЧЛЕНА ЧЕТВЕРТОЙ ИЕРАРХИИ ПЕНЛЕВЕ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ¹⁾

© 2023 г. В. И. Аношин¹, А. Д. Бекетова¹,
А. В. Парусникова^{1,*}, Е. Д. Прокопенко¹

¹ 123458 Москва, Таллинская ул., 34, Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Россия

*e-mail: aparusnikova@hse.ru

Поступила в редакцию 04.08.2022 г.
Переработанный вариант 04.08.2022 г.
Принята к публикации 10.09.2022 г.

Рассматривается второй член иерархии четвертого уравнения Пенлеве. Доказана сходимость некоторых степенных асимптотических разложений в окрестности нуля. Найдены новые семейства степенных асимптотических разложений. Вычисления проводятся с использованием пакета компьютерной алгебры. Дана ссылка на код, который может быть использован для вычисления порядка Жевре формального разложения решения дифференциального уравнения второго порядка в пакете символьных вычислений. Библ. 12. Фиг. 6.

Ключевые слова: асимптотические разложения, порядки Жевре, уравнения Пенлеве, символьные вычисления.

DOI: 10.31857/S0044466923010040, **EDN:** LKQBOT

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует ряд способов построения иерархий Пенлеве (см. [1], [2]) — аналогов уравнений Пенлеве более высоких порядков. В данной работе рассматривается второй член четвертой иерархии Пенлеве из [2] — обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, продолжающее цепочку, соответствующую четвертому уравнению Пенлеве. Решения уравнений — членов иерархий уравнений Пенлеве могут, как это имеет место для исходных уравнений Пенлеве, определять новые специальные функции; впрочем, доказательство справедливости этого факта или опровергающие такое утверждение результаты на данный момент авторам неизвестны.

В [3] методами степенной геометрии [4] найдены степенные формальные асимптотические разложения решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве. Здесь, применяя теорию из [5], [6], доказываем сходимость полученных в окрестности нуля разложений и отсутствие экспоненциальных добавок (см. [7]). Для поиска экспоненциальных добавок к решениям используется код, написанный в пакете символьных вычислений (код для реализации первых шагов методами степенной геометрии приведен в [3]). Дана ссылка на программу для символьных вычислений порядка Жевре формального разложения решения дифференциального уравнения второго порядка.

2. МЕТОДЫ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-10003), <https://rscf.ru/project/19-71-10003/>.

где F — аналитическая функция $n + 2$ переменных и формально удовлетворяющий ему в окрестности бесконечности степенной ряд

$$\hat{y} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}. \quad (2)$$

Известно, что каждому формальному решению вида (2) уравнения (1) соответствует аналитическое решение y уравнения (1), асимптотически приближаемое по Жевре рядом (2) в некотором секторе с вершиной в бесконечности, т.е. на множестве $V = \{x : |x| > R, \operatorname{Arg} x \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$ при некотором $R > 0$.

Для доказательства сходимости ряда (2) можно использовать асимптотическую теорию Жевре. В случае, когда сходимость таким методом не может быть доказана, осмысленным для определения точности приближения настоящего решения уравнения (1) вновь является применение асимптотической теории Жевре, а также вычисление уточняющих экспоненциальных добавок (экспоненты, в показателях которых записан формальный степенной ряд) к решению.

Кратко опишем алгоритм поиска порядков Жевре и точности приближения по Жевре разложения (см. [5], [6]):

I.1. Вычислить производную Фреше L левой части уравнения (1) на решении $\hat{y}$;

I.2. Проверить, содержит ли L оператор $\frac{d^n}{dx^n}$ (n — порядок уравнения (1));

I.3. Выразить в L операторы $\frac{d^k}{dx^k}$ через операторы D^s , $s = 1, \dots, k$, где $D = x \frac{d}{dx}$, т.е. переписать L в виде

$$L = \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k, \quad \text{где} \quad a_k \in \mathbb{C}[x][[1/x]], \quad a_k(x) = \sum_{j=j_k}^{\infty} a_{j,k} x^{-j}; \quad (3)$$

I.4. Построить многоугольник Ньютона оператора L (3) как выпуклую оболочку точек $\{(q_1, q_2) : 0 \leq q_1 \leq k, q_2 \geq j_{k,0}\}$;

I.5. Определить тангенсы k_i угла наклона границы многоугольника Ньютона к оси абсцисс;

I.6. Множество $\{0, 1/k_1, \dots, 1/k_r\}$ содержит все возможные порядки Жевре ряда (2).

Порядок Жевре 0 соответствует сходимости ряда (2). Сразу гарантирует сходимость многоугольник Ньютона с тремя сторонами, одна из которых — горизонтальный отрезок, две оставшиеся стороны — вертикальные полупрямые.

Теперь опишем алгоритм поиска экспоненциальных добавок к решению методами степенной геометрии (см. [7]):

II.1. Вычислить производную Фреше L левой части уравнения (1) на решении $\hat{y}$;

II.2. Применить L к u ;

II.3. Сделать в (линейном) уравнении $Lu = 0$ замену

$$\ln u = w, \quad (4)$$

сократить на u , получить дифференциальное уравнение $G(x, w) = 0$;

II.4. Построить многоугольник Ньютона полученного уравнения по правилам степенной геометрии [4]. Поскольку подставляли ряд, многоугольник — в общем случае — не является ограниченным множеством;

II.5. Рассмотреть ребра многоугольника, внешняя нормаль $N = (p_1, p_2)$ к которым имеет $p_1 > 0$, $p_2 > 0$. Найти степенные разложения решений уравнения $G(z, w) = 0$, соответствующие укороченным уравнениям этих ребер;

II.6. Сделать обратную замену $u = e^w$.

Замечание 1. Мы рассмотрели формальный асимптотический ряд в окрестности бесконечности. В работе речь идет о формальных степенных разложениях решений ОДУ вблизи нуля. Для применения алгоритма I делаем замену $x = 1/t$, переводя нуль в бесконечность. При приме-

нии алгоритма II замену делать не надо, следует на шаге II.5 рассмотреть ребра многоугольника, внешняя нормаль $N = (p_1, p_2)$ к которым имеет $p_1 < 0$, $p_2 > 0$.

3. СРАВНЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В предыдущем разделе появились два многоугольника Ньютона; опишем, как они связаны. Их преобразование друг в друга корректирует сделанное в [8] замечание об их связи, поясним это.

Утверждение 1. Точки, используемые для построения многоугольника Ньютона, употребляемого для определения порядков Жевре по линейному дифференциальному оператору, получаются как подмножество точек носителя многоугольника Ньютона, применяемого при вычислении экспоненциальных добавок к степенным разложениям решений в бесконечности, повернутого на $\pi/2$ по часовой стрелке.

Доказательство. Алгоритмы методов степенной геометрии и методов французской школы отличаются на этапе линеаризации левой части дифференциального уравнения. Итак, пусть есть линеаризация дифференциального уравнения n -го порядка, которая имеет вид

$$\sum_{k=0}^n c_k(x) u^{(k)}, \quad (5)$$

где каждая $c_k \in \mathbb{C}[[1/x]]$ — ряд по убывающим степеням x .

1. Покажем, как преобразуются и в какие точки переходят $u^{(k)}$ при замене (4). Видим, что $u' = uw'$, после сокращения на u ей соответствует точка $(-1, 1)$, вторая производная $u'' = u((w')^2 + w'')$ дает точки $(-2, 2)$ и $(-2, 1)$ и т.д. Докажем, что функции $u^{(n)}$ сопоставляются точки $(-n, n)$, $(-n, n-1), \dots, (-n, 1)$.

По индукции: база проверена; пусть

$$u^{(n-1)} = u \sum_{\substack{\ell_1+2\ell_2+\dots+(n-1)\ell_{n-1}=n-1, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n-1\}}} c_L(w')^{\ell_1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}},$$

тогда

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= u' \sum_{\substack{\ell_1+\dots+(n-1)\ell_{n-1}=n-1, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n-1\}}} c_L(w')^{\ell_1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} + u \sum_{k=1}^{n-1} c_L \ell_k (w')^{\ell_1} \dots (w^{(k)})^{\ell_k} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} = \\ &= u \sum_{\substack{\ell_1+\dots+(n-1)\ell_{n-1}=n-1, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n-1\}}} c_L(w')^{\ell_1+1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} + u \sum_{k=1}^{n-2} c_L \ell_k (w')^{\ell_1} \dots (w^{(k)})^{\ell_k-1} (w^{(k+1)})^{\ell_{k+1}+1} \dots (w^{(n-1)})^{\ell_{n-1}} + \\ &\quad + u c_{(0,\dots,0,1)} \ell_{n-1} w^{(n)} = u \sum_{\substack{\ell_1+2\ell_2+\dots+(n-1)\ell_{n-1}+n\ell_n=n, \\ \ell_i \in \{0,1,\dots,n\}}} \tilde{c}_L(w')^{\ell_1} \dots (w^{(n)})^{\ell_n}. \end{aligned}$$

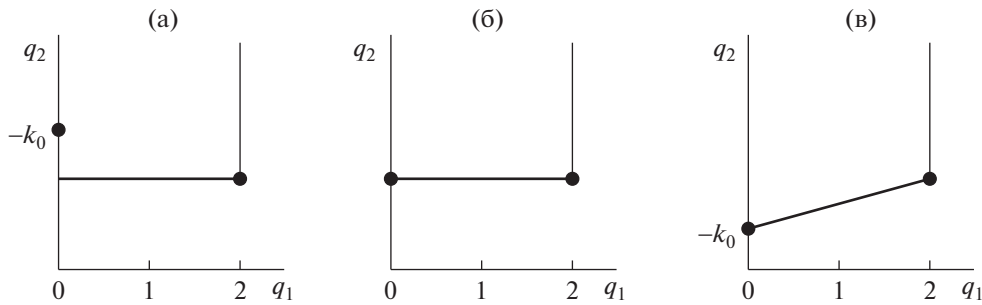
Полученной дифференциальной сумме соответствуют точки вида

$$(-\ell_1 - 2\ell_2 - \dots - (n-1)\ell_{n-1} - n\ell_n, \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1} + \ell_n) = (-n, k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

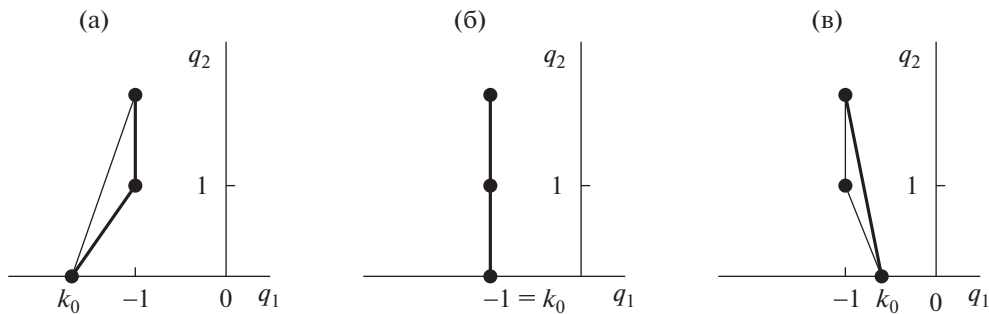
и, поскольку $1 \leq \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1} + \ell_n \leq n$, формула доказана.

2. Теперь найдем точки, которые соответствуют $u^{(k)}$ при построении многоугольника, по которому вычисляется порядок Жевре. Перепишем функции $u^{(k)}$ через оператор D из предыдущего раздела. Так, $u = Iu = D^0 u$, и ей сопоставляется $(0, 0)$, функции $u' = \frac{Du}{x}$ соответствует точка $(1, 1)$ многоугольника, функции $u'' = \frac{D^2 u - Du}{x^2}$ отвечают точки $(2, 2)$, $(1, 2)$. Легко проверить по индукции, что $u^{(k)}$ добавит в многоугольник точки (k, k) , $(k-1, k), \dots, (1, k)$, поскольку

$$u^{(k)} = \frac{D(D-I) \dots (D-(k-1)I)u}{x^k}.$$



Фиг. 1. Многоугольники Ньютона уравнения (6) для алгоритма I в случаях (а), (б), (в).



Фиг. 2. Многоугольники Ньютона уравнения (6) для алгоритма II в случаях (а), (б), (в).

Получили, что моному $x^a u^{(k)}$ соответствуют точки $(a - k, k), (a - k, n - k), \dots, (a - k, 1)$ в многоугольнике Ньютона алгоритма II и точки $(k, k - a), (k - 1, k - a), \dots, (1, k - a)$ алгоритма I (в алгоритме I затем используется только часть точек). Имеем биективное для каждого из дифференциальных мономов отображение точек первого многоугольника на точки второго, осуществляемое с помощью поворота на $\pi/2$ против часовой стрелки, переводящего точки второго многоугольника в точки первого по формуле

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

При этом, если точка вида (a, k) появляется в многоугольнике алгоритма II на каком-то из этапов, то затем она не может исчезнуть, поскольку она соответствует выражениям вида $c_{a,k} x^{a+k} u^{(k)}$, $c_{a,k+1} x^{a+k+1} u^{(k+1)}$, ... в операторе (3), т.е. выражениям, которые не могут сократиться после логарифмического преобразования (4) в полученном уравнении $G(x, w) = 0$ (степень x перед мономами не меняется), а именно, мономам вида

$$\tilde{c}_{a,k} x^{a+k} (w')^k, \tilde{c}_{a,k+1} x^{a+k+1} (w')^{k-1} w'', \tilde{c}_{a,k+2} x^{a+k+2} (w')^{k-2} (w'')^2, \hat{c}_{a,k+2} x^{a+k+2} (w')^{k-1} w''', \dots$$

Это завершает доказательство утверждения.

Пример 1. При алгоритме I может пропасть часть точек из алгоритма II.

Рассматривается уравнение

$$xu'' + u' + x^{k_0} u = 0. \quad (6)$$

Вычисления по алгоритму I дадут точки $(0, -k_0), (2, 1)$, вычисления по методу II — точки $(k_0, 0), (-1, 1), (-1, 2)$. Таким образом, точке $(-1, 1)$ метода II не соответствует точка по методу I.

На фиг. 1 и 2 изображены многоугольники для алгоритмов I и II для уравнения (6) в случаях (а) $k_0 < -1$, (б) $k_0 = -1$ и (в) $k_0 > -1$.

4. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В НУЛЕ

Запишем второй член четвертой иерархии Пенлеве (см. [2]). Заметим, что это уравнение уже представлено в виде дифференциальной суммы (конечной суммы многочленов от $y, y_x, \dots, y_{xxxx}$, умноженных на x^α):

$$\begin{aligned} & (y_{xx} - 2xy - 2y^3 - \beta)y^2y_{xxxx} + (2y^2 + 8y^3y_x + 4yy_xx - y_xy_{xx} + \beta y_x)yy_{xxx} - \frac{1}{2}y^2y_{xxx}^2 - \frac{4}{3}yy_{xx}^3 + \\ & + \left(3xy^2 + 3\beta y - \frac{3}{2}y^4 + \frac{3}{2}y_x^2\right)y_{xx}^2 + (\beta y^4 - 2y_xy^2 - 12y_x^2y^3 - 2\beta^2y + 10xy^5 - 3\beta y_x^2 + 10y^7 - \\ & - 4xyy_x^2 - 4\beta xy^2)y_{xx} + 2(\beta - 4y^3)y^2y_x + \left(4\beta xy + 8xy^4 + \frac{3}{2}\beta^2 + 12\beta y^3\right)y_x^2 - \frac{10}{3}y^{10} - \\ & - 8xy^8 - 2\beta y^7 - 6x^2y^6 - 2x\beta y^5 + \left(\frac{1}{2}\beta^2 - 2 + 9\delta - \frac{4}{3}x^3\right)y^4 + x\beta^2y^2 + \frac{1}{3}\beta^3y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь x и y — независимая и зависимая комплексные переменные соответственно, β, δ — комплексные параметры. Далее рассматриваем случай общего положения, предполагая, что оба параметра уравнения ненулевые.

4.1. Разложения W_1 – W_9

Рассмотрим разложения решений уравнения (7), полученные в [3] и [9] при $x \rightarrow 0$.

Начнем с рассмотрения разложений семейства W_1 , которые имеют вид

$$y = -\frac{\beta x^2}{10} + c_4x^4 + \frac{\beta}{80}x^5 + c_6x^6 + \sum_{k=7}^{\infty} a_{k,1}x^k.$$

Здесь и далее c_j — произвольные постоянные, коэффициенты $a_{j,s}$ однозначно через них выражаются.

Во-первых, заметим, что линейаризация укороченного уравнения

$$\begin{aligned} & y_{xx}y^2y_{xxxx} - \beta y^2y_{xxxx} - \frac{y^2y_{xxx}^2}{2} - yy_xy_{xx}y_{xxx} + \beta yy_xy_{xxx} - \frac{4}{3}yy_{xx}^3 + 3\beta yy_{xx}^2 + \frac{3}{2}y_x^2y_{xx}^2 - \\ & - 2\beta^2yy_{xx} - 3\beta y_x^2y_{xx} + \frac{3}{2}\beta^2y_x^2 + \frac{1}{3}\beta^3y = 0, \end{aligned}$$

из которого получен первый член асимптотического разложения W_1 , на решении $w = -\beta x^2/10$ содержит оператор четвертой производной, т.е. порядок максимальной входящей в линейаризацию производной совпадает с порядком исходного уравнения (7). Для доказательства сходимости разложения можно использовать теоремы о сходимости из [10]. Разложение сходится.

Во-вторых, проверим это утверждение путем нахождения порядков Жевре и экспоненциальных добавок. Вычислим первую вариацию левой части уравнения (7) на решении W_1 , применим к u , сделаем замену (4), построим многоугольник Ньютона полученного уравнения

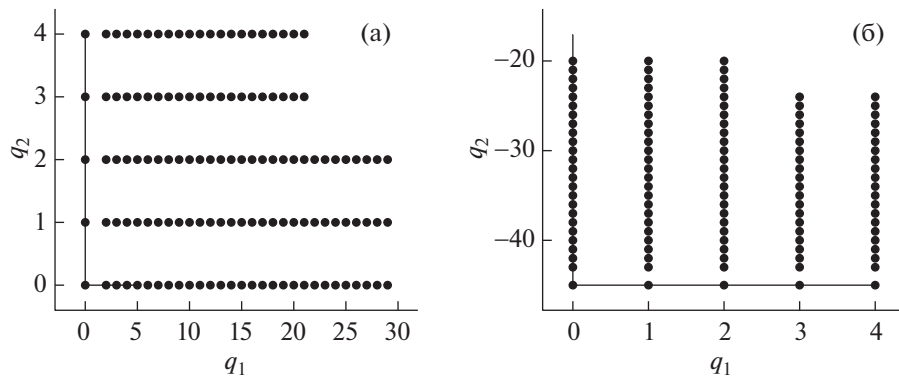
$$\frac{3\beta^3}{125} \left(-36xw_x + 3x^3w_xw_{xx} - 2x^4w_xw_{xxx} + 8x^2w_x^2 - 3x^4w_x^2w_{xx} + x^3w_x^3 - \frac{1}{2}x^4w_x^4 + \dots \right) = 0 \quad (8)$$

на фиг. 3а (в уравнении (8) выписаны только мономы с минимальными по x степенями).

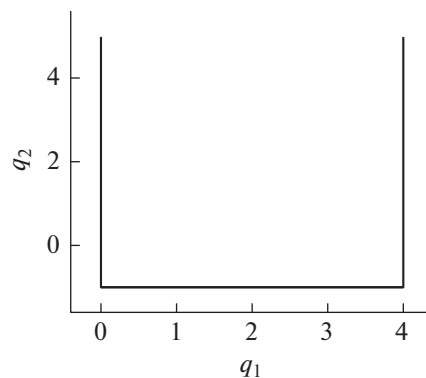
Многоугольник не имеет сторон с внешними нормальными $N = (p_1, p_2)$, удовлетворяющими условию $p_1 < 0, p_2 > 0$, поэтому разложение W_1 не имеет экспоненциальных добавок.

На фиг. 3б указан многоугольник для нахождения порядков Жевре разложений. Видим, что он не имеет ненулевых тангенсов углов наклона сторон, поэтому ряд W_1 сходится согласно теории из [6].

Рассуждения для семейств разложений W_2 – W_7 из [3] идентичны проведенным выше, все эти разложения являются сходящимися, доказательство сходимости разложений семейств W_8, W_9 (при $\beta \neq -2$ и $\beta \neq 2$ соответственно) также аналогично.



Фиг. 3. Многоугольники Ньютона алгоритмов II и I для разложения W_1 .



Фиг. 4. Многоугольник Ньютона алгоритма I.

4.2. Разложения, продолжающие асимптотику $y = cx$

Докажем, пользуясь алгоритмом I, сходимость разложений семейств $W_{19} - W_{21}$. Разложения этих семейств имеют вид $y = cx + \beta/2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots$

Сделаем в уравнении (7) замену $x = 1/t$, переведя точку $x = 0$ в $t = \infty$, и воспользуемся алгоритмом I построения многоугольника.

Для этого запишем линеаризацию левой части уравнения (7) (после замены переменной), выраженную через оператор $D_t = t \frac{d}{dt}$, получим (выписываем только старшие — ведущие степени по t)

1) $b_3 \neq 0$, ведущие слагаемые вида $6c^2b_3(D_t^4 + 8D_t^3 + 19D_t^2 + 12D_t)t$, многоугольник Ньютона которого представлен на фиг. 4. Многоугольник не имеет наклонных ребер, что говорит о сходимости разложений семейства W_{19} ;

2) $b_3 = 0$, $b_4 \neq c/6$, ведущие слагаемые вида $-2c^2(c - 6b_4)(D_t^4 + 9D_t^3 + 23D_t^2 + 15D_t)$, многоугольник Ньютона получается сдвигом из многоугольника на фиг. 4. Для разложений семейств $W_{20,21}$ коэффициент $b_4 = c/6$ только в случае $\delta = 0$, такой случай не рассматриваем в данной работе, сходимость доказана.

4.3. Сходимость разложений, продолжающих асимптотику $y = c$

Рассмотрим семейство разложений

$$y = c + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_kx^k, \quad c \neq 0,$$

заметив, что разложения $F_1 - F_6$ из [9] и найденные ниже разложения могут быть записаны как частные случаи этого семейства при различных соотношениях на коэффициенты $c_1 - c_4$. Вновь переводим точку $x = 0$ в $t = \infty$, выписываем ведущие слагаемые при степенях оператора D_t :

$$-c^2(b + 2c^3 - 2c_2)(D_t^4 + 6D_t^3 + 11D_t^2 + 6D_t)t^4. \quad (9)$$

В случае $b + 2c^3 - 2c_2 \neq 0$ многоугольник оператора (9) по алгоритму I получается вертикальным сдвигом из многоугольника на фиг. 4. Имеет место сходимость таких разложений. Сходимость разложений при $b + 2c^3 - 2c_2 = 0$ должна быть рассмотрена отдельно.

4.4. Разложения, продолжающие асимптотику $y = c$ при $\beta = -2c^3$

Утверждение 2. При $\beta = -2c^3 \neq 0$, $\delta \neq 0$ имеются следующие дополнительные семейства асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} F_7 &= \left\{ y = c + c_2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k,7} x^k \right\}, \quad c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \\ F_{8,9} &= \left\{ y = c + \frac{c(2 \pm 3\sqrt{2\delta})}{6} x^3 + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,8,9} x^k \right\}, \quad c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ существуют при } \delta \neq 2/9; \\ F_{10} &= \left\{ y = c + \frac{2c}{3} x^3 + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,10} x^k \right\}, \quad c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{при } \delta = 2/9; \\ F_{16} &= \left\{ y = c + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,16} x^k \right\}, \quad c_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{при } \delta = 2/9; \\ F_{11} &= \left\{ y = c - \frac{c^3}{20} x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} a_{k,11} x^k \right\}, \text{ существует при } \delta = 2/9; \\ F_{12} &= \left\{ y = c + c_1 x + c_2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k,12} x^k \right\}; \\ F_{13,14} &= \left\{ y = c + c_1 x + \frac{c(2 + 6cc_1 \pm 3\sqrt{2\delta})}{6} x^3 + c_4 x^4 + \sum_{k=5}^{\infty} a_{k,13,14} x^k \right\}, \quad 6cc_1 + 2 = \pm 3\sqrt{2\delta}, \quad c_1 \neq 0; \\ F_{15} &= \left\{ y = c + c_1 x + \frac{-3c^4 c_1 - c^3 + 2c_1^3}{20} x^5 + \sum_{k=6}^{\infty} a_{k,15} x^k \right\}, \quad 6cc_1 + 2 = \pm 3\sqrt{2\delta}, \quad c_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Доказательство состоит в последовательном переборе вершин и ребер многоугольников Ньютона методами степенной геометрии и следует ниже.

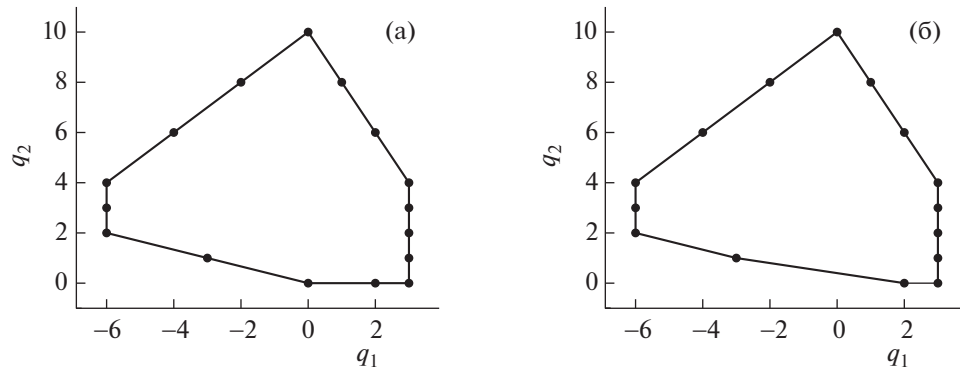
Обратимся к случаю $\beta = -2c^3$. Такое соотношение параметров уравнения и решения пропущено в [9]: при подстановке $y = c + w$ в уравнение (7) у многоугольника $\hat{\Gamma}$ может пропасть точка $(-4, 1)$, которой соответствует укороченное уравнение

$$-c^2(\beta + 2c^3)w_{xxxx} = 0.$$

Преобразованному уравнению (7) в этом случае соответствует многоугольник $\hat{\Gamma}$, изображенный на фиг. 5а. В рассмотрении в многоугольнике $\hat{\Gamma}$ нуждаются лишь вершина $(-6, 2)$ и ребро $\hat{\Gamma}_1$, соединяющее вершины $(-6, 2)$ и $(0, 0)$. Эта конфигурация многоугольника возможна при наличии точки $(0, 0)$, т.е. в случае $\delta \neq 2/9$.

Вершине $(-6, 2)$ многоугольника $\hat{\Gamma}$ соответствует укороченное уравнение

$$c^2 \left(w_{xxxx} w_{xx} - \frac{w_{xxx}^2}{2} \right) = 0,$$

Фиг. 5. Многоугольники Ньютона $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\Gamma}'$.

в которое подставляем $w = cx^r$, имеем $r = 0, r = 1$ (кратности два), $r = 2, r = 4$ (кратности один). В конусе задачи лежат $r = 1$ и $r = 2$. При $r = 2$ асимптотика продолжается как семейство разложений F_7 . Случай $r = 1$ — кратный корень — исследуем позже, сделав в уравнении (7) замену $w = c + c_1x + u$.

Ребру $\hat{\Gamma}_1$ отвечает уравнение

$$c^2 w_{xxxx} w_{xx} - \frac{1}{2} c^2 w_{xxx}^2 + 2c^3 w_{xxx} - 2c^3 x w_{xxxx} - c^4 (2 - 9\delta) = 0. \quad (10)$$

Его решение ищем в виде $w = Ax^3$, получаем, что $A_{1,2} = (2c \pm 3c\sqrt{2\delta})/6$. Имеем либо одно критическое число $k = 4$ при $\delta \neq 0$, что дает разложения $F_{8,9}$, либо — при $\delta = 0$ (кратном корне A) — нулевую линейаризацию укороченного уравнения на решении. В данной работе рассматриваем случай общего положения, поэтому дальнейшее исследование нулевой линейаризации здесь не проводим.

Теперь рассмотрим многоугольник $\hat{\Gamma}'$, полученный для уравнения (7) после замены $y = c + w$ в случае $\beta = -2c^3$, $\delta = 2/9$ (изображен на фиг. 5б). Рассматриваем его ребра: ребро $\hat{\Gamma}'_1$, соединяющее вершины $(-6, 2)$ и $(-3, 1)$, и ребро $\hat{\Gamma}'_2$, соединяющее вершины $(2, 0)$ и $(-3, 1)$, а также вершины $(2, 0)$ (алгебраическая), $(-6, 2)$ (встречалась ранее) и новую вершину $(-3, 1)$, которой отвечает укороченное уравнение

$$2c^3 (w_{xxx} - xw_{xxxx}) = 0.$$

Оно не дает подходящих степенных решений: подставляя $w = cx^r$ в уравнение, имеем $r \in \{0, 1, 2, 4\}$, такие значения не подходят для продолжения разложения (не соответствуют нормальному конусу вершины).

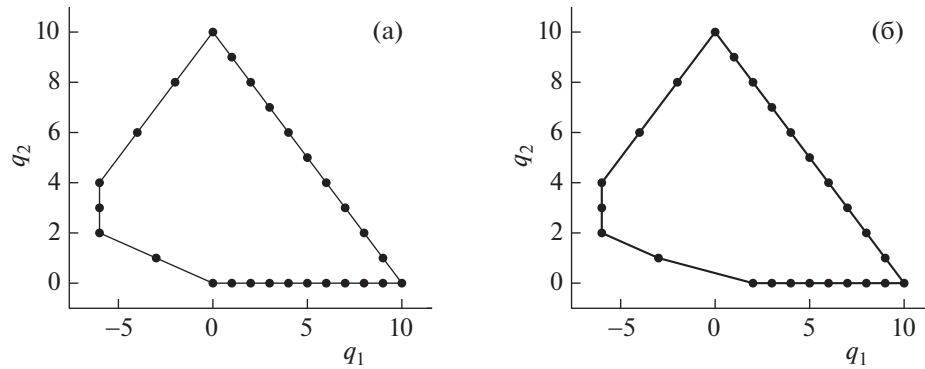
Ребру $\hat{\Gamma}'_1$ отвечает укороченное уравнение (10) при $\delta = 2/9$ и семейства F_{10}, F_{16} , полученные из имеющихся выше семейств $F_{8,9}$ подстановкой.

Ребру $\hat{\Gamma}'_2$ отвечает укороченное уравнение

$$2c^3 (w_{xxx} - xw_{xxxx}) - 6c^6 x^2 = 0, \quad (11)$$

его решение ищем, подставляя $w = Bx^5$. Имеем семейство разложений F_{11} .

Рассмотрим многоугольник уравнения, полученного из уравнения (7) заменой $y = c + c_1x + u$. В [9] не учтены разложения, отвечающие $\beta + 2c^3 = 0$. Опять разделяем случаи наличия (многоугольник $\bar{\Gamma}$, фиг. 6а) и отсутствия ($\bar{\Gamma}'$, фиг. 6б) точки $(0, 0)$ в носителе многоугольника, т.е. случаи неравенства и равенства нулю выражения $cc_1(12 + 18cc_1) - 9\delta + 2$ (заметим, что предыдущий разобранный случай вкладывается здесь как подслучай при $c_1 = 0$).



Фиг. 6. Многоугольники Ньютона $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}'$.

Уравнение вершины $(-6, 2)$ многоугольника $\bar{\Gamma}$ рассмотрено ранее, вершина дает семейство решений F_{12} . Вершина $(0, 0)$ алгебраическая, не дает решений. Ребру, соединяющему вершины $(0, 0)$ и $(-6, 2)$, отвечает уравнение

$$c^2 w_{xxxx} w_{xx} - \frac{1}{2} c^2 w_{xxx}^2 + (2c^3 + 6c^4 c_1) w_{xxx} - (2c^3 + 6c^4 c_1) x w_{xxxx} - c^4 (12c c_1 + 2 + 18c^2 c_1^2 - 9\delta) = 0.$$

Его решение ищем в виде $w = Ax^3$, получаем, что $A_{13,14} = (2c + 6c^2 c_1 \pm 3c\sqrt{2\delta})/6$, критическое число $k = 4$ при $\delta \neq 0$ и нулевую линейаризацию укороченного уравнения на решении при $\delta = 0$. Это дает при $\delta \neq 0$ начальные члены разложения $F_{13,14}$.

Остается многоугольник $\bar{\Gamma}'$, в котором появляется не рассмотренное ранее ребро, соединяющее точки $(-3, 1)$ и $(2, 0)$. Ему отвечает укороченное уравнение

$$2c^3(1 + 3cc_1)(u_{xxx} - xu_{xxxx}) - 6c^3(c^3 + 6c^4 c_1 + 9c^5 c_1^2 - 2c^3 - 6cc_1^4)x^2 = 0 \quad (12)$$

с подходящими решениями $u = Bx^5$. Заметим, что уравнение (11) получается как частный случай уравнения (12) при $c_1 = 0$. Имеем семейство F_{15} .

5. КОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПОРЯДКОВ ЖЕВРЕ

Имеется написанный в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica (см. [11]) код для вычисления порядка Жевре. На входе есть дифференциальное уравнение и формально удовлетворяющий ему ряд. Код приводится для дифференциального уравнения 2-го порядка и выложен в открытом доступе: <https://github.com/Victoranoshin/Asymptotic-expansions-of-solutions-for-equations-in-the-Wolfram-Mathematica-system>.

В команду Expand вместо многоточия подставляется левая часть дифференциального уравнения, вместо 'solution' — формальное решение этого уравнения.

Код для вычисления порядков Жевре в случае рассматриваемого уравнения 4-го порядка для конкретных формальных разложений выкладывается туда же.

6. О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть уравнение (1) при $x \rightarrow 0$ имеет формальное решение $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Сделаем в уравнении (1) подстановку

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + z,$$

получим уравнение $G(x, z) = 0$. При этом носитель дифференциальной суммы (ряда) G не содержит точек (q_1, q_2) с $q_2 = 0$. Пусть g — линейная по z часть дифференциальной суммы G . Тогда

$$g(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)x^k,$$

где g_k — линейные по z дифференциальные суммы с постоянными коэффициентами. Пусть g_ℓ — первая отличная от нуля такая сумма.

Теорема (см. [4, п. 3.4]). *Если порядки дифференцирования в g_ℓ и полном уравнении (1) совпадают, то формальное решение сходится при малых $|x|$.*

Это условие совпадает с условием в работе [12]. Для рядов более широкого класса, чем упомянуто здесь, оно доказано в [10].

Для всех полученных вблизи нуля разложений можно проверить выполнение этого условия для доказательства сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикеринг А. Иерархии Пенлеве и тест Пенлеве // Успехи матем. наук. 2003. Т. 137. № 3. С. 445–456.
2. Кудряшов Н.А. О четвертой иерархии Пенлеве // Теор. и матем. физ. 2003. Т. 134. С. 101–109.
3. Аношин В.И., Бекетова А.Д., Парусникова А.В., Романов К.В. Некоторые асимптотические разложения решений иерархии четвертого уравнения Пенлеве // Программирование. 2022. № 1. С. 34–39.
4. Брюно А.Д. Асимптотика и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. Вып. 3. С. 31–80. Тр. ММО. 2010. Т. 71.
5. Рамис Ж.П. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2002.
6. Sibuya Y. Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation. Providence: AMS, 1985.
7. Брюно А.Д. Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. АН. 2012. Т. 443. № 1. С. 539–544.
8. Parusnikova A. V. On Gevrey orders of formal power series solutions to the third and fifth Painlevé equations near infinity // Opuscula Math. 2014. V. 34. № 3. P. 591–599.
9. Аношин В.И., Бекетова А.Д., Парусникова А.В. Асимптотические разложения решений второго члена четвертой иерархии Пенлеве, продолжающие константную асимптотику при $x \rightarrow 0$ // Дифференц. уравнения и смежные вопросы математики. Тр. XIII Приокской науч. конф. ГСГУ, 2021. С. 33–39.
10. Gontsov R., Goryuchkina I. The Maillet-Malgrange type theorem for generalized power series // Manuscripta Math. 2018. V. 156. P. 171–185.
11. Wolfram St. The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
12. Malgrange B. Sur le théorème de Maillet-Malgrange // Asymptot. Anal. 1989. V. 2. P. 1–4.