

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.926

**КОНТРПРИМЕРЫ К ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ О ВОЗМОЖНОСТИ
ПРОДОЛЖЕНИЯ УСЕЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ
УСЕЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

© 2023 г. С. А. Абрамов^{1,*}, А. А. Рябенко^{1,**}, Д. Е. Хмельнов^{1,***}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

**e-mail: anna.ryabenko@gmail.com

***e-mail: dennis_khmelnov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.
Переработанный вариант 01.06.2022 г.
Принята к публикации 17.09.2022 г.

Ранее авторами были предложены алгоритмы, которые позволяют находить экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде таких степенных рядов, для которых известны только начальные члены. В решение входит конечное число степенных рядов и для них вычисляется максимально возможное число членов. Теперь к этим алгоритмам добавляется опция подтверждения того, что без дополнительной информации об уравнении невозможно получить большее число членов этих рядов: строится контрпример к предположению о возможности получения однозначно определенных дополнительных членов. В предыдущих работах авторами предлагались такого рода подтверждения для случаев лорановых и регулярных решений. Библ. 23.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, усеченные степенные ряды, системы компьютерной алгебры.

DOI: 10.31857/S0044466923010027, **EDN:** LEVQUY

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с коэффициентами, имеющими вид таких степенных рядов, относительно которых известны только их первые члены, а “хвосты” этих рядов неизвестны. Таким образом, о рассматриваемых уравнениях имеется лишь неполная информация. В [1]–[6] предлагались алгоритмы поиска решений таких уравнений в виде лорановых рядов, а также поиска регулярных и экспоненциально-логарифмических решений. Было доказано, что эти алгоритмы позволяют найти максимально возможное число членов тех рядов, которые входят в решения. Алгоритмы реализованы авторами в виде пакета процедур – см. [7]–[10]. Для пользователя этих процедур может оказаться желательным получить какие-то наглядные доводы в пользу максимальности числа найденных членов рядов. Такого рода наглядные средства и предлагаются ниже: описан алгоритм, который для произвольного уравнения с усеченными коэффициентами предъявляет два продолженных варианта исходного уравнения, решения которых различаются между собой в последующих (не попавших в число найденных) членах рядов, входящих в решения.

Поясним простым примером суть рассматриваемой задачи. С помощью алгоритма из [4] устанавливается, что уравнение

$$\left(x^3 + \frac{x^5}{3} + O(x^6)\right)y'(x) + (1 + 3x + O(x^3))y(x) = 0 \quad (1)$$

(здесь $O(x^k)$ обозначает какие-то неизвестные нам члены степенного ряда с показателями степени x , не меньшими, чем k) имеет решение

$$e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}} x (C + O(x)), \quad (2)$$

где C – произвольная постоянная. Можем ли мы, исходя из (1), узнать большее число членов ряда, который в (2) представлен как $(C + O(x))$? Отрицательный ответ обосновывается предъявлением двух продолженных вариантов уравнения (1):

$$\left(x^3 + \frac{x^5}{3} + 4x^6 + O(x^7)\right)y'(x) + (1 + 3x + x^3 + O(x^4))y(x) = 0 \quad (3)$$

и

$$\left(x^3 + \frac{x^5}{3} - 4x^6 + O(x^7)\right)y'(x) + (1 + 3x + O(x^4))y(x) = 0. \quad (4)$$

Алгоритм из [4] находит решения этих двух уравнений:

$$e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}} x (C + 4Cx + O(x^2)),$$

$$e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}} x (C - 3Cx + O(x^2)).$$

Это показывает, что для входящего в (2) ряда $(C + O(x))$ мы не можем найти его коэффициент при x , не используя для этого никакой дополнительной информации, касающейся уравнения (1). Пара уравнений (3), (4) образуют в терминологии этой статьи *контрпример* к предположению, что последующие члены рядов, входящих в экспоненциально-логарифмические решения уравнения (1), могут быть найдены, исходя только из этого усеченного уравнения.

В разд. 6 демонстрируется построение этого контрпримера, т.е. уравнений (3), (4), с помощью нашего алгоритма, реализованного в среде Maple.

Предварительный вариант этой работы был представлен в виде доклада [11].

2. УСЕЧЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Для кольца полиномов от x над K будет использоваться обычное обозначение $K[x]$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов – через $K((x))$. Очевидно, $K[x] \subset K[[x]] \subset K((x))$. Для принадлежащего $K((x))$ ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ его *валюация* $\text{val} a(x)$ определена равенством $\text{val} a(x) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\text{val} 0 = \infty$.

Мы рассматриваем уравнения вида

$$a_r(x)y^{(r)}(x) + a_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = 0, \quad (5)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция от x . Относительно $a_0(x), a_1(x), \dots, a_r(x)$ (*коэффициентов уравнения*) предполагается, что для каждого $i = 0, 1, \dots, r$ коэффициент $a_i(x)$ – это *усеченный ряд*

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x^j + O(x^{t_i+1}), \quad (6)$$

где $a_{ij} \in K$; t_i – целое, такое что $t_i \geq -1$ (если $t_i = -1$, сумма в (6) полагается равной 0). Здесь и далее символ $O(x^t)$, встречающийся в формальных выражениях, обозначает некоторый ряд, валюация которого не меньше, чем t . Мы называем t_i *степенью усечения* ряда $a_i(x)$, представленного в виде (6). Заметим, что любой коэффициент в (5) может иметь вид $O(x^m)$, $m \geq 0$.

Продолжением уравнения (5) будем называть любое уравнение

$$\tilde{a}_r(x)y^{(r)}(x) + \tilde{a}_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x) + \dots + \tilde{a}_0(x)y(x) = 0,$$

для которого $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1})$, т.е. $\text{val}(\tilde{a}_i(x) - a_i(x)) > t_i, i = 0, 1, \dots, r$.

3. УСЕЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Формальными экспоненциально-логарифмическими решениями уравнения

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{rj} x^j\right) y^{(r)}(x) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{r-1,j} x^j\right) y^{(r-1)}(x) + \dots + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{0j} x^j\right) y(x) = 0, \tag{7}$$

имеющего полностью заданные коэффициенты-ряды, называются решения вида

$$e^{Q(x^{-1/q})} x^\lambda w(x^{1/q}), \tag{8}$$

где Q – полином с коэффициентами из $K, q \in \mathbb{Z}_{>0}, \lambda \in K,$

$$w(x) = \sum_{s=0}^m w_s(x) \ln^s x,$$

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, w_s(x) \in K((x)), s = 0, \dots, m,$ и $w_m(x) \neq 0$. При этом $x^\lambda w(x^{1/q})$ называется *регулярной частью*, $Q(x^{-1/q})$ – *показателем экспоненциальной части*, q – *индексом ветвления* решения (8).

Если $q = 1$ и $Q \in K$, то решение (8) называется *формальным регулярным*, в противном случае – *нерегулярным*. При $q = 1, Q \in K, \lambda \in \mathbb{Z}$ и $w(x) \in K((x))$ формальное регулярное решение (8) называется *лорановым*. В обсуждениях решений уравнений слово “формальный” мы опускаем, но подразумеваем.

Пусть в уравнении (7) старший коэффициент $\tilde{a}_r(x)$ отличен от нуля. Известно (см., например, [12, гл. V], [13]–[16]), что существует r линейно независимых над K решений вида (8) для уравнения (7). В [13]–[17] предложены алгоритмы нахождения для r линейно независимых решений вида (8) их индекса ветвления q и показателя экспоненциальной части $Q(x^{-1/q})$. Пусть в (7) валюация по крайней мере одного из коэффициентов равна 0. Тогда для построения индекса ветвления q и показателя экспоненциальной части $Q(x^{-1/q})$ для всех решений достаточно знать значения $r \text{val} \tilde{a}_r(x)$ начальных коэффициентов всех $\tilde{a}_i(x), i = 0, 1, \dots, r$ (см., например, [18]). Для построения регулярной части решения с любой заданной степенью усечения входящих в $w(x)$ рядов можно применять алгоритмы, предложенные в [12, гл. IV], [19], [20, гл. II, VIII]. Для этого построения также достаточно знать некоторое конечное число начальных коэффициентов всех $\tilde{a}_i(x)$ (см. [21, Prop. 1]).

Пусть $Q(x^{-1/q}) \in K[x^{-1/q}], q \in \mathbb{Z}_{>0}, \lambda \in K$ и

$$w_s^{(k_s)}(x) = \sum_{j=j_s}^{k_s} w_{s,j} x^j + O(x^{k_s+1}),$$

$j_s, k_s \in \mathbb{Z}, k_s \geq j_s, s = 0, \dots, m,$ и $w_{m,j_m} \neq 0$. Для уравнения (5) с усеченными коэффициентами мы называем *решением с усеченной регулярной частью* выражение

$$e^{Q(x^{-1/q})} x^\lambda \sum_{s=0}^m w_s^{(k_s)}(x^{1/q}) \ln^s x, \tag{9}$$

коль скоро любое уравнение, являющееся продолжением (5), имеет решение $e^{Q(x^{-1/q})} x^\lambda \tilde{w}(x^{1/q})$, являющееся *продолжением решения* (9), т.е. $\tilde{w}(x)$ имеет вид

$$\tilde{w}(x) = \sum_{s=0}^m \tilde{w}_s(x) \ln^s x$$

и выполняется $\tilde{w}_s(x) - w_s^{(k_s)}(x) = O(x^{k_s+1})$, т.е. $\text{val}(\tilde{w}_s(x) - w_s^{(k_s)}(x)) > k_s, s = 0, 1, \dots, m$. Мы говорим, что усеченное решение *инвариантно* относительно любого продолжения уравнения (5).

4. РЕШЕНИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ УСЕЧЕНИЯ

В [1]–[4], [7] показано, что для уравнения вида (5) возможно построение всех инвариантных усеченных решений с *максимальной степенью усечения* входящих в решение рядов. Максимальность степени усечения в s_{\max} означает, что не существует инвариантного решения s , являющегося продолжением s_{\max} , такого, что степень усечения хотя бы одного ряда в s больше, чем степень усечения соответствующего ряда в s_{\max} . В этом случае мы говорим об исчерпывающем использовании информации о заданном уравнении при построении усеченных решений. В названных статьях представлены алгоритмы решения этой задачи и их реализация в Maple.

В [22], [23] мы рассматривали вопрос автоматического подтверждения такого исчерпывающего использования информации о заданном уравнении при построении лорановых и регулярных усеченных решений. Подтверждением служит контрпример, состоящий из двух различных продолжений заданного уравнения, которые приводят к появлению различных дополнительных членов в решениях.

Алгоритмы построения как самих усеченных решений, так и контрпримеров указанного типа основаны на поиске решений с *литералами*, т.е. с символьными обозначениями незаданных коэффициентов входящих в уравнение рядов (см. [7]). Литералы обозначают коэффициенты при членах ряда, степени которых больше степени усечения ряда. Поиск решений с помощью литералов означает представление последующих (неинвариантных для всех возможных продолжений) членов ряда выражениями, содержащими литералы, т.е. незаданные коэффициенты. Это позволяет прояснить влияние незаданных коэффициентов на последующие члены рядов в решении.

Ниже мы расширяем полученные в [22], [23] результаты на случай экспоненциально-логарифмических решений с усеченной регулярной частью. Решается задача предъявления двух различных продолжений исходного уравнения, дающих контрпример к предположению о возможности добавления инвариантных членов к входящим в построенные усеченные решения заданного усеченного уравнения.

5. ПОСТРОЕНИЕ КОНТРПРИМЕРА

Содержащее литералы продолжение уравнения (5) имеет вид

$$\left(\sum_{j=0}^{t_r} a_{rj} x^j + \sum_{j=t_r+1}^{\infty} U_{rj} x^j \right) y^{(r)}(x) + \left(\sum_{j=0}^{t_{r-1}} a_{r-1,j} x^j + \sum_{j=t_{r-1}+1}^{\infty} U_{r-1,j} x^j \right) y^{(r-1)}(x) + \dots \quad (10)$$

$$\dots + \left(\sum_{j=0}^{t_0} a_{0j} x^j + \sum_{j=t_0+1}^{\infty} U_{0j} x^j \right) y(x) = 0,$$

где U_{ij} – обозначение литерала. Алгоритм из [15], в более общем виде представленный в [17], позволит построить экспоненциальные части $e^{Q(x^{-1/q})}$ всех решений вида (8) для уравнения (10). Нас будут интересовать только те из них, для которых индекс ветвления q и коэффициенты полинома Q не зависят от литералов. Для каждой из таких пар q, Q выполняем в (10) подстановку

$$x = t^q, \quad y(x) = e^{Q(1/t)} z(t),$$

где t – новая независимая переменная, $z(t)$ – новая неизвестная функция. В результате подстановки и умножения уравнения на $e^{-Q(1/t)}$ получаем новое уравнение, коэффициенты которого являются лорановыми рядами от t . Коэффициенты этих рядов являются полиномами от литералов над K . Для нового уравнения строим регулярные решения $t^\lambda w(t)$, используя вариант алгоритма из [3, разд. 4.2]. Этот вариант для каждого ряда, входящего в регулярное решение, вычисляет максимальное число членов, инвариантных относительно всех продолжений уравнения, и, дополнительно, еще один член, коэффициент которого зависит от литералов. Этот коэффициент является полиномом над K конечного числа литералов.

Таким образом, для экспоненциально-логарифмического решения с усеченной регулярной частью (9) мы получим конечное множество полиномов от литералов, которое можно использовать для построения контрпримера.

В [23] при рассмотрении усеченных лорановых и регулярных решений нами была доказана следующая

Лемма 1 (см. [23, лемма 1]). *При любом целом $m > 0$ и $p_i(x_1, \dots, x_l) \in K[x_1, \dots, x_k] \setminus K$, $i = 1, \dots, m$, существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in K$, что*

$$p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq p_i(\beta_1, \dots, \beta_l), \quad i = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Из приведенного в [23] доказательства следует, что

$$\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \tag{12}$$

могут быть взяты целочисленными (в любое поле K характеристики 0 естественным образом вкладывается кольцо целых чисел). Можно перебирать все целочисленные наборы (12) до первого, удовлетворяющего (11). Это позволит фактически найти нужный набор. Здесь возможно также привлечение эвристик и случайного выбора.

На основе этого можно описать алгоритм построения контрпримера к предположению о возможности получения однозначно определенных дополнительных членов рядов, присутствующих в решениях.

Теорема 1. *Пусть \mathcal{E} – уравнение вида (5), s – его усеченное решение, найденное с помощью алгоритма из [4]. Тогда для \mathcal{E} существуют два различных продолжения \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , имеющих усеченные решения s_1 и соответственно s_2 , которые являются такими продолжениями s , что любой усеченный ряд, входящий в s , имеет продолжение как в s_1 , так и в s_2 , и уже самые первые дополнительные члены в s_1, s_2 не совпадают.*

Доказательство. Каждый входящий в усеченное решение вида (9) ряд строится алгоритмом из [4] до первого содержащего литералы члена, который уже не включается в итоговое усеченное решение. Перед моментом отбрасывания членов с литералами ряд в усеченном решении может быть записан в виде

$$c_{i0} + c_{i1}x + \dots + c_{ik_i}x^{k_i} + p_i(u_1, \dots, u_l)x^{k_i+1} + O(x^{k_i+2}),$$

где

u_1, \dots, u_l – некоторые из литералов, встречающихся в (10),

$c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{ik_i}$ – не зависящие от литералов константы,

$p_i(u_1, \dots, u_l)$ – не являющийся константой полином над K от литералов u_1, \dots, u_l , $i = 1, \dots, m$.

К полиномам $p_i(u_1, \dots, u_l)$, $i = 1, \dots, m$, можно применить лемму 1. Таким образом, существуют и могут быть найдены два различных набора (целых) значений $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in K$ для литералов u_1, \dots, u_l , с помощью которых строятся продолжения \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , имеющие усеченные решения s_1 и s_2 с различающимися дополнительными членами $p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_l)x^{k_i+1}$ и $p_i(\beta_1, \dots, \beta_l)x^{k_i+1}$ соответственно, не содержащими литералов. Отсюда следует утверждение теоремы.

6. РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ

Построение контрпримера реализовано в системе компьютерной алгебры Maple 2021 как расширение возможностей процедуры *FormalSolution* из пакета *TruncatedSeries*. Этот пакет содержит наши реализации в Maple алгоритмов, представленных в [1]–[9], [22], [23]. Файлы Maple-библиотеки, содержащей пакет, и файлы Maple-сессий с примерами использования процедур пакета можно найти на странице [10].

Первый параметр процедуры *FormalSolution* – дифференциальное уравнение (5). Производная $y(x)$ порядка i записывается стандартным для Maple образом: $\text{diff}(y(x), x\$i)$. Усеченные коэффициенты вида (6) записываются как $a_i(x) + O(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ – полином степени, не большей чем t_i , над полем алгебраических чисел.

Имя неизвестной функции задается во втором параметре процедуры.

Для работы с процедурами пакета необходимо загрузить архив *TruncatedSeries2021.zip*, расположенный на странице [10]. Этот архив содержит два файла: *maple.ind* и *maple.lib*. Необходимо

поместить эти файлы в некотором каталоге, например "/usr/userlib", и в Maple-сессии выполнить присваивание

```
> libname := " /usr/userlib", libname.
```

Следующая команда в сессии делает возможным обращение к процедурам пакета *TruncatedSeries* в короткой форме:

```
> with(TruncatedSeries);
```

Интерфейс системы Maple 2021 позволяет вводить уравнения в математической форме. Присвоим переменной *eq* выражение, обозначающее уравнение (1):

```
> eq := (1 + 3x + O(x^3))y(x) + (x^3 + 1/3 x^5 + O(x^6))(d/dx y(x)) = 0 :
```

В результате следующего вызова процедуры *FormalSolution* будет получено усеченное решение с максимальной степенью усечения:

```
> FormalSolution(eq, y(x), 'counterexample' = 'Eqs')
```

$$\left[e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} (-c_1 + O(x)) \right]$$

и переменной *Eqs* будет присвоена пара уравнений, представляющая собой контрпример:

```
> Eqs[1]
```

$$(1 + 3x + x^3 + O(x^4))y(x) + \left(x^3 + \frac{x^5}{3} + 4x^6 + O(x^7)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

```
> Eqs[2]
```

$$(1 + 3x + O(x^4))y(x) + \left(x^3 + \frac{x^5}{3} - 4x^6 + O(x^7)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

Для уравнений контрпримера построим усеченные решения:

```
> FormalSolution(Eqs[1], y(x))
```

$$\left[e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} (-c_1 + 4c_1x + O(x^2)) \right]$$

```
> FormalSolution(Eqs[2], y(x))
```

$$\left[e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} (-c_1 - 3c_1x + O(x^2)) \right]$$

Видно, что коэффициенты при *x* в рядах, входящих в эти решения, совпадают, только если оба эти решения нулевые.

Рассмотрим другое уравнение, второго порядка:

```
> eq := O(x^10)y(x) + (1 + 3x + O(x^3))(d/dx y(x)) + (x^3 + x^5/3 + O(x^6))(d^2/dx^2 y(x)) = 0 :
```

С помощью процедуры *FormalSolution* получаем экспоненциально-логарифмические решения, в которых регулярные части вычислены до максимально возможной степени:

```
> FormalSolution(eq, y(x))
```

$$\left[-c_1 + O(x^{11}) + e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x} - \frac{10}{3}} x^{\frac{10}{3}} (-c_2 + O(x)) \right] \quad (13)$$

Первые два слагаемых в (13), т.е. $_c_1 + O(x^{11})$, означают, что все продолжения уравнения eq имеют лорановы решения с валюацией, равной 0, здесь их начальный отрезок до степени 10 равен $_c_1$, где $_c_1$ – произвольная постоянная.

Третье слагаемое означает, что все продолжения уравнения eq имеют нерегулярные решения с показателем экспоненциальной части $1/(2x^2) + 3/x$, показателем $\lambda = 10/3$, начальным отрезком ряда $_c_2$, где $_c_2$ – произвольная постоянная.

Если при вызове процедуры *FormalSolution* указан необязательный параметр 'output' = 'literal', то регулярные части решения вычисляются до максимальной степени и сверх этого еще добавляются слагаемые с коэффициентами, зависящими от литералов:

> *FormalSolution*($eq, y(x), 'output' = 'literal'$)

$$-_c_1 - \frac{U_{[0,10]}_c_1 x^{11}}{11} + O(x^{12}) + e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x}} x^{\frac{10}{3}} \left(_c_2 + (-U_{[1,3]}_c_2 + U_{[2,6]}_c_2 - 2_c_2)x + O(x^2) \right)$$

В нашей реализации литерал, коэффициент при $x^k \theta^i$, обозначается через $U_{[i,k]}$. Существует два таких целочисленных набора значений литералов, что выражения

$$-\frac{U_{[0,10]}_c_1}{11} \quad \text{и} \quad -U_{[1,3]}_c_2 + U_{[2,6]}_c_2 - 2_c_2$$

принимают различные значения. Этим двум наборам соответствуют два продолжения уравнения eq , которые составляют контрпример. Действительно, решения этих двух уравнений будут различными продолжениями решения (13) и продолжены будут все регулярные части решения. Очевидно, контрпримеров существует бесконечное число. В результате работы процедуры *FormalSolution* с необязательным параметром 'counterexample' = 'Eqs', переменной *Eqs* будет присвоена пара уравнений, представляющая собой искомый контрпример.

> *FormalSolution*($eq, y(x), 'counterexample' = 'Eqs'$) :

Для первого уравнения этого контрпримера

> *Eqs*[1]

$$\left(x^{10} + O(x^{11})\right)y(x) + \left(1 + 3x + 4x^3 + O(x^4)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + \left(x^3 + \frac{x^5}{3} + O(x^7)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) = 0$$

с помощью *FormalSolution* получаем усеченное решение

> *FormalSolution*(*Eqs*[1], $y(x)$)

$$\left[-_c_1 - \frac{_c_1 x^{11}}{11} + O(x^{12}) + e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x}} x^{\frac{10}{3}} \left(_c_2 - 6_c_2 x + O(x^2) \right) \right] \tag{14}$$

Для второго уравнения

> *Eqs*[2]

$$\begin{aligned} &(-4x^{10} + O(x^{11}))y(x) + (1 + 3x + 5x^3 + O(x^4))\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + \\ &+ \left(x^3 + \frac{x^5}{3} - 2x^6 + O(x^7)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

получаем

> *FormalSolution*(*Eqs*[2], $y(x)$)

$$\left[-_c_1 + \frac{4_c_1 x^{11}}{11} + O(x^{12}) + e^{\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x}} x^{\frac{10}{3}} \left(_c_2 - 9_c_2 x + O(x^2) \right) \right] \tag{15}$$

Видно, что (14) и (15) являются продолжениями (13) и входящие в них усеченные ряды различны.

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S., Khmel'nov D., Ryabenko A.* Laurent solutions of linear ordinary differential equations with coefficients in the form of truncated power series // Computer algebra: 3rd International Conference Materials, Moscow, June 17–21, 2019, International Conference Materials. P. 75–82.
2. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.
3. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 4–17.
4. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Усеченные ряды и формальные экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1664–1675.
5. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Усеченные ряды // Труды XII приокской научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики”, Коломна: ГСГУ, 2020. С. 8–19.
6. *Abramov S., Khmel'nov D., Ryabenko A.* Truncated and infinite power series in the role of coefficients of linear ordinary differential equations // Lecture Notes in Computer Science. 2020. V. 12291. P. 63–76.
7. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов // Труды ИСП РАН. 2019. Т. 31. № 5. С. 233–248.
8. *Abramov S., Khmel'nov D., Ryabenko A.* The TruncatedSeries package for solving linear ordinary differential equations having truncated series coefficients // In: Maple in Mathematics Education and Research, Springer Nature Switzerland. 2021. P. 19–33.
9. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска усеченных решений линейных дифференциальных уравнений с бесконечными и усеченными степенными рядами в роли коэффициентов // Программирование. 2021. № 2. С. 56–65.
10. TruncatedSeries website: <http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries>
11. *Abramov S., Khmel'nov D., Ryabenko A.* On truncated series involved in exponential-logarithmic solutions of truncated LODEs // In: Boulier, F., England, M., Sadykov, T.M., Vorozhtsov, E.V. (eds) Computer Algebra in Scientific Computing, CASC 2022, Lecture Notes in Computer Science. V. 13366. Springer, Cham. P. 18–28.
12. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
13. *Malgrange B.* Sur la réduction formelle des équations différentielles a singularités irrégulières. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1979.
14. *Tournier E.* Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR. Étude théorique et réalisation. Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1987.
15. *Barkatou M.* Rational Newton algorithm for computing formal solutions of linear differential equations // Lecture Notes in Computer Science. 1989. V. 358. P. 183–195.
16. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. Вып. 3(357). С. 31–80.
17. *Баркату М., Ришар-Жюнг Ф.* Формальные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений // Программирование. 1997. № 2. С. 24–42.
18. *Lutz D.A., Schäpfke R.* On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations // Linear Algebra And Its Applications. 1985. V. 72. P. 1–46.
19. *Frobenius G.* Integration der linearen Differentialgleichungen mit veränder Koeffizienten // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1873. V. 76. P. 214–235.
20. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1894.
21. *Abramov S., Barkatou M.A., Pfluegel E.* Higher-order linear differential systems with truncated coefficients // In Proc. of CASC'2011. 2011. P. 10–24.
22. *Khmel'nov D., Ryabenko A., Abramov S.* Automatic confirmation of exhaustive use of information on a given equation // Computer algebra: 4th International Conference Materials, Moscow: MAKS Press, 2021. P. 69–72.
23. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Исчерпывающее использование информации о дифференциальном уравнении с усеченными коэффициентами // Программирование. 2022. № 2. С. 63–72.