

ISSN 0044-4510

Том 163, Выпуск 4

Апрель 2023



ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ и ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

www.sciencejournals.ru



DOI: 10.31857/S0044451023040016

EDN: KXLPBS

Александр Федорович Андреев
(10 декабря 1939 – 15 марта 2023)



Фото из архива А.М. Трояновского, ИФП РАН

**Редколлегия Журнала экспериментальной и теоретической физики
глубоко скорбит о смерти выдающегося физика Главного редактора
ЖЭТФ с 1997 г. по 2021 г. академика Александра Федоровича Андреева**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА

ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД

МОСКВА

ТОМ 163, ВЫПУСК 4

АПРЕЛЬ 2023

РАН

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ ПОД РУКОВОДСТВОМ ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК РАН

СОДЕРЖАНИЕ

АТОМЫ, МОЛЕКУЛЫ, ОПТИКА

Об интеграле по времени от электромагнитного поля	Фещенко Р. М.	461
Энтропия когерентных состояний оптических полей	Эскандери М. М., Килин С. Я., Хорошко Д. Б.	467
Растекание тока в тонких фольгах или плоских токовых слоях ..	Гаранин С. Ф., Кравец Е. М.	480
Генерация высоких оптических гармоник при взаимодействии фемтосекундных лазерных импульсов среднего ИК-диапазона с поверхностью твердотельных мишеней	Митрофанов А. В., Рожко М. В., Назаров М. М., Серебрянников Е. Е., Федотов А. Б., Сидоров-Бирюков Д. А.	488

ЯДРА, ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ, ГРАВИТАЦИЯ И АСТРОФИЗИКА

Noether Symmetries and Some Exact Solutions in $f(R, T^2)$ Theory	Sharif M., Gul M. Z.	496
Ускорение солнечных космических лучей ударной волной в нижней короне Солнца 7 мая 1978 г.	Танеев С. Н.	503
Нелинейный параметрический резонанс в простейшей модели солнечного динамо	Серенкова А. Ю., Соколов Д. Д., Юшков Е. В.	514
Выделение сигналов от тепловых нейтронов в электронно-нейтронных детекторах с использованием сверточных нейронных сетей в эксперименте ENDA	Куринов К. О., Кулешов Д. А., Лагуткина А. А., Стенькин Ю. В., Щеголев О. Б.	524

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

Изучение влияния замещения H_2O на T_2O на динамические свойства, максимум плотности и тем- пературу плавления льда I_h в рамках метода решёточной динамики	Белослудов В. Р., Гец К. В., Жданов Р. К., Божко Ю. Ю., Кавазое Ё.	531
--	--	-----

Молекулярно-динамическое исследование влияния ориентации межфазной границы на интенсивность растворения титана в кристаллическом и аморфном алюминии	537
..... Полетаев Г. М., Бебихов Ю. В., Семенов А. С., Ситников А. А.	

ПОРЯДОК, БЕСПОРЯДОК И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Вихри на свободной поверхности слоя нормального гелия He-I в широкой ячейке	545
..... Левченко А. А., Межов-Деглин Л. П., Пельменёв А. А.	
Неустойчивости в случайных средах и режимы с обострением	561
..... Куценко В. А., Соколов Д. Д., Яровая Е. Б.	
Инжекция чисто спинового тока в гелимагнетик	574
..... Ясюлевич И. А., Бебенин Н. Г., Устинов В. В.	
Сжимаемость, металлизация и процессы релаксации в халькогенидном стекле нестехиометрического состава $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при высоких гидростатических давлениях: сравнение с «классическим» стеклом $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ Циок О. Б., Бражкин В. В., Бычков Е. В., Тверьянович А. С.	585
Резонансный метод измерения параметров спинового транспорта в спин-вентильной структуре	597
..... Стрелков Н. В., Ведяев А. В.	

СТАТИСТИЧЕСКАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЗИКА, ФИЗИКА «МЯГКОЙ» МАТЕРИИ

Макроскопические течения, индуцируемые феррожидкостью под действием вращающегося магнитного поля	602
..... Зубарев А. Ю., Мусихин А. Ю.	
«Идеальность» «неидеальной» плазмы Хомкин А. Л. , Шумихин А. С.	609

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ПО ВРЕМЕНИ ОТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. М. Фещенко^{а}*

^а *Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук
199991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 11 октября 2022 г.,
после переработки 3 декабря 2022 г.
Принята к публикации 13 декабря 2022 г.

Рассмотрен интеграл по времени в бесконечных пределах от электрического или магнитного поля (интеграл Бессонова) и показано, что он равен нулю для любой конфигурации свободного электромагнитного поля, полная энергия которой равна нулю. Обсуждается связь равенства нулю интеграла Бессонова с невозможностью излучения или поглощения фотона свободной заряженной частицей. Получены точные выражения поля излучения, а также его преобразования Фурье, для электрического заряда, у которого скачком меняется скорость движения, и показано, что интеграл Бессонова от подобного излучательного поля равен нулю, как и следует из общего утверждения. В заключение, показано, что не равный нулю интеграл Бессонова от поля излучения ускоренно движущегося электрического заряда, о котором сообщается в ряде работ, возникает из-за некорректного разделения полного поля ускоренно движущегося заряда на излучательную и неизлучательную части.

DOI: 10.31857/S0044451023040016
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Интеграл по времени от электрического или магнитного поля как для свободного, так и для несвободного (связанного) электромагнитного поля, является предметом исследования в течении достаточно продолжительного времени. Речь здесь идет об интеграле вида

$$\mathbf{I}_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dt, \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$ — вектор электрического поля, а $\mathbf{r}$ и t — координаты и время. Величина, аналогичная (1), может быть введена и для магнитного поля. Очевидно, что в произвольном электромагнитном поле интеграл $\mathbf{I}_E$ не равен нулю. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть статическое электрическое поле или стационарное магнитное поле. Интеграл вида (1) иногда называется интегралом Бессонова [1].

Что касается свободного электромагнитного поля (например, поля конечного электромагнитного импульса или поля излучения конечной системы зарядов и токов) в отсутствие каких-либо зарядов и токов, то ситуация является в какой-то мере неясной. Утверждается, что в большинстве случаев интеграл (1) равен нулю для любого электромагнитного импульса с конечной полной энергией [2], но иногда приводятся примеры свободных полей с ненулевым интегралом Бессонова [3]. Сложность здесь состоит в поиске точных аналитических моделей электромагнитных импульсов с конечной энергией (см., например, [4, 5]). Интерес также представляет промежуточная ситуация, когда одновременно присутствует как поле излучения, так и статическое или индукционное поле. В этом случае утверждается, что интеграл вида (1) даже от излучательной части полного поля может быть не равен нулю [2, 5, 6].

Заметим, что задача вычисления интегралов вида (1) для полей движущихся зарядов имеет отношение к определению так называемого тормозного излучения малых частот для системы взаимодействующих заряженных частиц. В частности, известно, что в этом случае спектральная плотность энергии излучения не зависит от частоты в пределе малых частот и, следовательно, не обращается в нуль при

* E-mail: rusl@lebedev.ru

нулевой частоте (детали см. в [7]). Последнее, как будет показано ниже, вовсе не означает, что интеграл Бессонова $\mathbf{I}_E$ от поля излучения в этом случае не равен нулю.

Целью настоящей статьи является доказательство общего утверждения о равенстве нулю интеграла вида (1) в поле произвольного свободного электромагнитного импульса с конечной энергией. Будет показано, что равенство интеграла Бессонова в этом случае связано с невозможностью для свободного электрона поглотить или испустить свободный фотон. Помимо этого будет рассмотрен случай, когда присутствуют также и статические и индукционные поля, создаваемые электрическими зарядами, и будет показано, что это утверждение сохраняет силу и в случае поля излучения ускоренно движущихся зарядов.

2. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

Пусть имеется некоторое свободное электромагнитное поле, не имеющее никаких пространственных или временных особенностей. Тогда его электрическое поле должно удовлетворять уравнениям

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

наиболее общее решение которых может быть представлено как

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \times \\ \times \left(\mathbf{E}_+(\mathbf{k}', \omega') e^{i\omega' t} + \mathbf{E}_-(\mathbf{k}', \omega') e^{-i\omega' t} \right) d^3 k', \quad (4)$$

где $\mathbf{k}'$ — волновой вектор, а $\omega' = |\mathbf{k}'|$ — частота¹⁾. Комплексные трехмерные спектральные амплитуды $\mathbf{E}_+(\mathbf{k})$ и $\mathbf{E}_-(\mathbf{k})$ должны быть, в силу (3), ортогональны вектору $\mathbf{k}$, а в остальном выбираются произвольными. Они связаны между собой соотношением

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{k}', \omega') = \mathbf{E}_-^*(-\mathbf{k}', \omega'), \quad (5)$$

следующим из вещественности поля $\mathbf{E}$. Амплитуды могут быть также представлены как функции от $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\omega'$ и ω' : $\mathbf{E}_+(\mathbf{n}', \omega')$ и $\mathbf{E}_-(\mathbf{n}', \omega')$.

Рассмотрим далее фурье-гармонику поля (4):

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} e^{-i\omega t} dt = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \mathbf{E}_+(\mathbf{k}', \omega) \delta(\omega' - \omega) d^3 k' = \\ = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \oint_{4\pi} e^{i\omega \mathbf{n}'\mathbf{r}} \mathbf{E}_+(\mathbf{n}', \omega) d\mathbf{n}', \quad (6)$$

предел которой при $\omega \rightarrow 0$ есть интеграл Бессонова $\mathbf{I}_E$. Из выражения (6) следует, что для того чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{I}_E \neq 0$, амплитуда $\mathbf{E}_+(\mathbf{n}', \omega)$ должна при $\omega \rightarrow 0$ расходиться по крайней мере как $\propto 1/\omega^2$. Однако в этом случае полная энергия поля

$$W = \frac{1}{(2\pi)^4} \int |\mathbf{E}_+(\mathbf{k}', \omega')|^2 d^3 k' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \oint_{4\pi} \omega'^2 |\mathbf{E}_+(\mathbf{n}', \omega')|^2 d\mathbf{n}' d\omega' = \\ = \int_0^\infty W_{\omega'} d\omega' \sim \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2} = \infty, \quad (7)$$

где $W_{\omega'}$ — спектральная плотность энергии, будет бесконечной. В равенстве (7) было учтено, что энергия магнитного поля равна энергии электрического поля для свободного электромагнитного поля, а также соотношение (5).

Из равенства (7) следует важное утверждение:

Утверждение 1 Если электромагнитный импульс в свободном пространстве обладает конечной полной энергией, то интеграл (1) равен нулю в любой точке пространства.

Данное утверждение также справедливо и для магнитного поля этого импульса. В частности, из этого следует, что некоторые утверждения, сделанные в статье [3], являются ошибочными и для приведенных примеров свободных полей или интеграл Бессонова на самом деле не равен нулю, или поля не являются регулярными во всем пространстве.

Можно отметить, что из приведенных выше рассуждений следует, что амплитуда $\mathbf{E}_+(\mathbf{n}, \omega)$ конечного электромагнитного импульса может быть разложена в следующий ряд:

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{n}, \omega) = \frac{\mathcal{E}_+^{-1}(\mathbf{n})}{\omega} + \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{E}_+^s(\mathbf{n}) \omega^s, \quad (8)$$

¹⁾ Здесь и везде далее скорость света $c = 1$.

где коэффициенты $\mathcal{E}_+^s(\mathbf{n})$ — некоторые функции угловых переменных, которые могут быть в свою очередь разложены в ряд по сферическим функциям. Заметим, что в выражении (8) расходящийся при $\omega \rightarrow 0$ член появляется (как будет показано ниже) только в поле излучения ускоренно движущейся заряженной частицы.

Рассмотрим в качестве примера поле дипольного электромагнитного импульса (см. детали в [8,9]), которое, как было упомянуто в работе [9], является оптимальным с точки зрения концентрации электромагнитной энергии в центре импульса. Можно показать, что для такого импульса амплитуда $\mathbf{E}_+(\mathbf{n}, \omega)$ выражается как

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{n}, \omega) = 2\pi i \omega f(\omega) (\mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}), \quad (9)$$

где $\mathbf{A}_0$ — произвольный вектор, а $f(\omega)$ — преобразование Фурье от произвольной вещественной функции, задающей форму импульса (см. [8]). Тогда фурье-гармоника (6) будет равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) &= \frac{i\omega^3 f(\omega)}{2\pi} \mathbf{A}_0 \times \oint_{4\pi} \mathbf{n}' e^{i\omega \mathbf{r} \mathbf{n}'} d\mathbf{n}' = \\ &= 2\omega^3 f(\omega) \left[\frac{\cos \omega r}{\omega r} - \frac{\sin \omega r}{(\omega r)^2} \right] (\mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}_r), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ и $r = |\mathbf{r}|$. Выражение (10) стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$ по крайней мере как ω^3 , что означает равенство нулю интеграла Бессонова (1) для поля излучения диполя.

3. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Релятивистски инвариантным обобщением интеграла (1) является следующее четырехмерное векторное выражение:

$$I_E^i = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{ik}(x(s)) u_k(s) ds, \quad (11)$$

где интегрирование ведется вдоль четырехмерной кривой $x(s)$, задаваемой единичным четырехмерным вектором $u^i(s) = dx^i(s)/ds$, а F^{ik} — тензор электромагнитного поля. Интеграл Бессонова (1) получается из (11), если взять пространственные компоненты 4D-вектора I_E^i в случае, если 4D-вектор u постоянен и равен $u^i(s) = (1, \mathbf{0})$.

Можно заметить, что выражение (11) представляет собой приращение 4D-импульса ΔP^i заряженной частицы с единичным зарядом и массой, получаемое ей при движение в электромагнитном поле

по заданной траектории. При этом интеграл Бессонова I_E соответствует движению частицы вдоль прямой линии (в частном случае — покоящаяся частица), т.е. переданному полем частице импульсу в первом порядке теории возмущений или в так называемом одновершинном приближении в квантовой электродинамике. Однако известно, что свободная заряженная частица (электрон) в силу законов сохранения энергии и импульса не может ни поглотить свободный фотон, ни излучить его. С другой стороны, частица, движущаяся по кривой траектории (несвободная частица) будет в общем случае иметь не равный нулю интеграл (11).

Таким образом, равенство нулю интеграла Бессонова для конечного электромагнитного импульса является простым следствием законов сохранения энергии и импульса для заряженных частиц и фотонов. И это свойство представляется достаточно общим и поэтому должно выполняться для любого мыслимого электромагнитного импульса с конечной энергией, подтверждая тем самым доказанное выше Утверждение 1.

4. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Рассмотрим теперь поле излучения ускоренно движущейся заряженной частицы. Для наших целей достаточно рассмотреть поле только одной частицы, поскольку, в силу линейности уравнений поля, утверждения, полученные для этого простого случая, могут быть распространены на электромагнитное поле, создаваемое произвольной системой зарядов и токов. Можно также считать, что рассматриваемая частица меняет свою скорость скачком, а в остальное время движется равномерно и прямолинейно. Это допустимо, поскольку нас интересует излучение только в области малых частот и в пределе при нулевой частоте.

Выпишем теперь общее выражение для четырехмерных фурье-гармоник четырехмерного векторного потенциала свободного электромагнитного поля через фурье-гармоники 4D-тока $j^i(k)$, породившего это поле [10]:

$$A^i(k) = i8\pi^2 \text{sign}(k^0) \delta(k^2) j^i(k), \quad (12)$$

где $\text{sign}(y) = 2\theta(y) - 1$, $\theta(y)$ — функция единичной ступеньки и $k^i = (k^0, \mathbf{k})$ — четырехмерный волновой

вектор. Тогда тензор электромагнитного поля будет иметь вид

$$F^{im}(k) = 8\pi^2 \text{sign}(k^0) \delta(k^2) (k^i j^m(k) - k^m j^i(k)). \quad (13)$$

Известно, что для заряженной частицы, движущейся по траектории $x^i(s)$, фурье-гармоники тока определяются выражением [7]

$$j^i(k) = \int e^{ikx(s)} u^i(s) ds, \quad (14)$$

которое для свободной частицы (с единичным зарядом), скачком меняющей свою скорость в момент $t \sim s = 0$ от $\mathbf{v}_1$ до $\mathbf{v}_2$, будет иметь вид

$$j^i(k) = \frac{1}{i} \left[\frac{u_2^i}{k u_2} - \frac{u_1^i}{k u_1} \right], \quad (15)$$

где $u_a^i = \gamma_a(1, \mathbf{v}_a)$, $\gamma_a = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}$, $a = 1, 2$. Тогда для положительно частотной части $\mathbf{E}_+$ в разложении (4) с учетом формулы (13) можно написать

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{n}, \omega) = \frac{2\pi i}{\omega} \left[\frac{\mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_1} - \mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_1} \right) \right]. \quad (16)$$

Выражение (16) обратно пропорционально частоте ω и соответствует первому члену в разложении (8). Отсюда на основе общего Утверждения 1 следует, что интеграл Бессонова (1) для электромагнитного поля импульса, излученного ускоренно движущейся заряженной частицей, будет тоже равен нулю.

Для спектральной плотности полной энергии, определенной в (7), получаем константу

$$W_\omega = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{4\pi} \left| \frac{\mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_1} - \mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_1} \right) \right|^2 d\mathbf{n}, \quad (17)$$

что означает расходимость полной энергии по верхнему пределу интегрирования. Однако данная расходимость связана лишь с нефизическим предположением о мгновенном изменении скорости частицы и, следовательно, о бесконечном ускорении. Однако более важным результатом здесь является сходимость интеграла от (17) на нижнем пределе интегрирования, означающая, что, если ускорение заряженной частицы конечно, то энергия излученного электромагнитного импульса будет тоже конечной.

Формула (17) совпадает (после некоторого преобразования) с выражением для спектральной плотности тормозного излучения малых частот из [7].

5. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Несмотря на соображения, приведенные выше, в литературе [2, 5] встречаются утверждения о возможности излучения ускоренно движущейся заряженной частицей так называемых «необыкновенных» или униполярных импульсов с не равным нулю интегралом Бессонова. Такие утверждения основываются на анализе выражения для поля ускоренно движущейся частицы в координатном представлении с выделением членов, имеющих на бесконечности асимптотику $\propto 1/r$ и, как утверждается, соответствующих полю излучения. Очевидно, что утверждения, сделанные в упомянутых выше статьях, и Утверждение 1 несовместимы между собой. Поэтому вопрос о причине такого расхождения нуждается в дополнительном изучении.

Необходимо отметить, что разделение электромагнитного поля движущейся заряженной частицы на статическое и индукционное поля с одной стороны и на излучение — с другой стороны не является однозначным. В импульсном представлении это сделать достаточно просто: в выражении для поля излучения (4) коэффициент пропорциональности между потенциалами и токами есть известная функция Паули–Йордана $D(k)$, равная разности запаздывающего $\Pi_{ret}(k)$ и опережающего $\Pi_{adv}(k)$ пропагаторов электромагнитного поля [11]:

$$D(k) = i8\pi^2 \text{sign}(k^0) \delta(k^2) = \Pi_{ret}(k) - \Pi_{adv}(k). \quad (18)$$

Однако в координатном представлении выделение поля излучения представляет собой более сложную задачу. Рассмотрим, например, формулу для электрического поля ускоренно движущегося заряда (см. формулу (1.1) в работе [2]):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{(1 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{n}_r - \mathbf{v})}{R^2(1 - \mathbf{n}_r \mathbf{v})^3} + \frac{\mathbf{n}_r \times ((\mathbf{n}_r - \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}})}{R(1 - \mathbf{n}_r \mathbf{v})^3}, \quad (19)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|$, $\mathbf{r}'(t)$ задает траекторию движения заряда, а $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы. Все скорости, координаты и ускорения берутся в момент времени $t' = t - R$ для учета запаздывания. Поскольку интеграл по времени от второго слагаемого в (19), обычно отождествляемого с излучением, очевидно не равен нулю (особенно, если скорость меняется скачком), то это считается доказательством того, что интеграл (1) от поля излучения ускоренно движущегося заряда может быть в принципе не равен нулю.

Возникает вопрос: а действительно ли второе слагаемое в (19) (не являющееся в общем случае решением уравнений для свободного поля (2), (3)) соответствует полю излучения? С одной стороны, поле (и интеграл от него по времени) в этом случае убывает при $r \rightarrow \infty$ как $1/r$. С другой стороны, в точном выражении для поля, например, для дипольного импульса (10), присутствуют члены [8], на бесконечности ведущие себя как $1/r^2$. Слагаемые, ведущие себя как $1/r^2$, также должны присутствовать в координатном эквиваленте выражения (16), поскольку оно пропорционально $1/k$, что после обратного преобразования Фурье должно как раз дать член, пропорциональный $1/r^2$. Можно также заметить, что интеграл в бесконечных пределах по времени от первого слагаемого в (19) вполне может убывать как $1/r$ при $r \rightarrow \infty$, как и интеграл от второго слагаемого. Это становится очевидно, если заметить, что при больших по модулю временах $R \propto |t|$. Таким образом, можно заключить, что отождествление второго слагаемого в (19) с полем излучения (в том числе для целей вычисления интеграла (1)) является некорректным.

В качестве иллюстрации сделанных выше выводов рассмотрим поле в координатном представлении, соответствующее амплитуде (16) поля излучения заряда, скачком меняющего свою скорость. Для его вычисления проще всего сначала определить потенциалы поля $A^i = (A^0, \mathbf{A})$, применяя обратное преобразование Фурье к выражению (12) (с учетом формулы (15)) и при этом предполагая, что скорость $\mathbf{v}_1$ (или $\mathbf{v}_2$) равна нулю. Затем выражения для потенциалов при уже ненулевой скорости $\mathbf{v}_1$ (или $\mathbf{v}_2$) находятся применением соответствующих преобразований Лоренца для потенциалов и координат. Это дает

$$A^0 = \left(\frac{\gamma_2}{R_2} - \frac{\gamma_1}{R_1} \right) \theta(r^2 - t^2), \quad (20)$$

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{v}_2 \gamma_2}{R_2} - \frac{\mathbf{v}_1 \gamma_1}{R_1} \right) \theta(r^2 - t^2), \quad (21)$$

где

$$R_a^2 = r^2 + \gamma_a^2 (\mathbf{v}_a \mathbf{r})^2 - 2\gamma_a^2 (\mathbf{v}_a \mathbf{r}) t + (\gamma_a^2 - 1) t^2, \quad (22)$$

$v_a = |\mathbf{v}_a|$, $a = 1, 2$. Теперь для электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \partial \mathbf{A} / \partial t$ можно получить следующее

выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \left(\frac{\gamma_2(\mathbf{r} - \mathbf{v}_2 t)}{R_2^3} - \frac{\gamma_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t)}{R_1^3} \right) \theta(r^2 - t^2) - \\ & - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\mathbf{n}_r - \mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_r} - \frac{\mathbf{n}_r - \mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{n}_r} \right) \delta(r - t) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mathbf{n}_r + \mathbf{v}_2}{1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_r} - \frac{\mathbf{n}_r + \mathbf{v}_1}{1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{n}_r} \right) \delta(r + t) \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Можно показать, что магнитное поле выражается как $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ и является поперечным в отличие от электрического поля (23), а вектор Пойнтинга будет равен, соответственно, $\mathbf{S} = \mathbf{n}_r |\mathbf{H}|^2 / (4\pi)$. Полная длительность излученного электромагнитного импульса составляет $2r$. На границах импульса имеются резкие (дельтообразные в данной модели) пики поля. Путем прямого вычисления несложно показать, что интеграл Бессонова (1) от выражения (23) равен точно нулю. Также выражение (23) содержит члены имеющие на бесконечности асимптотику $\propto 1/r^2$, как предполагалось выше.

Причину, по которой интеграл Бессонова от (23) равен нулю, можно понять, если обратить внимание на то, что это выражение является разностью двух волн: сходящейся и расходящейся. Интегралы Бессонова от этих волн равны друг другу и при вычитании дают нуль. Такая структура поля излучения связана с общим определением (18) для функции Паули–Йордана как разности двух пропагаторов: запаздывающего и опережающего. Интегралы Бессонова от запаздывающей и опережающей частей поля излучения равны друг другу и, следовательно, их разность равна нулю, что приводит нас опять к общему Утверждению 1.

Можно отметить, что экспериментальные измерения интеграла Бессонова для импульсов от некоторых источников электромагнитных волн (в том числе терагерцового диапазона), в которых были получены ненулевые его значения [12], можно объяснить существованием там неучтенных электростатических полей. Такие поля могут быть трудно контролировать в эксперименте.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено произвольное свободное электромагнитное поле с конечной энергией и показано, что для него интеграл Бессонова (1) всегда равен нулю. Также показано, что равенство нулю интеграла Бессонова прямо связано с невозможностью в силу законов сохранения энергии

и импульса для свободной заряженной частицы поглотить или испустить свободный фотон.

В работе рассмотрен случай ускоренно движущейся заряженной частицы и получено точное выражение для ее поля излучения (в импульсном и координатном представлениях) в случае, когда скорость ее движения меняется скачком. Показано, что при правильном выделении поля излучения из полного электромагнитного поля ускоренно движущейся частицы интеграл Бессонова от такого, должным образом определенного, поля излучения всегда равен нулю, как и должно следовать из общего утверждения первого раздела.

Имеющиеся в литературе утверждения, что интеграл Бессонова от поля излучения ускоренно движущейся заряженной частицы может быть отличен от нуля, являются ошибочными и связаны с использованием некорректных выражений для поля излучения, в которых на самом деле присутствуют добавки от статического или индукционного поля, которые и обеспечивают неравенство нулю интеграла Бессонова.

Благодарности. Автор выражает благодарность А. В. Виноградову и И. А. Артюкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. N.L. Popov and A.V. Vinogradov, *Foundations* **1**, 169 (2021).
2. Е. Г. Бессонов, *ЖЭТФ* **80**, 852 (1981) [E.G. Bessonov, *Sov. Phys. JETP* **53**, 433 (1981)].
3. P. Saari and I.M. Besieris, *Foundations* **2**, 199 (2022).
4. Z. Wang, Q. Lin, and Z. Wang, *Phys. Rev. E* **67**, 016503 (2003).
5. Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н. Н. Розанов, *КЭ* **50**, 801 (2020) [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, and N.N. Rosanov, *Quantum Electronics* **50**, 801 (2020)].
6. R. Arkhipov, M. Arkhipov, A. Pakhomov, I. Babushkin, and N. Rosanov, *Laser Phys. Lett.* **19**, 043001 (2022).
7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
8. И. А. Артюков, А. В. Виноградов, Н. В. Дьячков и Р. М. Фещенко, *КЭ* **50**, 187 (2020) [I.A. Artyukov, A.V. Vinogradov, N.V. D'yachkov, and R.M. Feshchenko, *Quantum Electronics* **50**, 187 (2020)].
9. I. Gonoskov, A. Aiello, S. Heugel, and G. Leuchs, *Phys. Rev. A* **86**, 053836 (2012).
10. R.M. Feshchenko and A.V. Vinogradov, *Physica Scripta* **94**, 065501 (2019).
11. Д. Ширков, Н. Боголюбов, *Квантовые поля*, Наука, Москва (1993).
12. М. В. Архипов, А. Н. Цыпкин, М. О. Жукова, А. О. Исмагилов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов и Р. М. Архипов, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 3 (2022) [M.V. Arkhipov, A.N. Tsypkin, M.O. Zhukova, A.O. Ismagilov, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov, and R.M. Arkhipov, *JETP Letters* **115**, 3 (2022)].

ЭНТРОПИЯ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

*М. М. Эскандери, С. Я. Килин, Д. Б. Хорошко**

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 14 октября 2022 г.,
после переработки 1 декабря 2022 г.
Принята к публикации 2 декабря 2022 г.

Рассмотрены статистические смеси двух и трех произвольных когерентных состояний, представляющих собой состояния носителя информации в оптическом канале связи. В аналитическом виде найдены собственные значения и собственные векторы соответствующих операторов плотности. С этой целью введена оригинальная параметризация треугольников на комплексной фазовой плоскости. Найдены аналитические выражения для энтропии фон Неймана смесей двух и трех произвольных когерентных состояний и численно рассчитано ее максимальное значение при заданном среднем числе фотонов. Установлено, что использование трех когерентных состояний при заданном среднем числе фотонов обеспечивает более высокую емкость оптического канала связи, чем использование двух.

DOI: 10.31857/S0044451023040028

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Когерентные состояния оптического поля с хорошей точностью описывают излучение лазера, работающего высоко над порогом, и занимают центральное место в формализме кантовой оптики. Когерентное состояние одной моды оптического поля с безразмерной комплексной амплитудой α представляется в виде [1]

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1)$$

где $|n\rangle$ — n -фотонное состояние Фока [2]. Когерентные состояния представляют собой переполненный базис в гильбертовом пространстве оптической моды и любое классическое состояние моды представляет собой взвешенную смесь таких состояний.

Оптические поля в когерентных состояниях широко используются в современных системах передачи информации, в которых сигнал передается как по оптическому волокну, так и по открытому пространству. Хотя в ряде случаев светодиоды могут

применяться в качестве источников света, наибольшая емкость оптического канала связи достигается при использовании лазерных источников поля и когерентных оптических приемников. В современной оптической линии связи состояния носителя информации представляют собой несколько когерентных состояний одной моды оптического поля. Перекрывание двух когерентных состояний дается формулой

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}.$$

Таким образом, при достаточной близости амплитуд два когерентных состояния являются существенно неортогональными и их различение при измерении связано с возможной ошибкой, обусловленной квантовым шумом. В подобном случае канал передачи информации рассматривают как квантовый канал связи [3] и для определения уровня ошибок привлекают квантовую теорию измерений [4].

В типичной современной системе волоконно-оптической связи состояния носителя информации можно считать практически ортогональными. Действительно, при использовании всего двух когерентных состояний с противоположными фазами, что соответствует популярной схеме фазового манипулирования BSPK [5], величина перекрытия состояний равна $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-4N)$, где $N = |\alpha|^2$ — среднее число фотонов в одном окне модуляции. Следовательно, в данной схеме квантовое рассмот-

* E-mail: dhoroshko@yahoo.com

рение становится необходимым только при очень низком уровне сигнала. По мере распространения сигнала в оптическом волокне его мощность уменьшается из-за потерь, и когда она становится сравнимой с пределом чувствительности фотодетектора, используемого в когерентном оптическом приемнике, сигнал подвергается усилению на оптическом повторителе. Типичные величины частоты модуляции и чувствительности приемника в современных волоконно-оптических сетях составляют $f = 10$ ГГц и $P = 1$ мкВт соответственно [6]. Таким образом, средняя энергия поля в окне модуляции может быть оценена как $E = P/f = 10^{-16}$ Дж, в то же время энергия одного фотона на длине волны $\lambda = 1.5$ мкм составляет $E_{ph} = 2\pi\hbar c/\lambda \sim 10^{-19}$ Дж. Это означает, что поле на приемнике содержит в среднем $N = E/E_{ph} = 1000$ фотонов на один передаваемый бит информации. Перекрытие двух когерентных состояний в данном случае ничтожно мало и рассмотрение квантового шума не требуется. Однако быстрый прогресс в области телекоммуникаций приводит к использованию модуляторов с частотой $f = 25$ ГГц и фотоприемников с чувствительностью $P = 0.1$ мкВт, что снижает среднее число фотонов до $N = 40$. Кроме того, необходимость повышения емкости каналов связи приводит к внедрению прогрессивных форматов фазового и амплитудного манипулирования, в которых в одном окне модуляции может передаваться несколько битов информации [5–7]. При этом перекрытие соседних когерентных состояний уже определяется не только уровнем сигнала, но и геометрией расположения состояний на комплексной плоскости, образующих так называемое «сигнальное созвездие» [8]. Так, в перспективном формате M-PSK используется M значений фазы [5, 6], причем амплитуды когерентных состояний имеют вид $\alpha_k = \sqrt{N}e^{i2\pi k/M}$, и перекрытие соседних состояний дается формулой $|\langle\alpha_k|\alpha_{k+1}\rangle|^2 = e^{-4N\sin^2(\pi/M)}$, что равно примерно $2 \cdot 10^{-3}$ для $N = 40$, $M = 16$. Подобное перекрытие приводит к ошибке в дискриминации состояний порядка 10^{-3} , что близко к максимально допустимому уровню ошибок, исправляемых кодами коррекции ошибок [6]. Таким образом, в ближайшем будущем квантовый шум может стать существенным для массовых сетей телекоммуникаций. Кроме того, квантовый шум имеет большое значение для оптической связи через открытое пространство, при которой усиление сигнала невозможно. В частности, для спутниковой оптической связи требуется разработка специальных приемников на основе детекторов одиночных фотонов, в которых квантовый шум играет

ключевую роль [9]. Другим важным приложением, требующим квантового анализа оптического канала связи, является квантовая криптография, в которой состояния поля намеренно создаются неортогональными уже на входе в канал связи с целью сделать незаметный перехват информации невозможным [10–12]. Таким образом, исследование емкости оптического канала связи на основе перекрывающихся когерентных состояний является весьма актуальной современной задачей с широкой областью применения. Помимо этого, исследование ансамблей когерентных состояний важно для таких приложений, как квантовое кодирование [13, 14], оптическая квантовая телепортация [15, 16], квантовые оптические измерения при наличии обратной связи [17–19] и других.

В данной статье исследуется емкость оптического канала связи с использованием двух и трех произвольных когерентных состояний. С этой целью вычисляется энтропия фон Неймана для статистической смеси двух и трех равновероятных когерентных состояний. В литературе имеются вывод энтропии смеси двух когерентных состояний [20] и анализ монотонности энтропии смеси трех произвольных состояний с равными перекрытиями [21]. Случай двух когерентных состояний представлен в разд. 2, где, помимо энтропии как функции перекрытия, совпадающей с результатом работы [20], рассчитана максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов и найдены собственные векторы оператора плотности статистической смеси. Случай трех когерентных состояний рассмотрен в разд. 3, где, в отличие от работы [21], рассматриваются произвольные перекрытия сигнальных состояний. Для этого случая также рассчитывается максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов и проведено ее сравнение со случаем двух когерентных состояний. В этом же разделе в аналитической форме выведены выражения для собственных векторов оператора плотности смеси трех произвольных когерентных состояний. Обсуждение результатов проводится в Заключение.

2. ЭНТРОПИЯ СМЕСИ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Мы рассматриваем одну моду оптического поля с операторами рождения и уничтожения фотона $a^\dagger$ и a соответственно, удовлетворяющими каноническому коммутационному соотношению: $[a, a^\dagger] = 1$. Ко-

герентное состояние моды с комплексной амплитудой α имеет вид (1). Рассмотрим два когерентных состояния с произвольными комплексными амплитудами α и β . Эти состояния могут быть использованы для передачи информации в оптической линии связи, представляя собой буквы двухбуквенного алфавита [13]. В случае, когда частоты употребления обеих букв совпадают и равны $1/2$, состояние случайно выбранной моды задается оператором плотности

$$\rho = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|). \quad (2)$$

Оптимальное декодирование информации на принимающей стороне реализуется посредством коллективного квантового измерения длинных блоков, составленных из оптических мод, несущих одно из указанных состояний. Максимальная доступная информация при таких измерениях ограничена сверху информацией Холево [22], которая для чистых состояний-букв совпадает с энтропией фон Неймана

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho). \quad (3)$$

Для вычисления энтропии фон Неймана найдем собственные значения λ_n и собственные векторы $|\lambda_n\rangle$ оператора плотности:

$$\rho|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle. \quad (4)$$

Оба собственных вектора оператора плотности лежат в линейной оболочке двух когерентных состояний $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ и могут быть записаны как

$$|\lambda_n\rangle = C_n^\alpha |\alpha\rangle + C_n^\beta |\beta\rangle, \quad (5)$$

где индекс n принимает значения 0 и 1, а C_n^α и C_n^β — комплексные коэффициенты. Подставляя (2) и (5) в (4) и используя линейную независимость когерентных состояний, получаем уравнение для комплексных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_n & \langle\alpha|\beta\rangle \\ \langle\beta|\alpha\rangle & 1 - 2\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^\alpha \\ C_n^\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

Для того чтобы это уравнение имело ненулевое решение, детерминант матрицы должен обращаться в нуль, что приводит к характеристическому уравнению

$$(1 - 2\lambda)^2 - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 0, \quad (7)$$

два решения которого имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm |\langle\alpha|\beta\rangle|}{2} = \frac{1 \pm e^{-L^2/2}}{2}, \quad (8)$$

где $L = |\alpha - \beta|$ — расстояние между числами α и β на комплексной плоскости, определяющее перекрытие двух когерентных состояний:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-|\alpha-\beta|^2/2 + i\text{Im}(\alpha^*\beta)}. \quad (9)$$

Помимо этого расстояния, пара комплексных чисел может в общем случае характеризоваться еще тремя действительными параметрами, которые можно назвать «абсолютными» — комплексной координатой центра отрезка, соединяющего эти два числа на комплексной плоскости, $\kappa = (\alpha + \beta)/2$, и углом наклона этого отрезка к действительной оси $\arg(\alpha - \beta)$. Как следует из уравнения (8), собственные значения матрицы плотности, а значит и энтропия, не зависят от этих трех параметров, что говорит об инвариантности энтропии по отношению к сдвигам и вращениям на комплексной плоскости. Математически вращение состояния на угол ψ описывается оператором вращения $U(\psi) = \exp(i\psi a^\dagger a)$. Этот оператор унитарен и не изменяет скалярные произведения, входящие в уравнение (6), а значит, и не влияет на его решения. Сдвиг состояния на комплексную величину δ описывается унитарным оператором сдвига $D(\delta) = \exp(\delta a^\dagger - \delta^* a)$, действие которого на когерентное состояние задается уравнением [23]

$$D(\delta)|\alpha\rangle = e^{i\text{Im}(\delta\alpha^*)}|\alpha + \delta\rangle. \quad (10)$$

Замена амплитуды α на амплитуду $\alpha + \delta$ соответствует несколько другому оператору $\tilde{D}(\delta)$, такому что $\tilde{D}(\delta)|\alpha\rangle = |\alpha + \delta\rangle$. Будем называть этот оператор «оператором чистого сдвига». Этот оператор неунитарен и не сохраняет скалярные произведения: $\langle\alpha|\tilde{D}^\dagger(\delta)\tilde{D}(\delta)|\beta\rangle = \langle\alpha + \delta|\beta + \delta\rangle \neq \langle\alpha|\beta\rangle$, но сохраняет их модуль, так как отличается от унитарного оператора $D(\delta)$ только фазовым множителем. Поскольку уравнение (7) включает только модуль скалярного произведения, а уравнение (6) — также и его фазу, то собственные значения оператора плотности инвариантны к чистому сдвигу, а коэффициенты разложения собственных векторов — нет. Таким образом, абсолютные параметры не влияют на собственные значения оператора плотности и, следовательно, на энтропию. В отличие от этих параметров, расстояние L характеризует относительное расположение двух амплитуд и может быть названо «относительным» параметром, влияющим на энтропию.

Подставляя диагональный вид оператора плотности в уравнение (2) и используя формулу (8), получаем энтропию смеси двух равновероятных коге-

рентных состояний в виде [20]

$$S(\rho) = h_2 \left(\frac{1 - e^{-L^2/2}}{2} \right), \quad (11)$$

где

$$h_2(s) = -s \log_2 s - (1-s) \log_2 (1-s)$$

— энтропия Шеннона [24]. При L , возрастающем от 0 до ∞ , аргумент функции в (11) монотонно возрастает от 0 до $1/2$. На этом участке энтропия $h_2(s)$ монотонно возрастает, что можно показать, взяв ее производную $h'_2(s) = -\log_2[s/(1-s)]$ и убедившись в том, что она положительна при $s \in (0, 1/2)$. Отсюда следует, что энтропия смеси двух когерентных состояний (11) является монотонно возрастающей функцией L , стремящейся к своему асимптотическому значению 1 при $L \rightarrow \infty$.

Среднее число фотонов в случайно выбранной моде имеет вид

$$N = \text{Tr} (a^\dagger a \rho) = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = |\kappa|^2 + \frac{L^2}{4}. \quad (12)$$

Следовательно, в отличие от энтропии, среднее число фотонов зависит не только от длины L отрезка, соединяющего амплитуды состояний на комплексной плоскости, но и от абсолютного значения координаты центра этого отрезка $|\kappa|$. Если теперь рассмотреть множество всех отрезков с фиксированным значением N и задать вопрос, какова максимальная энтропия $S_2^{\max}$ на этом множестве, то ответ будет очевиден: максимум энтропии достигается на отрезках с $\kappa = 0$. Действительно, рост $|\kappa|$ при фиксированном N означает уменьшение L и, в силу установленной выше монотонности энтропии, уменьшение энтропии. Таким образом, максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов имеет вид

$$S_2^{\max}(N) = h_2 \left(\frac{1 - e^{-2N}}{2} \right) \quad (13)$$

и достигается при выборе $\beta = -\alpha$. Такой выбор букв двоичного алфавита обеспечивает максимальную емкость оптического канала связи при заданной средней энергии (числе фотонов) на фотоприемнике.

Подставляя (8) в (6), получаем собственные векторы в виде

$$|\lambda_{1,2}\rangle = C_{1,2}^\alpha \left(|\alpha\rangle \pm e^{-i \text{Im} \alpha^* \beta} |\beta\rangle \right), \quad (14)$$

где из условия нормировки находим

$$C_{1,2}^\alpha = \left(2 \pm 2e^{-L^2/2} \right)^{-1/2}.$$

Состояния (14) являются суперпозициями двух когерентных состояний. При оптимальном выборе $\beta = -\alpha$ они представляют собой четное и нечетное когерентные состояния [25], широко исследуемые в связи с тем, что они являются оптическими реализациями известного состояния «кота Шрёдингера» [26–29].

3. ЭНТРОПИЯ СМЕСИ ТРЕХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим три когерентных состояния с произвольными комплексными амплитудами α , β и γ . Эти состояния могут быть использованы для передачи информации в оптической линии связи, представляя собой буквы трехбуквенного алфавита. В случае, когда частоты употребления всех трех букв совпадают и равны $1/3$, состояние случайно выбранной моды задается оператором плотности

$$\rho = \frac{1}{3} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| + |\gamma\rangle\langle\gamma|). \quad (15)$$

Как и в случае двух когерентных состояний, рассмотренном в предыдущем разделе, максимальная информация, которую можно передать с помощью таких состояний по оптической линии связи, дается энтропией фон Неймана $S(\rho)$, определяемой уравнением (3), вычисленной для оператора (15). Для нахождения этой величины, аналогично предыдущему разделу, найдем собственные значения λ_n и собственные векторы $|\lambda_n\rangle$ оператора плотности:

$$\rho|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle. \quad (16)$$

3.1. Собственные значения оператора плотности

Все три собственных вектора оператора плотности лежат в линейной оболочке трех когерентных состояний $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ и могут быть записаны как

$$|\lambda_n\rangle = C_n^\alpha |\alpha\rangle + C_n^\beta |\beta\rangle + C_n^\gamma |\gamma\rangle, \quad (17)$$

где индекс n принимает значения 0, 1, 2, а C_n^α , C_n^β и C_n^γ — комплексные коэффициенты. Подставляя (15) и (17) в (16) и используя линейную независимость когерентных состояний, получаем уравнение для комплексных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 - 3\lambda_n & \langle\alpha|\beta\rangle & \langle\alpha|\gamma\rangle \\ \langle\alpha|\beta\rangle^* & 1 - 3\lambda_n & \langle\beta|\gamma\rangle \\ \langle\alpha|\gamma\rangle^* & \langle\beta|\gamma\rangle^* & 1 - 3\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^\alpha \\ C_n^\beta \\ C_n^\gamma \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

Для того чтобы это уравнение имело ненулевое решение, детерминант матрицы должен обращаться в нуль, что приводит нас к характеристическому уравнению

$$(1 - 3\lambda)^3 - (1 - 3\lambda)3T^2 + 2Q = 0. \quad (19)$$

Здесь T и Q — два действительных параметра, принимающие значения от 0 до 1, причем первый из них определяется как

$$T = \sqrt{\frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 + |\langle\alpha|\gamma\rangle|^2 + |\langle\beta|\gamma\rangle|^2}{3}} \quad (20)$$

и имеет смысл среднего перекрытия между состояниями-буквами, а второй параметр определяется геометрией взаимного расположения состояний на комплексной плоскости и равен

$$Q = \frac{\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle\langle\gamma|\beta\rangle + \langle\alpha|\beta\rangle\langle\gamma|\alpha\rangle\langle\beta|\gamma\rangle}{2} = |\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle\langle\gamma|\beta\rangle| \cos(2S_{\alpha\beta\gamma}), \quad (21)$$

где

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\text{Im}(\alpha^*\beta + \beta^*\gamma + \gamma^*\alpha)}{2} \quad (22)$$

— площадь ориентированного треугольника, образованного точками α , β и γ на комплексной плоскости, причем знак этой величины положителен при обходе вершин против часовой стрелки и отрицателен при обходе в обратном направлении. Для трех точек, лежащих на прямой, например, для действительных α , β и γ , как следует из (22), $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$. С другой стороны, для треугольника с площадью $S_{\alpha\beta\gamma} = \pi/4 + m\pi/2$, где m — целое число, Q обращается в нуль.

Для нахождения корней уравнения (19) проведем замену переменной

$$\nu = \frac{1 - 3\lambda}{2T} \quad (23)$$

и перепишем его в виде

$$4\nu^3 - 3\nu + \sin 3\theta = 0, \quad (24)$$

где введен новый параметр θ , определяемый из соотношения

$$\sin 3\theta = \frac{Q}{T^3}. \quad (25)$$

Подобная параметризация возможна всегда в силу ограничения $|Q| \leq T^3$, которое следует из известного неравенства арифметического и геометрического средних [30]: для любых трех положительных чисел x_1 , x_2 , x_3 их геометрическое среднее ограничено сверху их арифметическим средним,

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq (x_1 + x_2 + x_3)/3.$$

В нашем случае

$$x_1 = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2, \quad x_2 = |\langle\beta|\gamma\rangle|^2, \quad x_3 = |\langle\gamma|\alpha\rangle|^2,$$

откуда искомое неравенство следует с учетом того, что модуль косинуса не превышает единицу:

$$|Q|^{2/3} \leq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq T^2.$$

По определению угол 3θ принимает значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а это значит, что угол θ лежит в интервале $[-\pi/6, \pi/6]$.

Одно решение уравнения (24) находится из формулы для куба синуса

$$\sin^3 \theta = (3 \sin \theta - \sin 3\theta)/4,$$

откуда следует $u_1 = \sin \theta$. Два других корня имеют вид

$$u_{2,3} = \sin\left(\theta \pm \frac{2\pi}{3}\right),$$

в чем можно убедиться, подставив их в уравнение (12) и воспользовавшись той же формулой для куба синуса с учетом 2π -периодичности синуса. Возвращаясь к исходной переменной, получаем собственные значения оператора плотности в виде

$$\lambda_n = \frac{1}{3} \left[1 - 2T \sin\left(\theta + \frac{2\pi n}{3}\right) \right], \quad n = 0, 1, 2. \quad (26)$$

Величины Q , T и θ зависят только от расстояний между тремя когерентными состояниями-буквами на комплексной плоскости и от площади треугольника, образуемого ими. Это означает, что собственные значения λ_n инвариантны по отношению к сдвигам и вращению всех трех состояний-букв на комплексной плоскости. Как и в случае двух состояний, такая инвариантность определяется тем, что в уравнение (18) входят только скалярные произведения векторов, которые не изменяются унитарными операторами сдвига $D(\delta)$ и вращения $U(\psi)$. Как и в предыдущем разделе, введем три «абсолютных» параметра для набора состояний-букв: координату центроида треугольника (точки пересечения медиан [31]) $\xi = (\alpha + \beta + \gamma)/3$ и угол наклона медианы, опущенной из точки α , к действительной оси $\arg(\alpha - \xi)$.

Таким образом, хотя три комплексных амплитуды задаются шестью действительными параметрами, собственные значения оператора плотности будут зависеть только от трех «относительных» параметров, в силу инвариантности по отношению к трехпараметрической группе сдвигов и вращений. Как показывает уравнение (26), число параметров может быть даже уменьшено до двух, T и θ , однако эти параметры не являются независимыми в

том смысле, что пределы изменения одного из них зависят от значения другого. Это следует из следующего требования: оператор плотности в квантовой механике всегда положительно определен, а значит его собственные значения λ_n всегда неотрицательны. Полагая $\theta = -\pi/6$, имеем $\sin(\theta + 2\pi/3) = 1$ и из уравнения (26) получаем, что λ_1 неотрицательно только при $T \leq 1/2$. В общем случае верхняя граница T будет сложной функцией θ , что затрудняет анализ энтропии.

3.2. Представление треугольника точкой в трехмерном пространстве

Для удобства вычислений собственных значений и энтропии необходимо правильно ввести три «относительных» параметра, характеризующих взаимное расположение амплитуд α, β, γ на комплексной плоскости. В качестве первого шага переходим в систему координат с центром, расположенным в центре $\xi = (\alpha + \beta + \gamma)/3$. В этой системе координат амплитуды α, β, γ преобразуются в амплитуды

$$\alpha_1 = \alpha - \xi, \quad \beta_1 = \beta - \xi, \quad \gamma_1 = \gamma - \xi, \quad (27)$$

представленные на рис. 1а. При этом остается неисключенным еще один «абсолютный» параметр — угол $\arg(\alpha_1)$ поворота треугольника $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ на комплексной плоскости амплитуд. Чтобы его исключить, перейдем в трехмерное пространство, координатами точек которого являются стороны треугольника

$$x = |\alpha - \beta|, \quad y = |\gamma - \beta|, \quad z = |\gamma - \alpha|. \quad (28)$$

Очевидно, что построенная таким образом точка в пространстве (x, y, z) , например, точка 1 на рис. 1б, соответствующая треугольнику $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ на плоскости рис. 1а, не зависит от угла $\arg(\alpha_1)$. Однако при таком отображении геометрически эквивалентные треугольники отображаются в разные точки трехмерного пространства. Так, геометрически эквивалентные треугольники $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) на рис. 1а, являющиеся шестью элементами симметрической группы перестановок S_3 ¹⁾ сторон треугольника:

$$1 = (x, y, z), \quad 2 = (y, x, z), \quad 3 = (z, x, y),$$

¹⁾ Изоморфной диэдральной группе D_3 преобразований треугольника $\alpha_1\beta_1\gamma_1$: например, тождественного преобразования, четырех поворотов относительно изоцентра на 120° ($1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6$) и отражения относительно мнимой оси $1 \rightarrow 2$.

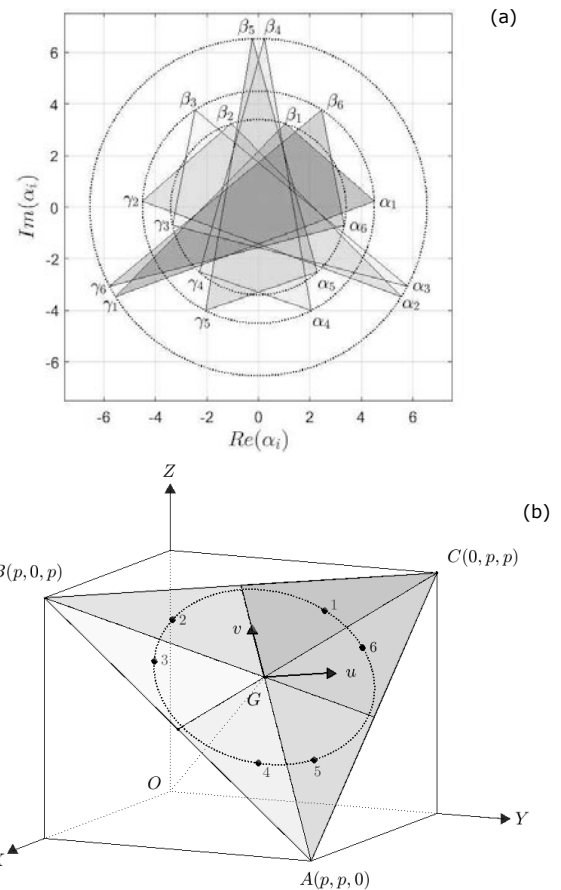


Рис. 1. а) Треугольник $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, образуемый амплитудами (27), и треугольники $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ ($i = 2, \dots, 6$), получаемые при перестановке его сторон (28), вместе образующие элементы группы S_3 . б) Отображение треугольников $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ из комплексной плоскости амплитуд в точки трехмерного пространства i , координаты которых задают стороны треугольников ($\alpha_i\beta_i\gamma_i \mapsto i$). Цвет сектора на рис. б соответствует цвету отображаемого треугольника на рис. а

$$4 = (z, y, x), \quad 5 = (y, z, x), \quad 6 = (x, z, y),$$

и генерирующие одинаковые собственные значения, представлены шестью разными точками в трехмерном представлении на рис. 1б.

Введем параметризацию, позволяющую избежать этой многозначности. $3D$ -область, в которую отображаются треугольники, ограничивается неравенствами

$$x + y \geq z, \quad x + z \geq y, \quad y + z \geq x,$$

образующими треугольный конус с вершиной в начале координат. Точки, изображающие треугольники с заданным полупериметром p , расположенные

на плоскости $x + y + z = 2p$, ограничены ее сечением с данным конусом рис. 1b. Вершинами этой равносторонней треугольной области являются точки $A = (p, p, 0)$, $B = (p, 0, p)$ и $C = (0, p, p)$. Ее центр — точка

$$G = \left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$$

есть $3D$ -отображение равностороннего треугольника из комплексной плоскости. Введем в плоскости ABC декартову систему координат (u, v) с центром в точке G, с осью v , лежащей в одной плоскости с осью z , и с осью u , перпендикулярной ей (рис. 1b). Обозначим единичные векторы вдоль направлений u и v через $\mathbf{e}_u$ и $\mathbf{e}_v$ соответственно. Эти векторы можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{e}_u = (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \quad (29)$$

$$\mathbf{e}_v = (-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z)/\sqrt{6}, \quad (30)$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы вдоль направлений x , y и z соответственно.

В плоскости треугольника ABC будем пользоваться полярными координатами (r, φ) , которые вводятся стандартным образом: $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$. Вектор

$$\mathbf{r}_{(x,y,z)} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

расположенный в плоскости ABC и представляющий треугольник (x, y, z) , можно записать как

$$2p(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)/3 + r \cos \varphi \mathbf{e}_u + r \sin \varphi \mathbf{e}_v.$$

Приравнивая эти два выражения, с использованием уравнений (29) и (30) получаем после некоторых преобразований

$$x = [2p + \sqrt{6}r \sin(\varphi + 4\pi/3)]/3, \quad (31)$$

$$y = [2p + \sqrt{6}r \sin(\varphi + 2\pi/3)]/3, \quad (32)$$

$$z = [2p + \sqrt{6}r \sin(\varphi)]/3. \quad (33)$$

При $r = 0$ получаем равносторонний треугольник, а при $\varphi = (2k+1)\pi/6$, где k пробегает значения от 0 до 5 — равнобедренные треугольники, причем в треугольниках с $k = 0, 2, 4$ основание меньше, чем боковые стороны, а в треугольниках с $k = 1, 3, 5$ — больше. Так, для $r \neq 0$, при изменении φ от $\pi/6$ до $\pi/2$ треугольник плавно изменяет свою форму от равнобедренного с $x < y = z$ до другого равнобедренного с $x = y < z$. В остальных пяти секторах, однозначно задаваемых параметром φ , имеем геометрически эквивалентные треугольники с переставленными сторонами, т.е. исследование энтропии

достаточно ограничить одним из этих секторов, например, $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$, где $z \geq y \geq x$. В этом секторе, для заданного угла φ , $r \in [0, p/(\sqrt{6} \sin \varphi)]$ (см. также рис. 2a, где этот сектор обозначен штриховкой).

Таким образом, любой треугольник полностью описывается тремя параметрами (p, r, φ) , где полупериметр p задает его размер, параметр r характеризует его деформацию — степень удаленности от равностороннего, а φ задает форму треугольника при заданном размере и деформации.

Для известных (x, y, z) параметры (p, r, φ) можно получить, обращая уравнения (31)–(33). Для полупериметра p получаем просто его определение, для деформации —

$$r = \sqrt{(x - 2p/3)^2 + (y - 2p/3)^2 + (z - 2p/3)^2}, \quad (34)$$

и, наконец, для угла —

$$\varphi = \arcsin \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{z - 2p/3}{r} \right). \quad (35)$$

В последнем уравнении мы полагаем $z \geq y \geq x$, в результате чего φ попадает в интересующий нас сектор $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$.

3.3. Энтропия фон Неймана

Энтропия фон Неймана для оператора плотности дается энтропией Шеннона его собственных значений:

$$S = - \sum_{n=0}^2 \lambda_n \log_2 \lambda_n. \quad (36)$$

Эта величина стремится к своему максимальному значению $\log_2 3 = 1.585$ при достаточном взаимном удалении всех трех точек на комплексной плоскости. Для произвольного треугольника с относительными параметрами (p, r, φ) величины (x, y, z) рассчитываются по формулам (31)–(33). Площадь треугольника дается формулой Герона $S_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, которая вместе с формулой (9) позволяет выразить T и Q через (x, y, z) , а затем найти собственные значения оператора плотности по формуле (26). На рис. 2 показаны результаты такого расчета для различных значений полупериметра p .

При малых значениях полупериметра p (малых отличий амплитуд когерентных состояний) максимальной энтропией обладают вырожденные конфигурации A, B и C, когда одна из букв двухбуквенного алфавита когерентных состояний повторяется

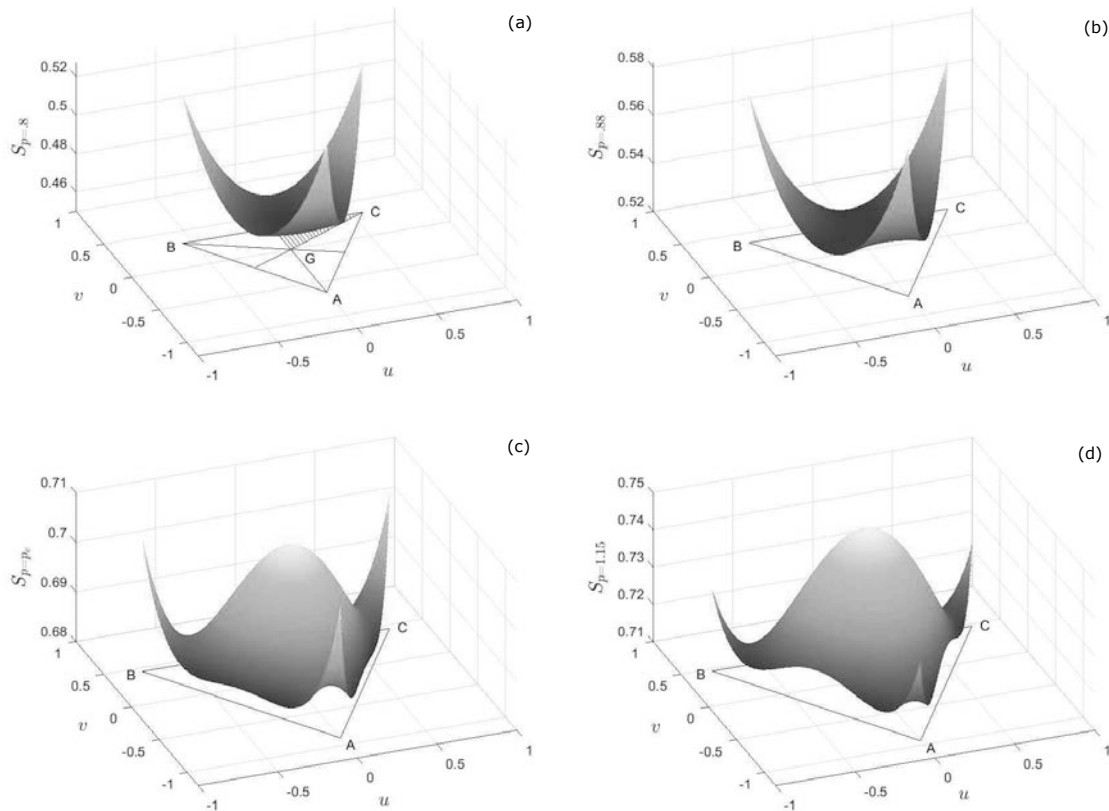


Рис. 2. Энтропия S_p равновероятной смеси трех когерентных состояний, образующих треугольник с полупериметром p , для всевозможных конфигураций треугольников, каждый из которых представлен точкой на плоскости $\{u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi\}$ из области ABC. Точка G на рис. a соответствует равнобедренному треугольнику когерентных состояний. Точки A, B и C обозначают вырожденные равнобедренные треугольники $\{x = y, z = 0\}$, $\{x = z, y = 0\}$ и $\{y = z, x = 0\}$ соответственно. Заштрихованная область на рис. a выделяет сектор $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$, где $z \geq y \geq x$. Точки из пяти других секторов соответствуют перестановкам сторон x, y, z треугольника когерентных состояний из данного сектора. $p = 0.8$ (a), 0.88 (b); $p_c = 1.097$ (c), 1.15 (d)

в два раза чаще другой²⁾. На рис. 2a эта ситуация представлена тремя максимумами в точках A, B, C и минимумом в точке G (равносторонний треугольник когерентных состояний). При увеличении p в области значений $p = 1$ происходит изменение структуры зависимости энтропии S_p от конфигурации треугольника когерентных состояний. Вначале (рис. 2b) появляется локальный максимум в точке G, величина которого быстро растет и при $p = p_c = 1.097$ его значение становится равным мак-

симумам для вырожденных конфигураций A, B, C (рис. 2c). При $p > p_c$ энтропия в точке G становится глобальным максимумом для всевозможных конфигураций трех когерентных состояний (рис. 2d).

Задачей, важной для практических приложений, является нахождение максимальной энтропии для заданного среднего числа фотонов

$$N = \text{Tr}(a^\dagger a \rho) = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}{3} = |\xi|^2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{9}, \quad (37)$$

где последнее равенство получено путем перехода к координатам амплитуд относительно центра $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (27) и использования свойства $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$. Как и в случае двух когерентных состояний, рассмотренном в разд. 2, среднее число фотонов зависит не только от относительных пара-

²⁾ В этом случае, например для конфигурации A, матрица плотности (15) трансформируется в матрицу $\rho = (2|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|)/3$, имеющую два собственных значения $\lambda_{\pm} = [3 \pm \sqrt{1 + 8 \exp(-p^2)}]/6$, которые, как можно показать, совпадают с собственными значениями, вычисляемыми по формуле (26): $\lambda_+ = \lambda_0, \lambda_- = \lambda_2$. Третье собственное значение $\lambda_1 = 0$.

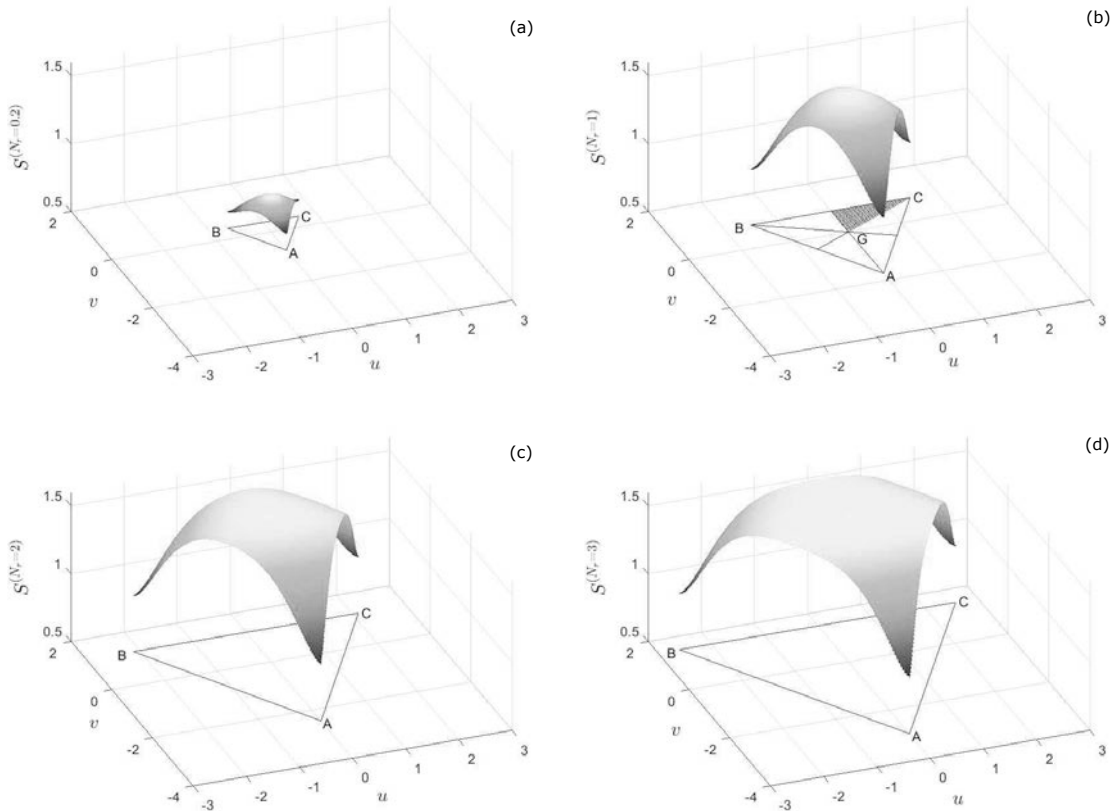


Рис. 3. Энтропия $S^{(N_r)}$ смеси трех когерентных состояний (15) с заданной относительной энергией $\hbar\omega N_r$ для всевозможных конфигураций треугольников, каждый из которых представлен точкой на плоскости $\{u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi\}$ из области ABC (см. обозначения на рис. 2). $N_r = 0.2$ (a), 1 (b), 2 (c), 3 (d)

метров, но и от абсолютного — модуля координаты центроида $|\xi|$. Энтропия как мера различимости состояний (букв), используемых для кодирования сообщений, зависит только от относительной части энергии этих состояний, т.е. от величины

$$N_r = (x^2 + y^2 + z^2)/9.$$

В отличие от энтропии для множества треугольников с заданным полупериметром (рис. 2), энтропия множества треугольников с заданной относительной энергией $\hbar\omega N_r$ является выпуклой функцией переменных $\{u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi\}$, как показывают примеры, приведенные на рис. 3. При этом ее максимум достигается для равностороннего треугольника и этот максимум растет с ростом N_r .

На рис. 4 показан результат численного поиска максимальной энтропии $S_3^{max}(N)$ при заданном среднем числе фотонов N , где оптимизация проводится по всем шести параметрам, как относительным, так и абсолютным. Максимальное значение энтропии при каждом N соответствует $|\xi| = 0$ и

$r = 0$, т.е. равностороннему треугольнику, центрированному в начале координат. Найденная величина сравнивается с зависимостью $S_2^{max}(N)$, определяемой уравнением (13). Как для двух, так и для трех когерентных состояний максимальная энтропия стремится к своему максимальному значению с ростом среднего числа фотонов N . Важно, что не только предельное значение для трех состояний выше предельного значения для двух, но и что кривая $S_3^{max}(N)$ всегда лежит выше кривой $S_2^{max}(N)$, даже при малых N , что видно на вставке на рис. 4. Это означает, что при сколь угодно высоком уровне потерь в оптической линии связи кодирование на основе трех состояний превосходит по емкости кодирование на основе двух.

3.4. Собственные векторы оператора плотности

Для нахождения собственных векторов оператора плотности введем три новых вектора, являю-

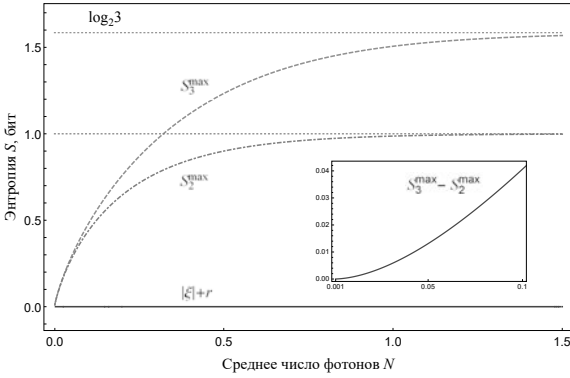


Рис. 4. Максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов при использовании трех (штриховая зеленая линия) и двух (штрих-пунктирная красная линия) когерентных состояний. Значение $|\xi| + r$, при котором достигается максимум S_3^{max} (сплошная синяя линия), равно нулю. Вставка показывает, что разность энтропий для трех и двух состояний всегда положительна

щихся результатом действия унитарного оператора сдвига (10) на состояния-буквы:

$$|\psi_\mu\rangle = D(-\xi)|\mu\rangle = e^{-i\text{Im}(\xi\mu^*)}|\mu_1\rangle, \quad (38)$$

где μ принимает значения α, β и γ . Если новые состояния моды поля служат буквами алфавита для кодирования сообщений в квантовом канале связи и имеют равные статистические веса, то оператор плотности случайно выбранной моды имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{1}{3}(|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| + |\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta| + |\psi_\gamma\rangle\langle\psi_\gamma|) = \\ &= D(-\xi)\rho D^\dagger(-\xi). \end{aligned} \quad (39)$$

Поскольку оператор $\tilde{\rho}$ получен из оператора ρ посредством унитарного преобразования, его собственные значения равны λ_n , а собственные векторы имеют вид

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = D(-\xi)|\lambda_n\rangle.$$

Таким образом, найдя собственные векторы $\tilde{\rho}$, что проще, чем находить собственные векторы ρ , мы получим последние в виде

$$|\lambda_n\rangle = D(\xi)|\tilde{\lambda}_n\rangle.$$

Три собственных вектора оператора плотности $\tilde{\rho}$ лежат в линейной оболочке трех когерентных состояний $\{|\alpha_1\rangle, |\beta_1\rangle, |\gamma_1\rangle\}$ и могут быть записаны в виде суперпозиции

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = \tilde{C}_n^\alpha|\alpha_1\rangle + \tilde{C}_n^\beta|\beta_1\rangle + \tilde{C}_n^\gamma|\gamma_1\rangle, \quad (40)$$

чьи коэффициенты разложения можно получить, действуя оператором $D(-\xi)$ на обе части уравнения (17) и воспользовавшись соотношением (38):

$$\tilde{C}_n^\mu = C_n^\mu e^{-i\text{Im}(\xi\mu^*)}.$$

Учитывая, что модули скалярных произведений пар когерентных состояний $|\langle\mu|\delta\rangle|$ в уравнениях (18) определяются одним параметром — расстоянием между ними (28), равным в рассматриваемом случае стороне треугольника, противоположной третьему когерентному состоянию, не входящему в пару $\{\mu, \delta\}$ из множества трех амплитуд $\mathfrak{A} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$:

$$(\mathfrak{A} \setminus \{\alpha, \beta\} = \{\gamma\}), \quad (\mathfrak{A} \setminus \{\beta, \gamma\} = \{\alpha\}), \quad (\mathfrak{A} \setminus \{\alpha, \gamma\} = \{\beta\}),$$

введем функцию

$$s(\gamma) = x, s(\alpha) = y, s(\beta) = z, \quad (41)$$

которая, с учетом полученных собственных значений (26), позволяет представить уравнения (18) для векторов с центроидом в начале координат (40) в виде

$$\begin{pmatrix} \nu_n & q_{s(\gamma)}e^{i\psi_{\alpha\beta}} & q_{s(\beta)}e^{i\psi_{\alpha\gamma}} \\ q_{s(\gamma)}e^{i\psi_{\beta\alpha}} & \nu_n & q_{s(\alpha)}e^{i\psi_{\beta\gamma}} \\ q_{s(\beta)}e^{i\psi_{\gamma\alpha}} & q_{s(\alpha)}e^{i\psi_{\gamma\beta}} & \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_n^\alpha \\ \tilde{C}_n^\beta \\ \tilde{C}_n^\gamma \end{pmatrix} = 0. \quad (42)$$

Здесь

$$\nu_n = \sin(\theta + 2\pi n/3),$$

$$q_{s(\mu)} = e^{-(s(\mu))^2/2}/(2T)$$

— набор нормированных скалярных произведений

$$(q_{s(\alpha)}^2 + q_{s(\beta)}^2 + q_{s(\gamma)}^2 = 3/4),$$

а $\psi_{\mu\delta} = \text{Im}(\mu^*\delta)$ — фазы соответствующих произведений $\langle\mu_1|\delta_1\rangle$:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} &= \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\gamma\alpha} = \\ &= -\psi_{\alpha\gamma} = -\psi_{\beta\alpha} = -\psi_{\gamma\beta} = \psi = 2S_{\alpha\beta\gamma}/3 > 0. \end{aligned}$$

Решение уравнений (42) дает три ортонормированных, $\langle\tilde{\lambda}_n|\tilde{\lambda}_m\rangle = \delta_{nm}$, собственных вектора (40), распределение девяти амплитуд вероятностей $|\tilde{C}_n^\mu|^2$ в которых определяется соотношением

$$|\tilde{C}_n^\mu|^2 = \frac{1}{9\lambda_n} \frac{\nu_n^2 - q_{s(\mu)}^2}{\nu_n^2 - 1/4}, \quad (43)$$

а их фазы задаются с точностью до произвольного слагаемого, например, фаз амплитуд $\tilde{C}_n^\mu$ для различных n ,

$$\tilde{C}_n^\mu = |\tilde{C}_n^\mu| e^{i\Psi_n^\mu}, \quad \mu = \alpha, \beta, \quad (44)$$

посредством выражения

$$e^{i\Psi_n^{\mu\gamma}} = \frac{-\nu_n q_s(\alpha/\{\mu, \gamma\}) e^{i\psi_{\mu\gamma}} + q_s(\mu) q_s(\gamma) e^{-2i\psi_{\mu\gamma}}}{\sqrt{(\nu_n^2 - q_s(\mu)^2)(\nu_n^2 - q_s(\gamma)^2)}}. \quad (45)$$

Наиболее простой вид собственные векторы принимают в случае равностороннего треугольника с центром в начале координат ($\xi = 0$), для которого, как было установлено выше, энтропия максимальна при заданном среднем числе фотонов. Для него $q_s(\mu) = 1/2$, $\theta = \psi + \pi/6$, $\psi = \sqrt{3}|\gamma|^2/2$, что, согласно уравнениям (43)–(45), приводит к следующим явным выражениям для собственных векторов:

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = \frac{1}{3\sqrt{\lambda_n}} \left(e^{i\frac{2\pi}{3}(n+1)} |\alpha\rangle + e^{-i\frac{2\pi}{3}(n+1)} |\beta\rangle + |\gamma\rangle \right), \quad n = 0, 1, 2, \quad (46)$$

и собственных значений (26) (рис. 5):

$$\lambda_n = \frac{1}{3} \left[1 - 2e^{-\frac{2\pi}{3}|\gamma|^2} \sin\left(\psi + \frac{\pi(1+4n)}{6}\right) \right]. \quad (47)$$

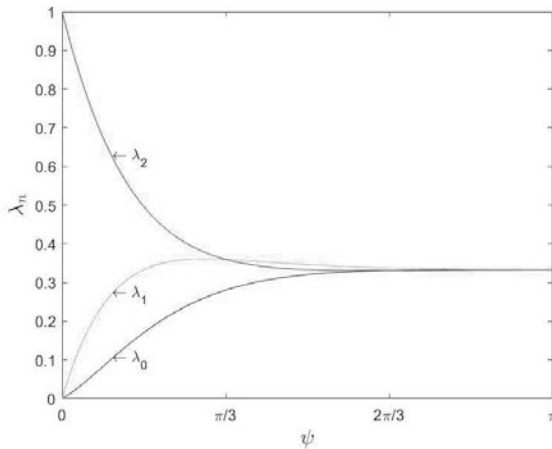


Рис. 5. Собственные значения λ_n (47) для случая равностороннего треугольника как функции его площади $\psi = 2S_{\alpha\beta\gamma}/3 = \sqrt{3}|\alpha|^2/2$

Состояния (46) представляют собой суперпозиции когерентных состояний, лежащих на окружности в фазовой плоскости, и широко изучаются в связи с тем, что являются оптическими реализациями многокомпонентного кота Шрёдингера [26, 32].

В силу соотношений

$$\alpha = e^{i2\pi/3}\gamma, \quad \beta = e^{-i2\pi/3}\gamma,$$

выполненных для равностороннего треугольника, собственные векторы (46) можно также представить, используя три проекционных оператора

$$P_3^{(g)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + g)), \quad g = 0, \pm 1, \quad (48)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$P_3^{(i)} P_3^{(j)} = \delta_{ij} P_3^{(i)}$$

и образуют полный набор

$$\sum_{g=0,\pm 1} P_3^{(g)} = \hat{I},$$

а именно,

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |\gamma\rangle, \quad (49)$$

где индексы g_n однозначно связаны с индексами n :³⁾

$$g_n = (2 + n) \bmod 3 - 1, \quad (50)$$

т.е. $g_0 = 1$, $g_1 = -1$, $g_2 = 0$, при этом

$$\lambda_n = \langle \gamma | P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) | \gamma \rangle.$$

Оператор $P_3^{(0)}$ осуществляет проецирование на подпространство фоковских состояний $|n\rangle$, индекс которых n кратен 3:

$$P_3^{(0)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle = \delta_{n,3k} |n\rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

Если рассматривать целые неотрицательные числа, кратные трем, как неотрицательную часть $P(H_3)$ подгруппы H_3 аддитивной группы целых чисел, то операторы $P_3^{(\pm 1)}$ осуществляют проецирование на подпространства фоковских состояний, индексы которых соответствуют неотрицательной части смещенных классов по подгруппе H_3 ,

$$\begin{aligned} P(H_3) &= 0, 3, 6, 9, \dots, \\ P(H_3 + 1) &= 1, 4, 7, 10, \dots, \\ P(H_3 + 2) &= 2, 5, 8, 11, \dots, \end{aligned}$$

так как имеют место соотношения

$$\begin{aligned} P_3^{(-1)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle &= \delta_{n,3k+1} |n\rangle, \\ P_3^{(+1)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle &= \delta_{n,3k+2} |n\rangle, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (52)$$

³⁾ Для доказательства данного равенства удобно представить выражения для проекционных операторов $P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a})$ в нормально-упорядоченном виде. Стартуя с соотношения $e^{iu\hat{a}^\dagger \hat{a}} = :e^{(e^{iu}-1)\hat{a}^\dagger \hat{a}}:$, получим $\cos(u(\hat{a}^\dagger \hat{a} + g)) = :e^{(\cos u - 1)\hat{a}^\dagger \hat{a}} \cos(\sin(u)\hat{a}^\dagger \hat{a} + g):$, что приводит к равенству $\lambda_n = \langle \gamma | P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) | \gamma \rangle$ с λ_n , определенным выше в (47).

Следовательно, ортогональность состояний $|\tilde{\lambda}_n\rangle$ проявляется как непересечение подпространств, в которых расположены векторы $|\tilde{\lambda}_2\rangle, |\tilde{\lambda}_1\rangle, |\tilde{\lambda}_0\rangle$. Уравнения (51) и (52) также демонстрируют причину соотношения собственных значений $\lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_0$ при $\psi < \pi/3$ (см. рис. 5), связанную с тем, что при малых амплитудах когерентных состояний будут преобладать состояния из подгруппы, содержащей вакуумные состояния, т.е. состояния $|\tilde{\lambda}_2\rangle$, создаваемые проектором $P_3^{(0)}$ (49). При увеличении амплитуд когерентных состояний веса состояний $|\tilde{\lambda}_1\rangle$ и $|\tilde{\lambda}_0\rangle$ поочередно становятся равными λ_2 . Сначала, при $\psi = \pi/3$, достигается равенство $\lambda_2 = \lambda_1$, демонстрируя увеличение веса однофотонных состояний из $|\tilde{\lambda}_1\rangle$. Затем, при $\psi = 2\pi/3$, становятся значимыми двухфотонные состояния из $|\tilde{\lambda}_0\rangle$ и достигается равенство $\lambda_2 = \lambda_0$ (рис. 5). Веса состояний $|\tilde{\lambda}_1\rangle$ и $|\tilde{\lambda}_0\rangle$ выравниваются при $\psi = \pi$. При дальнейшем увеличении амплитуд данное чередование собственных значений продолжается с периодом π и с одновременным их стремлением к значению $1/3$. Отмеченное различие собственных значений в определенном диапазоне амплитуд когерентных состояний является основанием для использования процедуры компрессии квантовых данных [14] при кодировании передаваемых сообщений с помощью когерентных состояний.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследована емкость оптического канала связи с использованием сигнальных созвездий в виде двух и трех произвольных когерентных состояний. С этой целью была вычислена энтропия фон Неймана для статистической смеси двух и трех равновероятных когерентных состояний. Для случая трех состояний была введена оригинальная параметризация треугольника, представляющего три когерентных состояния на комплексной плоскости, и на ее основе установлены собственные значения и собственные векторы оператора плотности смеси трех произвольных когерентных состояний.

Для практических применений наибольшее значение имеет следующий основной результат: при заданном среднем числе фотонов энтропия оптимальной смеси трех состояний всегда превосходит энтропию оптимальной смеси двух состояний и оптимальной конфигурацией является равносторонний треугольник с центром в начале координат. Следует отметить, что энтропия определяет верхний предел передаваемой информации, а ее реальный объем опре-

деляется конструкцией ресивера, используемого на принимающей станции. Однако энтропийные соотношения, исследованные в данной статье, определяют фундаментальный предел, достижимый с совершенствованием оптических ресиверов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Килин, *Квантовая оптика. Поля и их детектирование*, Едиториал УРСС, Москва (2003).
2. В. А. Фок, *Начала квантовой механики*, Наука, Москва (1976).
3. С. Я. Килин, УФН **169**, 507 (1999).
4. К. Хелстром, *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания*, Мир, Москва (1979).
5. Дж. Прокис, *Цифровая связь*, Радио и связь, Москва (2000).
6. T. Muciaccia, F. Gargano, and V. M. N. Passaro, *Photonics* **1**, 323 (2014).
7. I. A. Burenkov, O. V. Tikhonova, S. V. Polyakov, *Optica* **5**, 227 (2018).
8. I. B. Djordjevic, *Advanced Coding for Optical Communications*, in *Optical Fiber Telecommunications (Sixth Edition)*, ed. by I. P. Kaminow, T. Li, and A. E. Willner, Academic Press, Boston (2013).
9. I. Khan, D. Elser, T. Dirmeier et al., *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **375**, 20160235 (2017).
10. *Квантовая криптография: идеи и практика*, под ред. С. Я. Килина, Д. Б. Хорошко, А. П. Низовцева, Белорусская наука, Минск (2007).
11. D. Sych and G. Leuchs, *New J. Phys.* **12**, 053019 (2010).
12. Д. Б. Хорошко, Д. И. Пустоход, С. Я. Килин, *Опт. и спектр.* **112**, 373 (2012).
13. B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
14. S. Ya. Kilin, *Progr. Opt.* **42**, 3 (2001).
15. A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein et al., *Science* **282**, 706 (1998).
16. D. B. Horoshko and S. Ya. Kilin, *Phys. Rev. A* **61**, 032304 (2000).
17. J. H. Shapiro, G. Saplacoglu, S.-T. Ho et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1604 (1987).
18. A. V. Masalov, A. A. Putilin, and M. V. Vasilyev, *J. Mod. Opt.* **41**, 1941 (1994).

19. Д. Б. Хорошко, С. Я. Килин, ЖЭТФ **106**, 1278 (1994).
20. I. V. Dudinets and V.I. Man'ko, J. Russ. Laser. Res. **36**, 251 (2015).
21. K. Brádler and C. Weedbrook, Phys. Rev. A **97**, 022310 (2018).
22. А. С. Холево, Пробл. перед. инф. **9**, 177 (1973).
23. R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
24. C. E. Shannon, Bell System Techn. J. **27**, 379 (1948).
25. V.V. Dodonov, I.A. Malkin and V.I. Man'ko, Physica **72**, 597 (1974).
26. S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*, Oxford Univ. Press (2006).
27. D. B. Horoshko and S. Ya. Kilin, J. Mod. Opt. **44**, 2043 (1997).
28. D. B. Horoshko, S. Ya. Kilin, Opt. Express **2**, 347 (1998).
29. Д. Б. Хорошко, С. Я. Килин, ЖЭТФ **117**, 844 (2000).
30. R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press (2013).
31. R. Deaux, *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*, Dover Publ. (2008).
32. D. B. Horoshko, S. De Bièvre, M. I. Kolobov et al., Phys. Rev. A **93**, 062323 (2016).

РАСТЕКАНИЕ ТОКА В ТОНКИХ ФОЛЬГАХ ИЛИ ПЛОСКИХ ТОКОВЫХ СЛОЯХ

С. Ф. Гаранин, Е. М. Кравец*

Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 октября 2022 г.,
после переработки 17 октября 2022 г.
Принята к публикации 31 октября 2022 г.

Для рассмотрения эволюции распределения токов в неоднородных тонких проводящих слоях или фольгах используется интегро-дифференциальное уравнение, с помощью которого трехмерная задача для магнитного поля сводится к двумерной, а для распределения токов по ширине неоднородных проводящих слоев или фольг это уравнение позволяет свести двумерную задачу для магнитного поля к одномерной. Для однородных проводящих слоев с постоянной проводимостью пространственный масштаб распределения тока, сосредоточенного вначале в ограниченной области, растет пропорционально времени со скоростью $u = c^2/4\pi\sigma\Delta$, где σ — проводимость материала слоя, Δ — его толщина. В качестве приложения к задачам переброса тока с помощью электровзрывных размыкателей рассмотрено распределение тока по ширине фольги для периодической системы плоских фольг типа «змеек». Показано, что в этой системе вначале в фольге устанавливается распределение тока, соответствующее идеальной проводимости фольги. Затем за времена порядка s/u ($2s$ — ширина фольги) происходит релаксация распределения тока в фольге к равномерному. Оценки показывают, что если фольги используются в качестве размыкателей, то токи по фольгам в процессе переброса тока в нагрузку должны успевать распределяться равномерно по их ширине, поэтому поправки на неоднородность распределения тока в размыкателях должны быть невелики.

DOI: 10.31857/S004445102304003X
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих системах с тонкими фольгами, в частности в фольговых размыкателях тока [1–3], широко применяющихся для обострения импульсов тока, важным вопросом является вопрос о распределении тока по ширине фольги. Обычно для описания работы этих систем предполагают, что ток распределен равномерно по ширине. Это предположение, однако, может быть не всегда оправданным даже для однородных фольг, если учесть зависимость сопротивления фольги от джоулева тепловыделения. В этом случае, если в местах повышенного джоулева тепловыделения будет уменьшаться сопротивление, что возможно при переходе проводника в плазму, то ток может перебрасываться в области большего разогрева. Таким образом, на этой стадии возможна неустойчивость токового слоя относительно

филаментации (устойчивость токовых слоев относительно стратификации изучалась в работе [4]). На стадии роста сопротивления при джоулевом тепловыделении условие устойчивости проводника относительно филаментации должно выполняться, и предположение об однородности фольги может быть оправданным.

Довольно часто в технике применяются фольги конечной ширины или же наборы плоских фольг типа «змеек», которые в последнее время изучаются как возможные быстрые размыкатели [3] в мощных источниках тока. В этом случае возникают вопросы: как будет распределяться ток по ширине таких фольг и насколько правильно описывать их сопротивление, как сопротивление фольги с однородным распределением тока?

Вопросы растекания тока в тонких токовых слоях изучались в целом ряде работ [5–9]. В этих работах показано, что при анализе процессов растекания появляется физическая величина $u = c^2/4\pi\sigma\Delta$ (σ — проводимость фольги, Δ — ее толщина, а величина $\sigma\Delta$ является поверхностной проводимостью) с

* E-mail: EMKravets@vniief.ru

размерностью скорости, которая характеризует процесс выравнивания токов по ширине фольги. Вообще говоря, даже в предположении зависимости величин в фольге только от координаты вдоль ширины фольги магнитные поля будут иметь двумерный характер и будут также зависеть от координаты, перпендикулярной фольге. Тем не менее в работе [9] показано, что задачу о растекании тока по ширине фольги можно свести к одномерному интегро-дифференциальному уравнению для плотности тока.

В настоящей работе мы выведем интегро-дифференциальное уравнение для плотности тока в общем двумерном случае, проанализируем свойства его решений для замкнутой системы токов (вихри токов на поверхности), а также применим одномерное интегро-дифференциальное уравнение [9] для расчета распределения и выравнивания тока по ширине фольги в системах плоских фольг типа «змеек» или конечных по ширине плоских токовых слоев.

2. РАСТЕКАНИЕ ТОКА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

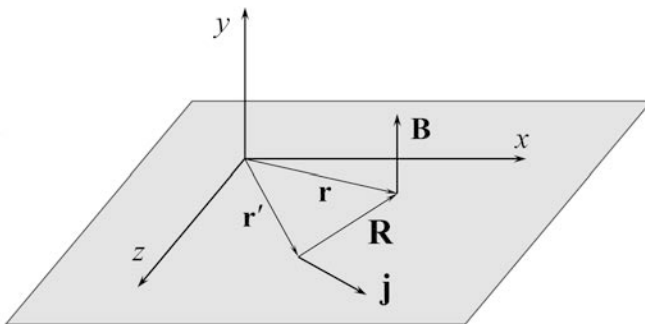


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассмотрим плоский и бесконечно тонкий токовый слой, ось y направим перпендикулярно его плоскости (рис. 1). Плотность тока $\mathbf{j}$ в нем будем считать зависящей от x и z . Интегро-дифференциальное уравнение, описывающее динамику магнитного поля на поверхности слоя с постоянной проводимостью, выведено в работе [8]. Мы получим интегро-дифференциальное уравнение, описывающее динамику растекания тока в двумерной задаче (плоском токовом слое), когда все величины зависят от x и z .

Найдем магнитное поле на поверхности, т. е. при $y = 0$. По закону Био – Савара ток и создаваемое им магнитное поле связаны соотношением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}', \quad (1)$$

из которого видно, что поскольку при $y = 0$ вектор $\mathbf{r}$ лежит в плоскости xz , вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен этой плоскости. Можно показать, что фурье-компоненты величин $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k},$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{j}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k},$$

связаны соотношениями

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = -\frac{2\pi i}{ck} [\mathbf{j}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}],$$

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = \frac{ic}{2\pi k} [\mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}}].$$

Обращая интегральный оператор в формуле (1) с помощью преобразования Фурье, можно выразить плотность тока через магнитное поле на поверхности:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{4\pi^2} \int \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Динамика магнитного поля определяется уравнением Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot}_2 \mathbf{E} \quad (3)$$

(индекс «2» у ротора означает, что дифференцирование происходит только по координатам x и z), в котором для нахождения электрического поля следует использовать закон Ома для поверхностного тока:

$$\mathbf{j} = \sigma \Delta \mathbf{E}. \quad (4)$$

Подставляя $\mathbf{E}$ из (4) в (3) и выражая плотность тока через магнитное поле с помощью (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot}_2(u\mathbf{j}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{rot}_2 \left(u(\mathbf{r}) \int \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \right). \end{aligned} \quad (5)$$

При $u = \text{const}$ уравнение (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{u}{\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{r}') \operatorname{div}_2 \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{u}{\pi} \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{R^3} d\mathbf{r}' = \frac{u}{\pi} \Delta_2 \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

(индекс «2» здесь, по аналогии с (3), означает, что дифференцирование происходит только по двум координатам, а Δ_2 — двумерный лапласиан), и оно совпадет с выведенным в работе [8].

Получим теперь уравнение для плотности тока. Продифференцируем (2) по времени и исполь-

зуем (5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{c}{4\pi^2} \int \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{\partial t} \right] d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times \text{rot}'_2 (u(\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \right] d\mathbf{r}' \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \int \left[\tilde{\mathbf{R}} \times \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (6)\end{aligned}$$

(введены обозначения $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R^3$, $\tilde{\mathbf{E}} = u\mathbf{j} = c^2\mathbf{E}/4\pi$, а rot'_2 означает дифференцирование по $\mathbf{r}'$). Интегрируя (6) по частям, учитывая, что ротор от всего выражения сводится к интегралу по удаленному контуру, переводя дифференцирование на $\tilde{\mathbf{R}}$ и меняя дифференцирование с $\mathbf{r}'$ на $\mathbf{r}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r})}{\partial t} &= \frac{1}{\pi} \int \left[\tilde{\mathbf{R}} \times \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int \text{rot}'_2 \left[\tilde{\mathbf{R}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \text{rot}_2 \left[\tilde{\mathbf{R}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{rot}_2 \left(\int \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times u(\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \right) \quad (7)\end{aligned}$$

(стрелка означает, что rot'_2 действует только на вектор $\tilde{\mathbf{R}}$).

Рассмотрим динамику магнитного момента $\mathbf{M}$, образуемого вихревыми токами $\mathbf{j}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d\mathbf{r}.$$

Производная по времени от $\mathbf{M}$, согласно (7), будет определяться выражением

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{1}{2\pi c} \int [\mathbf{r} \times [\tilde{\mathbf{R}} \times \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')]] d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получаем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2\pi c} \int \text{rot}'_2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{R}}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}.$$

Проводя интегрирование по частям по $d\mathbf{r}'$ и считая, что на бесконечности электрическое поле достаточно быстро стремится к нулю (критерий для этого будет получен в следующем разделе), можно получить

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{1}{2\pi c} \varepsilon_{ikl} \int \tilde{E}_l(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R} d\mathbf{r}' d\mathbf{r},$$

где ε_{ikl} — единичный антисимметричный псевдотензор. Переноса дифференцирование с $\mathbf{r}'$ на $\mathbf{r}$ и учитывая, что

$$\int \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R} d\mathbf{r} = 0,$$

получаем закон сохранения магнитного момента для системы замкнутых токов на проводящей плоскости:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0. \quad (8)$$

3. РАСТЕКАНИЕ ТОКА В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ

Любая ограниченная замкнутая конфигурация плоских токов (токовый вихрь) со временем по мере растекания будет становиться осесимметричной, с центром, совпадающим с первоначальной локализацией этого вихря. В этом случае для больших времен имеем $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(r) \mathbf{e}_\varphi$, и уравнение (7), определяющее динамику растекания тока, можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial j}{\partial t} &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u(r') j(r') \times \\ &\times \frac{r' - r \cos \varphi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{3/2}} r' d\varphi dr' = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \int_0^\pi u(rw) j(rw) \times \\ &\times \frac{w - \cos \varphi}{(w^2 + 1 - 2w \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi w dw,\end{aligned}$$

где $w = r'/r$. Интеграл по углу φ дает

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty u(rw) j(rw) D(w) dw, \quad (9)$$

где

$$D(w) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{w+1} K\left(\frac{2\sqrt{w}}{w+1}\right) + \frac{1}{w-1} E\left(\frac{2\sqrt{w}}{w+1}\right) \right).$$

Здесь $K(w)$ и $E(w)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Функцию $D(w)$ после некоторых преобразований можно переписать в виде

$$D(w) = \frac{4}{\pi} \begin{cases} K(w) + \frac{E(w)}{w^2 - 1}, & w < 1, \\ \frac{w}{w^2 - 1} E\left(\frac{1}{w}\right), & w > 1. \end{cases}$$

Важным свойством функции $D(w)$ является то, что

$$\int_0^\infty \frac{D(w)}{w^2} dw = 0.$$

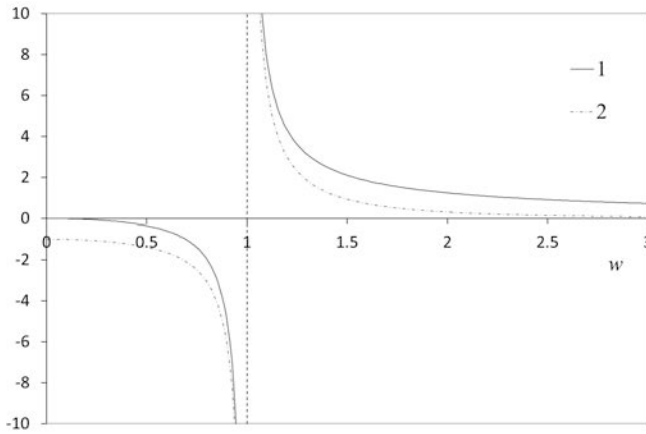


Рис. 2. Графики функций $D(w)$ (1) и $D(w)/w^2$ (2)

Пользуясь этим свойством, можно показать, что уравнение (9), в соответствии с (8), удовлетворяет закону сохранения полного магнитного момента

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \int_0^\infty j(r) r^2 dr = \frac{1}{c} \int_0^\infty \frac{\partial j}{\partial t} r^2 dr = 0.$$

Графики функций $D(w)$ и $D(w)/w^2$ представлены на рис. 2. Величина $D(w) \simeq -w^2$ при малых w и $D(w) \simeq 2/w$ при больших w .

Зная $j(r)$, из закона Био–Савара (1) в нашем осесимметричном случае можно найти магнитное поле на плоскости, $B_z(r) \equiv B(r)$:

$$B(r) = \frac{\pi}{c} \int_0^\infty j(rw) D(w) dw.$$

Рассмотрим, как ведет себя $j(r)$ на больших расстояниях $r \gg 1$. Большие r в интеграле (9) соответствуют малым w . Но $D(w) \propto w^2$ при малых w , а значит, интеграл в (9) пропорционален $1/r^3$ и, следовательно, $\partial j / \partial t \propto 1/r^4$ и, можно думать, что на больших расстояниях $j \propto 1/r^4$.

Для того чтобы выполнялся закон сохранения магнитного момента, электрическое поле на больших расстояниях должно убывать быстрее, чем $1/r^2$ (изменения магнитного момента приводят к такой зависимости от r для вектор-потенциала, а следовательно, и электрического поля). Поскольку, согласно закону Ома, электрическое поле $E \propto uj$, для сохранения магнитного момента, казалось бы, необходимо, чтобы на больших расстояниях u росло медленнее, чем r^2 . Однако фактически, если на больших расстояниях $u \propto r^\alpha$, то при $\alpha > 1$ ток и магнитный момент могут за конечное время перебрасываться на бесконечность (это следует из оценки

$dr/dt \propto u \propto r^\alpha$; одновременно при $\alpha > 1$ оценка интеграла (9) для больших r приводит к расходимости). Таким образом, следует считать, что при $\alpha > 1$ магнитный момент не сохраняется. Тогда плотность тока будет экспоненциально затухать в зависимости от времени, а на больших r , поскольку электрическое поле ведет себя, как $1/r^2$, плотность тока будет $j \propto 1/r^{2+\alpha}$.

3.1. Автомоделное решение

Рассмотрим случай постоянной проводимости слоя, $u = \text{const}$. Поскольку в этом случае для больших времен характерные расстояния меняются как $r \propto ut$, а магнитный момент M сохраняется, $M = \text{const}$, для больших t следует искать решение в виде

$$j = \frac{c}{\pi} \frac{M}{(ut)^3} \tilde{j}(\xi),$$

где $\xi = r/ut$ — безразмерная автомоделная переменная, а $\tilde{j}(\xi)$ — безразмерная автомоделная плотность тока. Из (9) получаем уравнение для $\tilde{j}(\xi)$:

$$\xi \tilde{j}'(\xi) + 3\tilde{j}(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\infty \tilde{j}(\xi w) D(w) dw = 0.$$

Мы нашли точное аналитическое решение этого уравнения. Решением этого уравнения для плотности тока $\tilde{j}(\xi)$, нормированной на автомоделный магнитный момент,

$$\int_0^\infty \tilde{j}(\xi) \xi^2 d\xi = 1,$$

является функция

$$\tilde{j}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} \frac{\beta}{2} \frac{1}{(1 + \beta \xi^2)^{3/2}} = \frac{3\beta^2}{2} \frac{\xi}{2(1 + \beta \xi^2)^{5/2}}$$

при $\beta = 1/4$, т. е.

$$\tilde{j}(\xi) = \frac{3}{32} \frac{\xi}{(1 + \xi^2/4)^{5/2}}.$$

Эта величина представлена на рис. 3. Плотность тока линейно растет при малых ξ , достигает максимума при $\xi = 1$ и убывает как $1/\xi^4$ на больших ξ .

Магнитное поле на поверхности в автомоделных переменных определяется формулой

$$B(r) = \frac{M}{(ut)^3} b(\xi).$$

Безразмерная величина магнитного поля

$$b(\xi) = \int_0^\infty \tilde{j}(\xi w) D(w) dw,$$

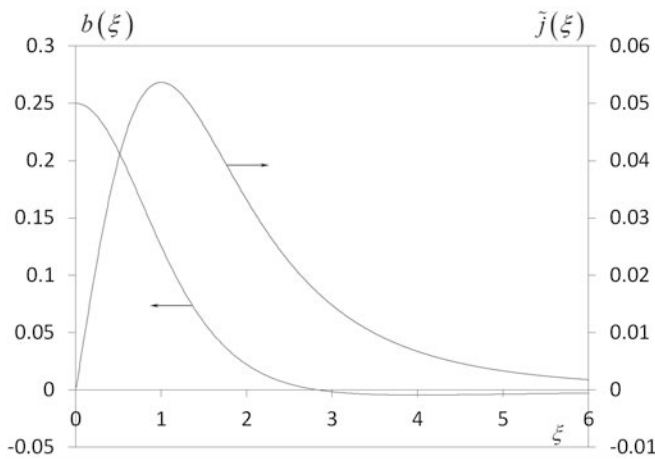


Рис. 3. Автомоделная плотность тока $\tilde{j}(\xi)$ и магнитное поле $b(\xi)$ токового вихря

соответствующая току $\tilde{j}(\xi)$, равна

$$b(\xi) = \beta \frac{1 - \beta \xi^2/2}{(1 + \beta \xi^2)^{5/2}} = \frac{1}{4} \frac{1 - \xi^2/8}{(1 + \xi^2/4)^{5/2}}$$

и также показана на рис. 3. Магнитное поле максимально при $\xi = 0$, меняет направление при $\xi = 2\sqrt{2}$, а на больших расстояниях ведет себя как $1/\xi^3$.

4. СИСТЕМА ПЛОСКИХ ФОЛЬГ. ОДНОМЕРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ

4.1. Постановка задачи

В одномерном случае, когда все величины зависят только от x , а $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(x)\mathbf{e}_z$, уравнение (7) сводится к полученному нами ранее [9] уравнению

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{u(x') j(x')}{x - x'}. \quad (10)$$

Это уравнение может использоваться для расчетов распределения токов в плоских токовых слоях, в том числе и для систем плоских фольг типа «змеек». Интересно отметить, что из дивергентного характера уравнения (10) следует, что для локализованного распределения тока и неограниченного по пространству распределения ненулевой проводимости (т. е. не обращающейся в бесконечность скорости u) полный ток по системе $\int_{-\infty}^{\infty} j dx$ сохраняется. Таким образом, это уравнение особенно удобно использовать в задачах с поддерживаемым в системе током.

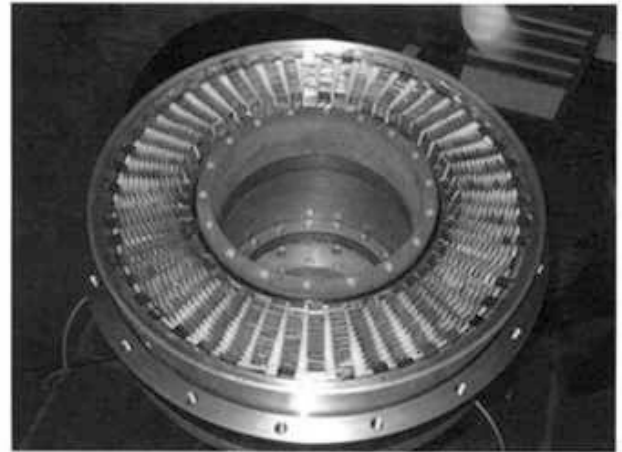


Рис. 4. Электровзрывной размыкатель тока типа «змеек» для обострения тока в ВМГ

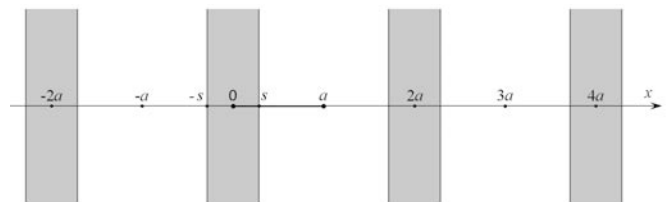


Рис. 5. Система периодических плоских фольг

Мы будем решать задачу для распределения токов в плоских токовых слоях, в том числе и для систем плоских фольг типа «змеек» (рис. 4). Предположим, что имеется бесконечная периодическая система плоских фольг шириной $2s$, находящихся на расстояниях $2(a - s)$ друг от друга (рис. 5). Период системы по координате x равен $2a$. В частном случае $a \rightarrow \infty$ система превращается в уединенную фольгу, а малые расстояния между фольгами $2(a - s)$ будут соответствовать почти сплошной фольге.

Будем считать, что полный ток по системе постоянен в каждом из полупериодов, проводимость в области между фольгами мала и, соответственно, скорость u_v очень велика, $u_v \gg u$. Мы хотим промоделировать ситуацию, когда в начальный момент времени ток быстро распределяется по ширине фольги так, как если бы она вначале была практически сверхпроводящей, а затем уже более медленно (со скоростью u) стремится распределиться равномерно по ширине фольги. Для такого моделирования задачу можно поставить так: вначале ток j вообще равномерно распределен по системе. В этом случае в начальный момент времени нормальная компонента магнитного поля B_y везде, в том числе и на по-

верхности фольги, равна нулю. Затем ток быстро, со скоростью $u_v \gg u$, перераспределится, но на поверхности фольги нормальная компонента B_y останется равной нулю, поскольку по фольге ток распределяется более медленно, со скоростью u . Таким образом, в данной задаче мы сможем узнать, как распределяется ток по почти сверхпроводящей фольге (на малых временах) и как будет перераспределяться и выравниваться ток по фольге на больших временах. Такой прием для описания динамики распределения тока по фольге является в некоторой степени искусственным, однако он позволяет, оставаясь в рамках одномерной задачи, описать динамику распределения токов по фольге, начиная с малых времен и до полного выравнивания тока.

В частности, мы сможем получить ответ на вопрос о том, как будет меняться от времени эффективное сопротивление фольги и насколько точно предположение о том, что ток по фольге распределяется равномерно. Эффективное сопротивление фольги в рассматриваемой системе определяется электрическим полем в центре фольги, поскольку именно это электрическое поле соответствует уходу магнитного потока из системы и, соответственно, передаче магнитного потока в нагрузку.

4.2. Расчетная методика

С учетом периодичности рассматриваемой задачи перепишем выражение (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial j(x, t)}{\partial t} = & \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^a \frac{d\xi}{\xi} (u(x + \xi) j(x + \xi, t) - \\ & - u(x - \xi) j(x - \xi, t)) \times \\ & \times \left(1 - \frac{\xi}{2a} \left(\psi \left(1 + \frac{\xi}{2a} \right) - \psi \left(1 - \frac{\xi}{2a} \right) \right) \right), \quad (11) \end{aligned}$$

где $\xi = x' - x$, ψ — пси-функция Эйлера. Таким образом, от интегрирования по бесконечной прямой в (10) мы перешли к интегрированию по конечному отрезку $(0, a)$ в (11).

Перейдем к безразмерным переменным, взяв за единицу измерения длины полуширину фольги s , за единицу измерения скорости — скорость u ; в этом случае время будет измеряться в единицах s/u .

В соответствии с вышесказанным для моделирования с первоначальным распределением магнитного поля, которое в начальный момент не должно иметь нормальной компоненты на фольге, в числен-

ных расчетах интегро-дифференциального уравнения растекания тока (11) в начальный момент времени $t = 0$ задавалось равномерное распределение тока по координате x . Для удобства нормировки мы задавали плотность тока таким образом, чтобы полный ток по отрезку $(0, a)$ был равен единице:

$$\int_0^a j(x, 0) dx = 1,$$

т. е. чтобы плотность тока в начальный момент времени была равна

$$j(x, 0) = 1/a.$$

В нашей задаче между фольгами располагался вакуум или диэлектрик, поэтому величина u_v в вакууме задавалась значительно большей, чем внутри фольги, $u_v(s < x < a) = 10^4$.

4.3. Результаты расчетов

Плотность тока $j(x, t)$ в фольге, полученная в расчете с $a = 2$ на различные моменты времени, представлена на рис. 6.

На рис. 6 видно, что ток $j(x, t)$ в фольге при малых временах распределяется так же, как и в сверхпроводящей фольге, и имеет особенность вида $1/\sqrt{1 - x/s}$ (стандартную для задач с решением уравнением Лапласа в плоском случае вблизи границы отрезка [10]) вблизи границы фольги $x = s$, т. е. концентрируется вблизи границы, а затем стремится к равномерному распределению по ширине фольги. К моменту времени $t = 1$ распределение тока уже близко к равномерному.

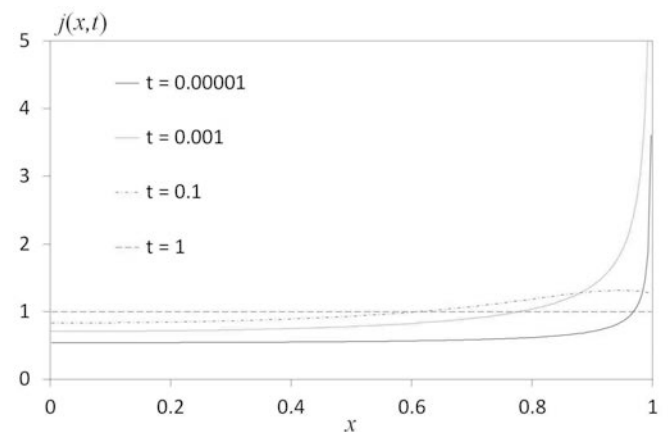


Рис. 6. Плотность тока в фольге в расчете с $a = 2$ на различные моменты времени

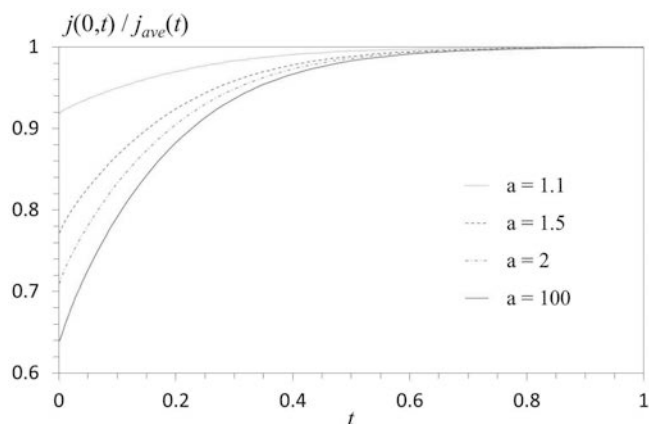


Рис. 7. Зависимость от времени отношения плотности тока при $x = 0$ к среднему значению тока в фольге $j_{ave}(t)$ для различных расстояний между фольгами

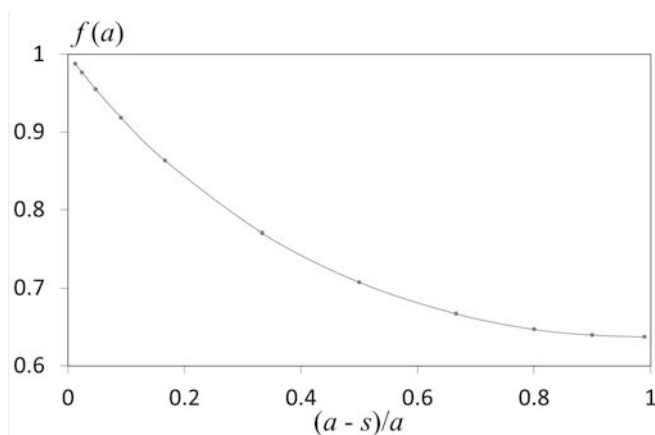


Рис. 8. Величина $f(a)$ для различных значений $(a - s)/a$

На рис. 7 показана зависимость от времени отношения плотности тока при $x = 0$ к среднему значению тока в фольге $j_{ave}(t)$. В момент начала счета, согласно постановке задачи, эта величина равна единице, однако очень быстро достигает минимума. На рис. 7 данные начальные участки не показаны, поскольку при увеличении u_v эти временные интервалы уменьшаются. В дальнейшем с течением времени величина $j(0, t)/j_{ave}(t)$ возрастает и стремится к единице по мере выравнивания тока.

На рис. 8 представлена величина $f(a)$, равная значению при $t = 0$ функции, полученной экстраполяцией до $t = 0$ зависимости $j(0, t)/j_{ave}(t)$, у которой отброшены значения при малых t , т. е. по существу отношение тока в центре фольги к среднему току по фольге для сверхпроводящих фольг. По оси абсцисс отложена величина $(a - s)/a$, равная доле вакуумной области в полупериоде a .

Для самого большого полупериода a , для которого проводились расчеты ($a = 100$), значение $f(a)$ равно 0.637, что очень близко к зна-

чению $2/\pi \approx 0.6366$ для изолированной фольги. При уменьшении расстояния между фольгами величина $f(a)$ медленно увеличивается. Например, $f(2) = 0.708$. По мере сближения фольг функция $f(a)$ линейно стремится к единице.

4.4. Некоторые оценки для системы типа «змеек»

Для системы типа «змеек», применяемой в работе [3], внутренний радиус серпантина $R_1 = 15.5$ см, период $2a = 1.87$ см, ширина фольги $2s = 1.6$ см, зазоры между фольгами $2(a - s) = 0.27$ см. Тогда $(a - s)/a = 0.144$ и соответствующее уменьшение эффективного сопротивления (см. рис. 8) $f = 0.877$. Для внешнего радиуса серпантина $R_2 = 22.8$ см имеем зазоры $2(a - s) = 1.16$ см и $(a - s)/a = 0.42$, $f = 0.734$. Система фольг удалена от генератора и нагрузки на расстояние d , большее 10 см, так что условие для рассмотрения системы фольг как отдельного узла, $d \gg s$, выполняется. Оценим время выравнивания тока и необходимость учета неравномерности его распределения для работы фольгового размыкателя.

Выравнивание тока, согласно рис. 7, происходит за безразмерное время 0.13–0.14 (для которого разница между величиной $j(0, t)/j_{ave}(t)$ и единицей уменьшается в 2 раза), и оно не сильно зависит от величины $(a - s)/a$.

Для медной фольги [3] в начальном состоянии величина $u = c^2/4\pi\sigma\Delta = 8.92 \cdot 10^4$ см/с. Если $2s = 1.6$ см, то безразмерному времени 1 соответствует размерное время $s/u = 9 \cdot 10^{-6}$ с, значит, характерное время выравнивания тока порядка 10^{-6} с. Само по себе время выравнивания оказывается сравнимым и даже большим времени переброса тока в этом размыкателе и, казалось бы, могло потребовать введения поправок $f \approx 0.88$, $f \approx 0.73$ к эффективному сопротивлению. Однако фактически сопротивление фольг в размыкателе за счет нагрева при протекании тока растет значительно (скорость u может возрастать на два порядка). Поэтому токи по ширине фольги практически выравниваются и, соответственно, нет необходимости вводить поправки на неоднородность распределения тока по ширине фольги.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эволюцию двумерного распределения токов в неоднородных тонких проводящих слоях или фольгах можно описывать с помощью интегро-дифференциального уравнения, что позволяет свести

трехмерную задачу для магнитного поля к двумерной, а для распределения токов по ширине неоднородных проводящих фольг двумерная задача для магнитного поля сводится к одномерной. Показано, что в двумерном случае для замкнутой системы токов сохраняется магнитный момент этой системы.

Замкнутая система токов при больших временах становится азимутально симметричной. Для этого случая получены интегро-дифференциальное уравнение и его автомодельное решение, для которого сохраняется магнитный момент, а пространственные масштабы растут линейно со временем.

Рассмотрена задача о распределении токов для систем плоских фольг типа «змеек». Для описания эволюции распределения токов при фиксированном полном токе через систему следует считать, что в начальный момент плотность тока является постоянной по всей системе, включая промежутки между фольгами, а затем происходит быстрая релаксация этого распределения со скоростью $u_v \gg u$. В результате в фольге быстро устанавливается распределение тока, соответствующее идеальной проводимости фольги. Затем за времена s/u происходит релаксация распределения тока в фольге к равномерному.

Проведены расчеты распределения тока по фольге для разных значений a/s . Показано, что на стадии быстрого включения тока эффективное сопротивление фольги не очень значительно отличается от сопротивления, вычисленного в предположении равномерного распределения тока. Наибольшее различие имеет место для далеко разнесенных фольг. На стадии релаксации распределения тока к равномерному величина $j(0, t)/j_{ave}(t)$ стремится к единице, причем характерное время этого выравнивания составляет $(0.13-0.14)s/u$ и слабо зависит от значений зазоров между фольгами.

Оценки показывают, что если фольги используются в качестве размыкателей, то токи по фольгам

в процессе переброса тока в нагрузку должны успевать распределяться равномерно по их ширине. Поэтому поправки на неоднородность распределения тока в размыкателях должны быть невелики.

Однако для плоских токовых слоев рассмотренные в работе распределения тока и их эволюция могут играть важную роль, в том числе в развитии тиринг-неустойчивости этих слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бурцев, Н. В. Калинин, А. В. Лучинский, *Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках*, Энергоиздат, Москва (1990).
2. А. М. Буыко, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **56**, 114 (2015).
3. А. А. Базанов, Е. И. Бочков, С. Г. Гаранин и др., ДАН **489**, 355 (2018).
4. S. F. Garanin and S. D. Kuznetsov, J. Appl. Phys. **123**, 133301 (2018).
5. Е. Б. Татарина, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **92**, 809 (1987).
6. М. И. Дьяконов, А. С. Фурман, ЖЭТФ **92**, 1012 (1987).
7. В. В. Смирнов, К. В. Чукбар, Физика плазмы **25**, 610 (1999).
8. К. В. Чукбар, *Лекции по явлениям переноса в плазме*, ИД «Интеллект», Долгопрудный (2008).
9. S. F. Garanin, E. M. Kravets, and V. Yu. Dolinskiy, IEEE Trans. Plasma Sci. **48**, 4279 (2020).
10. С. Ф. Гаранин, С. Д. Кузнецов, УФН **190**, 1109 (2020).

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСОКИХ ОПТИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ СРЕДНЕГО ИК-ДИАПАЗОНА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ МИШЕНЕЙ

*А. В. Митрофанов^{a,b,c,d}, М. В. Рожко^{a,b}, М. М. Назаров^d, Е. Е. Серебрянников^{a,b},
А. Б. Федотов^{a,b}, Д. А. Сидоров-Бирюков^{a,b,d*}*

^a Российский квантовый центр
143025, Сколково, Московская обл., Россия

^b Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет
119992, Москва, Россия

^c Институт проблем лазерных и информационных технологий Российской академии наук —
филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научно-исследовательский центр
«Кристаллография и фотоника» Российской академии наук»
140700, Шатура, Московская обл., Россия

^d Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 ноября 2022 г.,
после переработки 13 декабря 2022 г.
Принята к публикации 14 декабря 2022 г.

Экспериментально исследованы спектры высоких оптических гармоник при воздействии фемтосекундных импульсов субрелятивистской интенсивности на поверхность твердотельных мишеней из полистирола, CaF₂, BK7 и Al. Зарегистрированы гармоники до 51 порядка от излучения с центральной длиной волны 3.85 мкм. Показано, что наиболее высокие порядки гармоник наблюдаются при взаимодействии лазерного излучения с поверхностью мишеней из полистирола. Экспериментально зарегистрировано, что зависимость энергии гармоник от их номера может быть аппроксимирована убывающей степенной функцией с показателем от 4 до 8/3.

DOI: 10.31857/S0044451023040041
EDN:

Генерация оптических гармоник в плазме пробоя у поверхности твердотельных мишеней исследуется более 30 лет [1–4]. Изучению оптических нелинейностей таких плазменных сред посвящено большое количество как экспериментальных, так и теоретических работ [5–13]. Мощные лазерные импульсы с интенсивностью, позволяющей ускорять электроны образующейся плазмы до релятивистских энергий [14], дают возможность наблюдать широкий спектр нелинейно-оптических процессов, приводящих к эффективному преобразованию лазерно-

го излучения в коротковолновую область [15], реализации новых режимов управления параметрами сверхкоротких лазерных импульсов [16, 17], генерации импульсов электромагнитного поля в терагерцевом (ТГц) и СВЧ-диапазоне [18–21], а также синтезировать аттосекундные импульсы [22, 23].

До недавнего времени почти все эксперименты по генерации гармоник высокого порядка проводились с использованием титан-сапфирового лазера. В последние годы активно развивается применение источников [24, 25] интенсивных фемтосекундных импульсов с центральной длиной волны в диапазоне до нескольких микрометров. Использование длинноволнового излучения среднего инфракрасного (ИК) диапазона позволяет увеличить ponderomotive энергию электронов пропорционально квад-

* E-mail: sbd@rqc.ru

рату длины волны [26–28], и уже при интенсивностях порядка 10^{17} Вт/см² приведенный векторный потенциал $a_0 = eE_0/mc\omega_0$ (где e , m — заряд и масса электрона, E_0 и ω_0 — амплитуда и центральная частота лазерного поля), определяющий энергию ускоренных лазерным полем электронов, становится порядка 1, что приводит к проявлению релятивистских эффектов в спектрах генерируемого излучения. Нами были впервые проведены эксперименты по регистрации гармоник в релятивистском режиме при взаимодействии фемтосекундного лазерного излучения среднего ИК-диапазона с поверхностью твердотельной мишени [18, 29]. Основные свойства зарегистрированных спектров гармоник высокого порядка — поляризационные свойства (были зарегистрированы гармоники от s -поляризованного лазерного излучения) и свойства углового распределения (зависимость их интенсивности от телесного угла) — согласуются с известной картиной генерации гармоник высокого порядка в релятивистском режиме взаимодействия излучения с твердотельной мишенью [8, 10, 14, 22, 23, 30, 31].

При дальнейшем изучении спектров в коротковолновой области оказалось, что наряду с зарегистрированными ранее свойствами, присущими механизму осциллирующего плазменного зеркала, в спектре генерируемых гармоник наблюдается отклонение от предсказанной теоретической зависимости интенсивности от номера гармоник [14]. Широкий спектр нелинейно-оптических явлений при таких энергиях лазерных импульсов обусловлен эффективным формированием плазменных токов в кильватерной волне лазерного импульса [19].

В данной работе продолжено экспериментальное исследование спектров гармоник высокого порядка в плазме пробоя у поверхности твердотельных мишеней, возбуждаемой фемтосекундными лазерными импульсами среднего ИК-диапазона субтераваттного уровня мощности с приведенным векторным потенциалом $a_0 \approx 1$. Впервые сообщается об экспериментальном наблюдении гармоник до 51 порядка от лазерного излучения с центральной длиной волны 3.85 мкм. В эксперименте использовались мишени в форме пластинок из CaF₂, BK7, полистирола и алюминия толщиной 1 мм. Были выбраны диэлектрики с разными значениями ширины запрещенной зоны и металл. Проводится сравнение с экспериментами, в которых лазерное излучение накачки имеет центральную длину волны 1.03 мкм и параметр a_0 меньше 1.

В качестве источника мощных лазерных импульсов среднего ИК-диапазона использовалась лазер-

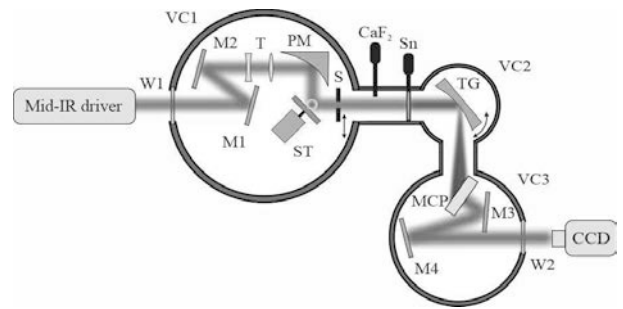


Рис. 1. Схема экспериментов по генерации и детектированию ВГ. VC1–VC3 — вакуумные камеры, M1–M4 — зеркала, T — телескоп, увеличивающий размер пучка в 2 раза, PM — параболическое зеркало с фокусным расстоянием 50 мм, ST — твердотельная мишень на трансляторе, S — регулируемая щель, CaF₂-окно толщиной 1 мм на шибере, Sn-фильтр толщиной 300 нм на шибере, TG — тороидальная дифракционная решетка, MCP — детектор на основе микроканальных пластин в шевронной сборке, W1, W2 — входное и выходное окна

ная система на основе оптического параметрического усиления чирпированных импульсов (ОПУЧИ), на выходе которой имелись импульсы с центральной длиной волны $\lambda_0 = 3.85$ мкм, длительностью 90 фс и энергией до 15 мДж [32, 33]. Частота следования импульсов составляла 20 Гц. Излучение лазера заводилось в вакуумную камеру VC1 (рис. 1) и фокусировалось при помощи параболического зеркала с фокусным расстоянием 50 мм на мишень, установленную на вращающемся диске. Скорость вращения подбиралась таким образом, чтобы каждый новый выстрел приходился на свежую поверхность. Через каждые 100 лазерных импульсов мишень сдвигалась по высоте. Диаметр лазерного пучка, направляемого на параболическое зеркало, увеличивался с помощью телескопа для уменьшения размера пятна в фокусе. При этом интенсивность излучения на мишени оценивается нами на уровне 10^{17} Вт/см², что соответствует приведенному векторному потенциалу $a_0 \approx 1$. Контраст лазерных импульсов составляет не менее 10^6 [18], и это определяет интенсивность возможных предимпульсов менее 10^{11} Вт/см², что оказывается более чем на порядок ниже порога пробоя диэлектрика в данном диапазоне длин волн [34, 35] и не приводит к образованию электронной плазмы перед поверхностью мишени к моменту прихода основного импульса. Угол падения p -поляризованного излучения на мишень составлял 45°. Для защиты параболического зеркала от абляционного загрязнения сразу за зеркалом устанавливалась пластинка из CaF₂ толщиной 1 мм, которая требовала очистки после нескольких дней проведения экспериментов.

Регистрация спектра высоких гармоник (ВГ) проводилась в направлении зеркального отражения специально сконструированным спектрометром на основе тороидальной дифракционной решетки с плотностью штрихов 1200 штрих./мм. Решетка имела золотое покрытие и была оптимизирована для регистрации спектра в диапазоне от 100 до 40 нм. Спектрометр размещался в отдельном вакуумном объеме VC2–VC3. Регистрация спектров проводилась при помощи детектора на основе шевронной сборки двух микроканальных пластин (МСП) с рабочим диаметром 40 мм и фосфорным экраном. Плоскость МСП-детектора устанавливалась под определенным углом к направлению спектра, оптимизированным для получения наименьших aberrаций в области 100–40 нм методом трассировки лучей. МСП-детектор был установлен на трансляционной подаче, позволявшей изменять расстояние от решетки до детектора вдоль среднего направления на спектр. Позиция детектора определялась экспериментально для получения наиболее четкой спектральной картины.

Имелась также возможность изменять угол установки дифракционной решетки для измерения спектра ВГ в широком диапазоне. Изображение с фосфорного экрана МСП-детектора переносилось на ПЗС-камеру (CCD), установленную вне вакуумного объема, при помощи объектива. Все спектры записывались в режиме одного выстрела лазера, после чего могло быть выполнено усреднение по нескольким кадрам. Вакуумные объемы VC1 и VC2–VC3 откачивались отдельными турбонасосами, что позволяло поддерживать давление около $2 \cdot 10^{-6}$ мбар. Такое давление необходимо, чтобы исключить образование плазмы в остаточном газе при жесткой фокусировке на поверхность мишени, а также для корректной работы МСП-детектора. Дополнительно перед дифракционной решеткой могли вводиться фильтры в виде пластинки CaF_2 толщиной 1 мм или фильтр из свободно подвешенной фольги Sn толщиной 300 нм, установленные на вакуумных шпиберах. Данные фильтры позволяли спектрально селектировать различные порядки гармоник и проводить калибровку спектрометра. Кроме того, CaF_2 -фильтр выдерживал перепад давлений в 1 атм и позволял менять мишень и юстировать оптические элементы без разгерметизации камеры спектрометра. После мишени на специальной трансляционной подаче была установлена щель S для пространственного селектирования сигнала ВГ и повышения контраста относительно некогерентного фона.

В каждом узком диапазоне длин волн выполнялась отдельная калибровка спектральных карт.

Диапазоны всегда выбирались таким образом, чтобы в них наблюдались резкие отсечки пропускания фильтров либо вторые порядки таких отсечек. Спектр гармоник после привязки номеров отдельных гармоник по отсечкам пропускания фильтров также мог служить в качестве калибровочной линейки в отдельных случаях. При построении спектров учитывалась чувствительность МСП-детектора по длине волны и отражающая способность решетки с золотым покрытием.

Проведенные ранее эксперименты [18, 36] по генерации гармоник от лазерных импульсов среднего ИК-диапазона показали, что излучение на центральной длине волны 3.85 мкм эффективно преобразуется в гармоники в видимой и ультрафиолетовой (УФ) областях спектра. В серии экспериментов, описываемой в настоящей работе, регистрировались оптические спектры в области от 170 до 75 нм, что позволило наблюдать гармоники до 51 порядка. На рис. 2 представлены изображения экрана МСП для различных участков спектра и различных материалов мишени. Несимметричность изображений по вертикальной оси объясняется искажениями, вносимыми тороидальной дифракционной решеткой. В области 120–170 нм спектр гармоник регистрировался примерно в каждом втором лазерном импульсе. Частота регистрации гармоник в более коротковолновой области уменьшалась в 4–5 раз, что обусловлено более высокой чувствительностью генерируемых ВГ как к флуктуациям интенсивности и моды лазерных импульсов, так и к стабильности положения мишени при ее вращении. Гармоника с максимальным номером 51 наблюдалась от мишени из полистирола (рис. 2а–в). Спектр гармоник на рис. 2а показан после прохождения фильтра в виде пластинки из CaF_2 толщиной 1 мм, что позволяет отсекалть более высокие дифракционные порядки в данном спектральном диапазоне. В диапазоне 125–70 нм наблюдаются как ВГ, так и спектральные линии углерода, что приводит к замазыванию спектра гармоник. Калибровка коротковолновой части спектра проводилась по частотам отсечек Sn-фильтра, а также по линиям свечения He и Ne в высоковольтном разряде при низком давлении (рис. 3з). Спектры гармоник в случае мишеней из CaF_2 и BK7 были похожими с наблюдением гармоник вплоть до 45 порядка.

Существенное отличие было выявлено при использовании мишени из алюминия (рис. 2г–е), где гармоники наблюдались только в диапазоне 170–110 нм (до 35 порядка), которые далее перекрывались непрерывным континуумом. Также

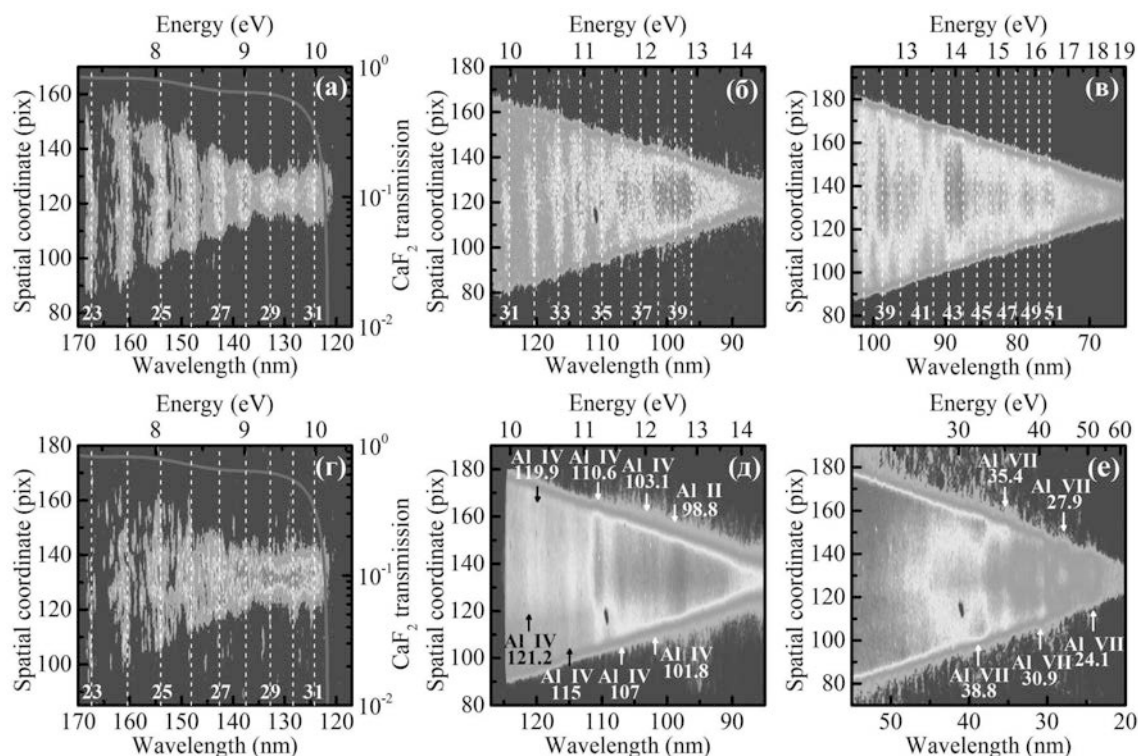


Рис. 2. Спектры ВГ для мишени из полистирола (*a–в*) и алюминия (*г–е*) в разных спектральных диапазонах при облучении лазерными импульсами с $\lambda_0 = 3.85$ мкм и энергией 15 мДж. Вертикальными штриховыми линиями показаны ожидаемые позиции порядков гармоник, номерами отмечены только нечетные порядки для удобства чтения. Розовая кривая — спектр пропускания фильтра из CaF_2 толщиной 1 мм. Для алюминиевой мишени подписаны некоторые спектральные линии (*д, е*) многократно ионизированного алюминия (например, Al IV — трижды ионизированный). Клиновидная структура спектров обусловлена аберрациями тороидальной дифракционной решетки. Спектры гармоник получены в режиме одного выстрела лазера, карты спектральных линий показаны с усреднением по нескольким выстрелам

отчетливо наблюдались линии Al в коротковолновой области спектра вплоть до 25 нм.

Для определения спектральных линий излучения материалов мишеней в спектре гармоник были проведены схожие эксперименты с использованием лазерных импульсов с центральной длиной волны $\lambda_0 = 1.03$ мкм. Энергия лазерных импульсов составляла 1 мДж при длительности 250 фс, что соответствует $a_0 \approx 0.2$. В видимом и ближнем УФ-диапазонах при этом наблюдался спектр четных и нечетных гармоник. Максимальный порядок гармоник, регистрируемый в вакуумном УФ-диапазоне, равнялся 10 (рис. 3*а*) для мишеней из CaF_2 , полистирола и ВК7. Помимо этого, в вакуумном УФ-диапазоне наблюдался полосовой спектр, схожий для излучения с $\lambda_0 = 1.03$ мкм и $\lambda_0 = 3.85$ мкм.

Совпадение позиций линий в спектрах (рис. 3*б, в*) для одинакового материала говорит о том, что регистрируются линии излучения материала мишени. На рис. 3 приведены спектры для мишени из полистирола.

В наблюдаемых спектрах свечения присутствует линия четырехкратно ионизированного атома углерода (линия 24.9 нм для C V), энергия ионизации которого составляет 65 эВ. Вырывания следующего электрона не происходит, так как это требует значительно большей энергии 392 эВ. Полагая, что лазерное излучение четырехкратно ионизирует все атомы углерода в молекулах полистирола, и с учетом ионизации атомов водорода можно оценить максимальную плотность плазмы в $2.5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. В спектрах свечения с поверхности алюминиевой мишени наблюдаются линии вплоть до Al VII на длине волны 24.1 нм (энергия шестикратной ионизации составляет 191 эВ). Плотность плазменного слоя в этом случае следует ожидать на уровне $3.6 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, что оказывается выше, чем в случае мишени из полистирола. Более высокая плотность плазмы должна приводить к наблюдению более высоких порядков гармоник в режиме генерации кильватерной волны [37]. Однако эффективность генерации ВГ также существенным образом зависит от величины градиента

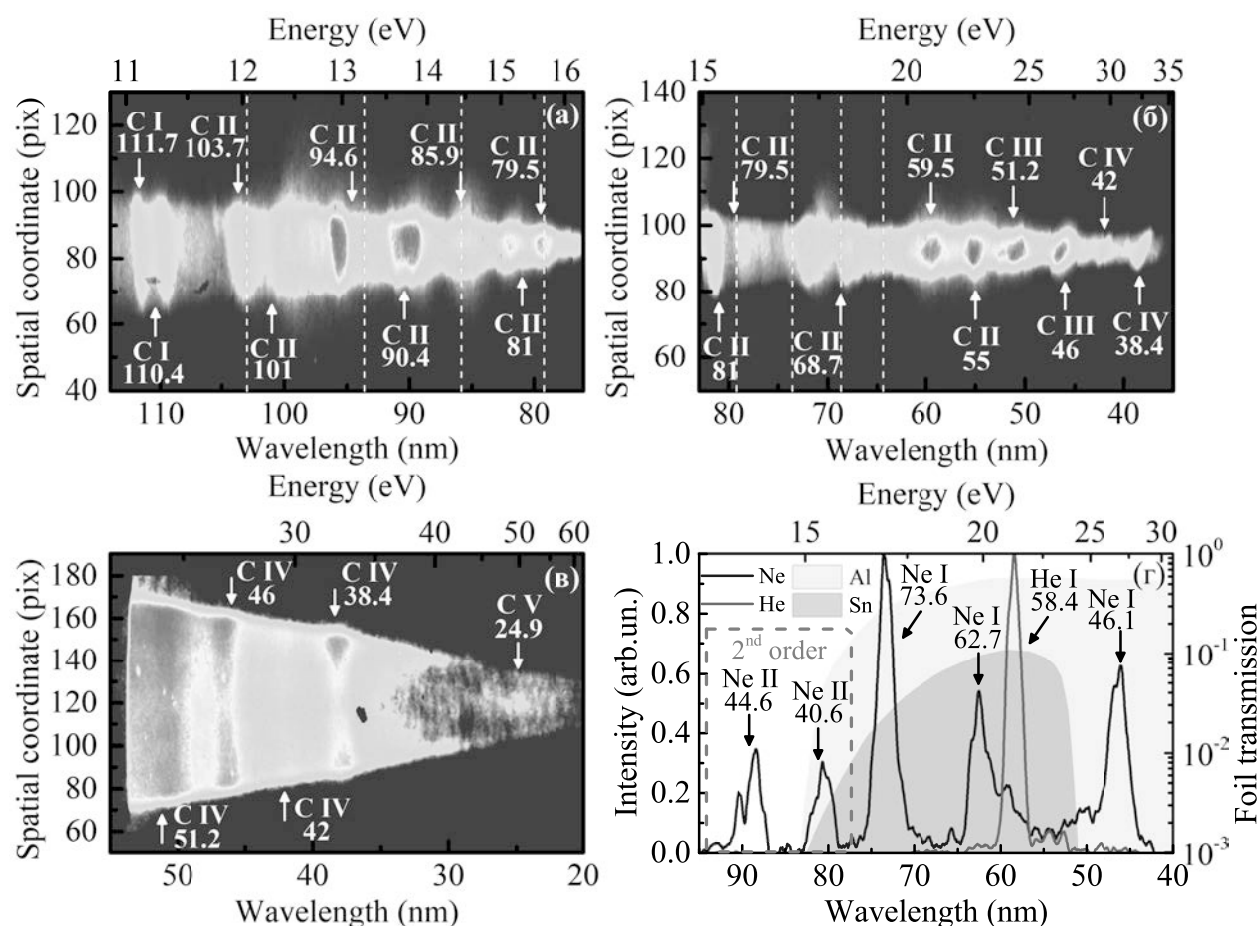


Рис. 3. Спектральные линии углерода в случае мишени из полистирола при облучении мишени импульсами с $\lambda_0 = 1.03$ мкм при $a_0 \approx 0.2$ (а, б) и импульсами с $\lambda_0 = 3.85$ мкм при $a_0 \approx 1$ (в) в разных частотных диапазонах. Штриховыми кривыми показаны ожидаемые позиции ВГ для $\lambda_0 = 1.03$ мкм излучения. Указаны некоторые спектральные линии С (например, С III — дважды ионизированный углерод и т.д.). г) Спектральные линии, зарегистрированные при свечении разрядов в He (зеленая кривая) и Ne (синяя кривая) низкого давления. Линии использовались для градуировки спектрометра по длинам волн. Заливкой показаны спектры пропускания Al-фольги толщиной 250 нм и Sn-фольги толщиной 300 нм, по границам которых также проводилась градуировка

создаваемого плазменного слоя [38]. В нашем эксперименте наибольшее число ВГ наблюдалось для мишени из полистирола — 51 порядок. Гармоники до 45 порядка наблюдались при использовании мишеней из CaF_2 и BK7 , для ионизации которых требуется достижение более высокой интенсивности, что выполняется ближе к центральной части лазерного импульса и приводит к формированию более крутого плазменного фронта. С другой стороны, в случае металлической мишени, наиболее легкой для ионизации, происходит расплывание фронта плазмы, что оказывается неоптимальным для генерации ВГ.

На рис. 4 показан спектр ВГ в диапазоне 70–170 нм, что соответствует 23–51 порядкам гармоник лазерного излучения на центральной длине волны $\lambda_0 = 3.85$ мкм, генерируемых на мишени из

полистирола. Для получения наилучшего контраста спектр был построен на основе горизонтального центрального сечения карт и нормирован на чувствительность МСР-детектора и отражательную способность золота. Пересекающиеся граничные диапазоны всех трех карт (рис. 2а–в) позволяют провести непрерывное сшивание спектров для каждой из карт. Таким образом, становится возможной оценка скорости уменьшения интенсивности излучения гармоник с ростом их порядка. Как можно видеть из рис. 4, интенсивность ВГ быстро убывает в низкочастотной области (24–34 порядки), затем при увеличении номера гармоник градиент убывания интенсивности уменьшается (40–51 порядки). Степенной характер убывания интенсивности ВГ является одним из основных индикаторов для

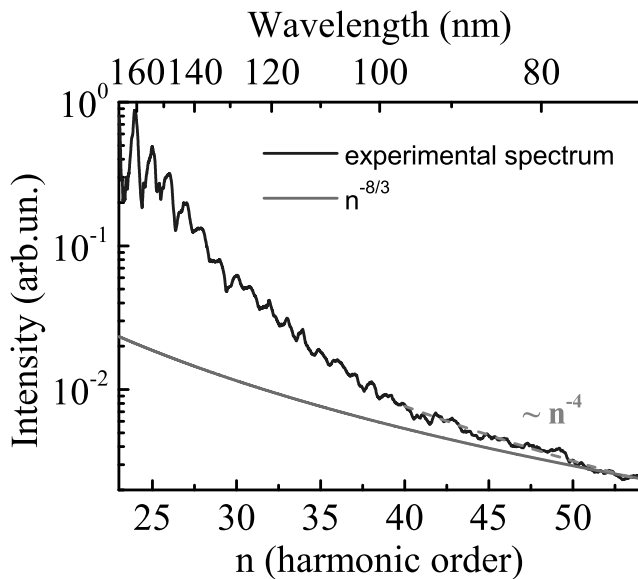


Рис. 4. Экспериментальный спектр ВГ, полученный при взаимодействии сверхкоротких лазерных импульсов субрелятивистской интенсивности на центральной длине волны $\lambda_0 = 3.85$ мкм с поверхностью мишени из полистирола. Красной штриховой кривой показана степенная аппроксимация для диапазона 40–51 порядков гармоник. Зеленой кривой представлена ожидаемая теоретическая зависимость интенсивности гармоник от их порядкового номера $n^{-8/3}$ [41]

режимов лазерно-плазменной генерации гармоник от поверхности твердотельной мишени [39]. Была проведена степенная аппроксимация $n^{-\alpha}$ высокочастотной области спектра гармоник, где n — порядок гармоник, α — показатель степени. Для гармоник 40–51 порядков получено значение $\alpha \approx 4$ (рис. 4, красная штриховая кривая), при этом на границе экспериментального спектра обнаружено стремление зависимости к теоретической оценке $n^{-8/3}$ для режима релятивистского осциллирующего зеркала [31].

В экспериментах [40] наблюдалось расхождение с этой оценкой. Недавние расчеты, выполненные в широком диапазоне лазерных интенсивностей и длин плазменного градиента [41, 42], подтверждают возможность расхождения, демонстрируя оценку $1.1 < \alpha < 5.8$. Таким образом, характер зависимости n^{-4} , полученный в наших экспериментах, согласуется с экспериментальными данными, полученными для лазерного излучения ближнего ИК-диапазона.

Электронные токи в плазме, формируемые при облучении твердотельных мишеней лазерными импульсами субрелятивистской и релятивистской интенсивности, могут не только приводить к генерации ВГ, но и являться источником излучения ТГц-диапазона [43, 44]. Возможность синхронно-

го излучения ВГ и ТГц-импульсов при лазерно-плазменном взаимодействии позволяет применять методику накачки – зондирования в исследованиях сверхбыстрых процессов на аттосекундном масштабе [45]. При этом основными механизмами генерации низкочастотных электромагнитных импульсов от передней поверхности мишени являются процессы когерентного переходного излучения релятивистских электронов при пересечении границы между плазмой и вакуумом [46, 47] и возбуждения продольных поверхностных токов [48]. Для генерации низкочастотного излучения использовалась уже имеющаяся экспериментальная схема (рис. 1). Генерируемое на мишени ТГц-излучение выводилось из вакуумного объема VC1 в атмосферу через окно из полиметилпентена (РМР, ТРХ) толщиной 6 мм, прозрачное в диапазоне < 6 ТГц, и далее заводилось на ячейку Голея. Сигнал с ячейки Голея после усиления подавался на цифровой осциллограф, что позволяло регистрировать непрерывную серию лазерных выстрелов. Сигнал ТГц-излучения собирался двухдвойковыми параболическими зеркалами из телесного угла 0.1 ср. Для предотвращения загрязнения ТРХ-окна, вблизи которого располагалась мишень, использовалась пленка толщиной 25 мкм из полиэтилена низкой плотности, прозрачная в терагерцевом диапазоне. Материал окна ТРХ обладает сильным поглощением в среднем ИК-диапазоне, что позволяет экранировать детектор от отраженной части лазерного излучения $\lambda_0 = 3.85$ мкм. Для подавления сигнала второй гармоники ($\lambda_{2\omega} \approx 1.9$ мкм) перед детектором дополнительно устанавливалась черная плотная полиэтиленовая пленка толщиной 100 мкм. Нам удалось наблюдать слабый сигнал ТГц-излучения от мишеней из полистирола, CaF_2 и алюминия при энергии лазерных импульсов накачки не менее $W_0 \approx 15$ мДж. Энергия наблюдаемых ТГц-импульсов составляла около 3–5 нДж. Наиболее стабильный сигнал ТГц-излучения наблюдался при использовании мишени из полистирола, с регистрацией ТГц-импульсов при каждом выстреле лазера. При облучении алюминиевой мишени s-поляризованными лазерными импульсами ТГц-сигнал становился порядка уровня шума и надежно не регистрировался. Условия наблюдения ТГц-сигнала относительно начального chirpa лазерного импульса, его энергии и положения мишени относительно фокуса совпадали с условиями наблюдения наивысших порядков гармоник.

Таким образом, выполненные экспериментальные исследования позволили зарегистрировать ТГц-излучение и гармоники вплоть до 51 порядка в

плазме, образуемой на поверхности твердотельных мишеней фемтосекундными лазерными импульсами среднего ИК-диапазона субрелятивистской интенсивности. Было показано, что наибольший порядок гармоник и ТГц-импульсы с большей энергией наблюдаются при использовании мишени из полистирола.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность научному руководителю Лаборатории фотоники и нелинейной спектроскопии А. М. Желтикову, под руководством которого выполнялись исследования.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (гранты №№ 22-22-00955 — генерация ТГц-излучения, 22-22-00964 — генерация высоких гармоник).

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Blombergen and Y. R. Shen, *Phys. Rev.* **141**, 298 (1966).
2. N. H. Burnett, H. A. Baldis, M. C. Richardson et al., *Appl. Phys. Lett.* **31**, 172 (1977).
3. R. L. Carman, D. W. Forslund, and J. M. Kindel, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 29 (1981).
4. B. Bezzerides, R. D. Jones, and D. W. Forslund, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 202 (1982).
5. С. А. Ахманов, С. М. Гладков, Н. И. Коротеев и др., Препринт №5, Физический факультет МГУ, Москва (1988).
6. A. B. Fedotov, S. M. Gladkov, N. I. Koroteev et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 363 (1991).
7. A. B. Fedotov, A. N. Naumov, V. P. Silin et al., *Phys. Lett. A* **271**, 407 (2000).
8. G. A. Mourou, T. Tajima, and S. V. Bulanov, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 309 (2006).
9. P. Gibbon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 50 (1996).
10. A. Tarasevitch, K. Lobov, C. Wünsche et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 103902 (2007).
11. V. V. Strelkov, A. A. Gonoskov, I. A. Gonoskov et al., *Phys. Rev. Lett.* **107**, 043902 (2011).
12. A. A. Gonoskov, A. V. Korzhimanov, A. V. Kim et al., *Phys. Rev. E* **84**, 046403 (2011).
13. А. В. Коржиманов, А. А. Гоносков, Е. А. Хазанов и др., *УФН* **181**, 9 (2011).
14. U. Teubner and P. Gibbon, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 445 (2009).
15. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
16. P. B. Corkum and F. Krausz, *Nature Phys.* **3**, 381 (2007).
17. K. Y. Kim, A. J. Taylor, J. H. Glowina et al., *Nature Photon.* **2**, 605 (2008).
18. A. V. Mitrofanov, D. A. Sidorov-Biryukov, M. V. Rozhko et al., *Opt. Lett.* **43**, 5571 (2018).
19. P. Colosimo, G. Doumy, C. I. Blaga et al., *Nature Phys.* **4**, 386 (2008).
20. A. D. Koulouklidis, C. Gollner, V. Shumakova et al., *Nature Commun.* **11**, 292 (2020).
21. A. Englesbe, J. Lin, J. Nees et al., *Appl. Opt.* **60**, G113 (2021).
22. Ю. М. Михайлова, В. Т. Платоненко, С. Г. Рыкованов, Письма в ЖЭТФ **81**, 703 (2005).
23. В. Т. Платоненко, А. Ф. Стержантов, Письма в ЖЭТФ **91**, 77 (2010).
24. C. Vozzi, F. Calegari, E. Benedetti et al., *Opt. Lett.* **32**, 2957 (2007).
25. G. Andriukaitis, T. Balčiūnas, S. Ališauskas et al., *Opt. Lett.* **36**, 2755 (2011).
26. E. E. Serebryannikov and A. M. Zheltikov, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 043901 (2014).
27. T. Popmintchev, M.-C. Chen, D. Popmintchev et al., *Science* **336**, 1287 (2012).
28. А. В. Митрофанов, Д. А. Сидоров-Бирюков, А. А. Воронин и др., *УФН* **185**, 97 (2015).
29. А. В. Митрофанов, Д. А. Сидоров-Бирюков, М. В. Рожко и др., Письма в ЖЭТФ **112**, 22 (2020).
30. B. Dromey, M. Zepf, A. Gopal et al., *Nature Phys.* **2**, 456 (2006).
31. T. Baeva, S. Gordienko, and A. Pukhov, *Phys. Rev. E* **74**, 046404 (2006).
32. A. V. Mitrofanov, A. A. Voronin, M. V. Rozhko et al., *ACS Photonics* **8**, 1988 (2021).
33. A. V. Mitrofanov, A. A. Voronin, D. A. Sidorov-Biryukov et al., *Optica* **3**, 299 (2016).
34. K. Werner, M. G. Hastings, A. Schweinsberg et al., *Opt. Express* **27**, 2867 (2019).

35. A. A. Lanin, E. A. Stepanov, A. V. Mitrofanov et al., *Opt. Lett.* **44**, 1888 (2019).
36. A. V. Mitrofanov, D. A. Sidorov-Biryukov, P. B. Glek et al., *Opt. Lett.* **45**, 750 (2020).
37. F. Quéré, C. Thaury, H. George et al., *Plasma Phys. Control. Fusion* **50**, 124007 (2008).
38. F. Dollar, P. Cummings, V. Chvykov et al., *Phys. Rev. Lett.* **110**, 175002 (2013).
39. C. Thaury and F. Quere, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **43**, 213001 (2010).
40. N. Beier, T. Nguyen, J. Lin et al., *New J. Phys.* **21**, 043052 (2019).
41. M. R. Edwards and J. M. Mikhailova, *Sci. Rep.* **10**, 5154 (2020).
42. S. Bhadoria, T. Blackburn, A. Gonoskov et al., *Phys. Plasmas* **29**, 093109 (2022).
43. H. Hamster, A. Sullivan, S. Gordon et al., *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2725 (1993).
44. C. Li, M. L. Zhou, W. J. Ding et al., *Phys. Rev. E* **84**, 036405 (2011).
45. P. B. Glek and A. M. Zheltikov, *J. Appl. Phys.* **131**, 103104 (2022).
46. G. Q. Liao, Y. T. Li, Y. H. Zhang et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 205003 (2016).
47. P. B. Glek and A. M. Zheltikov, *Sci. Rep.* **12**, 7660 (2022).
48. Y. T. Li, C. Li, M. L. Zhou et al., *Appl. Phys. Lett.* **100**, 254101 (2012).

NOETHER SYMMETRIES AND SOME EXACT SOLUTIONS IN $f(R, T^2)$ THEORY

M. Sharif^{a}, M. Z. Gul^{a**}*

^a *Department of Mathematics and Statistics, The University of Lahore
54000, Lahore, Pakistan*

Received September 30, 2022,
revised version October 09, 2022
Accepted for publication October 12, 2022

DOI: 10.31857/S0044451023040053

EDN:

Abstract. The main objective of this article is to examine some physically viable solutions through the Noether symmetry technique in $f(R, T^2)$ theory. In order to investigate Noether equations, symmetry generators and conserved quantities, we use a specific model of this modified theory. We find exact solutions and examine the behavior of various cosmological quantities. It is found the behavior these quantities is consistent with current observations indicating that this theory describes the cosmic accelerated expansion. We conclude that generators of Noether symmetry and conserved quantities exist in this theory.

1. Introduction. The current cosmic expansion has been the most stunning and dazzling result for the scientific community [1]. Although general relativity (GR) is a widely accepted theory which explains the cause of this expansion but it has some issues like coincidence and fine tuning problems. To addresses these issues, several modifications of GR (modified gravitational theories) have been formulated to unveil the cosmic mysteries. The first modification of GR is $f(R)$ theory and significant literature [2] is available to understand the physical features of this theory. Recently, Katirci and Kavuk [3] modified $f(R)$ theory by introducing a non-linear term ($T^2 = T_{\xi\eta}T^{\xi\eta}$) in the functional action referred to as $f(R, T^2)$ theory.

This proposal is also dubbed as energy-momentum squared gravity (EMSG) and contains higher-order matter source terms which are helpful to analyze various interesting cosmological results. It is worthwhile

to mention here that this theory explains the complete cosmic history and the cosmic evolution. Roshan and Shojai [4] examined that EMSG resolves the primordial singularity as it has bounce in the early universe. Board and Barrow [5] used a specific model of this theory and discussed exact solution, singularities as well as cosmic evolution with the isotropic configuration of matter in this theory. Bahamonde et al [6] studied various EMSG models and analyzed that these models manifest the current cosmic evolution and acceleration. We have examined some physically viable solutions [7] and dynamics of celestial objects in this theory [8].

The Noether symmetry (NS) strategy gives a fascinating method to develop new cosmic models and associated structures in modified theories of gravity. The NS approach is significant as it recovers symmetry generators as well as some conservation laws of the system [9]. This method does not deal only with the dynamical solutions but it also provides some viable conditions to select cosmic models based on recent observations [10]. Moreover, this method is an important and useful technique to examine exact solutions by using conserved values of the system. Conservation laws are the main ingredients to analyze the distinct physical phenomena. These are the particular cases of the Noether theorem, according to which every differentiable symmetry produces conservation laws. The conservation laws of linear and angular momentum govern the translational and rotational symmetry of any object. The Noether charges are important in the literature as they are used to examine various major cosmic problems in various considerations [12–21].

This manuscript investigates the NS for anisotropic and homogenous cosmic models such as BT-I, BT-III and Kantowski–Sachs (KS) in the background of EMSG. The manuscript is organized as follows. Section

* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk

** E-mail: mzeeshangul.math@gmail.com

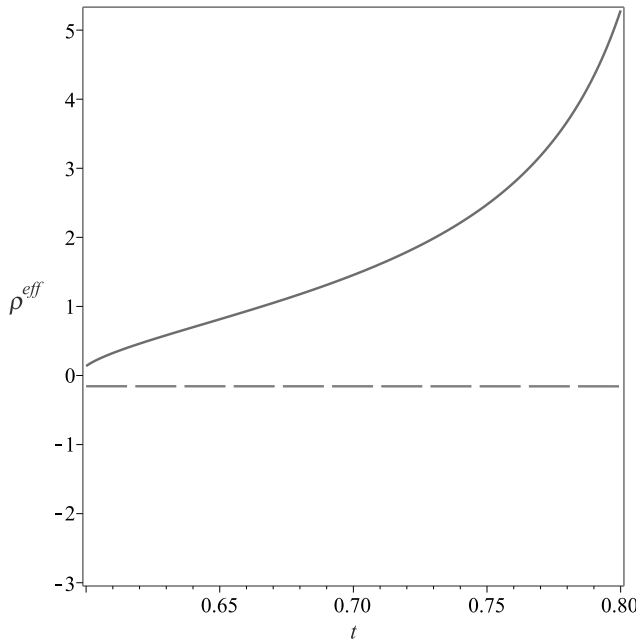


Fig. 1. Behavior of effective energy density for $\epsilon = -1$ (green line) and $\epsilon = 1$ (red line)

2 studies the basic formalism of EMSG. Section 3 provides a detailed study of the NS approach and derives exact cosmological solutions which are then discussed through graphs. The summary of the consequences is given in sect. 4.

2. Field Equations. We derive the field equations of the homogeneous and anisotropic spacetime in this section. The action of EMSG is expressed as [3]

$$A = \int \left(\frac{f(R, T^2)}{2\kappa^2} + L_m \right) d^4x \sqrt{-g}, \quad (1)$$

where $\kappa^2 = 1$ and $\mathcal{L}_m$ manifest the coupling constant and Lagrangian of matter, respectively. The corresponding equations of motion are obtained as

$$R_{\xi\eta} f_R + g_{\xi\eta} \square f_R - \nabla_\xi \nabla_\eta f_R - \frac{1}{2} g_{\xi\eta} f = T_{\xi\eta} - \Theta_{\xi\eta} f_{T^2}, \quad (2)$$

where

$$\square = \nabla_\xi \nabla^\xi, \quad f_{T^2} = \frac{\partial f}{\partial T^2}, \quad f_R = \frac{\partial f}{\partial R}$$

and

$$\Theta_{\xi\eta} = -2L_m \left(T_{\xi\eta} - \frac{1}{2} g_{\xi\eta} T \right) - 4 \frac{\partial^2 L_m}{\partial g^{\xi\eta} \partial g^{\alpha\beta}} T^{\alpha\beta} - T T_{\xi\eta} + 2 T_\xi^\alpha T_{\eta\alpha}.$$

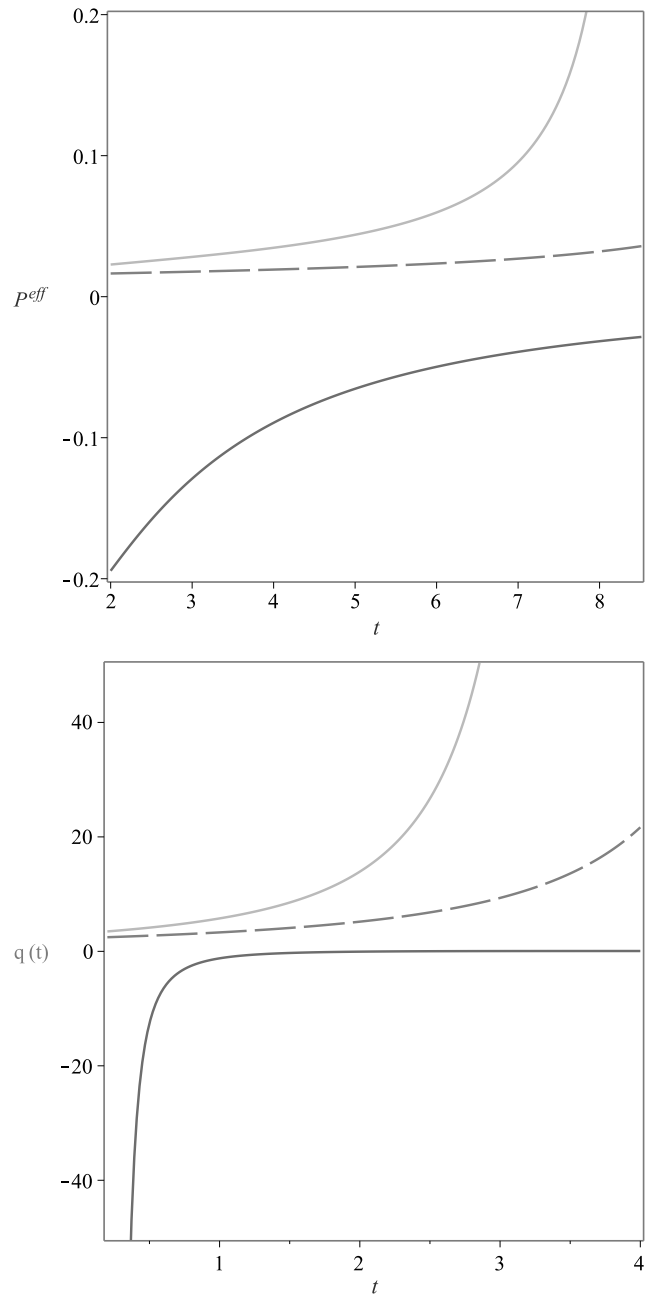


Fig. 2. Behavior of effective pressure (upper panel) and deceleration parameter (lower panel) for $\epsilon = -1$ (green line), $\epsilon = 1$ (red line) and $\epsilon = 0$ (orange line)

Rearranging Eq.(2), we have

$$G_{\xi\eta} = \frac{1}{f_R} (T_{\xi\eta}^{(D)} + T_{\xi\eta}) = T_{\xi\eta}^{eff}, \quad (3)$$

where

$$T_{\xi\eta} = (\rho + p) U_\xi U_\eta + p g_{\xi\eta}$$

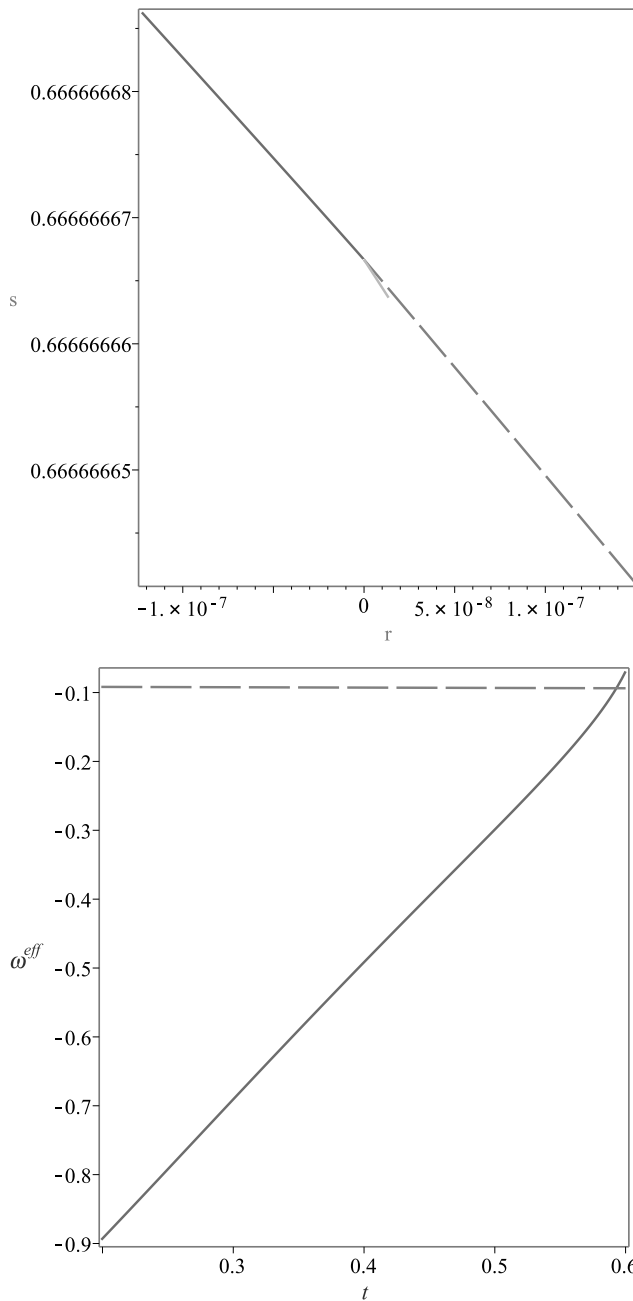


Fig. 3. Behavior of $r - s$ (upper panel) and EoS (lower panel) parameters for $\epsilon = -1$ (green line), $\epsilon = 1$ (red line) and $\epsilon = 0$ (orange line)

and $T_{\xi\eta}^{(D)}$ defines the modified terms of EMSG, represented as

$$T_{\xi\eta}^{(D)} = \frac{1}{2}g_{\xi\eta}(f - Rf_R) - g_{\xi\eta}\square f_R + \nabla_\xi \nabla_\eta f_R - \Theta_{\xi\eta} f_{T^2}. \quad (4)$$

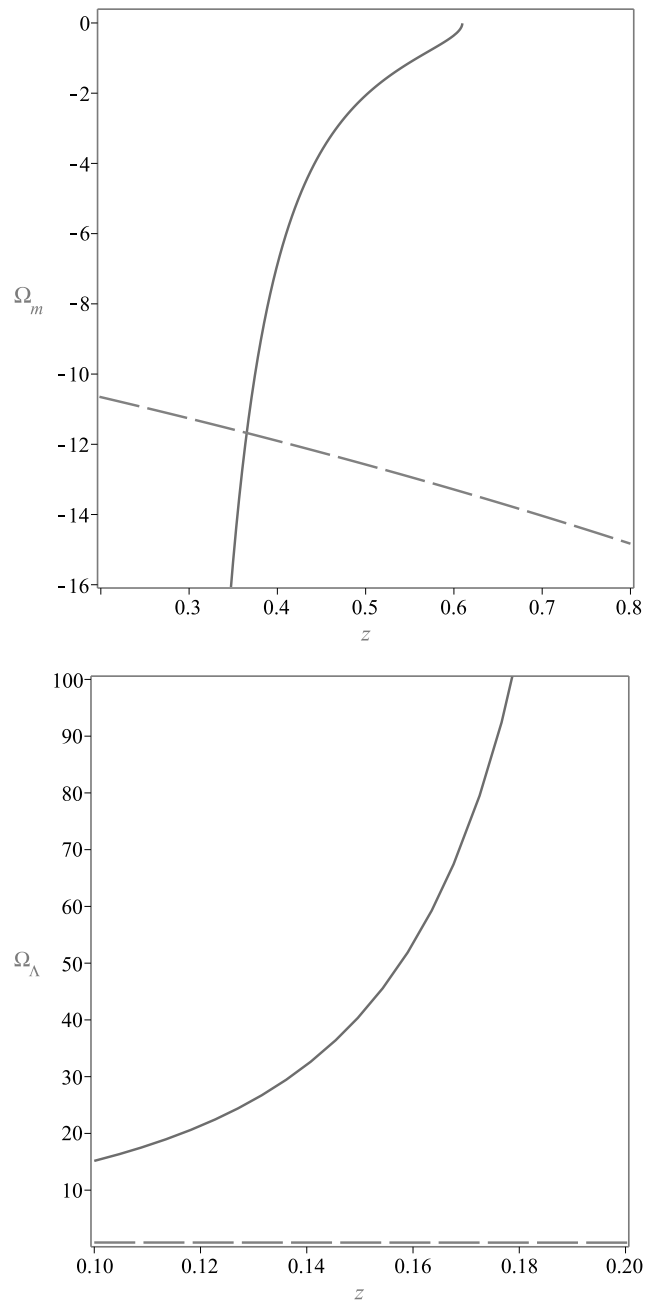


Fig. 4. Plot of Ω_m and Ω_Λ versus redshift parameter for $\epsilon = -1$ (green line) and $\epsilon = 1$ (red line)

We assume a generalized spacetime that corresponds to BT-I, BT-III and KS spacetimes as

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)(d\theta^2 + \psi^2(\theta)d\phi^2), \quad (5)$$

where $\psi(\theta) = \theta, \sinh \theta, \sin \theta$ satisfying the relation

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = -\epsilon.$$

For $\epsilon = 0, -1, 1$, the BT-I, BT-III and KS cosmic models are obtained. The resulting equations of motion become

$$\begin{aligned} \rho^{eff} = & \frac{1}{f_R} \left[\rho - \frac{1}{2} f + (3p^2 + \rho^2 + 4p\rho) f_{T^2} + \right. \\ & + \epsilon b^{-2} f_R - (\dot{a}a^{-1} + 2\dot{b}b^{-1})(\dot{R}f_{RR} + \dot{T}^2 f_{RT^2}) + \\ & \left. + (\ddot{a}a^{-1} + 2\ddot{b}b^{-1} + 2\dot{a}\dot{b}a^{-1}b^{-1} + \dot{b}^2 b^{-2}) f_R \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{eff} = & \frac{1}{f_R} \left[p + \frac{1}{2} f + 2\dot{b}b^{-1}(\dot{R}f_{RR} + \dot{T}^2 f_{RT^2}) - \right. \\ & - \epsilon b^{-2} f_R + \ddot{R}f_{RR} + \ddot{T}^2 f_{RT^2} - \\ & - (\ddot{a}a^{-1} + 2\ddot{b}b^{-1} + 2\dot{a}\dot{b}a^{-1}b^{-1} + \dot{b}^2 b^{-2}) f_R + \\ & \left. + \dot{R}^2 f_{RRR} + \dot{T}^2 f_{RT^2 T^2} + 2\dot{R}\dot{T} f_{RRT^2} \right], \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{eff} = & \frac{1}{f_R} \left[p + \frac{1}{2} f + (\dot{a}a^{-1} + \dot{b}b^{-1})(\dot{R}f_{RR} + \dot{T}^2 f_{RT^2}) - \right. \\ & - \epsilon b^{-2} f_R + \ddot{T}^2 f_{RT^2} + \ddot{R}f_{RR} - \\ & - (\ddot{a}a^{-1} + 2\ddot{b}b^{-1} + 2\dot{a}\dot{b}a^{-1}b^{-1} + \dot{b}^2 b^{-2}) f_R + \\ & \left. + \dot{R}^2 f_{RRR} + \dot{T}^2 f_{RT^2 T^2} + 2\dot{R}\dot{T} f_{RRT^2} \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Now, we apply Lagrange multiplier method to formulate the Lagrangian as

$$\begin{aligned} L = & ab^2(f - Rf_R - T^2 f_{T^2} + (3p^2 + \rho^2) f_{T^2} + p) - \\ & - 2a(2\dot{a}\dot{b}ba^{-1} + \dot{b}^2 - \epsilon) f_R - \\ & - (2b^2\dot{a} + 4ab\dot{b})\dot{R}f_{RR} - (2b^2\dot{a} + 4ab\dot{b})\dot{T}^2 f_{RT^2}. \quad (9) \end{aligned}$$

The fundamental properties of the system can be explained using the Hamiltonian (E) and the dynamical equations, determined as

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \quad E = \dot{q}^i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - L, \quad (10)$$

where generalized coordinates are denoted by q^i . The resulting dynamical equations are

$$\begin{aligned} & f - Rf_R - T^2 f_{T^2} + (3p^2 + \rho^2) f_{T^2} + p + \\ & + 4\dot{b}b^{-1}(\dot{R}f_{RR} + f_{RT^2}\dot{T}^2) + a(f_{T^2}(6pp_{,a} + 2\rho\rho_{,a}) + p_{,a}) + \\ & + b^{-2}(2\dot{b}^2 + 4\dot{b}b + 2\epsilon) f_R + 2\ddot{R}f_{RR} + 2\ddot{T}^2 f_{RT^2} + 2\dot{R}^2 f_{RRR} + \\ & + 2\dot{T}^2 f_{RT^2 T^2} + 4\dot{R}\dot{T}^2 f_{RRT^2} = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f - Rf_R - T^2 f_{T^2} + (3p^2 + \rho^2) f_{T^2} + (\dot{R}f_{RR} + \\ & + \dot{T}^2 f_{RT^2}) 4\dot{a}a^{-1} + p + b(f_{T^2}(6pp_{,b} + 2\rho\rho_{,b}) + p_{,b}) + \\ & + 2a^{-1}b^{-1}(\ddot{a}b + \dot{a}\dot{b} + \ddot{b}a) f_R + 2\ddot{f}_R + \\ & + 4\dot{b}b^{-1}(\dot{R}f_{RRT^2} + \dot{T}^2 f_{RT^2 T^2}) = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2\dot{a}a^{-1} - 4\dot{b}b^{-1}) f_{RR} + (3p^2 + \rho^2) f_{RT^2} - \\ & - 2\epsilon b^{-1} f_{RR} - Rf_{RR} - T^2 f_{RT^2} - \\ & - (4\dot{a}\dot{b}a^{-1}b^{-1} + 2\dot{b}^2 b^{-2}) f_{RR} = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2\dot{a}a^{-1} - 4\dot{b}b^{-1}) f_{RT^2} + (3p^2 + \rho^2) f_{T^2 T^2} - \\ & - 2\epsilon b^{-1} f_{RT^2} - Rf_{RT^2} - T^2 f_{T^2 T^2} - \\ & - (4\dot{a}\dot{b}a^{-1}b^{-1} + 2\dot{b}^2 b^{-2}) f_{RT^2} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

We formulate the Hamiltonian to examine the total energy of the system as

$$\begin{aligned} E = & -ab^2(f - Rf_R - T^2 f_{T^2} + (3p^2 + \rho^2) f_{T^2}) - \\ & - (2\dot{a}\dot{b}ba^{-1} + \dot{b}^2) \times 2af_R - \epsilon f_R - ab^2 p - \\ & - (2b^2\dot{a} + 4ab\dot{b})\dot{f}_R. \quad (15) \end{aligned}$$

The dynamical equations (11)–(14) are extremely complex due to multivariate functions and their derivatives. In the next section, we use NS technique to identify exact solutions. Although this theory is not conserved but one can obtain conserved values through NS approach, which are then used to examine the mysterious universe. As a result, this strategy is more intriguing and we adopt it in this article.

3. Noether Symmetries in EMSG. This section formulates the Noether equations for the homogenous and anisotropic universe model in EMSG. The symmetry generators are expressed as

$$Y = \lambda(t, q^i) \frac{\partial}{\partial t} + \Upsilon^j(t, q^i) \frac{\partial}{\partial q^j}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

where $\lambda(t, a, b, R, T^2)$ and $\Upsilon^j(t, a, b, R, T^2)$ are the unknown parameters. The Lagrangian must satisfy the invariance constraint, expressed as

$$Y^{[1]}L + (D\lambda)L = D\Omega, \quad Y^{[1]} = Y + \dot{\Upsilon}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (16)$$

where Ω is the boundary term and

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

defines the total derivative. The corresponding integral of motion is expressed as

$$I = \Upsilon^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \lambda E - \Omega. \quad (17)$$

This is a crucial component of NS that is essential for computing viable solutions and is also named as the conserved quantities.

We take the vector field (Y) with configuration space $Q = (t, a, b, R, T^2)$ to examine the generators

with corresponding first integrals of Lagrangian (9) under invariance condition (16). By comparing the coefficients of Eq.(16), we have

$$2b^2\Upsilon^1_{,t}f_{RT^2} + 4ab\Upsilon^2_{,t}f_{RT^2} + \Omega_{,T^2} = 0, \quad (18)$$

$$2b^2\Upsilon^1_{,t}f_{RR} + 4ab\Upsilon^2_{,t}f_{RR} + \Omega_{,R} = 0, \quad \lambda_{,a}f_R = 0, \quad (19)$$

$$b\Upsilon^1_{,T^2}f_{RR} + b\Upsilon^1_{,R}f_{RT^2} + 2a\Upsilon^2_{,T^2}f_{RR} + 2a\Upsilon^2_{,R}f_{RT^2} = 0, \quad (20)$$

$$4b\Upsilon^1_{,t}f_R + 4a\Upsilon^2_{,t}f_R + 4ab\Upsilon^3_{,t}f_{RR} + 4ab\Upsilon^4_{,t}f_{RT^2} + \Omega_{,b} = 0, \quad (21)$$

$$4b\Upsilon^2_{,t}f_R + 2b^2\Upsilon^3_{,t}f_{RR} + 2b^2\Upsilon^4_{,t}f_{RT^2} + \Omega_{,a} = 0, \quad (22)$$

$$\lambda_{,b}f_R = 0, \quad b\Upsilon^1_{,T^2}f_{RR} + 2ab\Upsilon^2_{,T^2}f_{RT^2} = 0, \quad (23)$$

$$\lambda_{,R}f_{RR} = 0, \quad \lambda_{,T^2}f_{RT^2} = 0, \quad b\Upsilon^1_{,R}f_{RR} + 2ab\Upsilon^2_{,R}f_{RR} = 0, \quad (24)$$

$$2\Upsilon^2_{,a}f_R + b\Upsilon^3_{,a}f_{RR} + b\Upsilon^4_{,a}f_{RT^2} = 0,$$

$$\Upsilon^1f_R + a\Upsilon^3f_{RR} + a\Upsilon^4f_{RT^2} + 2b\Upsilon^1_{,b}f_R + 2ab\Upsilon^4_{,b}f_{RT^2} + 2ab\Upsilon^3_{,b}f_{RR} - a\lambda_{,t}f_R + 2a\Upsilon^2_{,b}f_R = 0, \quad (25)$$

$$\lambda_{,a}f_{RR} = 0, \quad \lambda_{,a}f_{RT^2} = 0,$$

$$2\Upsilon^2_{,R}f_R + b\Upsilon^3_{,R}f_{RR} + b\Upsilon^4_{,R}f_{RT^2} - b\lambda_{,t}f_{RR} + 2\Upsilon^2f_{RR} + b\Upsilon^1_{,a}f_{RR} + b\Upsilon^3f_{RRR} + b\Upsilon^4f_{RRT^2} + 2a\Upsilon^2_{,a}f_{RR} = 0, \quad (26)$$

$$\lambda_{,b}f_{RR} = 0,$$

$$2\Upsilon^2f_{RT^2} - b\lambda_{,t}f_{RT^2} + b\Upsilon^3_{,T^2}f_{RR} + b\Upsilon^1_{,a}f_{RT^2} + b\Upsilon^4_{,T^2}f_{RT^2} + 2\Upsilon^2_{,T^2}f_R + b\Upsilon^4f_{RT^2T^2} + 2a\Upsilon^2_{,a}f_{RT^2} + b\Upsilon^3f_{RRT^2} = 0, \quad (27)$$

$$\lambda_{,b}f_{RT^2} = 0,$$

$$2\Upsilon^2f_R + 2b\Upsilon^3f_{RR} + 2b\Upsilon^4f_{RT^2} + 2b\Upsilon^1_{,a}f_R + 2a\Upsilon^2_{,a}f_R + 2ab\Upsilon^3_{,a}f_{RR} + 2b\Upsilon^2_{,T^2}f_R + b^2\Upsilon^3_{,b}f_{RR} + 2ab\Upsilon^4_{,a}f_{RT^2} + b^2\Upsilon^4_{,b}f_{RT^2} - 2b\lambda_{,t}f_R = 0, \quad (28)$$

$$2b\Upsilon^1f_{RR} + 2a\Upsilon^2f_{RR} + 2ab\Upsilon^3f_{RRR} + 2ab\Upsilon^4f_{RRT^2} + b^2\Upsilon^1_{,b}f_{RR} + 2b\Upsilon^1_{,R}f_R + 2ab\Upsilon^2_{,b}f_{RR} + 2a\Upsilon^2_{,R}f_R + 2ab\Upsilon^3_{,R}f_{RR} + 2ab\Upsilon^4_{,R}f_{RT^2} - 2ab\lambda_{,t}f_{RR} = 0, \quad (29)$$

$$\lambda_{,R}f_R = 0, \quad \lambda_{,T^2}f_R = 0,$$

$$2b\Upsilon^1f_{RT^2} + 2a\Upsilon^2f_{RT^2} + 2ab\Upsilon^3f_{RRT^2} + 2ab\Upsilon^4f_{RT^2T^2} + b^2\Upsilon^1_{,b}f_{RT^2} + 2b\Upsilon^1_{,T^2}f_R + 2ab\Upsilon^2_{,b}f_{RT^2} + 2a\Upsilon^2_{,T^2}f_R + 2ab\Upsilon^3_{,T^2}f_{RR} + 2ab\Upsilon^4_{,T^2}f_{RT^2} - 2ab\lambda_{,t}f_{RT^2} = 0, \quad (30)$$

$$\lambda_{,R}f_{RT^2} = 0, \quad \lambda_{,T^2}f_{RR} = 0,$$

$$b^2\Upsilon^1[f - Rf_R - T^2f_{T^2} + (3p^2 + \rho^2)f_{T^2} + p + a((6pp_{,a} + 2\rho\rho_{,a})f_{T^2} + p_{,a}) + 2\epsilon f_R] + \Upsilon^2[2ab(f - Rf_R - T^2f_{T^2} + (3p^2 + \rho^2)f_{T^2} + p) + ab^2((6pp_{,b} + 2\rho\rho_{,b})f_{T^2} + p_{,b})] + (3p^2 + \rho^2)f_{RT^2} + \Upsilon^3[-ab^2(Rf_{RR} - T^2f_{RT^2} + (3p^2 + \rho^2)f_{T^2T^2}) + 2a\epsilon f_{RR}] + \Upsilon^4[-ab^2(Rf_{RT^2} - T^2f_{T^2T^2} - (3p^2 + \rho^2)f_{T^2T^2}) + 2a\epsilon f_{RT^2}] + \lambda_{,t}[ab^2(f - Rf_R - T^2f_{T^2} + 2\epsilon f_R + (3p^2 + \rho^2)f_{T^2} + p)] - \Omega_{,t} = 0. \quad (31)$$

These equations help to study the dark cosmos in the context of $f(R, T^2)$. We solve the above system to obtain exact solutions for specific $f(R, T^2)$ model in the following section.

3.1. Exact Solutions. Here, we formulate the generators of NS, conserved values of the system and corresponding physical solutions. Due to the above system's complexity and nonlinearity, we assume a particular EMSG model $f(R, T^2) = R + T^2$ which minimizes the system complexity and help to examine the exact solutions. Manipulating Eqs.(18)-(31), we obtain

$$\begin{aligned} \Upsilon^1 &= \frac{1}{3}a\dot{F}_1(t) - 2c_1a - \frac{1}{2}\frac{aF_2(t)}{b^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{8}\frac{F_4(t)}{\sqrt{b}} + \frac{c_2}{\sqrt{b}}, \\ \Upsilon^2 &= \frac{F_2(t)}{\sqrt{b}} + \left(\frac{1}{3}\dot{F}_1(t) + c_1\right)b, \quad \lambda = F_1(t), \\ \Psi &= -\frac{4}{3}ab^2\ddot{F}_1(t) - 4a\sqrt{b}\dot{F}_2(t) + F_3(t) + \dot{F}_4(t)b^{\frac{3}{2}}, \\ \rho &= \frac{\sqrt{3c_1(-3c_1a^2\epsilon - 6c_1a\epsilon - 2c_3at)}}{3c_1ba}, \end{aligned} \quad (32)$$

where $c_i (i = 1, \dots, 5)$ are integration constants with $c_1 \neq 0$. The corresponding symmetry generators become

$$Y_1 = -3t\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = -3a\frac{\partial}{\partial a}.$$

Substituting the value of Lagrangian (9), Hamiltonian (15) and above solutions (32) in Eq.(17), we obtain first integral as

$$I = 12ab\dot{b}c_1 + 3\left[\frac{3c_1a^2\epsilon + 6c_1a\epsilon + 2c_3at}{3c_1a} - \right]$$

$$-2ab^2 - 4\dot{a}bb + 2\frac{\epsilon}{b^2}\Big]c_1t - c_3t^2.$$

By comparing the coefficients of c_1 and c_3 , we have

$$I_1 = t^2, \quad I_2 = 12ab\dot{b} + 3t\left(\epsilon a - 2ab^2 - 4\dot{a}bb + \frac{2\epsilon}{b^2}\right).$$

We substitute Eqs.(32) into dynamical equations (11)-(15) and obtain the exact solution as

$$a(t) = \left(6c_5c_3(c_5 + t)^{\frac{2}{3}} - 15c_1\epsilon(c_5 + t)^{\frac{2}{3}} - 4c_3t(c_5 + t)^{\frac{2}{3}} + 60c_4c_1\epsilon\right)\left(60c_1\epsilon(c_5 + t)^{\frac{2}{3}}\right)^{-1},$$

$$b(t) = \frac{1}{2}\sqrt{-6\epsilon}(c_5 + t). \quad (33)$$

To analyze this solution, we study the graphical behavior of some important cosmological parameters like deceleration and $r-s$ parameters that are the major factors in the field of cosmology. These cosmic parameters for anisotropic and homogeneous universe model are defined as

$$H = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b}\right), \quad q = -\frac{H}{H^2} - 1.$$

The pair of $r-s$ parameters constructs a relationship between formulated and standard models of the universe which is used to examine the characteristics of DE, expressed as

$$r = q + 2q^2 - \frac{\dot{q}}{H}, \quad s = \frac{r-1}{3(q-\frac{1}{2})}.$$

For $(r, s) = (1, 0)$, the constructed model corresponds to Λ CDM model whereas quintessence and phantom DE eras are obtained for $s > 0$ and $r < 1$, respectively. The EoS parameter

$$\omega^{eff} = \frac{p^{eff}}{\rho^{eff}}$$

is a dimensionless quantity that determines the correlation between state parameters. This parameter differentiates the DE era into quintessence ($-1 < \omega \leq -1/3$) and phantom ($\omega < -1$) phases.

We have considered the values of integration constants as $c_1 = -2$, $c_3 = -10$, $c_4 = 10$ and $c_5 = 5.7$ to analyze the graphical behavior of physical quantities. Figure 1 shows that the effective energy density is positively increasing for $\epsilon = -1$ which manifests that our universe is in the expansion phase. Figure 2 shows that the effective pressure and deceleration parameter

are negative for BT-III universe model which support the current cosmic acceleration. Figure 3 determines that $r-s$ and EoS parameters describe quintessence and phantom phases of DE which represent the cosmic expansion. The obtained solutions for $\epsilon = -1$ are consistent with recent observations which indicate that this theory demonstrates expansion of the universe.

The total amount of energy density can be expressed as fractional energy density. The fractional density is defined as

$$1 + \Omega_\sigma = \Omega_m + \Omega_\Lambda,$$

where

$$\Omega_m = \frac{\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_\sigma = \frac{\sigma^2}{3H^2}.$$

The evaluation of fractional densities corresponding to ordinary matter (Ω_m) and dark energy (Ω_Λ) plays a vital role to measure the contribution of these elements in the cosmos. The densities for isotropic universe model defined as $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ whereas expression equality becomes $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 + \Omega_\sigma$ for anisotropic universe model. We analyze the behavior of fractional densities corresponding to matter and dark energy graphically at redshift scale factor where $a(t) = a_0(1+z)^{-1}$ and z is the redshift parameter. From observations of Planck data 2018, it is suggested that $\Omega_m \cong 0.3111$ and $\Omega_\Lambda \cong 0.6889$. According to some recent observations, there are some evidences in favor of closed universe model with fractional density $\Omega_\Lambda \cong 0.01$. For $\epsilon = -1$, the fractional density of matter indicates inconsistent behavior and the trajectory of fractional density provides $\Omega_m = 0.3$ for $\epsilon = 1$ as shown in Figure 4 (left plot). In this regard, it implies consistent behavior with Planck data 2018. The right plot of Figure 4 reveals the behavior of fractional density of dark energy which shows consistent behavior with Planck data for $\epsilon = 1$ and it exhibits inconsistent behavior for $\epsilon = -1$.

4. Final Remarks. Modified theories are assumed as the most propitious and elegant proposals to examine the dark universe due to the presence of extra higher-order geometric terms. In this paper, we have formulated exact solutions of anisotropic and homogeneous spacetimes in $f(R, T^2)$ gravity. For this reason, we have considered the NS technique to examine the exact solutions. We have formulated the Lagrangian, NS generators with conserved values in the background of EMSG. The behavior of exact solutions have been investigated through different cosmological quantities.

The main findings are summarized as follows.

1. We have established two non-zero NS generators and corresponding conserved quantities. We have obtained the exact solutions for BT-I, BT-III and KS universe models.

2. The effective energy density show accelerated and constant expansion corresponding to BT-III, BT-I and KS spacetimes, respectively (Figure 1).

3. The value of effective pressure and deceleration parameter remain negative for $\epsilon = -1$ which support the current cosmic acceleration (Figure 2).

4. The $r-s$ and EoS parameters yield quintessence and phantom DE phases which determine the rapid expansion of the universe (Figure 3).

5. In the background of BT-III universe models, the analysis of fractional density parameter of matter reveals that the EMSG is consistent with Plancks 2018 data. In case of KS universe model, this consistency is not preserved (Figure 4). We conclude that the EMSG significantly explains the cosmic journey from decelerated to accelerated epoch.

6. We find that first integrals of motion are very useful to obtain viable cosmological solutions. It is found that the considered model of EMSG supports the cosmic expansion.

The full text of this paper is published in the English version of JETP.

REFERENCES

1. A.V. Filippenko and A.G. Riess, Phys. Rep. **307**, 31 (1998); M. Tegmark, M.A. Strauss, M.R. Blanton, K. Abazajian, S. Dodelson, H. Sandvik, X. Wang, D.H. Weinberg, I. Zehavi, N.A. Bahcall, and F. Hoyle, Phys. Rev. D **69**, 103501 (2004).
2. A.D. Felice and S.R. Tsujikawa, Living Rev. Relativ. **13**, 3 (2010); S. Nojiri and S.D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).
3. N. Katirci and M. Kavuk, Eur. Phys. J. Plus **129**, 163 (2014).
4. M. Roshan and F. Shojai, Phys. Rev. D **94**, 044002 (2016).
5. C.V.R. Board and J.D. Barrow, Phys. Rev. D **96**, 123517 (2017).
6. S. Bahamonde, M. Marciu, and P. Rudra, Phys. Rev. D **100**, 083511 (2019).
7. M. Sharif and M.Z. Gul, Phys. Scr. **96**, 025002 (2021); Phys. Scr. **96**, 125007 (2021); Chin. J. Phys. **80**, 58 (2022).
8. M. Sharif and M.Z. Gul, Int. J. Mod. Phys. A **36**, 2150004 (2021); Universe **7**, 154 (2021); Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **19**, 2250012 (2021); Chin. J. Phys. **71**, 365 (2021); Mod. Phys. Lett. A **37**, 2250005 (2022).
9. E. Noether, Tramp. Th. Stat, Phys **1**, 189 (1918); T. Feroze, F.M. Mahomed, and A. Qadir, Nonlinear Dyn. **45**, 65 (2006).
10. S. Capozziello, M. De Laurentis, and S.D. Odintsov, Eur. Phys. J. C **72**, 1434 (2012).
11. S. Capozziello, R.D. Ritis, and A.A. Marino, Class. Quantum Gravity **14**, 3259 (1997).
12. S. Capozziello, G. Marmo, and C.P. Rubano, Int. J. Mod. Phys. D **6**, 491 (1997).
13. A.K. Sanyal, Phys. Lett. B **524**, 177 (2002).
14. U. Camci and Y. Kucukakca, : Phys. Rev. D **76**, 084023 (2007).
15. D. Momeni and H. Gholizade, Int. J. Mod. Phys. D **18**, 1 (2009).
16. Y. Kucukakca, U. Camci, and I. Semiz, Gen. Relat. Gravit. **44**, 1893 (2012).
17. S. Basilakos, S. Capozziello, M. De Laurentis, A. Paliathanasis, and M. Tsamparlis, Phys. Rev. D **88**, 103526 (2013).
18. U. Camci, Eur. Phys. J. C **74**, 3201 (2014); J. Cosmol. Astropart. Phys. **07**, 002 (2014).
19. U. Camci and J. Cosmol, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2014**, 2 (2014).
20. U. Camci, A. Yildirim, and I. Basaran, Astropart. Phys. **76**, 29 (2016).
21. S. Capozziello, S.J.G. Gionti, and D. Vernieri, J. Cosmol. Astropart. Phys. **1601**, 015 (2016).

УСКОРЕНИЕ СОЛНЕЧНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В НИЖНЕЙ КОРОНЕ СОЛНЦА 7 МАЯ 1978 г.

С. Н. Танеев*

*Институт космических исследований и астрономии им. Ю. Г. Шафера
Сибирского отделения Российской академии наук
677027, Якутск, Россия*

Поступила в редакцию 17 октября 2022 г.,
после переработки 6 декабря 2022 г.
Принята к публикации 6 декабря 2022 г.

На основе теории диффузионного ускорения заряженных частиц проведены теоретические исследования численными методами спектров протонов, произведенных ударной волной, образованной корональным выбросом массы (КВМ), в нижней короне Солнца с известными параметрами солнечной плазмы для события солнечных космических лучей (СКЛ), зарегистрированного вблизи орбиты Земли 7 мая 1978 г. (ground level enhancement № 31, GLE31). Для анализа события использовались данные регистрации потоков протонов прибором CRME, установленным на космическом аппарате IMP-8, и мировой сети наземных нейтронных мониторов, совмещенных с измерениями частиц телескопами на спутниках IMP-7 и IMP-8. В расчетах для удовлетворительного воспроизведения измеренного на орбите Земли спектра протонов скорость КВМ была принята постоянной и равной 600 км/с. Процесс ускорения СКЛ ударной волной протекал до $1.4R_{\odot}$ солнечных радиусов в течении 256 с.

DOI: 10.31857/S0044451023040065

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории диффузионного ускорения (см., например, пионерские работы Крымского [1], в которой автор назвал эту теорию регулярным механизмом ускорения, Аксфорда и др. [2], Блэндфорда и Острайкера [3]; монографию Бережко и др. [4] и обзор Бережко и Крымского [5], а также ссылки в них) применительно к явлениям во внутренней гелиосфере (области, ограниченной орбитой Земли) необходимо для детального понимания процессов формирования спектров энергичных ионов на фронтах ударных волн.

Обоснование предмета исследований генерации солнечных космических лучей (СКЛ) ударной волной в нижней короне Солнца приведено во введениях работ Бережко и Танеева [6, 7]; см. также обзоры Мирошниченко [8], Панасюка и Мирошниченко [9], работу Ли [10] и ссылки там.

Отметим, что для понимания и детального объяснения явления генерации СКЛ ударными волна-

ми, бегущими от Солнца в межпланетное пространство, в статье [6] была разработана линейная (несамосогласованная) теория ускорения СКЛ ударной волной до релятивистских энергий в нижней солнечной короне, в которой ускоряемые частицы имеют коэффициенты диффузии, задаваемые аналитически.

Линейная (несамосогласованная) теория [6] является первым примером применения теории диффузионного ускорения заряженных частиц с учетом конечности размеров ударной волны (в сферическом приближении), адиабатического замедления ускоренных частиц в расширяющемся потоке солнечного ветра, а также известных параметров плазмы солнечной короны.

В дальнейшем учет генерации альфвеновских волн ускоряемыми частицами привел к созданию квазилинейной (самосогласованной) теории диффузионного ускорения СКЛ на фронте корональной ударной волны [7], в которой коэффициент диффузии частиц определяется степенью генерации ими альфвеновских волн.

В статье [11] впервые рассмотрено влияние коронального выброса массы (КВМ) на процесс ускорения СКЛ ударной волной в рамках линейной (несамосогласованной) теории. Отметим, что в англо-

* E-mail: taneev@ikfia.ysn.ru

язычной литературе для обозначения КВМ используют аббревиатуру СМЕ (coronal mass ejection).

В дальнейшем в работе [12] были проведены теоретические исследования численными методами квазилинейного (самосогласованного) варианта теории ускорения СКЛ ударной волной с учетом влияния на этот процесс КВМ.

Целью настоящей работы является исследование события СКЛ, зарегистрированного вблизи орбиты Земли 7 мая 1978 г. (GLE31), основанное на результатах, полученных в [12]. События с релятивистскими СКЛ принято называть GLE (ground level enhancement) с присвоением порядкового номера.

2. МОДЕЛЬ

Так как модель подробно изложена в работе [12], здесь мы остановимся только на основных ее элементах, сохраняя обозначения.

Как и в предшествующих наших работах [6, 7, 12–18], мы рассматриваем только квазипараллельные ударные волны, на которых наиболее эффективно процесс ускорения частиц протекает на лобовом участке сферического ударного фронта, имеющего наибольшую скорость V_S , а силовые линии магнитного поля $\mathbf{B}$ составляют небольшой угол ψ с нормалью к ударному фронту $\mathbf{n}$ ($\psi \lesssim 45^\circ$).

Будем считать, что в области гелиоцентрических расстояний $r < 5R_\odot$ магнитное поле $\mathbf{B}$ направлено радиально, как и скорость течения вещества $\mathbf{w}$.

Полуширина характерного поперечного размера $L_\perp$ лобового участка (т.е. области ускорения) достаточно велика ($L_\perp \sim R_S$), а быстрые частицы в сильной степени замагничены ($\kappa_\parallel \gg \kappa_\perp$ [19], где $\kappa_\parallel$ ($\kappa_\perp$) — коэффициент продольной (поперечной) по отношению к магнитному полю $\mathbf{B}$ диффузии κ частиц), поэтому приближение сферической симметрии в нашем случае означает, что все физические величины являются функциями только одной пространственной переменной — гелиоцентрического расстояния r .

В этом случае уравнение переноса для функции распределения частиц $f(r, p, t)$, впервые выведенное в работах [20, 21], в области $r > R_S$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa_\parallel r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - w' \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p}{3r^2} \frac{\partial(w'r^2)}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{f}{\tau_\perp}, \quad (1)$$

где p — импульс частиц, t — время, $w' = w + c_c$ — скорость рассеивающих центров, w — скорость сре-

ды (плазмы), c_c — скорость рассеивающих центров относительно среды.

Предпоследний член в правой части уравнения (1) описывает адиабатическое замедление частиц в расширяющемся потоке, которое является одним из факторов, ограничивающим спектр ускоренных частиц со стороны больших энергий.

Последний член в уравнении (1) описывает выход частиц из области ускорения за счет поперечной диффузии с характерным временем $\tau_\perp = L_\perp^2 / \kappa_\perp$. Реальные значения коэффициента диффузии $\kappa_\perp$ таковы, что член $f/\tau_\perp$ мало влияет на процесс ускорения частиц. Как и раньше [6, 7, 12–17], нами принято $L_\perp = 0.6R_S$, что соответствует величине $\Omega_S = 1.26$ ср. Угол Ω_S влияет только на полное количество произведенных ударной волной СКЛ, которое прямо пропорционально Ω_S .

Как и в предшествующих наших работах [6, 7, 12–18], мы не учитываем модификацию ударной волны обратным воздействием ускоренных частиц, так как их давление P_c [4, 5] значительно меньше динамического давления среды на ударный фронт $P_m = \rho(V_S - w)^2$ (подробнее см. в [6]); ρ — плотность среды в точке $r = R_S + 0$.

Поэтому ударный фронт трактуется нами как разрыв, на котором скорость среды $u = V_S - w$ относительно ударного фронта испытывает скачок от значения u_1 в точке $r = R_S + 0$ до

$$u_2 = u_1 / \sigma \quad (2)$$

в точке $r = R_S - 0$, где

$$\sigma = 4 / (1 + 3/M_1^2) \quad (3)$$

— степень сжатия вещества на ударном фронте, $M = u/c_s$ — число Маха, $c_s = \sqrt{\gamma_g k_B T / m}$ — скорость звука, T — температура, k_B — постоянная Больцмана, m — масса протона; для показателя политропы плазмы принято значение $\gamma_g = 5/3$; индексом 1 (2) помечаются величины, соответствующие точке непосредственно перед (за) ударным фронтом.

Функция распределения на ударном фронте, расположенном в точке $r = R_S$, удовлетворяет условию

$$\frac{u'_1 - u_2}{3} p \frac{\partial f}{\partial p} = \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial r} \right)_1 - \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial r} \right)_2 + Q_0, \quad (4)$$

где $u' = u - c_c$ — скорость рассеивающих центров относительно ударного фронта,

$$Q_0 = u_1 \frac{N_{inj}}{4\pi p_{inj}^2} \delta(p - p_{inj}) \quad (5)$$

— сосредоточенный на ударном фронте источник, обеспечивающий инжекцию в режим ускорения некоторой доли $\eta = N_{inj}/N_{g1}$ от концентрации частиц среды $N_{g1} = N_g(r = R_S + 0)$, натекающей на ударный фронт.

Ввиду отсутствия разработанной теории механизма инжекции безразмерный параметр η , который принято называть темпом инжекции, является свободным в используемой нами модели. В расчетах $\eta = 10^{-3}$.

Величину импульса инжектируемых в процесс ускорения протонов p_{inj} мы принимаем, как обычно [6, 7, 12–18], $p_{inj} = \lambda mc_{s2}$ (см., например, [22]), где $\lambda > 1$, а

$$c_{s2} = \frac{u_1 \sqrt{\gamma_g(\sigma - 1) + \sigma/M_1^2}}{\sigma} \quad (6)$$

— скорость звука за фронтом ударной волны; у нас $\lambda = 4$. Для иона с массовым числом A импульс инжекции $p_{inj,A} = A p_{inj}$.

Поскольку ударный фронт является единственным источником, где осуществляется инжекция частиц в режим ускорения, задачу необходимо решать при начальном и граничном условиях

$$f(r, p, t_0) = 0, \quad f(r = \infty, p, t) = 0, \quad (7)$$

которые означают отсутствие фоновых частиц рассматриваемого диапазона энергий в солнечном ветре.

Коэффициент диффузии $\kappa_{\parallel}$ частиц, входящий в уравнение (1), определяется выражением [23]

$$\kappa_{\parallel} = \frac{v^2 B^2}{32\pi^2 \omega_B E_w (k = \rho_B^{-1})}, \quad (8)$$

в котором v — скорость частиц, $\rho_B = p/(Am\omega_B)$ — гирорадиус, $\omega_B = ZeB/Amc$ — гирочастота, e — элементарный заряд, Z — зарядовое число, c — скорость света, $E_w(k) = d(\delta B^2/8\pi)/d \ln k$ — дифференциальная плотность магнитной энергии альфвеновских волн. Частицы рассеиваются за счет взаимодействия только с теми волнами, волновое число k которых равно обратному гирорадиусу ρ_B частиц. Коэффициенты диффузии частиц $\kappa_{\parallel}$ и $\kappa_{\perp}$ связаны между собой соотношением $\kappa_{\parallel}\kappa_{\perp} = \rho_B^2 v^2/3$ [24].

Фоновый спектр волн $E_{w0}(k, r)$ модифицируется за счет генерации альфвеновских волн ускоренными частицами. С учетом этого уравнение переноса альфвеновской турбулентности в области перед ударным фронтом ($r > R_S$) имеет вид

$$\frac{\partial E_w^{\pm}}{\partial t} + u_1^{\pm} \frac{\partial E_w^{\pm}}{\partial x} = \pm \Gamma E_w^{\pm}, \quad (9)$$

где

$$\Gamma(k) = \frac{32\pi^3 c_A}{k c^2 v^2} \sum_s \frac{(Ze)^2}{Am} \kappa_{\parallel} (\rho_B = k^{-1}) \times \times \int_{p_{min}}^{\infty} dp p^2 v \left(1 - \frac{m^2 \omega_B^2}{k^2 p^2}\right) \frac{\partial f}{\partial x} \quad (10)$$

— инкремент раскачки (декремент затухания) волн ускоренными частицами [25]; $x = R_S - r$, $p_{min} = \max(p_{inj}, m\omega_B/k)$; « s » — сорт иона (для упрощения записи индекс сорта иона у соответствующих величин опущен); плотности энергии E_w^+ и E_w^- отвечают волнам, бегущим в среде в направлении от Солнца (+) и к Солнцу (−); $E_w = E_w^+ + E_w^-$; $u_1^{\pm} = V_S - w \mp c_A$.

Поскольку рассеяния СКЛ осуществляются посредством их взаимодействия с альфвеновскими волнами, распространяющимися в противоположных направлениях вдоль силовых линий регулярно магнитного поля $\mathbf{B}$, скорость рассеивающих центров в области перед ударным фронтом ($r > R_S$) определяется выражением

$$c_c = c_A(E_w^+ - E_w^-)/E_w, \quad (11)$$

где

$$c_A = B/\sqrt{4\pi\rho} \quad (12)$$

— альфвеновская скорость. В области за фронтом ($r < R_S$) распространение альфвеновских волн в значительной степени изотропизуется, поэтому $c_c = 0$.

Процесс эволюции спектра ускоренных ионов на ударном фронте состоит в формировании степенного спектра для функции распределения $f(r, p, t)$, которую в случае немодифицированной ударной волны в области импульсов $p_{inj} \leq p < p_{max}$ можно представить в виде (см., например, [4, 5])

$$f(R_S, p, t) = \frac{q\eta N_g}{4\pi p_{inj}^3} \left(\frac{p}{p_{inj}}\right)^{-q}, \quad (13)$$

где показатель спектра определяется выражением

$$q = 3\sigma_{ef}/(\sigma_{ef} - 1), \quad (14)$$

а

$$\sigma_{ef} = u_1'/u_2 = \sigma(1 - c_{c1}/u_1) \quad (15)$$

— эффективная степень сжатия на ударном фронте. По достижении предельного (максимального) импульса p_{max} в области $p > p_{max}$ спектр сильно укрупняется и оканчивается квазиэкспоненциальным хвостом.

В случае, когда в области перед ударным фронтом ($r > R_S$) преобладают волны, бегущие в направ-

лении от Солнца ($c_c = c_A$), получаем

$$\sigma_{ef} = \sigma(1 - 1/M_A), \quad (16)$$

где

$$M_A = u_1/c_c = u_1/c_A \quad (17)$$

— альфвеновское число Маха. Условие $E_w(\nu) \approx E_w^+(\nu)$ выполняется для большей части спектра альфвеновских волн, резонансно взаимодействующих с ускоренными частицами за счет преобладающего вклада волн, раскачиваемых ими.

Мы взяли начальный радиус КВМ $R_P(t_0)$ равным радиусу Солнца $R_\odot$, величину его скорости V_P положили равной 600 км/с и приняли ее постоянной при удалении от Солнца: $V_P(r) = \text{const}$.

Следуя работе [22], начальный радиус ударной волны нами принят равным

$$R_S(t_0) = 1.1 R_P(t_0). \quad (18)$$

Поскольку связь между скоростью коронального выброса V_P и скоростью порождаемой им ударной волны V_S из наблюдений не известна, было использовано соотношение

$$V_S = V_P \sigma / (\sigma - 1), \quad (19)$$

справедливое для равномерно движущегося со скоростью V_P поршня.

Скорость солнечного ветра w за фронтом ударной волны ($R_P \leq r \leq R_S$) мы аппроксимируем выражением

$$w(r) = V_P + \frac{r - R_P}{R_S - R_P} (w_2 - V_P), \quad (20)$$

где

$$w_2 = V_S - u_2. \quad (21)$$

Применимость такой линейной аппроксимации подтверждается результатами полного численного расчета газодинамических уравнений за фронтом ударной волны.

Дивергенцию скорости солнечного ветра w за ударным фронтом ($R_P \leq r \leq R_S$) мы приняли в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(w r^2)}{\partial r} = \frac{2w}{r} + \frac{w_2 - V_P}{R_S - R_P}. \quad (22)$$

Коэффициент диффузии частиц $\kappa_2(p, r)$ за фронтом ударной волны ($R_P \leq r \leq R_S$) нами взят независимым от r ($\kappa_2(r) = \text{const}$), а также с учетом усиления напряженности магнитного поля

$$B_2 = B_1 \sigma \quad (23)$$

за ударным фронтом κ_2 определяется выражением

$$\kappa_2 = \kappa_{||}(r = R_S + 0)/\sigma. \quad (24)$$

Соотношение (23), справедливое при $\psi \neq 0^\circ$ из-за наложения сложных геометрий ударной волны и магнитного поля, а также большого числа неустойчивостей на ударном фронте, имеет очень высокую степень вероятности иметь место на ударных волнах.

Уравнение переноса (1) для функции распределения частиц $f(r, p, t)$ в области за ударным фронтом ($R_P < r < R_S$) после исключения из него последнего члена решается при граничных условиях на поршне [22]

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=R_P-0}^{r=R_P+0} = 0 \quad (25)$$

и ударном фронте

$$f_2(r = R_S - 0) = f_1(r = R_S + 0). \quad (26)$$

Сформулированная задача (1)–(26) решается численно. Алгоритм численного решения и применяемые численные методы в области перед ударным фронтом ($r \geq R_S$) кратко изложены в работе [18]. Для расчета области за ударным фронтом ($r \leq R_S$) нами была адаптирована численная схема из работы [26].

3. ПАРАМЕТРЫ СОЛНЕЧНОЙ КОРОНЫ

В работе [7] был определен спектр фоновых альфвеновских волн $E_{w0}(k, r)$, исходя из современного представления о том, что поток энергии альфвеновских волн в основании короны

$$F_w = W(3w + 2c_c) \quad (27)$$

является основным источником энергии солнечного ветра. Здесь

$$W = \int E_{w0}(\nu) d\nu \quad (28)$$

— суммарная по спектру волн плотность магнитной энергии,

$$E_{w0}(\nu) = \nu^{-1} E_{w0}(k) \quad (29)$$

— спектральная плотность магнитной энергии альфвеновских волн, где частота ν и волновое число k связаны соотношением

$$\nu = k(w \pm c_A)/(2\pi), \quad (30)$$

в котором знаки « $\pm$ » отвечают волнам $E_w^\pm(\nu)$, распространяющимся от Солнца (+) и к Солнцу (−).

Следуя результатам статьи [27], в работе [7] сделано предположение, что спектр волн в основании короны имеет вид

$$E_{w0}(\nu) \propto \nu^{-1} \quad \text{при} \quad 10^{-3} < \nu < 5 \cdot 10^{-2} \text{ Гц.} \quad (31)$$

В области высоких частот $\nu > 5 \cdot 10^{-2}$ Гц спектр ожидается более «мягким» [28]. Мы предполагаем, что в этом инерциальном частотном диапазоне он имеет такой же вид, как в солнечном ветре [29]:

$$E_{w0}(\nu) \propto \nu^{-5/3}. \quad (32)$$

Принимая типичное значение потока энергии $F_w \approx 10^6$ эрг/(см² · с) [27], скорости плазмы $w = 0$ и скорости $c_c = 200$ км/с в основании короны, имеем $W = 2.5 \cdot 10^{-2}$ эрг/см³ и

$$E_{w0}(r_0, \nu_0) = 1.3 \cdot 10^9 \text{ Гц}^2/\text{Гц}, \quad (33)$$

где $r_0 = 1.1 R_\odot$, $\nu_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ Гц.

Эта энергия делится между противоположно распространяющимися волнами в соответствии с соотношениями

$$E_{w0}^+ = 0.7 E_{w0}, \quad E_{w0}^- = 0.3 E_{w0}. \quad (34)$$

Согласно спутниковым измерениям у орбиты Земли [29, 30]

$$E_{w0}(r_e = 1 \text{ а.е.}, \nu_0) = 10^{-2} \text{ Гц}^2/\text{Гц}, \quad (35)$$

где $r_e = 1$ а.е. — астрономическая единица.

Принимая степенную зависимость плотности энергии волн от гелиоцентрического расстояния $E_{w0}(\nu, r) \propto r^{-\delta}$, имеем $\delta = 5$. В итоге спектральное и пространственное распределение альфвеновских волн в области частот $\nu > 5 \cdot 10^{-2}$ Гц может быть представлено в виде

$$E_{w0}(k, r) = E_0(k/k_0)^{-\beta}(r/r_0)^{-\delta}, \quad (36)$$

где $\beta = 2/3$, $E_0 = 6.5 \cdot 10^{-3}$ эрг/см³, $k_0 = 2.4 \cdot 10^5$ см⁻¹.

Для радиального распределения концентрации протонов в низкоширотной короне нами используются результаты полуэмпирической модели [31]:

$$N_g(r) = N_{g0} [a_1 e^{a_2 z} z^2 \times \\ \times (1 + a_3 z + a_4 z^2 + a_5 z^3)], \quad (37)$$

где $N_{g0} = N_g(r_0) = 10^8$ см⁻³, $a_1 = 3.2565 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = 3.6728$, $a_3 = 4.8947$, $a_4 = 7.6123$, $a_5 = 5.9868$, $z = R_\odot/r$.

Скорость среды (плазмы) w определяется из условия непрерывности потока вещества:

$$w(r) = w_0 [N_{g0}/N_g(r)](r_0/r)^2, \quad (38)$$

где $w_0 = w(r_0) = 1$ км/с.

Напряженность магнитного поля принимается в виде

$$B(r) = B_0(r_0/r)^2, \quad (39)$$

где $B_0 = 2.3$ Гс [32].

Температура солнечной короны положена равной $T = 2 \cdot 10^6$ К [33].

Помимо протонов мы принимаем во внимание также ускорение α -частиц, предполагая, что содержание ядер гелия в корональной плазме составляет 10% от содержания водорода.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ В СОЛНЕЧНОЙ КОРОНЕ

Применим теорию [12] ускорения СКЛ ударной волной в нижней короне Солнца к исследованию события GLE31, которое произошло 7 мая 1978 г.

Вспышка балла X2/2B в линии H_α на Солнце имела максимум в 03:30 UT (UT — мировое время по Гринвичу) и положение с координатами N22W64 [34].

Согласно измерениям вспышка произошла в относительно спокойный период на фазе восстановления интенсивности галактических космических лучей (ГКЛ). Радиоизлучения начали регистрироваться в период времени 03:21.7–03:22.2 UT, достигли максимума в 03:28.5–03:35.4 UT и продолжались в течение 39.4–48.2 мин. Потoki мягкого X-излучения начались в 03:21 UT и достигли максимума в 03:31 UT. Первые СКЛ были зарегистрированы на Земле в 03:36±1 UT. Рост потока частиц, измеренный нейтронным монитором (Durham), продолжался менее 10 мин. [35].

Решаем задачу в два этапа. На первом этапе, приведенном в этом разделе, мы исследуем ускорение СКЛ в нижней короне Солнца.

Для начала предположим, что накопление магнитной энергии на Солнце в области предстоящей вспышки сопровождается возмущением магнитной среды над ней. Из-за этого, например, поток энергии альфвеновских волн F_w в основании короны может быть значительно больше приведенной выше величины 10^6 эрг/(см² · с), необходимой для разгона солнечного ветра. Мы взяли F_w в 140 раз больше: $F_w = 1.4 \cdot 10^8$ эрг/(см² · с).

Следовательно, амплитуда спектра волн $E_{w0}(\nu)$ в основании короны в области частот $10^{-3} < \nu < 5 \cdot 10^{-2}$ Гц будет больше в 140 раз, так как суммарная по спектру волн плотность магнитной энергии $W \propto F_w$ (27).

Как было показано в работе [6], с помощью параметра β в выражении (36) можно в вычислениях задавать форму квазиэкспоненциального хвоста в спектре ускоренных частиц. Мы положили в области высоких частот $\nu > 5 \cdot 10^{-2}$ Гц параметр $\beta = 1$, что делает переход «бампов» в спектрах частиц в более «жесткие» квазиэкспоненциальные хвосты, чем при $\beta = 2/3$.

На основе предложенных величин F_w и β был построен новый спектр фоновых альфвеновских волн $E_{w0}(k, r)$ (см. рис. 1).

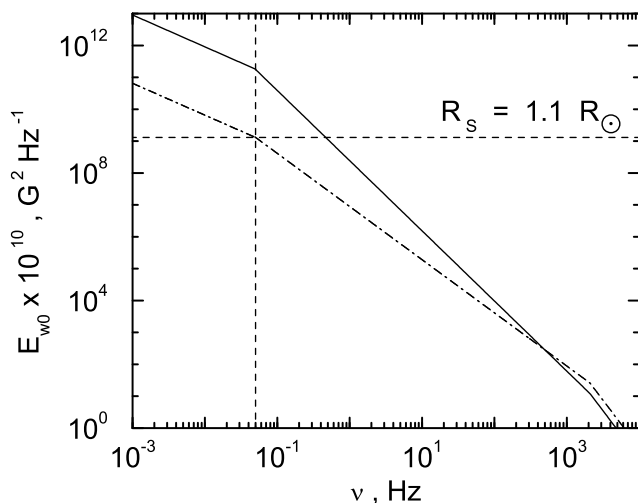


Рис. 1. Сплошные линии — фоновый спектр альфвеновских волн $E_{w0}(\nu)$ в зависимости от частоты ν на расстоянии $R_s = 1.1 R_\odot$ от Солнца для потока энергии волн $F_w = 1.4 \cdot 10^8$ эрг/(см² · с) и параметра $\beta = 1$. Штрихпунктирные линии — спектр $E_{w0}(\nu)$ для потока $F_w = 10^6$ эрг/(см² · с) и параметра $\beta = 2/3$. Вертикальной штриховой линией выделена частота $\nu_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ Гц. Горизонтальной штриховой линией приведена амплитуда волн $E_{w0} = 1.3 \cdot 10^9$ Гц²/Гц. После частоты $\nu \approx 2 \cdot 10^3$ Гц спектр волн имеет вид $E_{w0}(\nu) \propto \nu^{-3}$. Подробнее см. в тексте

На рис.1 сплошными линиями приведен фоновый спектр альфвеновских волн $E_{w0}(\nu)$ в зависимости от частоты ν на расстоянии $R_s = 1.1 R_\odot$ от Солнца для потока энергии волн $F_w = 1.4 \cdot 10^8$ эрг/(см² · с) и параметра $\beta = 1$. Штрихпунктирными линиями представлен спектр $E_{w0}(\nu)$ для потока $F_w = 10^6$ эрг/(см² · с) и параметра $\beta = 2/3$. Вертикальной штриховой линией отмечена частота $\nu_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ Гц, горизонтальной штриховой

линией — амплитуда волн $E_{w0} = 1.3 \cdot 10^9$ Гц²/Гц. После частоты $\nu \approx 2 \cdot 10^3$ Гц спектр волн имеет вид $E_{w0}(\nu) \propto \nu^{-3}$, что связано с учетом нами всегда затухания волн на тепловых протонах [7, 16, 17], которое никак не сказывается на процессе ускорения частиц и необходимо, если приходится сравнивать вычисленный спектр волн $E_w(\nu)$ с измеренным экспериментально [16, 17]. В месте пересечения сплошной и штрихпунктирной линий находится частота $\nu_{inj} = 500$ Гц, резонансная с протонами, имеющими энергию инжекции в процесс ускорения $\varepsilon_{inj} = 20$ кэВ.

Роль рассеивателей для протонов с энергиями $\lesssim 10^4$ МэВ выполняют волны с частотами $\nu \gtrsim 5 \cdot 10^{-2}$ Гц. Протоны с энергиями $> 10^4$ МэВ взаимодействуют с волнами, у которых частота $\nu < 5 \cdot 10^{-2}$ Гц. Мы приняли зависимость спектра фоновой альфвеновской турбулентности $E_{w0}(\nu)$ от частоты ν в виде

$$E_{w0}(\nu) \propto \nu^{-2} \quad (40)$$

во всей области частот $\nu \lesssim \nu_{inj}$, где показатель 2 соответствует параметру $\beta = 1$.

В соответствии с приведенными выше моделью и параметрами было сделано два расчета согласно квазилинейной (самосогласованной) теории. Первый расчет был сделан в полном соответствии с изложенной моделью. Во втором расчете влияние КВМ на процесс ускорения СКЛ не учитывалось, т. е. в уравнении (4) член $(\kappa \partial f / \partial r)_2 = 0$.

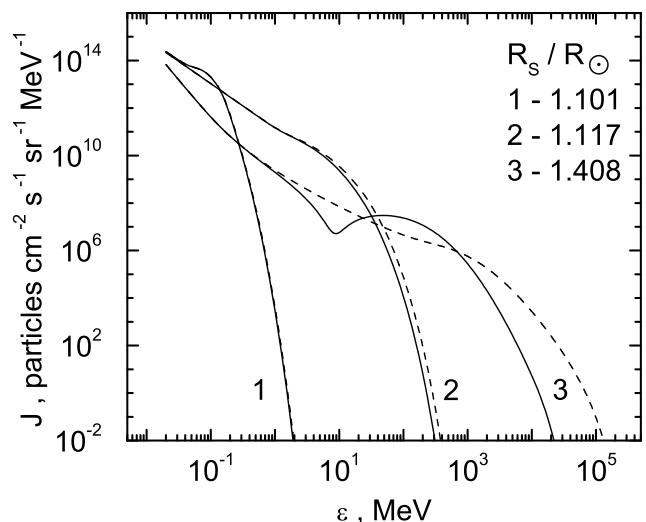


Рис. 2. Интенсивность $J(\varepsilon)$ протонов, ускоренных в солнечной короне, на фронте ударной волны как функция кинетической энергии ε для трех значений радиуса ударной волны: $R_s = 1.101, 1.117, 1.408 R_\odot$. Сплошные кривые соответствуют первому расчету, штриховые — второму

Спектр интенсивности

$$J(\varepsilon) = p^2 f(r = R_S, p, t) \quad (41)$$

протонов, ускоренных в солнечной короне, на фронте ударной волны как функция кинетической энергии ε приведен на рис. 2 для трех значений радиуса ударной волны: $R_S = 1.101, 1.117, 1.408 R_\odot$. Усложнение форм спектров $J(\varepsilon)$ протонов с ростом R_S вызвано сильно меняющимся темпом ускорения частиц.

Темп ускорения частиц ударной волной в расчетах непрерывно уменьшается с ростом ее радиуса R_S до $1.408 R_\odot$ в течении 256 с, где почти полностью прекращается. Причиной этого является рост альфвеновской скорости c_A (12) (с удалением от Солнца до своего максимума ~ 740 км/с в солнечной короне на расстоянии $\sim 3.8 R_\odot$ [36]), который ведет к непрерывному уменьшению альфвеновского числа Маха M_A (17) и, соответственно, эффективной степени сжатия σ_{ef} (15) на ударном фронте.

Отметим, что эффективная степень сжатия на ударном фронте σ_{ef} (15), которую испытывали ускоряемые частицы, уменьшилась в два раза: от 3 в начале расчетов до 1.5 в конце. Степень сжатия вещества на ударном фронте σ (3) и скорость ударной волны V_S (19) в расчетах можно считать почти постоянными: $\sigma \approx 3.57$ и $V_S \approx 833$ км/с. Величина давления ускоренных частиц $P_c < 0.05 P_m$ оправдывает пренебрежение модификацией ударной волны.

Форма интенсивности $J(\varepsilon)$ протонов для первого расчета при $1.408 R_\odot$ (см. сплошную кривую 3 на рис. 2) сигнализирует об истощении процесса ускорения частиц: при энергии $\varepsilon_{loc} \approx 9$ МэВ образовался локальный минимум. Протоны с энергиями $\varepsilon < \varepsilon_{loc}$ еще подвержены влиянию ударной волны, а протоны «бампа» с энергиями $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{loc}$ интенсивно покидают область ускорения [6, 7, 12].

Во втором расчете (см. штриховую кривую 3 на рис. 2) с ростом энергии ε от ~ 10 до ~ 100 МэВ наблюдается плавный переход от протонов, привязанных к ударному фронту, к протонам, интенсивно покидающим его окрестности.

Как видно из рис. 2, темп ускорения частиц в первом расчете в соответствии с теорией [12] убывал быстрее с ростом R_S из-за влияния КВМ, чем во втором, в котором КВМ не учитывался.

Фактором, определяющим эффективность ускорения, является количество вовлекаемых в ускорение частиц на данной стадии эволюции ударной волны $R_S(t)$. Этот фактор непосредственно определяет величину (амплитуду) суммарного спектра ускоренных частиц:

$$N(\varepsilon, t) = \frac{4\pi p^2}{v} \int f(r, p, t) dV, \quad (42)$$

где $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$. Здесь интегрирование ведется по всему объему, занятому частицами.

Суммарный спектр $N(\varepsilon)$ (42) можно приближенно представить в виде

$$N(\varepsilon) \propto N'(\varepsilon) \exp[-(\varepsilon/\varepsilon_{max})^\alpha], \quad (43)$$

где

$$N'(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-\gamma} \quad (44)$$

— степенной участок спектра $N(\varepsilon)$ (42) с показателем γ . Значение параметра α затруднительно предсказать аналитически по причине значительного изменения показателя q (14) в области ускорения.

Максимальная энергия ε_{max} в (43) определяется из соотношения

$$N(\varepsilon_{inj})(\varepsilon_{max}/\varepsilon_{inj})^{-\gamma} / N(\varepsilon_{max}) = e, \quad (45)$$

где e — основание натурального логарифма. Под предельно большими (предельными) энергиями частиц мы считаем энергии $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{max}$.

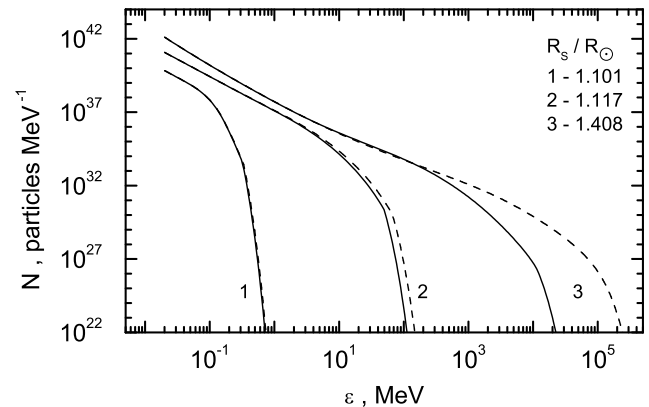


Рис. 3. Суммарный спектр $N(\varepsilon)$ протонов, ускоренных в солнечной короне, как функция кинетической энергии ε для трех значений радиуса ударной волны: $R_S = 1.101, 1.117, 1.408 R_\odot$. Сплошные кривые соответствуют первому расчету, штриховые — второму

На рис. 3 приведен суммарный спектр $N(\varepsilon)$ протонов, ускоренных в солнечной короне, как функция кинетической энергии ε для трех значений радиуса ударной волны: $R_S = 1.101, 1.117, 1.408 R_\odot$.

Сравним на рис. 3 сплошную кривую (первый расчет) со штриховой (второй расчет) для радиусов ударных волн $1.408 R_\odot$. Показатели коротких (до ~ 1 МэВ) степенных участков спектров $N(\varepsilon)$ на кривых одинаковы: $\gamma = 2.5$. С энергии ~ 1 МэВ на суммарных спектрах начали формироваться «бампы». Согласно выражению (45) максимальная энергия $\varepsilon_{max} = 9 \cdot 10^3$ МэВ на сплошной

кривой в 18.7 раза меньше, чем на штриховой, на которой $\varepsilon_{max} = 1.7 \cdot 10^5$ МэВ.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ НА ОРБИТЕ ЗЕМЛИ

Поскольку измерения потоков СКЛ чаще всего осуществляются вблизи орбиты Земли, т. е. на расстояниях, много больших $1.4R_{\odot}$, необходимо установить связь между спектром СКЛ, сформированным в процессе ускорения, и ожидаемым потоком СКЛ в последующие моменты времени на больших расстояниях $r \gg R_{\odot}$.

Упрощенная постановка задачи о распространении ускоренных ударной волной СКЛ и ее решение, приводящее к формуле Кримигиса [37], получено и детально рассмотрено для условий межпланетной среды в работе [6].

На втором этапе решения задачи, приведенном в этом разделе, мы распространяем полученные в предыдущем разделе в нижней короне Солнца суммарные спектры $N(\varepsilon)$ СКЛ на орбиту Земли для сравнения с данными измерений. Для этого на рис. 3 были взяты сплошная (первый расчет) и штриховая (второй расчет) кривые $N(\varepsilon)$ для радиуса ударной волны $R_S = 1.408R_{\odot}$.

Далее спектры $N(\varepsilon)$ с помощью формулы Кримигиса [37] преобразовываются во временные профили дифференциальной интенсивности $J'(r_e, t, \varepsilon)$ на орбите Земли (подробнее см. в [6]).

На IMP-8 прибор CPME измерял потоки $I(r_e, t, \Delta\varepsilon_i)$ протонов в 10 дифференциальных энергетических каналах [38], поэтому из расчета интенсивности $J'(r_e, t, \varepsilon)$ вычисляем теоретически определяемые потоки по формуле

$$I'(r_e, t, \Delta\varepsilon_i) = \frac{1}{\Delta\varepsilon_i} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} J'(r_e, t, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (46)$$

где ε_1 и ε_2 — соответственно нижняя и верхняя энергии приема частиц каналом прибора; $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, где i — номер канала от 1 до 10.

Чтобы достичь согласия с экспериментом, рассчитанные значения потоков $I'(r_e, t, \Delta\varepsilon_i)$ СКЛ уменьшены на фактор $f_{re} \approx 10^{-3}$, необходимость введения которого дано в работах [7, 14].

На рис. 4 приведена зависимость от времени дифференциальных по кинетической энергии ε потоков протонов $I(r_e, t, \Delta\varepsilon_i)$, измеренных прибором CPME в 10 энергетических каналах в течение 7–9 мая 1978 г. на борту космического аппарата IMP-8 [38], находившегося вблизи орбиты Земли.

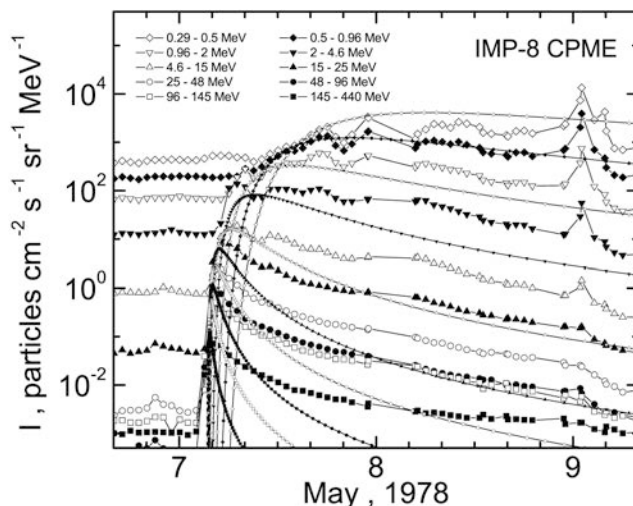


Рис. 4. Зависимости от времени дифференциальных потоков протонов, измеренных прибором CPME 7–9 мая 1978 г. на борту космического аппарата IMP-8. Линии, обозначенные крупными значками, представляют измерения прибором CPME на IMP-8, а линии, выделенные такими же, но мелкими значками, представляют расчет для того же канала энергий протонов. Приведены диапазоны энергий и обозначающие их значки для каждого из 10 каналов измерений протонов. Детали см. в тексте

Линии $I(r_e, t, \Delta\varepsilon_i)$, обозначенные на рис. 4 крупными значками, представляют измерения прибором CPME на IMP-8, а линии $I'(r_e, t, \Delta\varepsilon_i)$, выделенные такими же, но мелкими значками, представляют расчет для того же канала энергий протонов. Для каждого из 10 каналов измерений протонов диапазоны энергий и значки, обозначающие их, приведены на рис. 4.

На рис. 4 в пяти измеренных каналах самых низких энергий 9 мая наблюдаются максимумы в потоках протонов, свидетельствующие о приходе на IMP-8 межпланетной ударной волны. Это может служить указанием на то, что СКЛ в короне Солнца были получены на этой ударной волне.

В пяти измеренных каналах самых больших энергий потоки к 9 мая были смодулированы ударной волной в сторону их увеличения так, что наблюдаются сильные расхождения рассчитанных кривых с данными эксперимента (см. рис. 4).

Как видно на рис. 4, в целом наблюдается удовлетворительное согласие между расчетом и экспериментом, по крайней мере, максимумы в потоках имеют близкие по величине значения.

На рис. 5 десятью черными ромбами с указанием диапазонов ошибок по энергии ε показаны максимумы измерений потоков протонов $J(\varepsilon) = \max[I(r_e, t, \Delta\varepsilon_i)]$ прибором CPME в 10

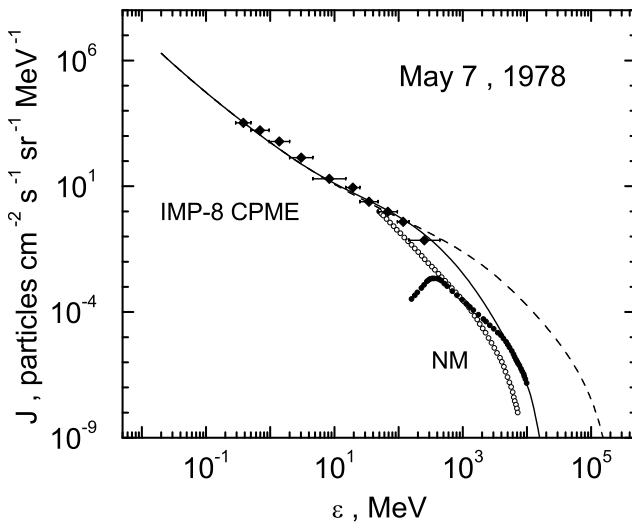


Рис. 5. Сопоставление наблюдаемых и рассчитанных спектров СКЛ на орбите Земли в событии 7 мая 1978 г. Десятью черными ромбами с указанием диапазонов ошибок по энергии ε приведены максимумы измерений потоков протонов прибором CPME в 10 энергетических каналах на космическом аппарате IMP-8. Черными кружками для периода времени 03:35–03:45 UT 7 мая и белыми кружками для периода времени 04:30–05:00 UT 7 мая приведены измерения нейтронными мониторами, совмещенные с измерениями на IMP-7 и IMP-8 (область измерений по энергии ε отмечена как NM) пиковых потоков протонов. Сплошной (расчет с учетом влияния КВМ) и штриховой (расчет без учета влияния КВМ) кривыми приведены дифференциальные по кинетической энергии ε рассчитанные спектры интенсивности протонов. Подробнее см. в тексте

энергетических каналах на космическом аппарате IMP-8, взятые в период времени от 00:00 UT 7 мая до 16:00 UT 8 мая 1978 г. (см. рис. 4).

Черными кружками для периода времени 03:35–03:45 UT 7 мая (первый из 5) и белыми кружками для периода времени 04:30–05:00 UT 7 мая (пятый из 5) на рис. 5 приведены измерения нейтронными мониторами, совмещенные с измерениями на IMP-7 и IMP-8 (область измерений по энергии ε отмечена как NM) пиковых потоков протонов, которые были взяты из работы [39].

На рис. 5 сплошной (расчет с учетом влияния КВМ) и штриховой (расчет без учета влияния КВМ) кривыми приведены дифференциальные по кинетической энергии ε рассчитанные спектры интенсивности протонов $J(\varepsilon) = \max[J'(r_e, t, \varepsilon)]$ на орбите Земли для события GLE31, произошедшего 7 мая 1978 г.

Сравнение на рис. 5 сплошной линии с данными измерений показывает, что квазилинейная теория [12] способна удовлетворительно описывать эксперимент во всем наблюдаемом широком диапазоне

энергий СКЛ.

Из измерений нейтронных мониторов, совмещенных с измерениями частиц на IMP-7 и IMP-8 [39], в событии GLE31 мы наблюдаем эффект убегания протонов с энергиями $\varepsilon > 450$ МэВ (в данном случае релятивистскими) из области ускорения, описанный в работах [6, 7] для процесса ускорения СКЛ ударной волной в нижней короне Солнца (см. также [4, 5, 22]). На рис. 5 видно, что предельные энергии $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{max}$ протонов, согласно эффекту убегания частиц, уменьшаются в спектрах от периода времени 03:35–03:45 UT к периоду 04:30–05:00 UT.

Таким образом, мы видим, что с ростом коэффициента диффузии частиц при удалении от Солнца растет их мобильность и способность убегать в межпланетное пространство. Чем больше энергия частицы, тем раньше она получает возможность покинуть область ускорения [6, 7].

Оценим грубо, до какого расстояния от Солнца ускоренные ударной волной протоны с энергиями $\varepsilon \gtrsim 50$ МэВ (см. на рис. 5 минимальную энергию на кривой из белых кружков) покидали окрестности ударного фронта.

Предположим, что начало первого периода времени 03:35 UT измерений нейтронными мониторами на Земле связано с моментом генерации протонов с максимально большими энергиями $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{max}$ ударной волной на расстоянии $1.408R_\odot$. Также предположим, что измерения протонов с энергиями $\varepsilon \gtrsim 50$ МэВ прекратились по окончании последнего периода, т.е. после 05:00 UT. За 5100 с ударная волна, бегущая от Солнца со скоростью 833 км/с, пройдет расстояние $\approx 4.2 \cdot 10^6$ км, удалившись на $\approx 6.1R_\odot$, т.е. до $7.5R_\odot$. Время распространения до Земли ускоренных ударной волной протонов с энергиями $\varepsilon \gtrsim 50$ МэВ в этот период времени будем считать неизменным.

Следовательно, можно допустить, что в этом событии все ускоренные протоны с энергиями $\varepsilon \gtrsim 50$ МэВ инжектировались в межпланетное пространство к моменту достижения ударной волной расстояния $7.5R_\odot$ от Солнца.

Протоны с энергиями $\varepsilon < 450$ МэВ, как видно из измерений нейтронными мониторами и измерений телескопами на IMP-7 и IMP-8 [39] в событии GLE31, прибывают на орбиту Земли с задержкой во времени по сравнению с протонами, имеющими энергию $\varepsilon > 450$ МэВ, из-за того, что их коэффициент диффузии в межпланетном пространстве $\kappa_\parallel(\varepsilon < 450 \text{ МэВ}) < \kappa_\parallel(\varepsilon \gtrsim 450 \text{ МэВ})$. Вследствии этого на рис. 5 мы видим рост амплитуды измерений протонов от периода време-

ни 03:35–03:45 UT к периоду 04:30–05:00 UT в области энергий $\varepsilon < 450$ МэВ. Это соответствует теоретическим представлениям об исследуемом здесь процессе ускорения СКЛ ударной волной в нижней солнечной короне [6, 7, 12] и их последующем распространении на 1 а.е. [6].

6. ВЫВОДЫ

Впервые проведено исследование экспериментальных данных для события GLE согласно квазилинейной (самосогласованной) теории [12] ускорения СКЛ ударной волной, образованной КВМ, в нижней короне Солнца с известными параметрами солнечной плазмы и с учетом влияния КВМ на процесс ускорения частиц.

Исследование события GLE31, произошедшего 7 мая 1978 г., с помощью теории [12] показало, что она способна удовлетворительно описывать эксперимент во всем наблюдаемом широком диапазоне энергий СКЛ.

Наилучшее согласие между теорией и измерениями получено в предположении, что скорость КВМ $V_P = 600$ км/с, поток энергии альфвеновских волн в основании короны $F_w = 1.4 \cdot 10^8$ эрг/(см² · с) и в выражении (36) $\beta = 1$.

Сделано предположение, что в событии GLE31 до $7.5R_\odot$ все ускоренные ударной волной протоны с энергиями $\varepsilon \gtrsim 50$ МэВ инжектировались в межпланетное пространство.

Полученные результаты позволяют нам утверждать о важности развиваемой квазилинейной теории [12] ускорения СКЛ ударной волной в нижней короне Солнца.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты настоящей работы могут быть полезны для анализа энергетического обмена в неоднородных системах, которые представляют интерес в физике плазмы и астрофизике.

Примененный к событию GLE31 сценарий ускорения СКЛ ударной волной в нижней короне Солнца, в котором над местом предстоящей вспышки может быть поток энергии альфвеновских волн в основании короны $F_w > 10^6$ эрг/(см² · с) и в выражении (36) $\beta > 2/3$, обсуждался автором с безвременно ушедшим от нас 28 ноября 2020 г. Е. Г. Бережко при написании работы [7].

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер ЕГИСУ НИОКТР 122011700180-7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Крымский, ДАН СССР **234**, 1306 (1977) [G. F. Krymskii, Sov. Phys. Dokl. **22**, 327 (1977)].
2. W. I. Axford, E. Leer, and G. Skadron, in *Proc. 15th ICRC*, 1977, Plovdiv, Bulgaria **11**, 132 (1977).
3. R. D. Blandford and J. P. Ostriker, *Astrophys. J.* **221**, L29 (1978), doi:10.1086/182658.
4. Е. Г. Бережко, В. К. Ёлшин, Г. Ф. Крымский, С. И. Петухов, *Генерация космических лучей ударными волнами*, Наука, Новосибирск (1988).
5. Е. Г. Бережко, Г. Ф. Крымский, УФН **154**, 49 (1988) [E. G. Berezhko and G. F. Krymskii, Sov. Phys. Usp. **31**, 27 (1988)].
6. Е. Г. Бережко, С. Н. Танеев, Письма в Астрон. ж. **29**, 601 (2003) [E. G. Berezhko and S. N. Taneev, Astron. Lett. **29**, 530 (2003)].
7. Е. Г. Бережко, С. Н. Танеев, Письма в Астрон. ж. **39**, 443 (2013), doi:10.7868/S0320010813060016 [E. G. Berezhko and S. N. Taneev, Astron. Lett. **39**, 393 (2013), doi:10.1134/S1063773713060017].
8. Л. И. Мирошниченко, УФН **188**, 345 (2018), doi:https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038091.
9. М. И. Панасюк, Л. И. Мирошниченко, УФН **192**, 413 (2022), doi:https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.07.039022.
10. M. A. Lee, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **158**, 38 (2005), doi:10.1086/428753.
11. A. S. Petukhova, I. S. Petukhov, S. I. Petukhov, and L. T. Ksenofontov, *Astrophys. J.* **836**, 36 (2017), https://doi.org/10.3847/1538-4357/836/1/36.
12. С. Н. Танеев, Л. Т. Ксенофонтов, Е. Г. Бережко, ЖЭТФ **161**, 20 (2022), doi:10.31857/S0044451022010023 [S. N. Taneev, L. T. Ksenofontov, and E. G. Berezhko, JETP **134**, 14 (2022), doi:10.1134/S1063776121120165].
13. Г. Ф. Крымский, В. Г. Григорьев, С. А. Стародубцев, С. Н. Танеев, Письма в ЖЭТФ **102**, 372 (2015), doi:10.7868/S0370274X15180046 [G. F. Krymsky, V. G. Grigoryev, S. A. Starodubtsev, and S. N. Taneev, JETP Lett. **102**, 335 (2015), doi:10.1134/S0021364015180071].
14. С. Н. Танеев, С. А. Стародубцев, В. Г. Григорьев, Е. Г. Бережко, ЖЭТФ **156**, 449 (2019), doi:10.1134/S0044451019090074 [S. N. Taneev, S. A. Starodubtsev, V. G. Grigor'ev, and E. G. Berezhko, JETP **129**, 375 (2019), doi:10.1134/S1063776119080089].

15. С. Н. Танеев, Е. Г. Бережко, ЖЭТФ **158**, 474 (2020), doi:10.31857/S0044451020090060 [S. N. Taneev and E. G. Berezhko, JETP **131**, 422 (2020), doi:10.1134/S1063776120080075].
16. Е. Г. Бережко, С. Н. Танеев, Письма в Астрон. ж. **42**, 148 (2016), doi:10.7868/S0320010816010010 [E. G. Berezhko and S. N. Taneev, Astron. Lett. **42**, 126 (2016), doi:10.1134/S1063773716010011].
17. С. Н. Танеев, С. А. Стародубцев, Е. Г. Бережко, ЖЭТФ **153**, 765 (2018), doi:10.7868/S0044451018050085 [S. N. Taneev, S. A. Starodubtsev, and E. G. Berezhko, JETP **126**, 636 (2018), doi:10.1134/S106377611804009X].
18. E. G. Berezhko, S. N. Taneev, and K. J. Trattner, J. Geophys. Res. **116**, A07102 (2011), doi:10.1029/2010JA016404.
19. G. P. Zank, Gang Li, and V. Florinski, J. Geophys. Res. **109**, A04107 (2004), doi:10.1029/2003JA010301.
20. Г. Ф. Крымский, Геомагн. и аэроном. **4**, 977 (1964) [G. F. Krymskiy, Geomagn. Aeron. **4**, 763 (1964)].
21. E. N. Parker, in *Proc. 9th ICRC*, 1965, London, United Kingdom **1**, 26 (1966).
22. Е. Г. Бережко, В. К. Ёлшин, Л. Т. Ксенофонтов, ЖЭТФ **109**, 3 (1996) [E. G. Berezhko, V. K. Elshin, and L. T. Ksenofontov, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **109**, 3 (1996)].
23. M. A. Lee, J. Geophys. Res. **88**, 6109 (1983), doi:10.1029/JA088iA08p06109.
24. M. A. Lee, J. Geophys. Res. **87**, 5063 (1982), doi:10.1029/JA087iA07p05063.
25. B. E. Gordon, M. A. Lee, E. Möbius, and K. J. Trattner, J. Geophys. Res. **104**, 28263 (1999), doi:10.1029/1999JA900356.
26. E. G. Berezhko, V. K. Elshin, and L. T. Ksenofontov, Astropart. Phys. **2**, 215 (1994).
27. T. K. Suzuki and S. Inutsuka, J. Geophys. Res. **111**, A06101 (2006), doi:10.1029/2005JA011502.
28. W. H. Matthaeus, D. J. Mullan, P. Dmitruk et al., Nonlin. Processes Geophys. **10**, 93 (2003), doi:10.5194/npg-10-93-2003.
29. C.-Y. Tu and E. Marsh, Space Sci. Rev. **73**, 1 (1995), doi:10.1007/BF00748891.
30. C. T. Russell, *Solar Wind*, ed. by C. P. Sonett et al., Washington, NASA SP-308 (1972), p. 365.
31. E. C. Sittler, Jr., and M. Guhathakurta, Astrophys. J. **523**, 812 (1999), doi:10.1086/307742.
32. A. J. Hundhausen, *Coronal Expansion and Solar Wind*, Vol. 5, Springer, New York (1972).
33. D. V. Reames, Space Sci. Rev. **90**, 413 (1999), doi:10.1023/A:1005105831781.
34. <https://umbra.nascom.nasa.gov/SEP>.
35. H. Debrunner and J. A. Lockwood, in *Proc. 16th ICRC*, 1979, Kyoto, Japan **5**, 218 (1979).
36. G. Mann, A. Klassen, H. Aurass, and H.-T. Classen, Astron. Astrophys. **400**, 329 (2003), doi:10.1051/0004-6361:20021593.
37. S. M. Krimigis, J. Geophys. Res. **70**, 2943 (1965).
38. http://sd-www.jhuapl.edu/IMP/imp_index.html.
39. H. Debrunner, E. Flückiger, J. A. Lockwood, and R. E. McGuire, J. Geophys. Res. **89**, 769 (1984), doi:10.1029/JA089iA02p00769.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОГО ДИНАМО

А. Ю. Серенкова ^{а*}, Д. Д. Соколов ^{а,с}, Е. В. Юшков ^{а,б,с**}

^а Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия

^б Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия

^с Московский центр фундаментальной и прикладной математики
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 октября 2022 г.,
после переработки 23 ноября 2022 г.
24 ноября 2022 г.

Исследуются свойства нелинейного параметрического резонанса на примере работы маломодовой динамо-модели Паркера. Данная модель представляет собой систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений и в простейшем приближении описывает процессы генерации и осцилляции крупномасштабных магнитных полей в звездных системах. В отсутствие нелинейных эффектов рассматриваемая задача, по аналогии с системой гармонических колебаний, допускает асимптотическое выделение кратных резонансных частот. Однако несмотря на то, что на первый взгляд на этих частотах разумно ожидать усиления амплитуды и в нелинейном случае, продемонстрировано, что при наличии нелинейных слагаемых поведение системы существенно более сложное. В частности, на резонансных или малых частотах может наблюдаться подавление генерации, в то время как усиление происходит в непосредственной близости от резонанса или на достаточно больших частотах. Обсуждаются причины такого поведения, а также возможность влияния параметрического резонанса на установление планетарных динамо-циклов.

DOI: 10.31857/S0044451023040077
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе исследование отталкивается от следующего замечательного факта. Период магнитной солнечной активности, известной как 11-летний солнечный цикл, практически совпадает с периодом обращения Юпитера. Этот факт неоднократно отмечался в литературе, так, например, история вопроса обсуждается в недавно опубликованной работе [1] и в приведенных там исторических ссылках. Заманчивым кажется предположить причинную связь между этими явлениями, т.е. считать, что слабое влияние Юпитера является физической причиной солнечного цикла.

Такое предположение многократно делалось в ряде работ прошлых лет, впрочем, делается и в настоящее время, так в качестве одной из последних можно упомянуть работу [2]. И хотя на самом деле полный период солнечного цикла составляет около 22 лет, в данных работах отмечается, что половинный период в 11 лет упоминается потому, что простейшие методы наблюдения магнитных колебаний нечувствительны к знаку магнитного поля.

Между тем, если не поддаваться на заманчивое предположение, то следует признать, что идея о непосредственном воздействии удаленного Юпитера на Солнце с образованием солнечного цикла магнитной активности совершенно не вписывается в имеющиеся в этой области представления. Так, в работе [1], при анализе имеющихся наблюдательных данных о магнитной активности звезд с экзопланетными системами, продемонстрировано, что для нашей звездной системы речь идет о случайном совпадении двух чисел. С другой стороны, известно много

* E-mail: serenkova.ai19@physics.msu.ru

** E-mail: yushkov.msu@mail.ru

экзопланетных систем, планеты которых находятся гораздо ближе к соответствующим звездам, чем Юпитер к Солнцу, не говоря уже о многочисленных тесных двойных звездных системах. Поэтому нет оснований заранее отвергать идею возникновения параметрического резонанса, связанного с периодическим воздействием экзопланеты на течения в звезде.

Задача о влиянии периодического возмущения на генерацию магнитного поля в сферической оболочке тоже многократно исследовалась в литературе (из сравнительно недавних статей упомянем работы [3, 4], а также приведенные там ссылки), однако полученные таким образом результаты не кажутся нам достаточно проясняющими ситуацию. Действительно, добавление периодического возмущения в уравнения динамо в ряде случаев сопровождается заметным увеличением амплитуды волны квазистационарного магнитного поля, с распространением которой связан солнечный цикл, однако это происходит далеко не только при стандартном соотношении частоты возмущения и собственной частоты, известном из теории параметрического резонанса. Убедительно идентифицировать изменение амплитуды волны магнитного поля в сложной многомерной задаче звездного динамо, которая содержит самые разнообразные эффекты, тоже непросто. Есть, например, случаи, когда не вызывающее сомнения периодическое воздействие на звездное динамо оказывается неожиданно скромным, так что его заметное проявление требует воздействия очень близкой звезды размера, сопоставимого с размером исходной звезды, см., например, [5].

Все это снова побуждает нас обратиться к задаче о параметрическом воздействии на работу звездного динамо и рассмотреть ее в постановке, ориентированной на выделение параметрических эффектов. Для этого мы рассматриваем простейшую постановку задачи о генерации магнитного поля в сферической конвективной оболочке звезды, предложенной в работе [6], разлагаем соответствующие уравнения в ряды Фурье по базису, состоящему из соответствующих мод свободного затухания и сохраняем минимальный набор мод, позволяющих возбуждать колеблющееся магнитное поле. В итоге мы приходим к сравнительно простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую вписываем внешнее параметрическое воздействие. Эта система заметно сложнее уравнения Матье, которое обычно используется при исследовании задачи о параметрическом резонансе, поскольку результаты нетрудно сравнивать с аналогичными для урав-

нения Матье [7]. При этом предложенная нами система в определенных пределах допускает и аналитическое исследование, что, конечно, способствует пониманию физики явления. Отметим, что проводимое нами упрощение задачи лежит в русле вывода уравнения Матье для параметрического резонанса — строго говоря, полное описание человека, который раскачивается на качелях, изменяя свое положение на них, содержит много степеней свободы, а в уравнении Матье учитываются лишь главные из них.

Наконец, заметим, что хотя рассматриваемая задача возникает при изучении физики Солнца, она, как и явление резонанса вообще, имеет общезначимые применения. Речь идет о резонансе в системах, в которых наряду с параметрическим воздействием присутствует самовозбуждение и его последующее нелинейное подавление. Подобные задачи могут, конечно, возникать в различных областях физики. Мы, естественно, не претендуем на полное исследование таких резонансных явлений, но думаем, что опыт исследования данной задачи может быть востребован и в других сходных ситуациях.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для анализа нелинейного параметрического резонанса мы сознательно используем простейшую динамо-модель. Эта модель была предложена в работе [6] для описания миграционной волны в конвективной оболочке Солнца. Она является прямым следствием уравнения магнитной индукции, усредненного по случайному двухмасштабному полю скорости, хотя следует признать, что в 1955 г. Ю. Паркер лишь гениально угадал вид основного уравнения. Позднее же (см., например, [8]) уравнение для среднего магнитного поля $\mathbf{V}$ было выведено в явном виде:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{V}] + \alpha \cdot \text{rot} \mathbf{V} + \beta \cdot \Delta \mathbf{V}. \quad (1)$$

Таким образом, для описания линейных эффектов генерации в рамках данной модели достаточно знать среднюю скорость течения $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle$, поле гидродинамической спиральности $\alpha \sim \langle \mathbf{v}, \text{rot} \mathbf{v} \rangle$ и коэффициент турбулентной диффузии β , включающий в себя магнитную диффузию и энергию турбулентного потока [8].

При наличии достаточной асимметрии конвективного потока α и дифференциального вращения $\mathbf{V}(r)$ усредненное уравнение (1) может описывать перекачку гидродинамической энергии в энергию

среднего магнитного поля, см., например, [9]. Магнитная энергия в такой модели нарастает экспоненциально, при этом образуются периодические осцилляции, представляющие собой, с физической точки зрения, волны активности, бегущие от полюсов к экватору. Нелинейные эффекты, характеризующие уменьшение гидродинамической спиральности с ростом поля, приводят к стабилизации экспоненциального роста. В итоге образуется периодический процесс, описывающий открытый еще в 1844 г. периодический 11-летний динамо-цикл Солнца [10] и влияющий на всевозможные плазменные явления в Солнечной системе, в частности, на формирование корональных петель, вспышечную активность и прочее [11].

Ключевым упрощением, предложенным Паркером, при переходе в сферическую систему координат являлось представление аксиально-симметричного магнитного поля в виде суммы тороидальной компоненты B и полоидальной компоненты A :

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi + R \cdot \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi).$$

Такое представление в случае тонкого сферического слоя радиуса R , в котором величина поля зависит только от времени и зенитного угла θ , переводит уравнение (1) в систему из двух уравнений. В безразмерном виде она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= R_\alpha B + A_{\theta\theta} - \mu^2 A, \\ \dot{B} &= R_\omega (A \sin(\theta))_\theta + B_{\theta\theta} - \mu^2 B, \end{aligned} \quad (2)$$

и носит название системы Паркера. Два параметра, входящие в систему, R_α и R_ω , описывают безразмерные интенсивности источников генерируемых магнитных полей, а вспомогательное число μ определяет радиальную часть диффузии и пропорционально отношению радиуса к толщине конвективной оболочки (для Солнца эта величина традиционно принимается равной 3, см., например, комментарии в работе [12]).

Примечательно, что полученная система (2) описывает не специфическое поведение Солнца, а процесс, характерный для многих звезд, обладающих магнитным полем. Генерируемые в такой системе миграционные волны (их часто называют динамо-волнами), да и сам динамо-процесс наиболее чувствительны к так называемому динамо-числу D — произведению безразмерных параметров, отвечающих за дифференциальное вращение R_ω и спиральность R_α . В целом, перенормировка компонент в системе (2) позволяет объединить R_α и R_ω и далее использовать исключительно управляющий параметр

D , однако для удобства анализа (см. последний раздел) мы оставим два параметра, а не один. Гипотетически периодическое влияние двойных звезд друг на друга может приводить к периодическому изменению R_α или R_ω , что, в свою очередь, может вызывать параметрический резонанс. При этом, как было сказано выше, сам периодический звездный цикл, а точнее, стабилизация экспоненциально растущего поля, является типично нелинейным процессом. Поэтому возникает интересный и важный вопрос, насколько при нелинейном подавлении в параметрическом резонансе может быть выше амплитуда колебаний и может ли резонанс в системе (2) приводить к эффектам, принципиально отличающимся от наблюдаемых на Солнце.

Для упрощения модели сведем систему в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, принимая в расчет тот факт, что B и A из-за наличия ротора имеют разную симметрию относительно экватора. Предположим, что B антисимметрично, а A — симметрично относительно $\theta = \pi/2$, и воспользуемся маломодовым подходом, раскладывая тороидальную и полоидальную компоненты по гармоникам:

$$\begin{aligned} B &= b_1 \sin(2\theta) + b_2 \sin(4\theta), \\ A &= a_1 \sin(\theta) + a_2 \sin(3\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя такое разложение в систему Паркера, получим четыре дифференциальных уравнения для каждой моды:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= (R_\alpha/2)b_1 - (1 + \mu^2)a_1, \\ \dot{a}_2 &= (R_\alpha/2)(b_1 + b_2) - (9 + \mu^2)a_2, \\ \dot{b}_1 &= R_\omega(a_1 - a_2) - (4 + \mu^2)b_1, \\ \dot{b}_2 &= 2R_\omega a_2 - (16 + \mu^2)b_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Это основная система для дальнейшего анализа и моделирования, для которой остается сделать последние предположения о том, что, во-первых, внешние источники приводят к осцилляции динамо-параметров, а во-вторых, что рост магнитного поля приводит к уменьшению гидродинамической спиральности и к стабилизации роста магнитного поля:

$$R_\omega \rightarrow R_\omega(1 + \sigma \sin(\omega t)); \quad R_\alpha \rightarrow \frac{R_\alpha}{1 + \langle b_1^2 + b_2^2 \rangle}. \quad (5)$$

Мы специально разделили воздействия параметрической модуляции и нелинейного подавления для R_ω и R_α , это принципиально не меняет результаты, зато помогает при теоретическом анализе сводить систему из четырех уравнений первого порядка к системе

из двух уравнений второго порядка, см. ниже. Еще раз подчеркнем, что используемая система (4) является максимально упрощенной моделью, демонстрирующей при этом базовое поведение миграционных волн. Пример такой волновой динамики показан на рис. 1, где изображена зависимость амплитуды полоидальной компоненты A от времени t и угла θ . Сплошные и штриховые кривые являются линиями уровня амплитуды (сплошные — положительные значения, штриховые — отрицательные), а сам рисунок носит название баттерфляй-диаграммы динамоволны (о солнечной баттерфляй-диаграмме более подробно можно прочитать, например, в [13]). Наш же интерес в первую очередь связан с периодическим изменением параметра и наличием параметрического резонанса, который мы и попробуем зафиксировать, как численно, так и аналитически.

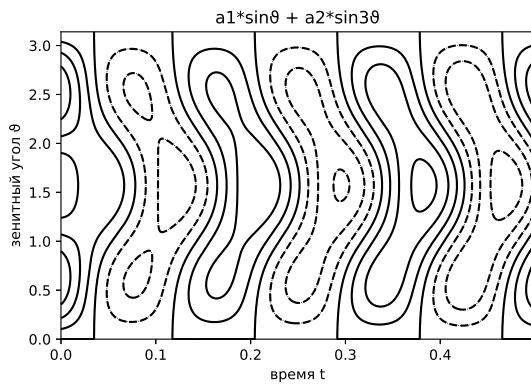


Рис. 1. Баттерфляй-диаграмма: зависимость амплитуды полоидальной компоненты A от времени t и угла θ . Сплошные и штриховые кривые являются линиями уровня амплитуды, сплошные соответствуют положительным значениям, штриховые — отрицательным

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для численного решения системы дифференциальных уравнений мы используем метод Рунге–Кутты 4 порядка, см., например, [14]. Шаг при этом подбирается таким образом, чтобы ошибка вычисления была менее 0.1% (для представляемых результатов выбран шаг $dt = 0.001$, а время моделирования $t_{max} = 50$). Начальные условия можно выбирать свободно, так как в линейных случаях нас интересует только скорость экспоненциального роста, а в нелинейных — уровень, на который выходит система после стабилизации, в частности, у нас $a_1(0) = 0.01$, $a_2(0) = 0.02$, $b_1(0) = 0.03$, $b_2(0) = 0.04$. Для каждой

задачи сначала восстанавливаются частота и амплитуда собственных колебаний в отсутствие параметрического возбуждения, т. е. при $\sigma = 0$. Для этого находятся последние два максимума осцилляций в отсутствие параметрического возбуждения, затем из разности координат максимумов находится собственная частота, а из квадрата максимума, деленного пополам — амплитуда.

В случае линейного режима для каждой моды восстанавливается скорость экспоненциального роста. Для этого на интервале времени $[(5/6)t_{max}, t_{max}]$ находятся максимумы осцилляций, которые должны образовывать растущую экспоненту, от полученных значений берутся натуральные логарифмы и аппроксимируются прямой с помощью хорошо известного метода наименьших квадратов (МНК) [15]. Это позволяет не только найти скорость экспоненциального роста, но и убедиться в том, что рост действительно имеет показательную скорость, так как полученная ошибка МНК близка к машинному нулю. Данная процедура повторяется для различных частот возбуждающей силы с шагом $d\omega = 0.1$ на диапазоне частот $\omega = [25, 140]$ для маломодовой системы и $\omega = [15, 80]$ для симметричной, в том числе в районе собственной и удвоенной частот систем (на малых частотах ω скорость экспоненциального роста не ищется в силу увеличения периода периодического воздействия, пропорционального $\sin(\omega t)$, и ограниченности полного времени счета). Тут следует заметить, что на левых графиках, приведенных ниже на рис. 2–4, соответствующих линейному режиму, иногда можно наблюдать наличие шума, которое связано с методикой определения роста; так, на рис. 2 шум появляется там, где рост сменяется на затухание, а на рис. 3 и 4 — там, где сумма колебаний вырождается в биения (см. рассуждения в следующем разделе).

В случае нелинейного режима, когда рост амплитуды прекращается, анализируется амплитуда осцилляций энергетической характеристики $\langle b_1^2 + b_2^2 \rangle$. При этом сама стабилизация происходит за счет подавления R_α , см. (5), где среднее от этой энергетической характеристики пересчитывается на каждом периоде колебаний. Амплитуда колебаний нормируется на соответствующую ей амплитуду в случае отсутствия параметрического воздействия, т. е. при $\sigma = 0$. Здесь важным моментом является то, что указанное отношение энергий находится после стабилизации процесса генерации и при этом на достаточно широком интервале частот ω , см. предыдущий раздел, что требует достаточно больших численных мощностей.

При этом нельзя не заметить, что выбранный способ стабилизации — когда усреднение энергии подавления происходит за предыдущий период — это только один из возможных вариантов подавления. Он является достаточно простым и традиционным способом описания α -квенчинга, однако в численном эксперименте мы пробовали и другие способы, например, стабилизация за счет энергии в предыдущий момент времени или за счет энергии, усредненной с начала моделирования процесса, или за счет энергии, рассчитанной по компонентам $a_{1,2}$. Но поскольку различные способы нелинейного подавления дают схожие результаты, мы остановились на изложенном выше.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

При теоретическом анализе параметрического воздействия можно оттолкнуться от того факта, что классическое уравнение гармонических колебаний с параметрическим резонансом при малой величине периодического возмущения ($\sigma \ll 1$) допускает асимптотическое решение вблизи резонансных частот, кратных удвоенной частоте системы, см., например, [9]. Отсюда хотелось бы сделать вывод, что в более сложных, но подобных системах, например, при наличии нелинейности или при наличии дополнительного экспоненциального роста/затухания, и ситуация с резонансом будет подобной.

Упрощенная система. Для того чтобы это продемонстрировать, рассмотрим колебательную систему из двух уравнений, являющуюся некоторым упрощением модели Паркера:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\omega_0^2 b - \mu^2 a, \\ \dot{b} &= (1 + \sigma \sin(\omega t))a - \mu^2 b.\end{aligned}\quad (6)$$

В случае постоянной частоты ω_0 , выражая из первого уравнения $b(t)$ и подставляя его во второе, несложно свести систему к стандартному уравнению параметрических колебаний с вязкостью:

$$\ddot{a} + 2\mu^2 \dot{a} + (\omega_0^2 + \mu^4 + \omega_0^2 \sigma \sin(\omega t))a = 0, \quad (7)$$

а замена

$$a(t) = f(t) \exp(-\mu^2 t)$$

приводит нас к классическому уравнению Матье [7]:

$$\ddot{f} + \omega_0^2(1 + \sigma \sin(\omega t))f = 0. \quad (8)$$

Резонансные решения для уравнения Матье ищутся в околорезонансной области в виде гармонической функции с малым экспоненциальным ростом:

$$f(t) = f_1 \exp(st + i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + f_1^* \exp(st - i(\omega_0 + \varepsilon/2)t). \quad (9)$$

Подставим (9) в уравнение (8) и рассмотрим удвоенную возбуждающую частоту $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$. Затем для малой амплитуды возбуждающей силы $\sigma \sim \varepsilon$ пренебрежем старшими гармониками и соберем слабые при $\exp(i(\omega_0 + \varepsilon/2)t)$ и $\exp(-i(\omega_0 + \varepsilon/2)t)$. Получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 + (s + i(\omega_0 + \varepsilon/2))^2)f_1 + (\sigma\omega_0^2/2i)f_1^* &= 0, \\ -(\sigma\omega_0^2/2i)f_1 + (\omega_0^2 + (s - i(\omega_0 + \varepsilon/2))^2)f_1^* &= 0.\end{aligned}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравняем к нулю определитель и получим скорость роста s из квадратного уравнения

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 + s^2 - (\omega_0 + \varepsilon/2)^2)^2 + 4s^2(\omega_0 + \varepsilon/2)^2 &= \frac{\sigma^2\omega_0^4}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= \pm \sqrt{\frac{\sigma^2\omega_0^2/4 - (\omega_0^2 - (\omega_0 + \varepsilon/2)^2)^2}{2(\omega_0^2 + (\omega_0 + \varepsilon/2)^2)}} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma^2\omega_0^2}{4} - \varepsilon^2}. \quad (10)\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом диффузии, генерация в системе (6), когда $s > \mu^2$, возможна в достаточно узкой полосе $\omega \in [2\omega_0 - \varepsilon, 2\omega_0 + \varepsilon]$:

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{\frac{\sigma^2\omega_0^2}{4} - 4\mu^4}.$$

Заметим, что из формулы (4) следует, что величина s порядка $\varepsilon \sim \sigma$, т. е. мала, при этом аналогичные резонансные коридоры есть и на частотах, кратных $2\omega_0$, однако скорость генерации и ширина коридора там существенно меньше. На верхней панели рис. 2 приведена зависимость показателя скорости роста от частоты вынуждающей силы. Сплошной линией показаны численные результаты (причины шума описаны более подробно в предыдущем разделе), а черными точками — аналитические, полученные с помощью формулы (10). Вертикальные штриховые линии выделяют удвоенную и основную частоты системы, а штрих-пунктирные отсекают область генерации $s - \mu > 0$.

В нелинейном режиме параметрического резонанса для системы (6) с ростом амплитуды $a(t)$

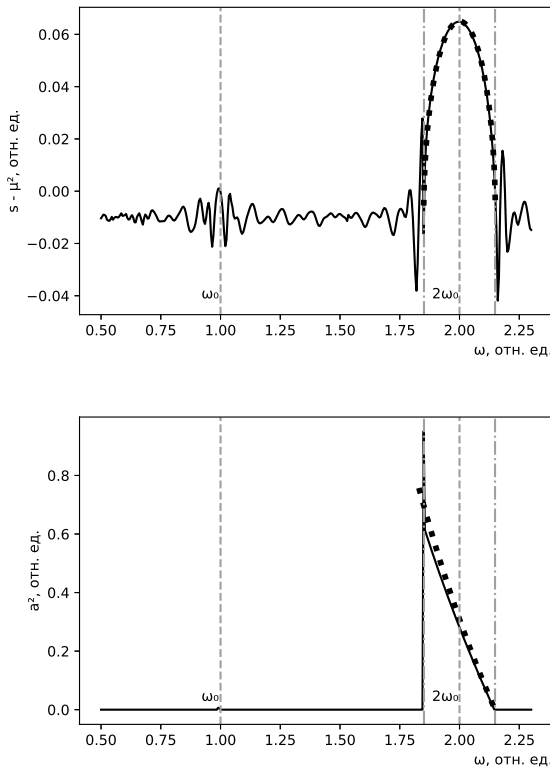


Рис. 2. Упрощенный случай. Верхняя панель — зависимость скорости экспоненциального роста a от частоты параметрического возбуждения в случае линейного режима. Нижняя панель — зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения в случае нелинейного режима. Точки — аналитическое решение в районе удвоенной частоты, штрих-пунктирные вертикальными линиями — коридор генерации. Параметры моделирования $\omega_0 = 1, \mu^2 = 0.01, \sigma = 0.3$

уменьшается параметр ω_0^2 , за счет чего система постепенно «развязывается», а это, в свою очередь, приводит к стабилизации экспоненциального роста и выходу на квазистационар. Стационар понимается в том смысле, что решение осциллирует, но энергия осцилляций, которую мы берем равной среднему от $\langle a^2 \rangle$ за период, остается постоянной. С помощью функции (4) оценим уровень стационара в зависимости от частоты осцилляции параметра ω . Зададим уменьшение параметра ω_0^2 как

$$\omega_{eff}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \langle a^2 \rangle}, \quad (11)$$

тогда при стабилизации, приравняв скорость генерации к нулю, из (4) получаем

$$\frac{\omega_{eff}^2 \sigma^2}{4} - \varepsilon^2 = 4\mu^4.$$

Выражая отсюда ε и подставляя в выражение для частоты $\omega = 2\omega_{eff} + \varepsilon$, получаем

$$\omega - \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + \langle a^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \omega_{eff}^2}{4} - 4\mu^4},$$

откуда следует зависимость для $\langle a^2 \rangle$ от ω :

$$\langle a^2 \rangle = \sqrt{\frac{(4\omega_0 + \sqrt{\sigma^2 \omega_0^2 - 16\mu^4})^2}{4\omega^2}} - 1. \quad (12)$$

Нижняя панель рис. 2 демонстрирует зависимость энергии системы при наличии нелинейной стабилизации от частоты вынуждающей силы. Сплошной линией показаны численные результаты, а черными точками — аналитические результаты, полученные с помощью формулы (12). Явно видно, что согласно и тем, и другим результатам в нелинейном режиме кривая насыщения становится несимметричной относительно резонансной частоты, а максимум амплитуды насыщения смещается от нее влево.

Динамо-система Паркера. Теперь рассмотрим маломодовую систему (4), главное отличие которой от упрощенной системы в том, что генерация в ней системе происходит наравне с осцилляцией и при отсутствии параметрического резонанса. Определяется это тем, что система из четырех уравнений может иметь комплексные собственные значения, в отличие от системы из двух уравнений, где комплексные значения либо вещественные, либо чисто мнимые. С этим же связана и сложность, так как в общем случае, чтобы найти собственные частоты системы Паркера, надо найти корни уравнения четвертого порядка. Поэтому начнем с симметричного случая, для которого корни находятся явно. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= (R_\alpha/2)b_1 - \mu^2 a_1, \\ \dot{a}_2 &= (R_\alpha/2)(b_1 + b_2) - \mu^2 a_2, \\ \dot{b}_1 &= R_\omega(1 + \sigma \sin(\omega t))(a_1 - a_2) - \mu^2 b_1, \\ \dot{b}_2 &= 2R_\omega(1 + \sigma \sin(\omega t))a_2 - \mu^2 b_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Выразив $b_1(t)$ и $b_2(t)$ из первых двух уравнений, подставим их во вторые два (заметим, что это удобно сделать в силу нашего предположения о параметрической модуляции параметра R_ω , а не R_α). Получим систему из двух уравнений второго порядка, для которой по аналогии с уравнением (7) сделаем замену

$$a_{1,2}(t) = f_{1,2}(t) \exp(-\mu^2 t).$$

Получим систему типа системы Матье:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 - (R_\alpha R_\omega/2)(1 + \sigma \sin(\omega t))(f_1 - f_2) &= 0, \\ \ddot{f}_2 - (R_\alpha R_\omega/2)(1 + \sigma \sin(\omega t))(f_1 + f_2) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для такой системы при отсутствии периодической силы $\sigma = 0$ несложно вычислить собственные частоты ω_0 и скорости генерации γ_0 гармонического решения:

$$\lambda_0 = \gamma_0 + i\omega_0 = \pm \sqrt{-\frac{R_\alpha R_\omega}{2}} \exp(\pm 3i\pi/8). \quad (15)$$

При $\sigma \neq 0$ также можно искать решение в гармоническом виде, однако в отличие от описанной ранее упрощенной системы (6) такое решение будет иметь комплексные добавки к частотам. Эту проблему можно обойти, если искать решение системы (14) в виде суммы не двух, а четырех комплексно сопряженных слагаемых:

$$\begin{aligned} f_{1,2} = & \bar{f}_{1,2} \exp((\gamma_0 + s + i\beta)t + i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + \\ & + \bar{f}_{1,2}^* \exp((\gamma_0 + s - i\beta)t - i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + \\ & + \bar{\bar{f}}_{1,2} \exp((\gamma_0 + s - i\beta)t + i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + \\ & + \bar{\bar{f}}_{1,2}^* \exp((\gamma_0 + s + i\beta)t - i(\omega_0 + \varepsilon/2)t). \end{aligned} \quad (16)$$

По аналогии с предыдущим случаем рассмотрим внешнее периодическое воздействие, имеющее удвоенную частоту $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$. Пренебрегая старшими гармониками и собирая слагаемые у каждой из четырех гармоник экспонент, получим для $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{\bar{f}}_1^*$ и $\bar{\bar{f}}_2^*$ систему из четырех уравнений с определителем

$$\begin{vmatrix} a & -d & c & -c \\ d & a & c & c \\ -c & c & b & -d \\ -c & -c & d & b \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a &= (\gamma_0 + s + i\beta + i\omega/2)^2 - R_\alpha R_\omega/2, \\ b &= (\gamma_0 + s + i\beta - i\omega/2)^2 - R_\alpha R_\omega/2, \\ c &= -R_\alpha R_\omega \sigma/4i, \\ d &= -R_\alpha R_\omega/2. \end{aligned}$$

Приравнявая этот определитель к нулю, получаем уравнение

$$(d(a+b) - 2c^2)^2 + (ab - d^2)^2 = 0, \quad (17)$$

решая которое относительно $\gamma_0 + s + i\beta$, получаем

$$\gamma_0 + s + i\beta = \sqrt{\lambda_0^2 \pm i\gamma_0 \omega \sqrt{1 \pm \frac{iR_\alpha^2 R_\omega^2 \sigma^2}{8\lambda_0^2 \omega^2}} - \frac{\omega^2}{4}}.$$

При малых σ асимптотически это можно переписать как

$$s + i\beta + i\varepsilon/2 = \pm \frac{R_\alpha^2 R_\omega^2 \sigma^2}{32\lambda_0 \omega (\lambda_0 \pm i\omega/2)} + o(\sigma^2). \quad (18)$$

Левая часть равенства (18) и есть добавка к скорости генерации при наличии периодического воздействия с частотой ω . При $\sigma = 0$ эта добавка равна нулю, а следовательно, скорость генерации полностью совпадает с λ_0 , определяемой формулой (15). При $\sigma \neq 0$ вещественная часть решения (18) при больших ω больше λ_0 , а при малых — меньше, в районе удвоенной частоты скорость генерации имеет локальный максимум. На верхней панели рис. 3 приведена зависимость скорости экспоненциального роста $a_{1,2}$ от частоты параметрического возбуждения. Численные результаты вычисления скорости генерации показаны сплошной линией, а аналитические — точками. При этом уменьшение σ приводит к тому, что две кривые стремятся к прямой $s = \gamma_0$. Отличительной чертой является отсутствие четко выделенного узкого максимума резонанса на кратных частотах, что, однако, объясняется вырожденностью симметричной системы и отсутствием гармонического решения для системы (14).

Кроме того, заметим, что найденные решения представляют собой две гармоники с близкими частотами — разница между частотами 2β — и экспоненциально растущими амплитудами, что наравне с колебаниями может приводить к появлению биений. Биения проявляют себя при минимуме правой части выражения (18) и при численных расчетах приводят к появлению шума, что связано с методикой вычислений (см. предыдущий раздел). Появление диффузии, пропорциональной μ^2 , см. систему (4), приведет лишь к уменьшению скорости генерации на μ^2 , сам же характер решения останется таким же.

Если включить нелинейное подавление в симметричном случае, то энергия колебаний, а соответственно и R_α , изменится настолько, что генерация стабилизируется. Но так как на малых частотах ω скорость генерации меньше, чем в невозбужденном случае, а на больших — больше, то относительно энергии системы при отсутствии внешнего возбуждения на больших частотах энергия установившихся колебаний вырастет, а на малых — наоборот, упадет. Такая зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения приведена на нижней панели рис. 3. Шумы, появляющиеся на зависимости, как было сказано выше, являются прямым следствием используемого численного алгоритма.

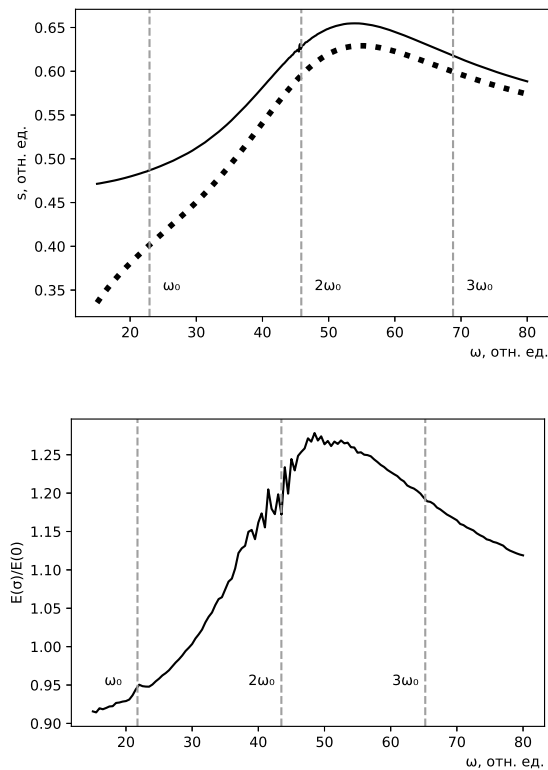


Рис. 3. Симметричный случай. Верхняя панель — зависимость скорости экспоненциального роста $a_{1,2}$ от частоты параметрического возбуждения в случае линейного режима. Нижняя панель — зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения в случае нелинейного режима (энергия нормируется на энергию системы без возбуждения). Параметры моделирования $R_\alpha = 0.35$, $R_\omega = -2500$, $\sigma = 0.3$, $\xi = 1$; собственные частоты для линейного случая $\omega_0 \approx 23.02$, для нелинейного — $\omega_0 \approx 21.74$

При рассмотрении несимметричной системы (4), т. е. случая, когда помимо μ^2 есть константы, появляющиеся из-за взятия вторых производных по θ от соответствующих гармоник, аналитически вычислить собственные частоты системы не представляется возможным. Однако относительно симметричного случая можно сказать следующее: система (4) будет также приводить к уравнению четвертого порядка, но если в симметричном случае положительная вещественная часть корней λ_0 была одинаковой, что приводило к решению из четырех экспонент (14), то в несимметричном случае будет существовать корень с большей вещественной частью. Следовательно, решение будет гармоническим и схожим как с симметричным случаем (13), так и с упрощенной системой (6).

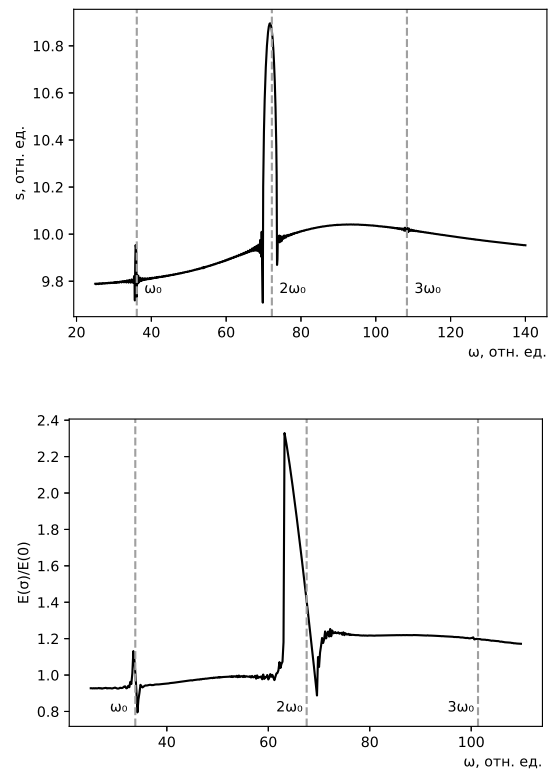


Рис. 4. Несимметричный случай. Верхняя панель — зависимость скорости экспоненциального роста $a_{1,2}$ от частоты параметрического возбуждения в случае линейного режима. Нижняя панель — зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения в случае нелинейного режима (энергия нормируется на энергию системы без возбуждения). Параметры моделирования $R_\alpha = 1.0$, $R_\omega = -2500$, $\sigma = 0.3$, $\xi = 1$; собственные частоты $\omega_0 \approx 36.11$

Это мы и наблюдаем при численном анализе. Так, в линейном режиме, см. верхнюю панель рис. 4, зависимость скорости генерации от частоты периодического воздействия представляет собой суперпозицию аналогичных зависимостей для упрощенной и симметричной систем. Хорошо виден широкий профиль подложки во всем диапазоне частот и острые пики вблизи удвоенной частоты (и кратных удвоенной). В нелинейном режиме график энергии насыщения тоже представляет собой комбинацию подложки (симметричная система, нижняя панель рис. 3) и треугольников (упрощенная система, нижняя панель рис. 2). При этом картина параметрического резонанса для системы Паркера стала существенно сложнее ожидаемой для гармонических колебаний. Появились области подавления генера-

ции на низких частотах и усиления на высоких, пики усиления сдвинуты от кратных частот и находятся левее, в непосредственной близости от них. Точно в такой же близости, но правее, находятся пики подавления генерации. Из этого можно сделать вывод, что природа параметрического резонанса для динамо-систем объяснима, но имеет гораздо больше особенностей, нежели стандартная картина.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе исследован параметрический резонанс в маломодовой динамо-системе Паркера. Эта система является одной из простейших моделей процессов генерации крупномасштабных магнитных полей в случайных проводящих средах и в первом приближении описывает формирование звездных динамо-циклов, аналогичных 11-летнему циклу солнечной активности. Мы не рассматриваем в работе причины, приводящие к периодическим параметрическим осцилляциям, ограничиваясь общими соображениями, такими как, например, периодическое влияние вращающихся планет на гидродинамическую спиральность в конвективной оболочке. Более того, мы не утверждаем, что такое периодическое воздействие присутствует, например, в системах Солнце–Юпитер, или Земля–Луна, а сосредотачиваемся на вопросе о том, насколько картина параметрического резонанса в динамо-системах может отличаться от классического параметрического резонанса, описываемого уравнением Матье. Благодаря настолько упрощенной постановке, эти отличия удастся проанализировать как численно, так и аналитически.

В рассмотренных случаях на графиках зависимости скорости генерации от частоты параметрического воздействия, действительно видны пики, которые можно отождествить с эффектами параметрического резонанса. Примечательно, что эти пики для динамо-систем не обязательно возникают при периоде внешнего воздействия, вдвое меньшем собственного периода колебаний. Более того, в ряде случаев удается объяснить аналитически, почему иногда условия возникновения параметрического резонанса совпадают с классическими, а иногда — отличаются от него. Оказывается, что в общем случае в динамо-системах влияние периодического внешнего воздействия на скорость генерации есть на всех частотах. Особенно при этом выделяется частный случай совпадающих коэффициентов диффузии при различных компонентах разложения маг-

нитного поля по модам, так как в этом частном случае классического параметрического резонанса вообще не наблюдается, а наблюдается следующее: во-первых, подавление генерации на малых частотах периодической модуляции и усиление генерации на больших, во-вторых, пик такого параметрического усиления генерации, лежащий между удвоенной и утроенной собственными частотами системы, более широкий, чем на удвоенной частоте в классическом случае, но при этом более низкий по амплитуде. Может быть, более грамотно такой отклик системы на периодическое изменение параметров следовало бы назвать не «параметрическим резонансом», для которого характерен избирательный по частоте отклик, а «неизбирательным параметрическим резонансом». Тогда можно было бы сказать, что в общем случае наблюдается суперпозиция «классического» и «неизбирательного» резонансов. Однако, оставляя вопросы терминологии для дальнейшего обсуждения, нельзя не отметить, что обнаруженное явление — отсутствие классического параметрического резонанса при совпадении коэффициентов диффузии для разных компонент магнитного поля — совпадает по смыслу с результатами, полученными ранее в других работах, в частности, в работе [16].

Еще одним важным с нашей точки зрения результатом является то, что возникновение резонансных пиков не кажется столь ярким явлением, как возникновение резонансных пиков в задачах, не связанных с развитием неустойчивостей. Конечно, это объясняется тем, что появление неустойчивости само по себе является очень заметным явлением, которое вполне может быть более заметным, чем резонанс, поэтому усиление или подавление генерации на фоне уже происходящей генерации заметить гораздо сложнее.

Если говорить о реальных динамо-системах, то следует учитывать тот факт, что экспоненциальное нарастание крупномасштабного магнитного поля — очень редко наблюдаемое явление. В подавляющем большинстве систем экспоненциальная генерация затухает за счет обратного влияния растущего магнитного поля на гидродинамические параметры системы. В настоящей работе учитывалось влияние роста магнитного поля на гидродинамическую спиральность. Анализ энергии установившихся колебаний в зависимости от параметрического воздействия показал, что резонансное воздействие может приводить не к возрастанию, а к уменьшению амплитуды динамо-волны, т.е. может возникать не резонансное усиление, а резонансное поглощение как

в близких к резонансу областях, так и просто на малых частотах периодической силы. Резонансное поглощение, конечно, известно в ряде физических контекстов, но в контексте задачи динамо является очевидно недостаточно изученным. Говоря о непосредственных приложениях проведенного исследования к физике Солнца, отметим, что на фоне полученных результатов факт совпадения длины солнечного цикла с периодом обращения Юпитера перестает представляться столь привлекательным в контексте исследования природы солнечного цикла. Также еще раз отметим, что проведенное в конкретной ситуации исследование параметрического резонанса в системах с самовозбуждением и нелинейным подавлением может быть интересно и в других аналогичных ситуациях.

Финансирование. Численный анализ параметрического резонанса в динамо-системах выполнен при поддержке Минобрнауки РФ в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075–15–2019–1621). Асимптотический анализ периодического воздействия на генерацию крупномасштабных структур проводился при поддержке фонда Базис (грант № 21-1-3-63-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. V.N. Obridko, M.M. Katsova, and D.D. Sokoloff, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **516.1**, 1251 (2022).
2. F. Stefani, J. Beer, A. Giesecke, T. Gloaguen, M. Seilmayer, R. Stepanov, and T. Weier, *Astronomische Nachrichten* **341**, 600 (2020).
3. D. Moss and D. Sokoloff, *Astr. and Astrophys.* **553**, A37 (2013).
4. D. Moss and D. Sokoloff, *Astr. Reps.* **61(10)**, 878 (2017).
5. D. Moss, N. Piskunov, and D. Sokoloff, *Astr. and Astrophys.* **396(3)**, 885 (2002).
6. E.N. Parker, *The Astrophys. J.* **122**, 293 (1955).
7. N.W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Clarendon Press, Oxford (1947).
8. Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*, Пер. с англ., Мир, Москва (1984).
9. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Теоретическая физика*, Физматлит, Москва (2001).
10. H. Schwabe, *Sonnenbeobachtungen im Jahre 1843, Von Herrn Hofrath Schwabe in Dessau.* **21**, 233 (1844).
11. M.N. Gnevyshev, *Solar Phys.* **51(1)**, 175 (1977).
12. S.M. Tarbeeva, V.B. Semikoz, and D.D. Sokoloff, *Astr. Reps.* **55(5)**, 456 (2011).
13. G. Ruediger and A. Brandenburg, *Astr. and Astrophys.* **296**, 557 (1995).
14. J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons (2016).
15. S.M. Stigler, *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900*, Harvard University Press, Harvard (1986).
16. Л.Л. Кичатинов, А.А. Непомнящих, *Письма в Астрон. Ж.* **41(7)**, 409 (2015).

ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ОТ ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ В ЭЛЕКТРОННО-НЕЙТРОННЫХ ДЕТЕКТОРАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ENDA

К. О. Куринов^{a*}, Д. А. Кулешов^a, А. А. Лагуткина^b, Ю. В. Стенькин^{a,b},
О. Б. Щеголев^{a,b}

^a Институт ядерных исследований Российской академии наук
117312, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 28 октября 2022 г.,
после переработки 28 ноября 2022 г.
Принята к публикации 30 ноября 2022 г.

В рамках проекта LHAASO (Large High Altitude Air Shower Observatory) в Китае создается установка ENDA (Electron Neutron Detector Array). Концепция установки состоит в одновременной регистрации электромагнитной и адронной компонент широких атмосферных ливней (ШАЛ) с помощью эн-детекторов. Для оценки количества адронов в ШАЛ детекторы установки регистрируют вторичные тепловые нейтроны, задержанные относительно фронта ливня. При этом часть задержанных импульсов создается одновременным прохождением нескольких заряженных частиц через сцинтиллятор (сигнал от одной частицы лежит ниже порога регистрации), а также шумами фотоумножителя. В работе предлагается метод выделения нейтронных импульсов для эн-детекторов с применением сверточных нейронных сетей и проводится сравнение с базисным методом, применяемым в настоящее время на установке.

DOI: 10.31857/S0044451023040089

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Проект ENDA (Electron Neutron Detector Array) основан на использовании измерений адронной и электронной компоненты для оценки энергии первичной частицы и атомного номера [1–3]. Прототипы установки ENDA были созданы на территории ИЯИ РАН в Москве (ENDA-INR) и в Китае в городе Янгбаджинг (ENDA-YBJ) на высоте 4300 м над уровнем моря, они состоят из 16 электронно-нейтронных детекторов (эн-детекторов) для изучения широких атмосферных ливней (ШАЛ) с энергиями выше 1 ПэВ. В установках регистрируются сигналы от заряженных частиц и тепловых нейтронов, которые генерируются высокоэнергетическими адронами ливня при их взаимодействии с грунтом.

Информация о числе адронов на уровне наблюдения позволяет улучшить восстановление энергии и массы первичной частицы [4,5]. Количество адронов ливня пропорционально количеству тепловых нейтронов и может быть использовано для его оценки [6]. Для регистрации электронно-фотонной и адронной компонент ливня в установке используются эн-детекторы (разработанные в ИЯИ РАН) на основе неорганического сцинтилляционного компаунда $\text{ZnS}(\text{Ag}) + \text{B}_2\text{O}_3$ с необогащенным бором.

Выделение импульсов от нейтронов основано на различии форм импульсов, получаемых при захвате в данном сцинтилляторе тепловых нейтронов, легких релятивистских заряженных частиц и шумов. Существуют различные способы идентификации нейтронных импульсов, включающие использование аналитических методов [7–9], а также методов машинного обучения, таких как метод опорных векторов [10], использование полносвязных нейронных сетей и метод k-средних [11], а также применение сверточных нейронных сетей (Convolutional Neural

* E-mail: kyrinov.ko@gmail.com

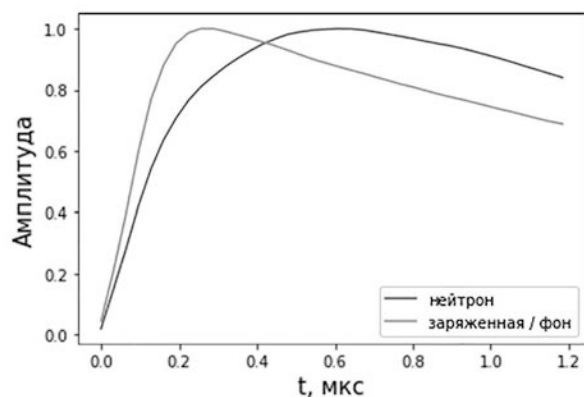


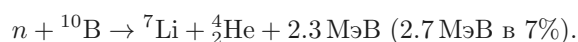
Рис. 1. Фронт импульса заряженной и нейтронной компоненты

Networks, CNN) [12]. В статье [12] приведено сравнение, в котором алгоритм разделения сигналов от заряженной и нейтронной компонент для сцинтиллятора на основе ${}^6\text{LiF} : \text{ZnS}(\text{Ag})$ с примесью поливинилтолуола показал лучшее качество по сравнению с другими аналитическими методами разделения сигналов.

В работе предлагается метод выделения нейтронных импульсов для эн-детекторов с применением сверточных нейронных сетей и проводится сравнение с базисным методом, применяемым в настоящее время на установке.

2. МЕТОДИКА РЕГИСТРАЦИИ

Тепловые нейтроны регистрируются с помощью следующей реакции:



Легкие релятивистские частицы (β , γ , μ) возбуждают в основном быструю компоненту (~ 40 нс) сцинтиллятора $\text{ZnS}(\text{Ag})$, в то время как тяжелые частицы (α , ${}^7\text{Li}$) возбуждают также и медленные компоненты сцинтиллятора (несколько микросекунд и более). Сигналы с последнего диода ФЭУ поступают на дискриминатор-интегратор-усилитель (ДИУ), где интегрируются в течение 1 мкс. ДИУ расположен непосредственно в детекторе. После усиления сигнал поступает по кабелю на вход АЦП.

Для заряженной компоненты фронт интегрированного импульса круто возрастающий, но из-за того, что исходный импульс не является прямоугольным, а имеет экспоненциальный хвост, время возрастания фронта равно не ~ 40 нс, а ~ 200 нс. Для

нейтронной компоненты из-за увеличенного времени собирания заряда увеличивается и фронт возрастания интегрированного импульса. На рис. 1 представлены нормированные усредненные фронты импульса для заряженной и нейтронной компонент.

Отметим, что в наших работах по изучению вариаций фонового потока тепловых нейтронов используется время интегрирования равное 5–10 мкс [13, 14].

Совпадателные импульсы от фронта ливня регистрируются детекторами в течение первой микросекунды, нейтроны же около 1 мс живут в грунте и более 30 мс в воздухе и им необходимо время для замедления в грунте (~ 500 мкс). Чтобы избежать просчетов, связанных с прохождением мощных ШАЛ, вызывающих насыщение электроники, и вследствие этого с мертвым временем, вводится задержка начала счета нейтронов и они регистрируются во временном интервале от 100 мкс до 5 мс после фронта ливня.

Осциллограмма события состоит из 164500 точек, где шаг оцифровки составляет 32 нс. Первый импульс соответствует энерговыделению от прохождения фронта ШАЛ, далее следуют импульсы от задержанных нейтронов. На рис. 2 показана осциллограмма зарегистрированного события ШАЛ со всех сработавших детекторов (отмечены разным цветом) с установки ENDA-INR.

3. БАЗИСНЫЙ МЕТОД

Метод интегрирования заряда [9] основан на оценке отношения заряда, собранного от "быстрой" компоненты сцинтиллятора, к заряду, собранному за время достижения максимальной амплитуды интегрированного сигнала. Для нейтронных импульсов это отношение всегда меньше 1, для легких релятивистских заряженных частиц и фона отношение близко или равно 1. Для получения хорошего качества классификации сигналов по форме импульса данным методом необходимо время интегрирования порядка 10 мкс. Ради улучшения временного разрешения, необходимого для счета нейтронных импульсов, сопровождающих ливень, в установке используется компромиссное время интегрирования, равное всего лишь 1 мкс. Однако в этом случае алгоритм разделения на основе интегрирования заряда дает низкое качество классификации.

На данный момент в установке применяется алгоритм [2], который в дальнейшем мы будем называть базисным, согласно которому на основе анали-

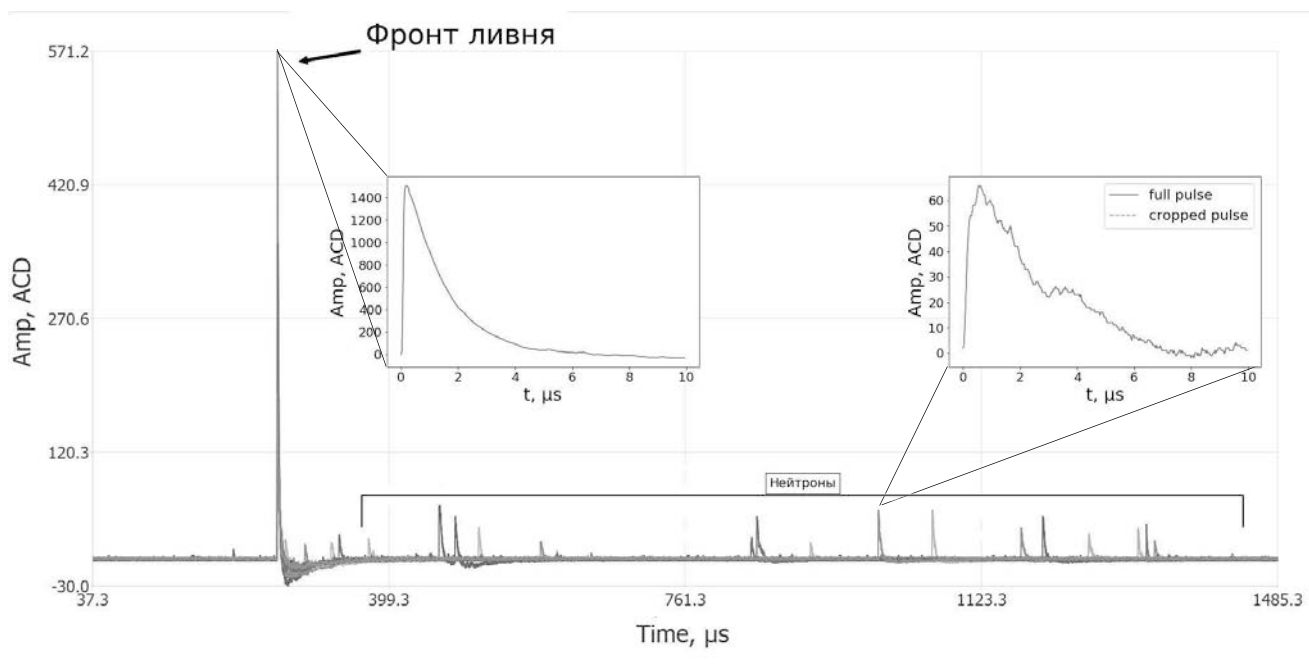


Рис. 2. Осциллограмма события ШАЛ

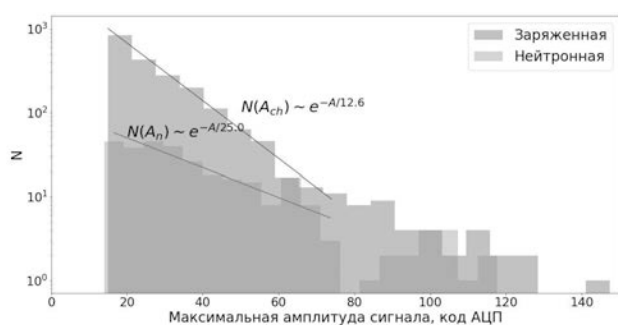


Рис. 3. Распределение по максимальной амплитуде сигнала

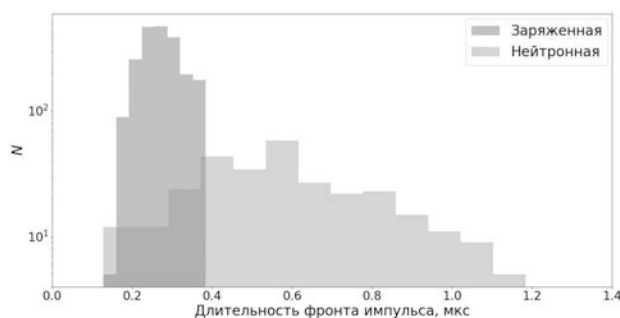


Рис. 4. Распределение по длительности фронта импульса

за распределения по фронту возрастания интегрированного импульса выбирается пороговое значение

и все сигналы, чей фронт возрастания импульса лежит слева от этого значения, считаются сигналами от заряженной компоненты и фоном, а справа — сигналами от нейтронной компоненты.

4. СОЗДАНИЕ ОБУЧАЮЩЕЙ И ВАЛИДАЦИОННОЙ ВЫБОРОК

Для обучения сверточной нейронной сети была сформирована обучающая выборка на основе импульсов, полученных из набора осциллограмм, записанных в течение 11 месяцев работы установки ENDA-INR. Для формирования выборки по заряженной компоненте были взяты осциллограммы с установки, работающей в режиме единичных совпадений. В данном режиме импульсы являются одиночными и являются сигналами как от заряженной компоненты, так и от нейтронной. Чтобы оставить импульсы только от заряженной компоненты, импульсы, классифицированные базисным методом как нейтронные, были удалены из выборки.

Выборка по нейтронной компоненте формировалась из запаздывающих импульсов больших событий ШАЛ. Под большими событиями подразумеваются события, в которых число зарегистрированных нейтронов лежит выше пуассоновского фона (верхнее распределение на рис. 5). Также был установлен

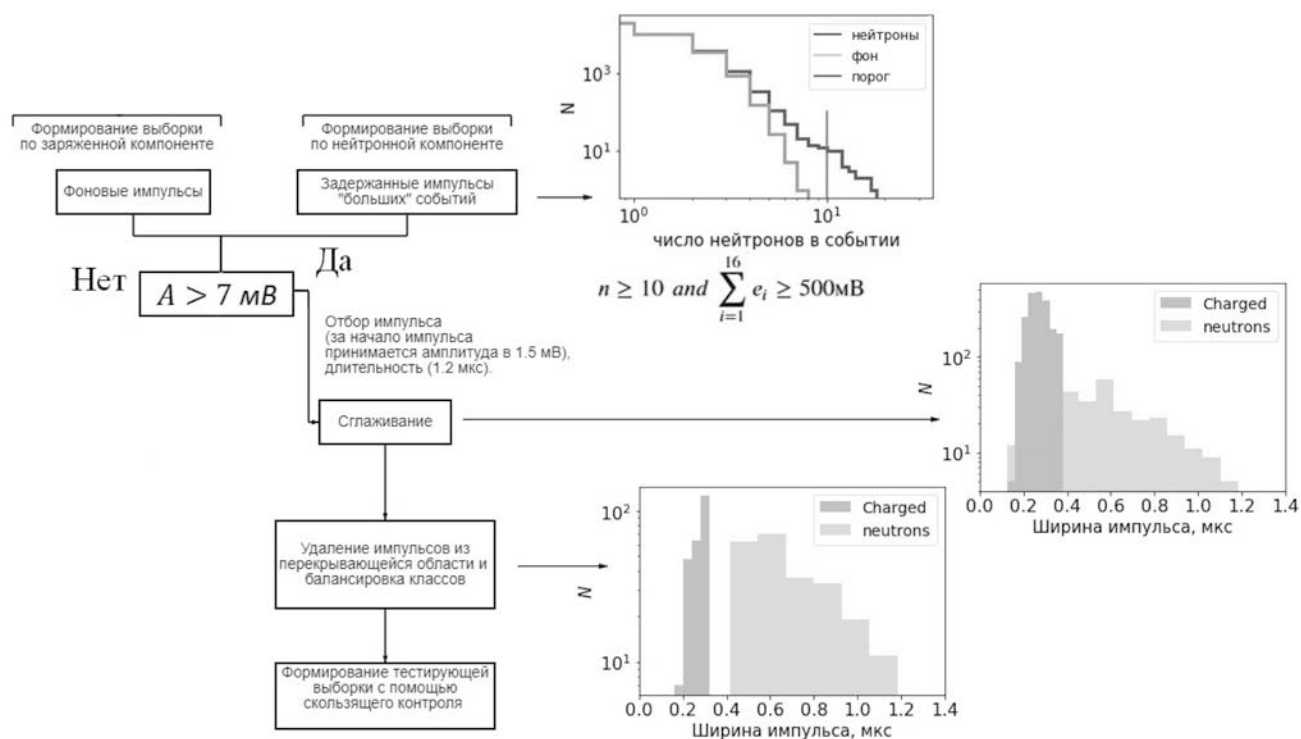


Рис. 5. Алгоритм формирования обучающей выборки

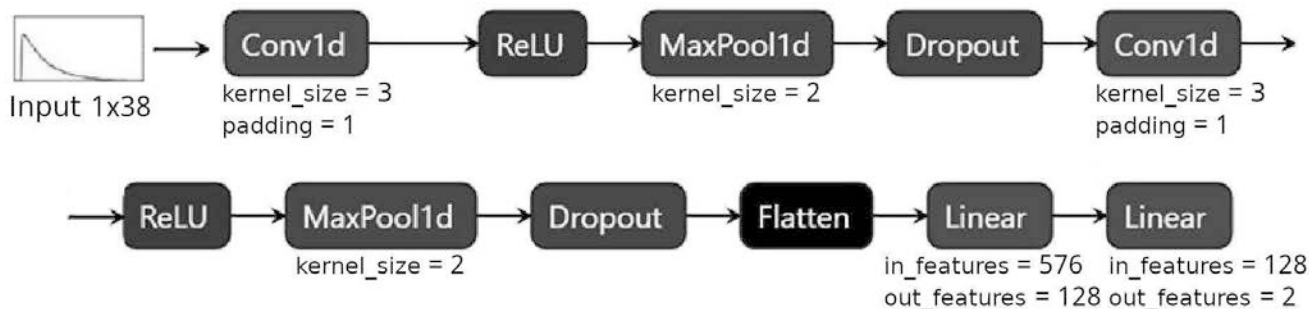


Рис. 6. Архитектура нейронной сети

порог на суммарное энергосодержание в детекторах в 500 мВ. В таких событиях доля заряженной компоненты подавлена относительно нейтронной компоненты и можно все запаздывающие импульсы считать нейтронными.

Количество задержанных импульсов на ливень в диапазоне от 100 мкс до 5 мс после фронта ШАЛ распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием равным 0.4. Это контролируется с помощью случайного программного триггера. Среднее значение количества нейтронных импульсов по полученной выборке равно 18.8 и из-за того, что вклад в задержанные импульсы вносят и фоновые нейтроны, и заряженная компонента, можно утверждать, что заряженная компонента в больших событиях по-

давлена относительно нейтронной более чем в 47 раз.

Импульсы отбирались из условия превышения амплитуды импульса порога в 7 мВ. Все импульсы из выборки имели длительность в 1.2 мкс или в 38 точек (при шаге дискретизации в 32 нс). За начало импульса был принят порог в 0.5 мВ. После этого все сигналы сглаживались с помощью скользящей регрессии [15]. В результате описанных выше действий было отобрано 2210 импульсов заряженной и 348 импульсов нейтронной компонент. На рис. 3 и 4 представлены распределения по максимальной амплитуде и длительности фронта импульса для обеих компонент, где под длительностью фронта понимается интервал времени между началом импульса и



Рис. 7. t-SNE представление эмбеддингов. Верхняя панель — исходные данные, нижняя панель — после обучения

его максимумом.

После построения распределения по времени возрастания фронта импульса, для использования аппроксимирующих свойств нейронной сети из выборки были удалены все импульсы, чьи времена возрастания фронта находились в пересекающейся области. Затем выборки для каждого класса были сбалансированы. Конечное распределение по длительности фронта импульса для обоих классов представлено на самом нижнем распределении на рис. 5. По полученной выборке были построены фронты импульсов обоих компонент. Максимальная амплитуда усредненного фронта импульса нейтронной компоненты оказалась в 1.4 раза больше, чем заряженной компоненты.

Эффективность модели оценивалась с помощью k-fold кросс-валидации [16], где вся выборка разбивалась на 3 равные подвыборки и точность модели оценивалась по среднему значению на всех подвыборках. Вместе с этим, была создана тестирующая выборка, которая была сформирована на основе осциллограмм событий ШАЛ с большим числом нейтронов для установки ENDA-YBJ, расположенной на плато Янгбаджинг на высоте 4300 м

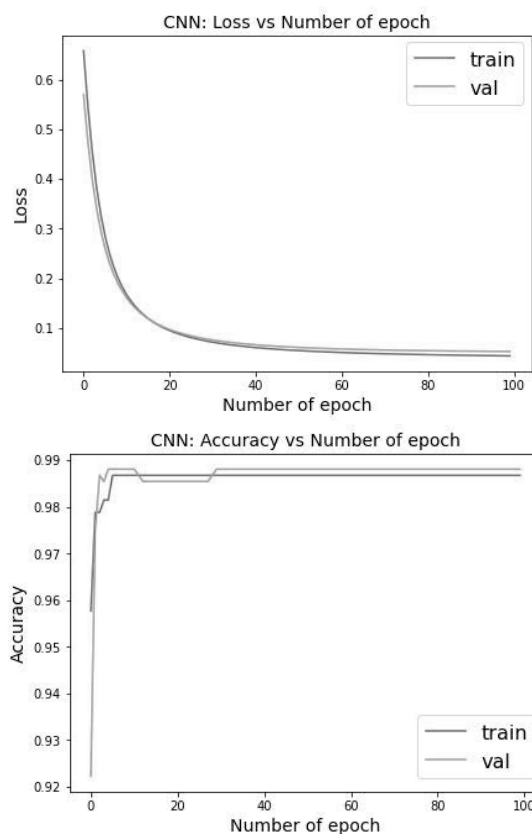


Рис. 8. Графики обучения нейронной сети. Верхняя панель — зависимости потерь от эпохи, нижняя панель — зависимости доли верных ответов от эпохи

над уровнем моря. По сравнению с импульсами, полученными на установке ENDA-INR, большинство импульсов, полученных на ENDA-YBJ, имеют длительность фронта импульса, находящуюся в области перекрытия двух компонент. Именно в этой области и возникает основная проблема классификации импульсов. Из-за различных шагов оцифровки в установке ENDA-INR (32 нс) и ENDA-YBJ (20 нс) импульсы из ENDA-YBJ были линейно интерполированы на шаг в 32 нс.

5. АРХИТЕКТУРА НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Для создания нейросети использовался фреймворк PyTorch [17], архитектура сети представлена на рис. 6.

В работе применялась нейронная сеть, состоящая из двух частей. Первая часть представляет из себя сверточную сеть, входом которой является вектор размерности $(N, 38)$, где N — размер батча, а выходом вектор (эмбеддинг) размерности $(N, 128)$. Этот слой обучался с помощью функции потерь Sub-center ArcFace [18]. Функция потерь имеет следующий вид:

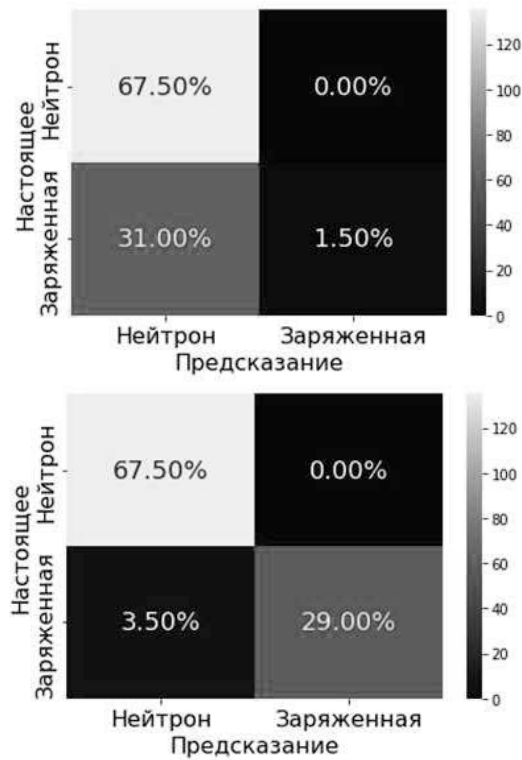


Рис. 9. Матрица ошибок. Верхняя панель — базисный метод, нижняя панель — CNN

$$\ell_{ArcFace_{subcenter}} = -\log \frac{e^{\cos(\theta_{i,y_i}+m)}}{e^{\cos(\theta_{i,y_i}+m)} + \sum_{j=1, j \neq y_i}^N e^{\cos(\theta_{i,j})}}, \quad (1)$$

где $\theta_{i,j} = \arccos(\max_k (W_{jk}^T x_i))$, $k \in \{1, \dots, K\}$ — косинусное расстояние между элементом выборки и одним из центров класса.

Отличительная идея данной функции потерь состоит в введении гиперпараметра m , отвечающего за некоторую пустую область (decision margin) между элементами разных классов в гиперпространстве размерности, соответствующей размеру эмбединга. Благодаря этому, элементы, лежащие на границе классов и в пересекающихся областях, классифицируются точнее, чем при использовании стандартной перекрестной энтропии.

На рис. 7 представлена визуализация эмбедингов с помощью метода t-SNE [19]. На верхней панели изображено представление выборки входных данных, на нижней — результат после обучения.

Вторая часть являлась логистической регрессией, которая переводила эмбединг в конечный вектор из двух значений, которые соответствовали ве-

роятностям принадлежности к каждому из классов (заряженной компоненте или нейтронной).

Модель обучалась в течение 100 эпох при размере батча в 32 элемента. В качестве оптимизатора использовался Adam [20] с коэффициентом скорости обучения $lr = 10^{-3}$ и весовым коэффициентом L2 регуляризации равным 10^{-5} . На рис. 8 представлены графики потерь и точности в зависимости от эпохи обучения.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ

Эффективность методов разделения определялась путем оценки основных метрик классификации на основе матрицы ошибок, таких как precision, recall и F1 мера на тестирующей выборке. На рис. 9 представлены матрицы ошибок для метода, использующегося в настоящее время в установке, и метода, основанного на машинном обучении.

Значения, расположенные в левом нижнем и правом верхнем углах матрицы, показывают процент неверно классифицированных импульсов. В таблице представлены значения основных метрик для сравнения для тестирующей выборки.

Таблица. Сравнение результатов

Метрика	Базисный метод	CNN
Precision	79%	97%
Recall	69%	96%
F1	58%	96%

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Был разработан метод выделения сигналов от тепловых нейтронов с использованием сверточных нейронных сетей в эн-детекторах. Алгоритм показал лучшее качество классификации на тестирующей выборке по сравнению с базисным методом, который применяется на данное время в установке. В дальнейшем разработанный метод будет применен в эксперименте ENDA.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. V. Stenkin, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **196**, 293 (2009).
2. O. B. Shchegolev, V. V. Alekseenko, D. A. Kuleshov et al., J. Phys. Conf. Ser. **1690** (2020).
3. Yu. V. Stenkin, V. V. Alekseenko, Danzengluobu et al., Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **85**, 405 (2021).
4. О. Б. Щеголев, В. В. Алексеенко, Ю. В. Стенькин и др., Изв. РАН, сер. физ. **83**, 691 (2019).
5. Ю. В. Стенькин, О. Б. Щеголев, Изв. РАН, сер. физ. **81**, 541 (2017).
6. Yu. V. Stenkin, V. V. Alekseenko, D. M. Gromushkin et al., Chinese Phys. C **37**, 015001 (2013).
7. G. Ranucci, Nucl. Instr. Meth. A **354**, 389 (1995).
8. F. Pino, L. Stevanato, D. Cester et al., J. Instrument. **10**, T08005 (2015).
9. J. K. Polack, M. Flaska, A. Enqvist et al., Nucl. Instr. Meth. A **795**, 253 (2015).
10. E. Doucet, T. Brown, P. Chowdhury et al., Nucl. Instr. Meth. A **954**, 161201 (2020).
11. T. S. Sanderson, C. D. Scott, M. Flaska et al., IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference Record (NSS/MIC), 199 (2012).
12. J. Griffiths, S. Kleinegesse, D. Saunders et al., Machine Learning: Science and Technology **1**, 045022 (2020).
13. Д. М. Громушкин, А. А. Петрухин, Ю. В. Стенькин и др., Изв. РАН, сер. физ. **73**, 425 (2009).
14. Ю. В. Стенькин, В. В. Алексеенко, А. С. Багрова и др., Изв. РАН, сер. физ. **81**, 179 (2017).
15. W. S. Cleveland, American Statistician **35**, 54 (1981).
16. P. Refaeilzadeh, L. Tang, and H. Liu, *Encyclopedia of Database Systems* **5**, 532 (2009).
17. A. Paszke, S. Gross, F. Massa et al., Advances in Neural Information Processing Systems **32**, 8026 (2019).
18. J. Deng, J. Guo, T. Liu et al., arXiv: 1801.07698.
19. L. Van der Maaten and G. Hinton, J. Machine Learning Res. **9**, 2579 (2008).
20. D. P. Kingma and J. Ba, arXiv:1412.6980.

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАМЕЩЕНИЯ H_2O НА T_2O НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА, МАКСИМУМ ПЛОТНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРУ ПЛАВЛЕНИЯ ЛЬДА I_h В РАМКАХ МЕТОДА РЕШЁТОЧНОЙ ДИНАМИКИ

В. Р. Белослудов^a, К. В. Гец^{a*}, Р. К. Жданов^a, Ю. Ю. Божко^a, Ё. Кавазое^{b,c,d**}

^a Институт неорганической химии им. А.В. Николаева
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

^b New Industry Creation Hatchery Center, Tohoku University
980-8579, Aoba-ku, Sendai, Japan

^c Department of Physics and Nanotechnology, SRM Institute of Science and Technology
603203, SRM Nagar, Kattankulathur, Kancheepuram District, Tamil Nadu, India

^d School of Physics, Institute of Science, Suranaree University of Technology
30000, Suranari, Mueang Nakhon Ratchasima District, Nakhon Ratchasima, Thailand

Поступила в редакцию 17 октября 2022 г.,
после переработки 17 октября 2022 г.
Принята к публикации 31 октября 2022 г.

Исследован изотопический эффект, связанный с заменой молекул воды на молекулы сверхтяжёлой воды во льде I_h , при помощи метода решёточной динамики в квазигармоническом приближении с использованием модифицированного для воспроизведения свойств сверхтяжёлой воды жёсткого трёхточечного потенциала. Показано, что значительные изменения плотности колебательных состояний при замене 12.5%, 50% и 100% молекул воды происходят только в области либрационных колебаний. Рассчитана температурная зависимость плотности сверхтяжёлого льда и предсказан максимум плотности этого льда при температуре около 60 К. Построена зависимость температуры плавления ($\text{H}_2\text{O} + \text{T}_2\text{O}$)-льда I_h от концентрации молекул T_2O в его структуре и показана линейность этой зависимости.

DOI: 10.31857/S0044451023040090
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхтяжёлая вода ($^3\text{H}_2\text{O}$) состоит из двух атомов трития (Т) и одного атома кислорода. T_2O в отличие от тяжёлой воды (D_2O или $^2\text{H}_2\text{O}$) почти не распространена в природе, что сказывается на меньшей изученности её фундаментальных свойств по сравнению с обычной и тяжёлой водой, однако стоит отметить активное использование T_2O для изучения биологических процессов и её влияния на них: сверх-

тяжёлая вода способна активно участвовать в метаболизме живых существ и является радиоактивной. Работа с такой водой требует соблюдения мер безопасности и наличия технологии устранения последствий аварий и техногенных катастроф. Очистка воды от загрязнения T_2O является актуальной проблемой атомных электростанций и ядерных полигонов. В настоящее время для отделения сверхтяжёлой воды от обычной предлагается метод на основе гидратообразования [1], основанный на различии термодинамической устойчивости гидрата в зависимости от изотопного состава. Изотопический эффект смещения равновесной температуры образования гидратов может быть фундаментальным принципом выделения T_2O из изотопной смеси.

* E-mail: gets@niic.nsc.ru

** Y. Kawazoe

Образуемые обычной, тяжёлой (HW) и сверхтяжёлой (SHW) водой структуры льдов практически идентичны, однако их физические свойства различаются сильнее, чем может вызвать только лишь изменение массы молекул [2]. Так, например, энергия нулевых колебаний молекулы D_2O ниже, чем в молекулах H_2O , поэтому образуемый между этими молекулами аналог водородной связи сильнее [3], что может быть причиной повышения температуры плавления льда I_h на основе тяжёлой воды, теплоёмкости и вязкости тяжёлой воды, а также температуры, при которых достигается максимальная плотность жидкой фазы тяжёлой воды [4] по сравнению с H_2O . В целом, изотопический эффект может быть обнаружен и на квантовом уровне [5, 6].

Использование теоретических методов для изучения сверхтяжёлой воды представляется наиболее оптимальным. Для исследования макроскопических свойств конденсированных фаз воды на основе классического описания взаимодействия между молекулами посредством сил Кулона и ван дер Ваальса с параметрами потенциалов, учитывающих квантовые эффекты, было разработано множество молекулярно-динамических потенциалов, основанных на 3-, 4- и 5-точечных моделях воды [7–9], а также небольшое количество потенциалов, основанных на 2- [10] и 6-точечных [11] моделях, разработанных для изучения отдельных свойств воды. Из-за того, что геометрия и электронная структура молекул H_2O , D_2O , T_2O являются схожими, наиболее оптимальным способом для описания молекул тяжёлой и сверхтяжёлой воды является перепараметризация имеющихся моделей молекулы обычной воды. Имеющиеся для тяжёлой и сверхтяжёлой воды потенциалы [12–14] хорошо описывают свойства жидкой фазы, однако для описания твёрдой фазы D_2O и T_2O их точности недостаточно, в частности, для воспроизведения температуры плавления, что является важным при разработке методов сепарации воды по изотопам. Однако было показано, что простое укорачивание длин связей $O-D$ и $O-T$ соответственно в конденсированных фазах D_2O и T_2O , по сравнению с длиной связи $O-H$ в конденсированной фазе H_2O , позволяет качественно описывать изотопные эффекты в разумном согласии с экспериментальными данными [12]. В работе [15] предложен трёхточечный потенциал (SPC) для описания изотопического эффекта в дейтерированном льде, в отличие от других потенциалов, описывающих изотопический эффект в жидкой фазе.

Целью данной работы является оценка изотопического эффекта во льде I_h , состоящего из смесей

молекул H_2O и T_2O , на примере изменения динамических свойств и температуры плавления при варьировании концентрации сверхтяжёлой воды. Для этого был разработан и дополнительно апробирован на температурной зависимости плотности льда T_2O I_h потенциал SPC/ E_{mod} -SHW.

2. ДЕТАЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Для описания молекул сверхтяжёлой воды в рамках метода решёточной динамики был разработан потенциал E_{mod} -SHW, параметры которого подбирались аналогично работе [15], где параметры трёхточечного потенциала изначально подбирались для точного описания теплового расширения и температуры плавления льда D_2O , с помощью критерия Линдемманна, значение которого подбиралось равным значению для обычной льда при температуре 273.15 К. Это было обосновано, во-первых, тем что при изменении изотопного состава наибольшее изменение претерпевает область либрационных колебаний [15], но наибольший вклад при этом при расчёте амплитуды колебаний центров масс дают трансляционные колебания, которые изменяются несущественно при изменении изотопного состава. Во-вторых, величины межмолекулярных расстояний в структурах I_h также несущественно изменяются при изменении изотопного состава, вследствие чего можно предположить, что величина параметра Линдемманна для льдов различных составов должна совпадать в точке плавления. В данной работе параметры подбирались только для описания экспериментальных данных о температуре плавления льда T_2O . Параметры этого потенциала, а также потенциалов для описания рассматриваемых в данной работе молекул D_2O (SPC/ E_{mod} -HW [15]) и H_2O (SPC/ E_{mod} [16]), параметры оригинального потенциала SPC/ E [17], а также массы атомов H, D и T приведены в таблице. Основой для разработки послужил потенциал SPC/ E_{mod} , показавший наибольшую точность при описании теплового расширения льда [18]. Правила Лоренца – Берцелота [19, 20] были использованы для определения параметров 6–12 взаимодействия между молекулами различного типа. Молекулы воды считались жёсткими.

Модельные суперячейки обычного (H_2O), тяжёлого (D_2O) и сверхтяжёлого (T_2O) льдов структуры I_h , элементарная ячейка которой состоит из четырех молекул воды, состояли из 32 элементарных ячеек ($4 \times 4 \times 2$). Для проведения расчётов среди всех структур со случайной расстановкой протонов с учётом правила Бернала – Фаулера [21] были выбра-

Таблица. Значения энергетической ε и пространственной σ констант потенциала 6–12, зарядов на атомах кислорода q_{O} и водорода q_{H} , расстояния кислород–водород d_{OH} и внутримолекулярного угла водород–кислород–водород α_{HON} потенциалов SPC/ E_{mod} -SHW, SPC/ E_{mod} -HW [15], SPC/ E_{mod} [16] и SPC/ E [17], а также массы изотопов водорода

	SPC/ E_{mod} -SHW	SPC/ E_{mod} -HW	SPC/ E_{mod}	SPC/ E
ε , кДж/мол	0.65063	0.65063	0.65063	0.650
σ , Å	3.178325	3.1781	3.1556	3.166
q_{O} , $ e $	−0.87224	−0.87	−0.8476	−0.8476
q_{H} , $ e $	+0.43612	+0.435	+0.4238	+0.4238
d_{OH} , Å	1	1	1	1
α_{HON}	109.47°	109.47°	109.47°	109.47°
m_{H} , Да	3.016	2.014	1.008	1.008

ны имеющие минимальный дипольный момент. Случайная замена молекул обычной воды на молекулы сверхтяжёлой воды позволила получить структуры льда с различным составом.

При помощи метода решёточной динамики были рассчитаны зависимости свободной энергии от объёма путём варьирования объёма модельной ячейки (квазигармоническое приближение) с последующей минимизацией потенциальной энергии систем [22]. Преимуществом данного метода является учёт энергии нулевых колебаний, дающих значительный вклад в общую энергию [23]. Расчёт собственных векторов колебаний из динамической матрицы, определяемой в рамках метода решёточной динамики, позволил в том числе применить критерий Линдемана [24, 25] для определения температуры плавления льдов, учитывая приведённые выше особенности изменения колебательного спектра, вызванные изотопическим эффектом, и структуры льда.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 приведены плотности колебательных состояний льдов, образованных чистыми H_2O , D_2O , T_2O , а также различными смесями $\text{H}_2\text{O}+\text{T}_2\text{O}$, и показано, что все структуры имеют почти идентичную плотность в области трансляционных колебаний. Все основные различия спектров содержатся в области вращательных колебаний, что связано с различием моментов инерции молекул H_2O , D_2O и T_2O : увеличение значения момента приводит к смещению и одновременному сужению области спектра, связанному с вращательными колебаниями бо-

лее тяжёлых молекул. При этом области либрационных колебаний молекул H_2O во льдах смешанного состава остаются прежними, но их относительный вклад в плотность колебательных состояний снижается. Верхняя граница области либрационных колебаний льда T_2O сдвигается примерно с 1000 до 650 см^{-1} , одновременно с этим ширина щели между трансляционными и вращательными колебаниями уменьшается примерно с 230 до 40 см^{-1} , в отличие от более лёгкого льда D_2O , щель которого снижается приблизительно до 80 см^{-1} , а область либрационных колебаний которого остаётся немного более широкой. Более того, при смешанном изотопном составе (например, 87.5% H_2O + 12.5% T_2O) можно наблюдать появление изолированных пиков в области щели. Увеличение концентрации T_2O приводит к уширению данных пиков с последующим их слиянием с основной частью вращательной области спектра.

Имея зависимость свободной энергии от температуры и объёма модельной системы, можно восстановить уравнение состояния данной системы, а значит, и плотности системы. Нами была построена зависимость плотности льдов от температуры в сравнении с данными других исследований (рис. 2) [26–28]. Можно видеть, что отличия расчётных значений плотности льдов H_2O и D_2O от известных экспериментальных значений не превышает +0.005 г/см^3 при низкой температуре и −0.01 г/см^3 при высокой температуре. В то же время, расхождение с расчётами, проведёнными методами PIMD (path-integral molecular dynamics) с помощью более сложного гибкого поляризуемого четырёхточечного потенциала q-TIP4P/F, несколько выше, но остаётся

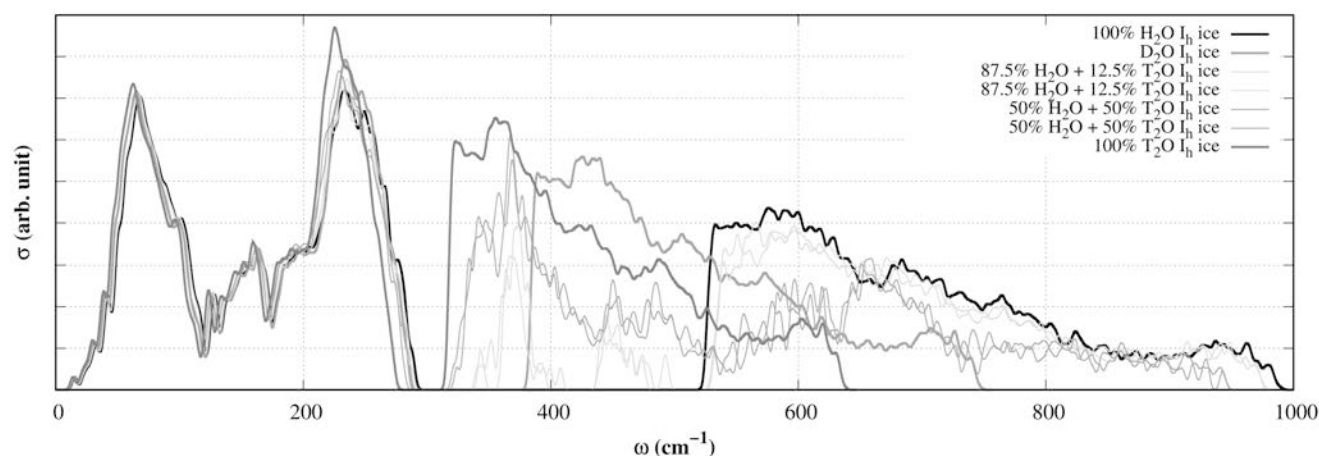


Рис. 1. Расчётная плотность колебательных состояний σ (сплошные линии) льда I_h , состоящего только из молекул H_2O (чёрная линия), только из молекул D_2O (синяя линия), только из молекул T_2O (зелёная линия), а также нескольких структур для смесей с различным распределением молекул: 87.5% H_2O + 12.5% T_2O (жёлтые линии) и 50% H_2O + 50% T_2O (оранжевые линии). Данные приведены для температуры 270 К и давления 1 бар

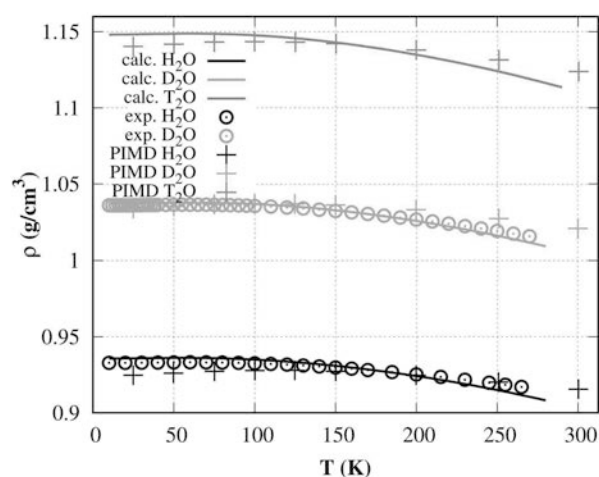


Рис. 2. Температурная зависимость плотности ρ льда I_h при атмосферном давлении. Чёрная линия соответствует расчётным данным для H_2O , синяя — для D_2O , зелёная — для T_2O . Круглыми маркерами показаны результаты экспериментальных исследований теплового расширения [26] и [27]. Плюсами показаны результаты моделирования методом молекулярной динамики [28]

ся в пределах погрешности описания экспериментальных значений. Положения максимумов плотности льдов H_2O , D_2O [15] и T_2O , определённых нами с помощью метода решёточной динамики, лежат в области 60–65 К, в то время как результаты моделирования этих же льдов методом PIMD показывают положения максимумов при 100–115 К [28], что в случае H_2O и D_2O значительно выше экспериментальных значений около 60 К [26, 27]. Совпадение максимумов рассчитанных нами кривых с экспериментальными значениями для H_2O и D_2O позволяет предположить, что и для T_2O значение температуры, при котором достигается максимум плотности,

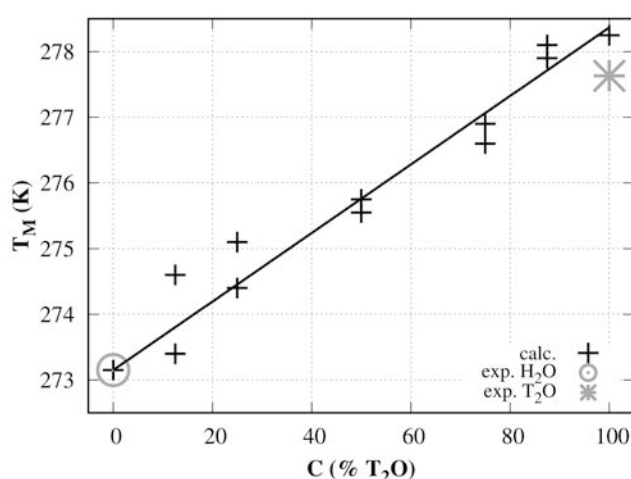


Рис. 3. Зависимость температуры плавления T_M льда I_h от процентной доли молекул T_2O в его структуре при атмосферном давлении. Чёрная линия аппроксимирует результаты расчёта (плюсы). Круг показывает температуру плавления H_2O -льда I_h , звезда показывает температуру плавления T_2O -льда I_h

предсказано верно, и можно говорить о достаточной точности потенциалов SPC/ E_{mod} -SHW, SPC/ E_{mod} -HW и SPC/ E_{mod} для описания термодинамических свойств льда на основе сверхтяжёлой, тяжёлой и обычной воды, а также льдов со сложным изотопным составом.

Используя подход для определения температуры плавления на основе критерия Линдемана, мы получили зависимость температуры плавления в зависимости от доли молекул T_2O в системе (H_2O+T_2O)-льда (рис. 3). Можно видеть, что зависимость температуры от концентрации хорошо описывается линейной зависимостью, однако

присутствует достаточно большой статистический разброс. Основным источником статистического отклонения является погрешность определения минимального расстояния между молекулами воды, используемого в критерии Линдемманна, связанная с конечностью модельной системы. Результаты расчётов температуры плавления для потенциалов TIP4PQ/2005 (T_2O), TIP4PQ_ T_2O и q-TIP4P/F составляют соответственно 271.8 [12], 263.5 [12] и около 259.2 К [29], что сильно отличается от экспериментального значения 277.6 К. Природа изменения температуры плавления льдов как T_2O , так и D_2O , связана с изменением колебательного спектра за счёт изотопического эффекта.

4. ВЫВОДЫ

В работе показан изотопический эффект, который вызван повышением концентрации T_2O в структуре льда I_h :

1. Показано, что при варьировании изотопического состава льда в области трансляционных колебаний положение пиков и верхней границы изменяется не более, чем на $10\text{--}15\text{ см}^{-1}$. Область либрационных колебаний подвергается сдвигу нижней границы на величину до 200 см^{-1} при повышении концентрации молекул T_2O . Ширина области либрационных колебаний также зависит от изотопного состава (наличия значительного количества молекул H_2O).

2. Показано, что температура, при которой достигается максимум плотности льда, повышается незначительно, на $1\text{--}2\text{ К}$ по сравнению H_2O -льдом при изменении изотопного состава, в отличие от жидкой фазы, где изменение выше 10 К . Предсказано положение максимума плотности T_2O -льда I_h при температуре около 60 К . Зависимости плотности льда от температуры показали близкое к линейному изменение плотности льда в зависимости от концентрации более тяжёлых изотопов при фиксированной температуре.

3. Рассчитана температура плавления ($\text{H}_2\text{O}+\text{T}_2\text{O}$)-льда I_h в зависимости от концентрации T_2O и показана линейность этой зависимости.

Представленный в данной работе простой трёхточечный модифицированный нами потенциал SPC/ E_{mod} -SHW может быть использован для описания и других твёрдых фаз льда и гидратов на основе сверхтяжёлой воды в рамках метода решёточной динамики, так как он точнее описывает свойства T_2O -льда I_h в рамках учитывающего нулевые колебания и другие квантовые эффекты метода ре-

шёточной динамики, чем это позволяют сделать любые другие потенциалы.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 121031700321-3). Yoshiyuki Kawazoe благодарит Suranaree University of Technology (SUT), а также Thailand Science Research and Innovation (TSRI) и National Science, Research and Innovation Fund (NSRF) (Проект NRHS номер 90465) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Maruyama and R. Ohmura, *Can. J. Chem. Eng.* **1** (2022).
2. W. E. Thiesen and A. H. Narten, *J. Chem. Phys.* **76**, 2656 (1982).
3. S. Herrig, M. Thol, A. H. Harvey, and E. W. Lemmon, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **47**, 043102 (2018).
4. D. R. Lide, *CRC Handbook of Chemistry and Physics: A Ready-Reference Book of Chemical and Physical Data*, CRC, Boca Raton FL, London (2003), Vol. 84.
5. П. В. Энкович, В. В. Бражкин, С. Г. Ляпин, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 687 (2019).
6. П. В. Энкович, В. В. Бражкин, С. Г. Ляпин, С. М. Стишов, *ЖЭТФ* **155**, 237 (2019).
7. C. Vega, J. L. Abascal, M. M. Conde, and J. L. Aragones, *Faraday Discuss.* **141**, 251 (2009).
8. J. Zielkiewicz, *J. Chem. Phys.* **123**, 104501 (2005).
9. P. K. Yuet and D. Blankschtein, *J. Phys. Chem. B* **114**, 13786 (2010).
10. K. M. Dyer, J. S. Perkyns, G. Stell, and B. Montgomery Pettitt, *Mol. Phys.* **107**, 423 (2009).
11. H. Nada, *J. Chem. Phys.* **145**, 244706 (2016).
12. C. McBride, J. L. Aragones, E. G. Noya, and C. Vega, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **14**, 15199 (2012).
13. C. McBride, C. Vega, E. G. Noya, R. Ramírez, and L. M. Sesé, *J. Chem. Phys.* **131**, 024506 (2009).
14. S. Habershon, T. E. Markland, and D. E. Manolopoulos, *J. Chem. Phys.* **131**, 024501 (2009).
15. В. Р. Белослудов, К. В. Гец, Р. К. Жданов, Ю. Ю. Божко, О. С. Субботин, *Письма в ЖЭТФ* **116**, 313 (2022).
16. R. V. Belosludov, R. K. Zhdanov, K. V. Gets, Y. Y. Bozhko, V. R. Belosludov, and Y. Kawazoe, *J. Phys. Chem. C* **124**, 18474 (2020).

17. H. J. C. Berendsen, J. R. Grigera, and T. P. Straatsma, *J. Phys. Chem.* **91**, 6269 (1987).
18. R. V. Belosludov, R. K. Zhdanov, Y. Y. Bozhko, K. V. Gets, O. S. Subbotin, Y. Kawazoe, and V. R. Belosludov., *Energy Fuel*. **34**, 12771 (2020).
19. H. A. Lorentz, *Ann. Phys.* **248**, 127 (1881).
20. D. Berthelot, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* **126**, 1703 (1898).
21. J. D. Bernal and R. H. Fowler, *J. Chem. Phys.* **1**, 515 (1933).
22. Р. К. Жданов, В. Р. Белослудов, Ю. Ю. Божко, О. С. Субботин, К. В. Гец, Р. В. Белослудов, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 821 (2018).
23. K. V. Gets, R. K. Zhdanov, Y. Y. Bozhko, and V. R. Belosludov, *J. Phys. Chem. C* **125**, 15659 (2021).
24. H. Böttger, *Principles of the theory of lattice dynamics*, Academie-Verlag, Berlin (1983).
25. A. A. Maradudin, E. W. Montroll, G. H. Weiss, and I. P. Ipatova, *Theory of lattice dynamics in the harmonic approximation*, Academic press, New York (1963), Vol. 3.
26. K. Röttger, A. Endriss, J. Ihringer, S. Doyle, and W. F. Kuhs, *Acta Crystallogr. B: Struct. Sci.* **50**, 644 (1994).
27. A. D. Fortes, *Acta Crystallogr. B: Struct. Sci. Cryst. Eng. Mater.* **74**, 196 (2018).
28. C. P. Herrero and R. Ramirez, *J. Chem. Phys.* **134**, 094510 (2011).
29. R. Ramirez and C. P. Herrero, *J. Chem. Phys.* **133**, 144511 (2010).

МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОРИЕНТАЦИИ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ РАСТВОРЕНИЯ ТИТАНА В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ И АМОРФНОМ АЛЮМИНИИ

Г. М. Полетаев^{a*}, Ю. В. Бебихов^b, А. С. Семенов^b, А. А. Ситников^a

^a Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова
656038, Барнаул, Россия

^b Политехнический институт Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова
678170, Мирный, Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 2022 г.,
после переработки 2 декабря 2022 г.
Принята к публикации 19 декабря 2022 г.

Методом молекулярной динамики проведено исследование влияния ориентации межфазной границы на интенсивность растворения титана в кристаллическом и аморфном алюминии. Рассматривались четыре ориентации границы раздела Ti–Al относительно решеток Ti (ГПУ) и Al (ГЦК): 1) (0001):(111), 2) (0001):(001), 3) (10 $\bar{1}0$):(111), 4) (10 $\bar{1}1$):(001). Выяснено, что ориентация межфазной границы оказывает влияние на интенсивность растворения титана в алюминии и увеличивается для принятых обозначений в порядке 1–2–3–4. Важным явлением в данном случае оказалось образование на начальном этапе тонкого (толщиной в 2–3 атомные плоскости) кристаллического слоя в алюминии, повторяющего кристаллическую решетку титана, за которым при температуре ниже температуры плавления алюминия формировалась граница зерен, параллельная межфазной границе. При температурах выше температуры плавления алюминия данный кристаллический слой сохранялся, но его толщина постепенно уменьшалась по мере увеличения температуры. При рассмотрении алюминия в аморфном состоянии при температурах ниже температуры его плавления растворение титана происходило почти с той же интенсивностью, что и при кристаллическом состоянии алюминия. Это было связано с образованием во всех случаях на межфазной границе аналогичного кристаллического слоя в алюминии.

DOI: 10.31857/S0044451023040107

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерметаллические соединения системы Ti–Al и сплавы на их основе обладают сочетанием таких свойств, как высокий предел текучести при повышенных температурах и хорошая стойкость к окислению и коррозии одновременно с относительно низкой плотностью, что делает их перспективными для использования в качестве высокотемпературных конструкционных материалов, в частности, для аэрокосмической и автомобильной отраслей [1–5]. В основе технологии получения интерме-

таллидов лежит диффузионный процесс, которой в подобных системах имеет сложный и многофакторный характер. В диффузионной зоне на границе Ti и Al, например, в процессе высокотемпературного синтеза могут присутствовать одновременно как твердые упорядоченные и разупорядоченные фазы, так и жидкие смеси с различным содержанием компонентов [6–9]. Знание диффузионной кинетики, характеристик и механизмов диффузии в металлических системах, в частности в системе Ti–Al, необходимо для более детального понимания процессов, происходящих при высокотемпературном синтезе, а также имеет большое значение для всей области исследования и создания интерметаллидов и бинарных сплавов.

Ранее в работе [10] с помощью метода молекулярной динамики нами было проведено исследование

* E-mail: gmpoletaev@mail.ru

самодиффузии отдельно атомов Ti и Al в жидких и твердых сплавах системы Ti–Al, а в работе [11] — влияния ориентации межфазной границы Ti–Al на интенсивность взаимной диффузии при твердом и жидком состояниях алюминия. В [11] для различных ориентаций были построены кривые распределения концентрации титана в области межфазной границы, с помощью которых был сделан вывод о более интенсивном проникновении атомов алюминия в кристаллическую решетку титана при ориентации границы вдоль плоскости (0001) относительно ГПУ-решетки титана по сравнению с ориентациями (10 $\bar{1}$ 0) и (10 $\bar{1}$ 1). В [11] было также отмечено, что диффузия атомов титана в жидком алюминии ожидаемо не зависела от ориентации границы. Вместе с тем, в работе [11] нами был упущен третий важный аспект процесса растворения титана в алюминии помимо указанных выше двух — интенсивность отрыва атомов титана на самой границе и их увлечение в фазу алюминия. Кроме того, в предыдущей работе [11] при исследовании взаимной диффузии ниже температуры плавления алюминия нами был рассмотрен алюминий только в кристаллическом состоянии, тогда как новые экспериментальные данные свидетельствуют о возможном снижении температуры воспламенения при высокотемпературном синтезе за счет наличия в исходной смеси алюминия в сильно деформированном или даже аморфном состоянии [12–14]. Например, в результате предварительной механоактивационной обработки, которая в настоящее время является одним из перспективных методов подготовки смеси до основной реакции синтеза [12–14], формируются так называемые механокмозиты, представляющие собой матрицу из более пластичного компонента (алюминия), в объеме которой находятся наноразмерные частицы более хрупкого компонента смеси (например, титана) [13, 14]. Такая система характеризуется высокой степенью неравновесности из-за высокой концентрации дефектов, поверхностей раздела, внутренних напряжений, а также наличия аморфной фазы. Отмечается, что начало реакции горения в такой неравновесной системе начинается при температурах, существенно ниже температуры плавления алюминия [13, 14].

Настоящая работа посвящена исследованию с помощью молекулярно-динамического моделирования влияния ориентации межфазной границы на интенсивность растворения титана в кристаллическом и аморфном алюминии. В последнем случае рассматривались температуры ниже и выше температуры плавления алюминия.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Для описания межатомных взаимодействий в системе Ti–Al использовались ЕАМ-потенциалы Зоупа и Мишина [15]. При их создании авторы [15] опирались на экспериментальные данные и результаты *ab initio*-расчетов относительно различных свойств и структуры металлов Ti, Al и интерметаллидов Ti₃Al и TiAl. Данные потенциалы хорошо зарекомендовали себя при проведении различных исследований и прошли успешную апробацию по широкому спектру механических и структурно-энергетических свойств интерметаллидов и сплавов системы Ti–Al [10–17]. В частности, используемые нами потенциалы показывают хорошее согласие с экспериментальными данными по температуре плавления Ti и Al: в нашей модели они получились равными соответственно 1995 и 990 К (справочные значения: 1943 и 933 К) [11].

Расчетные ячейки в молекулярно-динамической модели в настоящей работе содержали около 120 тысяч атомов и имели вид прямоугольных параллелепипедов (рис. 1). Межфазная граница создавалась в центре расчетной ячейки вдоль плоскости *yz*. Вдоль осей *y* и *z* имитировалось бесконечное повторение ячейки, т. е. были наложены периодические граничные условия. Размеры вдоль данных осей подбирались таким образом, чтобы они были кратны с минимально возможным отклонением периодам повторяемости одновременно кристаллических решеток Ti и Al. При этом учитывалось также неодинаковое тепловое расширение металлов для каждой конкретной температуры, при которой проводилось моделирование.

В предыдущей работе [11] при использовании аналогичной модели на торцы ячейки вдоль оси *x* были наложены жесткие граничные условия, т. е. структура на данных границах была зафиксированной. Это было сделано для фиксации ориентации кристаллических решеток титана и алюминия в процессе всего моделирования. Однако это же приводило к фиксированному объему всей расчетной ячейки. Расширение ячейки, связанное как с нагревом металлов, так и с плавлением алюминия, учитывалось при изначальном задании размеров расчетной ячейки, однако оно не могло изменяться в процессе моделирования, что вносило некоторую погрешность в результаты.

В настоящей работе мы оставили жесткие граничные условия только со стороны титана для удержания заданной ориентации его кристаллической структуры в течение моделирования, но со сторо-

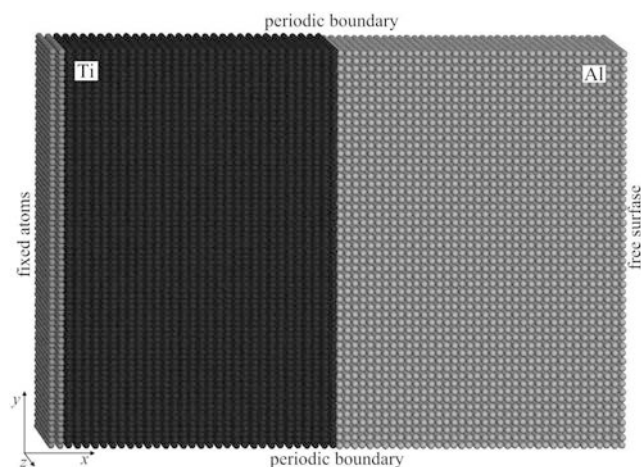


Рис. 1. Расчетная ячейка с ориентацией межфазной границы (0001):(001) до релаксации и задания температуры (серые атомы на левом торце ячейки оставались неподвижными в процессе моделирования)

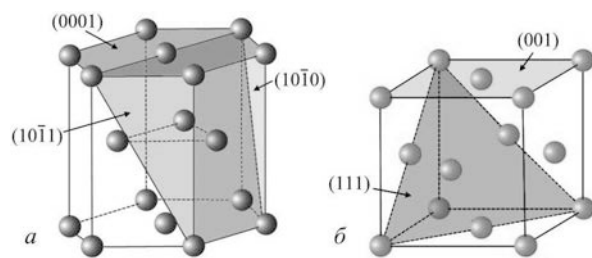


Рис. 2. Рассматриваемые в работе ориентации межфазной границы относительно кристаллической ГПУ-решетки Ti (a) и ГЦК-решетки Al (б)

ны алюминия использовали свободные (открытые) условия, которые позволяли расчетной ячейке свободно изменять объем (рис. 1). Похожие граничные условия использовались нами при моделировании скольжения дислокаций в [18, 19].

Рассматривались четыре ориентации границы раздела Ti–Al относительно кристаллических решеток Ti (ГПУ) и Al (ГЦК): 1) (0001):(111), 2) (0001):(001), 3) (10 $\bar{1}0$):(111), 4) (10 $\bar{1}1$):(001) (рис. 2). При исследовании диффузии в условиях аморфного состояния алюминия рассматривались, соответственно, три ориентации границы относительно решетки титана: (0001), (10 $\bar{1}0$), (10 $\bar{1}1$).

Аморфный алюминий создавался путем нагревания до температуры, значительно превышающей температуру плавления. После разрушения кристаллической структуры проводилось резкое охлаждение, в течение которого не успевала произойти кристаллизация. Положение атомов Ti в расчетной ячейке при проведении этой процедуры оставалось зафиксированным.

После создания расчетной ячейки с заданной ориентацией проводилась релаксация структуры при начальной температуре 0 К до достижения стабильного положения атомов на межфазной границе. В течение релаксации происходило небольшое повышение температуры. На заключительной стадии подготовки расчетной ячейки она вновь охлаждалась до минимальной температуры, близкой к 0 К.

Температура в компьютерных экспериментах задавалась через начальные скорости атомов согласно распределению Максвелла. Моделирование взаимной диффузии проводилось при постоянной температуре, значение которой варьировалось от 500 до 1700 К. Для сохранения температуры постоянной использовался термостат Нозе–Гувера. Шаг интегрирования по времени в методе молекулярной динамики был равен 2 фс.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

При проведении релаксации после создания расчетных ячеек была замечена важная особенность формирования структуры вблизи межфазной границы Ti–Al. Из-за несовпадения кристаллических структур Ti и Al несовершенства решетки, обусловленные этим несовпадением, формировались не на самой границе раздела фаз, а на небольшом расстоянии от нее (как правило, в несколько межатомных расстояний) в виде границы зерен в алюминии, параллельной межфазной границе (рис. 3a). Сама же межфазная граница дефектов, как правило, не содержала и «выталкивала» их в границу зерен в алюминии. Очевидно, что данное поведение обусловлено более крепкими связями атомов Ti и Al по сравнению со связями Al–Al. Введение дополнительных дефектов в межфазную границу, например, вакансий в связи с описанным выше явлением не приводило к существенному влиянию на процесс взаимной диффузии. Они еще в начале моделирования покидали межфазную границу и мигрировали в сторону границы зерен в алюминии.

В некоторых случаях граница зерен в алюминии могла мигрировать за пределы расчетной ячейки с выходом на свободную поверхность (правый край ячейки на рис. 1). В этом случае ориентация кристаллической решетки алюминия изменялась и уже не соответствовала заданной вначале.

С повышением температуры дефектная область, представляющая собой границу зерен, расширялась, кристаллическая структура в этой области разрушалась еще до температуры плавления алюминия, что приводило к формированию аморфного слоя, параллельного межфазной границе (рис. 3б). Дан-

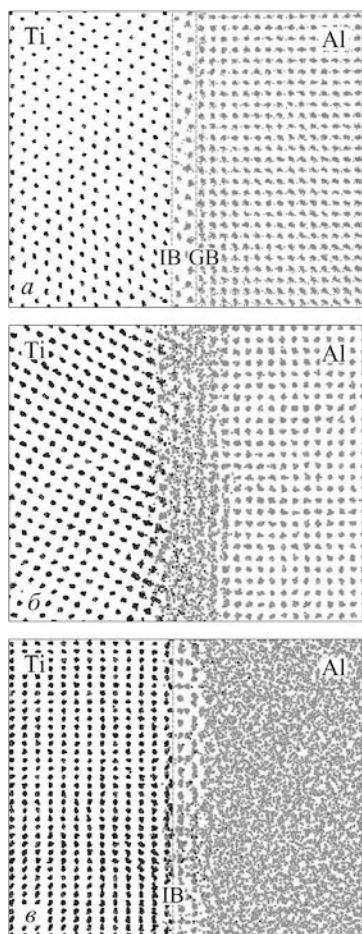


Рис. 3. Особенности структуры межфазной границы при различных температурах: *a* — формирование в Al границы зерен, параллельной межфазной границе (ориентация $(10\bar{1}1):(100)$, температура 500 K); *б* — формирование аморфного слоя на месте границы зерен при повышении температуры (та же ориентация $(10\bar{1}1):(100)$, температура 800 K); *в* — формирование кристаллической структуры в Al вблизи межфазной границы при температуре выше температуры плавления алюминия (ориентация $(0001):(100)$, температура 1050 K)

ное явление было неодинаковым для разных ориентаций: формирование и границы зерен, и аморфного слоя при температурах, близких к температуре плавления алюминия, в большей степени проявлялось и влияло на процесс взаимной диффузии при ориентациях $(10\bar{1}0):(111)$ и $(10\bar{1}1):(001)$ и почти не наблюдалось для ориентации $(0001):(111)$.

Вблизи самой межфазной границы структура алюминия, напротив, оставалась в кристаллическом состоянии даже после температуры плавления, повторяя в точности решетку титана (рис. 3в). Таким образом, граница раздела твердой и жидкой фаз оказывалась смещена (по крайней мере, на началь-

ном этапе взаимной диффузии) на две-три атомные плоскости в глубь алюминия. Как уже говорилось выше, это объясняется тем, что энергия связи Ti–Al больше энергии связи Al–Al, вследствие чего, в частности, температуры плавления интерметаллидов системы Ti–Al превышают температуру плавления алюминия. Поэтому атомы Al вблизи границы раздела фаз находятся в более глубоких потенциальных ямах, чем в объеме алюминия. В связи с этим для разрушения кристаллического слоя в алюминии возле межфазной границы необходимы большие температуры, чем для плавления алюминия. Из-за этого отрыв атомов Ti и увлечение их в жидкий алюминий, очевидно, усложняется и происходит не так быстро, как это было бы при непосредственном контакте титана с жидкой фазой.

Несмотря на описанный выше феномен, взаимная диффузия на границе Ti–Al при твердожидкофазном контакте происходила значительно интенсивнее, чем при твердофазном контакте. В данном случае наблюдалось более существенное преобладание диффузии атомов Ti в глубь жидкого Al по сравнению с диффузией атомов Al в кристаллический Ti, что объясняется, в первую очередь, отличием агрегатных состояний Ti и Al.

При моделировании аморфного алюминия при температурах ниже температуры плавления атомная структура вблизи межфазной границы была аналогична той, что изображена на рис. 3в, т.е. в этом случае также наблюдалось формирование кристаллического слоя вблизи межфазной границы со стороны алюминия, который играл важную роль в процессе растворения титана. В некоторых случаях при температурах ниже температуры плавления алюминия наблюдалась гетерогенная кристаллизация изначально аморфного алюминия. Фронт кристаллизации в этом случае начинался, как правило, от межфазной границы.

На рис. 4 изображены графики концентрации титана в расчетных ячейках после проведения моделирования при температурах ниже и выше температуры плавления алюминия. Кривые распределения концентрации атомов Ti в расчетной ячейке строились путем анализа концентрации в слое толщиной $3\text{ \AA}$ при перемещении этого слоя на $1\text{ \AA}$ вдоль оси x . Для сравнительного анализа кривых они были наложены друг на друга таким образом, чтобы пересекаться в точке концентрации 50%, которая соответствует условному среднему положению межфазной границы. Левая часть на графиках — это область, соответствующая диффузии в титане, правая — диффузии в алюминии. Наклон кривой ха-

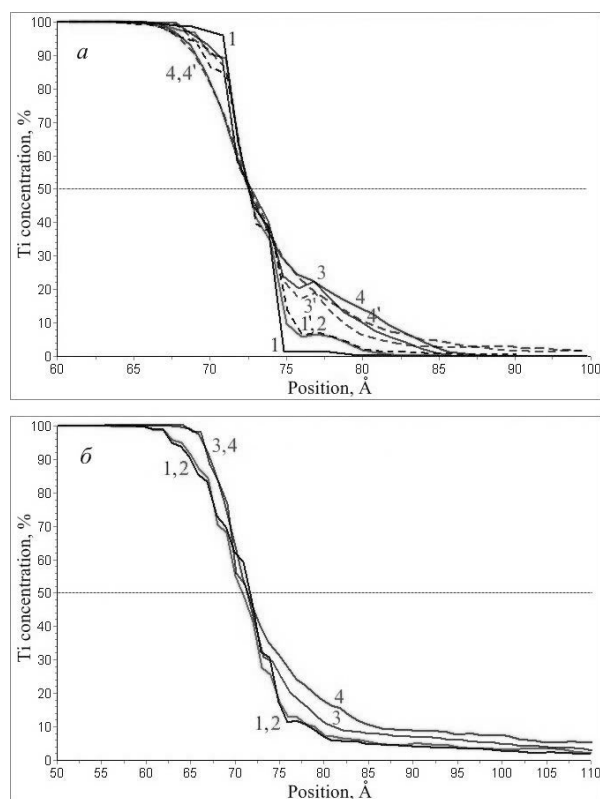


Рис. 4. Распределение концентрации атомов Ti в расчетных ячейках после моделирования в течение: а) 3000 пс при температуре 900 К; б) 2000 пс при температуре 1200 К. Цифрами на рисунке обозначены рассматриваемые ориентации межфазной границы: 1 — (0001):(111), 2 — (0001):(001), 3 — (10 $\bar{1}0$):(111), 4 — (10 $\bar{1}1$):(001). Цифрами со штрихами обозначены межфазные границы с аморфным алюминием

рактизует интенсивность диффузии: чем выше кривая, тем диффузия протекает более интенсивно.

На рис. 4а изображены концентрационные кривые, полученные для всех рассматриваемых ориентаций межфазной границы после моделирования в течение 3000 пс при температуре 900 К. В первую очередь, следует заметить, что интенсивность взаимной диффузии зависит от ориентации межфазной границы: для ориентации 1 она минимальна, а для ориентаций 3 и особенно для 4 — наибольшая. Это же относится и к вариантам с аморфным алюминием (1', 3', 4'). В данном случае, т. е. до температуры плавления алюминия, наиболее важным явлением, влияющим на интенсивность диффузии, оказалась степень сопряженности атомных структур титана и алюминия на межфазной границе. Действительно, для ориентации (0001):(111), на что обращали внимание также авторы работы [20], характерна наибольшая степень сопряженности, что обуславлива-

ется высокой схожестью атомных плоскостей (0001) в Ti и (111) в Al (расстояния между ближайшими атомами в этих плоскостях очень близки для обоих металлов: соответственно 2.951 и 2.864 Å при абсолютном нуле, при нагреве эта разница еще более сокращается).

Интенсивнее диффузия протекала в области Al (правая часть на рис. 4а) — атомы Ti проникали глубже в Al по сравнению с проникновением атомов Al в решетку Ti (левая часть). Наличие границы зерен в Al, параллельной межфазной границе, о которой говорилось выше, значительно облегчало процесс диффузии до температуры плавления алюминия. Диффузия в области границы зерен происходила интенсивнее, чем в кристаллической решетке — это видно по подъему кривых (особенно для ориентаций 3 и 4) в месте, где находилась граница.

Граница зерен играла также важную роль и в диффузии атомов Al в решетку Ti (левая часть), являясь своего рода «поставщиком» вакансий в эту область. Таким образом, на этапе твердофазного контакта Ti–Al на интенсивность взаимной диффузии в первую очередь влияет наличие границы зерен в Al, которая образуется в результате несоответствия решеток Ti и Al.

При рассмотрении алюминия в аморфном состоянии при температуре 900 К существенного отличия от соответствующих ориентаций при его кристаллическом состоянии замечено не было. Все дело в том, что вблизи межфазной границы, независимо от начальной структуры Al, формируется своя атомная структура: тонкий кристаллический слой в 2–3 атомные плоскости в Al, повторяющий решетку Ti, затем следует дефектный слой, представляющий собой либо границу зерен (рис. 3а), либо аморфную фазу (рис. 3б, в). Следует подчеркнуть, что этот результат получен в условиях использования термостата.

Таким образом, снижение температуры воспламенения реакции высокотемпературного синтеза в случае наличия аморфной фазы алюминия, по всей видимости, связано не с более высокой диффузией в этом случае, а с дополнительным высвобождением энергии в результате кристаллизации алюминия.

При температуре 1200 К растворение титана заметно быстрее происходило при ориентациях 3 и 4 (рис. 4б). Начальная ориентация решетки Al после плавления алюминия не имела значения, поэтому, как видно на рисунке, кривые для ориентаций 1 и 2 практически совпадают. Полученные концентрационные кривые качественно похожи на те, которые получают для данной системы эксперимен-

тально [8]. В области жидкого алюминия, очевидно, интенсивность диффузии не зависит от ориентации межфазной границы (при условии примерно равной концентрации атомов Ti в фазе Al) — в правой части в связи с этим наклон кривых на рис. 4б одинаков. Однако ближе к межфазной границе их наклон и положение различаются: для ориентации 4 кривая находится выше остальных, что связано с более интенсивным растворением титана в данном случае. Далее по интенсивности растворения идет ориентация 3, и затем вместе ориентации 1 и 2.

Изменение характера кривой с пологого на более крутой в середине графика соответствует границе жидкой и кристаллической фаз. Диффузия в этой области протекает заметно медленнее, что отражается на угле наклона кривой. Следует заметить, что эта область начинается заметно раньше концентрации 50%, что связано с описанным выше феноменом образования кристаллического слоя в алюминии вблизи межфазной границы.

В левой части, характеризующей проникновение атомов Al в кристаллический Ti и интенсивность протекания взаимной диффузии в нем, для рассматриваемых ориентаций результат отличается от полученного при температуре 900 К (рис. 4а). Быстрее всего при температуре 1200 К диффузия атомов Al в глубь Ti протекала при ориентации межфазной границы (0001) (1 и 2 на рис. 4б). Но одновременно с этим отрыв атомов Ti и увлечение их в фазу Al интенсивнее происходил при ориентациях (10 $\bar{1}$ 0) и (10 $\bar{1}$ 1) (3 и 4 на рис. 4б).

Похожая анизотропия отмечается, например, для скорости движения фронта гетерогенной кристаллизации в металлах [21–24]: фронт кристаллизации с относительно более «рыхлой» ориентацией (100) ГЦК-решетки движется в 1.3–1.5 раза быстрее, чем фронт, имеющей ориентацию, соответствующую наиболее плотной упаковке (111). Данная анизотропия обусловлена тем, что вблизи границы раздела разных металлов при твердо-жидкофазном контакте, как и на границе кристалл–жидкость одного металла, определяющую роль играет разность свободных энергий атома вблизи границы в жидкой фазе и «встроенного» в границу кристаллической фазы.

В дополнение к концентрационным кривым для анализа влияния ориентации межфазной границы на интенсивность растворения титана в алюминии использовалась специальная характеристика — удельное количество растворенных атомов Ti. Использование коэффициента диффузии атомов Ti, рассчитанного с помощью классического уравнения

Эйнштейна, в данном случае имеет ряд недостатков, связанных преимущественно с выделением диффузии Ti в области межфазной границы, определением эффективной ширины границы и отбрасыванием таких факторов, как миграция атомов Ti в фазе Al (которая в случае жидкого Al гораздо интенсивнее, чем на границе), смещения атомов Ti, вызванные не диффузией, а искажением кристаллической решетки вследствие диффузии или наличия дополнительных дефектов.

Удельное количество растворенных атомов Ti рассчитывалось как отношение разности числа растворенных атомов Ti в начале и конце компьютерного эксперимента ΔN к площади межфазной границы S . Растворенным атом Ti считался в том случае, если количество атомов Al в его ближайшем окружении, в пределах радиуса 3.7 Å, превышало 50%. Величина $\Delta N/S$ относительная, однако более показательная, чем коэффициент диффузии, и по сравнению с ним в нашем случае включает меньше посторонних факторов.

На рис. 5 изображены температурные зависимости удельного количества растворенных атомов Ti для всех рассмотренных ориентаций межфазной границы. Для каждой температуры, которая удерживалась с помощью термостата Нозе–Гувера постоянной в течение моделирования, измерение величины $\Delta N/S$ проводилось после компьютерного эксперимента в течение 500 пс. На рис. 5 хорошо видно различие скорости растворения при разных ориентациях межфазной границы, которое для принятых обозначений располагается при всех температурах в порядке 1–2–3–4, что согласуется с приведенными выше концентрационными кривыми (рис. 4). После температуры плавления алюминия (990 К в данной модели) скорость растворения с ростом температуры резко изменяется для всех ориентаций. При этом после плавления алюминия для ориентаций 1 и 2 (с одной и той же ориентацией межфазной границы относительно кристаллической решетки титана) графики объединяются в один, но не сразу, а только при температуре примерно выше 1150 К. По всей видимости, в данном случае на формирование кристаллического слоя в алюминии (как, например, на рис. 3б) оказывает влияние начальная ориентация его кристаллической решетки.

В случаях, когда до температуры плавления алюминий находился в аморфном состоянии, как и отмечалось ранее, значительных отличий от вариантов с кристаллическим состоянием не наблюдалось — кривые 1', 3', 4' на рис. 5 располагаются немного выше кривых, соответствующих тем же

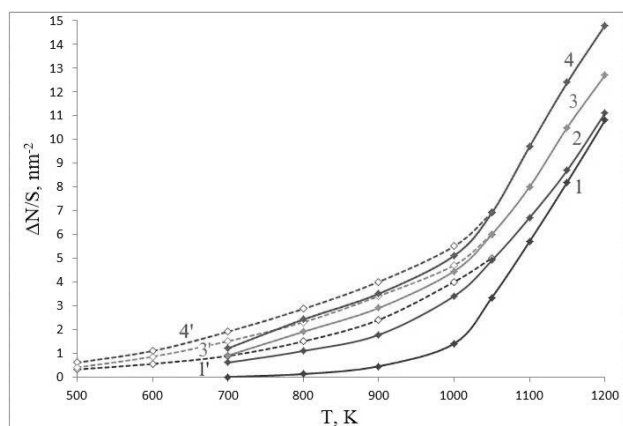


Рис. 5. Температурные зависимости удельного количества растворенных атомов Ti для всех рассмотренных ориентаций межфазной границы: 1 — (0001):(111), 2 — (0001):(001), 3 — (1010):(111), 4 — (1011):(001). Цифрами со штрихами обозначены межфазные границы с аморфным алюминием (штриховые линии)

ориентациям относительно титана, но при кристаллическом состоянии алюминия (1, 3 и 4 на рис. 5). Ранее уже говорилось, этот, на первый взгляд, необычный результат объясняется образованием во всех случаях, независимо от начальной структуры алюминия, тонкого (толщиной в 2–3 атомные плоскости) кристаллического слоя в алюминии, повторяющего кристаллическую структуру решетки титана. Дефекты, в том числе дислокации несоответствия, располагаются преимущественно не на самой границе раздела фаз, а в алюминии, после этого слоя, где либо располагается граница зерен, параллельная межфазной границе, либо аморфная фаза. Границы зерен или границы раздела кристаллического слоя и аморфной фазы, в свою очередь, служат источниками вакансий, за счет миграции которых преимущественно осуществляется взаимная диффузия в области межфазной границы на начальном этапе растворения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом молекулярной динамики проведено исследование влияния ориентации межфазной границы Ti–Al на интенсивность растворения титана в кристаллическом и аморфном алюминии, в последнем случае — при температурах ниже и выше температуры плавления алюминия. Рассматривались четыре ориентации границы раздела Ti–Al относительно решеток Ti (ГПУ) и Al (ГЦК): 1) (0001):(111), 2) (0001):(001), 3) (1010):(111), 4) (1011):(001). При исследовании диффузии в условиях аморфного состояния алюминия рассматрива-

лись, соответственно, три ориентации границы относительно решетки титана: (0001), (1010), (1011). Температура в процессе одного компьютерного эксперимента оставалась постоянной.

Выяснено, что ориентация межфазной границы оказывает влияние на интенсивность растворения титана в алюминии и для принятых обозначений увеличивается в порядке 1–2–3–4. Важным явлением в данном случае оказалось образование на начальном этапе растворения тонкого (толщиной в 2–3 атомные плоскости) кристаллического слоя в алюминии, повторяющего кристаллическую решетку титана, за которым при температуре ниже температуры плавления алюминия формировалась граница зерен, параллельная межфазной границе. Дефекты с межфазной границы, в том числе дислокации несоответствия, «выталкивались» на данную границу зерен. При температурах выше температуры плавления алюминия кристаллический слой в нем вблизи межфазной границы сохранялся, но его толщина постепенно уменьшалась с ростом температуры. Границы зерен или границы раздела кристаллического слоя и аморфной фазы служили источниками вакансий, за счет миграции которых преимущественно осуществлялась взаимная диффузия в области межфазной границы на начальном этапе растворения.

При рассмотрении алюминия в аморфном состоянии до температуры ниже его температуры плавления растворение титана при одной и той же постоянной температуре происходило почти с той же интенсивностью, что и при кристаллическом состоянии алюминия. Это было связано с образованием во всех случаях на межфазной границе независимо от начальной структуры алюминия аналогичного кристаллического слоя в алюминии. Таким образом, снижение температуры воспламенения реакции высокотемпературного синтеза в случае наличия аморфной фазы алюминия, по всей видимости, связано не с более высокой диффузией в этом случае из-за повышенного свободного объема в ней, а с дополнительным высвобождением энергии в результате кристаллизации алюминия.

Финансирование. Работа Полетаева Г.М. и Ситникова А.А. (постановка задачи, разработка модели, редактирование финальной версии статьи) поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (грант FZMM-2023-0003); Бебихова Ю.В. и Семенова А.С. (проведение компьютерных экспериментов, получение и интерпретация результатов) — Российским Научным Фондом (грант РНФ №22-22-00810).

ЛИТЕРАТУРА

1. Y.-W. Kim, J. Metals **46**, 30 (1994).
2. F. Appel, P. A. Beaven, and R. Wagner, Acta metall. mater. **41**, 1721 (1993).
3. J. Lapin, Proc. Metal, Tanger, Ostrava **19**, 2019 (2009).
4. T. Tetsui, Rare Metals **30**, 294 (2011).
5. T. Voisin, J.-P. Monchoux, and A. Couret, in *Spark Plasma Sintering of Materials*, ed. by P. Cavaliere, Springer, Cham (2019), p. 713.
6. Q. Wu, J. Wang, Y. Gu, Y. Guo, G. Xu, and Y. Cui, J. Phase Equilib. Diffus. **39**, 724 (2018).
7. N. Thiyaneshwaran, K. Sivaprasad, and B. Ravisan-
kar, Sci. Rep. **8**, 16797 (2018).
8. H. Wu, Sh. Zhang, H. Hu, J. Li, J. Wu, Q. Li, and
Zh. Wang, Intermetallics **110**, 106483 (2019).
9. J.-G. Luo, Welding J. **79**, 239-s (2000).
10. Г. М. Полетаев, ЖЭТФ **160**, 527 (2021).
11. Г. М. Полетаев, Р. Ю. Ракитин, ФТТ **64**, 412
(2022).
12. V. V. Boldyrev, K. Tkacova, J. Mater. Synt. Proc. **8**,
121 (2000).
13. V. Y. Filimonov, M. V. Loginova, S. G. Ivanov,
A. A. Sitnikov, V. I. Yakovlev, A. V. Sobachkin,
A. Z. Negodyaev, and A. Y. Myasnikov, Comb. Sci.
Techn. **192**, 457 (2020).
14. M. V. Loginova, V. I. Yakovlev, V. Yu. Filimonov,
A. A. Sitnikov, A. V. Sobachkin, S. G. Ivanov, and
A. V. Gradoboev, Lett. Mater. **8**, 129 (2018).
15. R. R. Zope and Y. Mishin, Phys. Rev. B **68**, 024102
(2003).
16. Y.-K. Kim, H.-K. Kim, W.-S. Jung, and B.-J. Lee,
Comput. Mater. Sci. **119**, 1 (2016).
17. Q.-X. Pei, M. H. Jhon, S. S. Quek, and Z. Wu,
Comput. Mater. Sci. **188**, 110239 (2021).
18. C. Chen, F. Zhang, H. Xu, Z. Yang, and G. M. Pole-
taev, J. Mater. Sci. **57**, 1833 (2022).
19. Г. М. Полетаев, И. В. Зоря, ЖЭТФ **158**, 485
(2020).
20. Q. Bizot, O. Politano, A. A. Nepapushev, S. G. Vad-
chenko, A. S. Rogachev, and F. Baras, J. Appl. Phys.
127, 145304 (2020).
21. M. I. Mendelev, F. Zhang, H. Song, Y. Sun,
C. Z. Wang, and K. M. Ho, J. Chem. Phys. **148**,
214705 (2018).
22. H. Y. Zhang, F. Liu, Y. Yang, and D. Y. Sun,
Sci. Rep. **7**, 10241 (2017).
23. M. I. Mendelev, M. J. Rahman, J. J. Hoyt, and
M. Asta, Modell. Simul. Mater. Sci. Eng. **18**, 074002
(2010).
24. D. Y. Sun, M. Asta, and J. J. Hoyt, Phys. Rev. B. **69**,
024108 (2004).

ВИХРИ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ НОРМАЛЬНОГО ГЕЛИЯ He-I В ШИРОКОЙ ЯЧЕЙКЕ

А. А. Левченко ^{a,b}, Л. П. Межов-Деглин ^{a,b}, А. А. Пельменёв ^{a,b,c*}

^a Институт физики твердого тела имени Ю.А. Осипяна Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

^b Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук
142432, Москва, Россия

^c Филиал Федерального исследовательского центра химической физики им. Н.Н. Семенова
Российской академии наук в г. Черноголовке
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 18 октября 2022 г.,
после переработки 21 ноября 2022 г.
Принята к публикации 21 ноября 2022 г.

Возникновение термогравитационного конвективного течения в объеме слоя нормального жидкого гелия He-I глубиной $h \approx (1-3)$ см в широкой цилиндрической ячейке, который подогревают сверху в поле силы тяжести в интервале температур $T_\lambda \leq T \leq T_m$, сопровождается возбуждением вихревого течения на свободной поверхности жидкости. Здесь $T_\lambda = 2.1768$ К — температура перехода жидкого ^4He из сверхтекучего He-II в нормальное He-I состояние при давлении насыщенных паров, $T_m \approx 2.183$ К — температура, при которой плотность He-I проходит через максимум. Конвекция в объеме служит источником энергии, накачиваемой в вихревую систему на поверхности He-I. Нелинейное взаимодействие вихрей на поверхности между собой и с конвективными вихревыми течениями в объеме слоя приводит к формированию на поверхности He-I двух крупномасштабных вихрей (вихревого диполя), размеры которых ограничиваются диаметром рабочей ячейки и в несколько раз превосходят глубину слоя. Это соответствует переходу со временем от режима вихревого течения на «глубокой воде» (вихри на поверхности трехмерного слоя жидкости) к вихрям на поверхности «мелкой воды» (вихри на поверхности двумерного слоя). При дальнейшем подогреве слоя выше T_m конвективные потоки в объеме быстро затухают, однако вихревое движение на поверхности двумерного слоя He-I сохраняется. В отсутствие накачки энергии из объема полная энергия вихревой системы на поверхности слоя «мелкой воды» со временем затухает по закону, близкому к степенному, вследствие нелинейного взаимодействия крупномасштабных вихрей между собой и трения о стенки ячейки. В результате, при длительных наблюдениях, на поверхности He-I вновь начинают преобладать мелкомасштабные вихри, размеры которых сравнимы или меньше глубины слоя, что соответствует переходу от двумерного к трехмерному слою жидкости. Энергия вихревого течения на поверхности слоя «глубокой воды» затухает по закону, близкому к экспоненциальному. Таким образом, длительные наблюдения за динамическими явлениями на свободной поверхности слоя He-I глубиной порядка нескольких сантиметров в широком интервале температур выше T_λ позволили впервые в одном эксперименте изучать возбуждение, эволюцию и затухание вихревых течений на поверхности слоя «глубокой» и «мелкой воды».

DOI: 10.31857/S0044451023040119

1. ВВЕДЕНИЕ

EDN:

В экспериментах [1–4] было обнаружено, что возникновение термогравитационного конвективного течения Рэлея–Бенара (RBC) в объеме подогреваемого сверху слоя нормального гелия He-I глубиной $h = (3.4-1.2)$ см в широкой цилиндрической ячейке диаметром $D = 12.4$ см (аспектное отно-

* E-mail: pelmenevaa@gmail.com

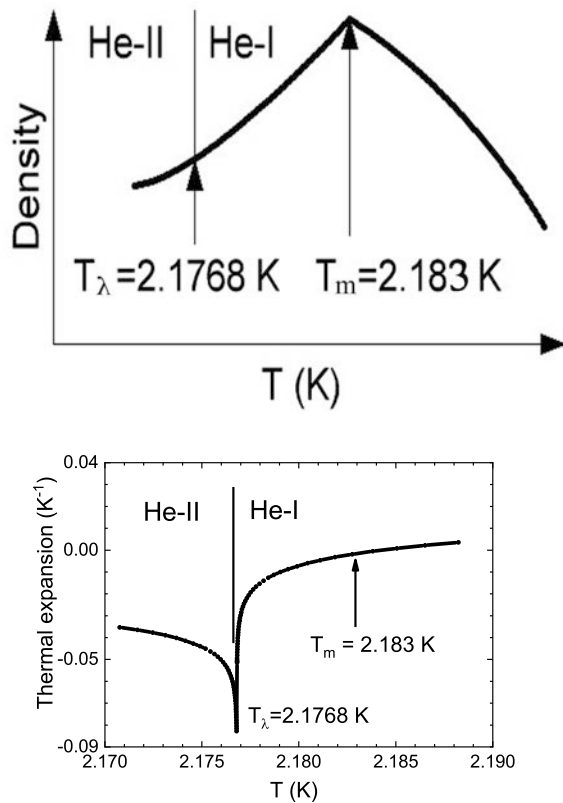


Рис. 1. Зависимости плотности ρ и температурного коэффициента расширения β жидкого ^4He при давлении насыщенных паров от температуры вблизи λ -точки. Графики построены по данным работы [5]

шение $D/h \approx 4-10$) в узком интервале температур $T_\lambda \leq T \leq T_m$ вблизи точки фазового перехода из сверхтекучего He-II в нормальное состояние He-I сопровождается возбуждением вихревого течения на свободной поверхности жидкости. Здесь $T_\lambda = 2.1768 \text{ K}$ — температура перехода жидкого ^4He из сверхтекучего в нормальное состояние, $T_m = T_\lambda + 6 \text{ mK} \approx 2.183 \text{ K}$ [5] — температура, при которой плотность ρ жидкого ^4He при давлении насыщенных паров проходит через максимум (рис. 1). Соответственно, температурный коэффициент расширения жидкости

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta T}$$

меняет знак вблизи T_m : $\beta < 0$ при $T < T_m$, $\beta > 0$ при $T > T_m$.

Графики на рис. 1 построены по данным, приведенным в обзоре [5]. Очевидно, что при плавном повышении температуры подогреваемого сверху слоя жидкого гелия глубиной h порядка нескольких см в широком цилиндрическом сосуде диамет-

ром $D \gg h$ в поле силы тяжести в интервале температур $T_\lambda \leq T \leq T_m$ в объеме неоднородно нагретого слоя He-I должны возникать конвективные термогравитационные течения Рэлея–Бенара (RBC) [6, 7].

Систематическому описанию динамики течений и структур, возникающих в объеме при термогравитационной конвекции в плоском слое жидкости в поле силы тяжести, посвящена, например, монография [7]. Монография снабжена достаточно полным обзором литературы, опубликованной вплоть до 1998 г. Результатам современных теоретических и экспериментальных исследований конвективных течений в жидкостях и газах посвящены обзоры [8–12]. В обзоре [12], например, можно найти введение в современное состояние теории RBC и список публикаций разных авторов, посвященных изучению турбулентной RBC в жидкостях и газах вплоть до 2020 г.

Для дальнейшего важно заметить, что в большинстве исследований RBC авторы полагают, что неоднородно нагретый слой жидкости или плотного газа располагается между двумя твердыми пластинами, изготовленными из материала с высокой теплопроводностью, и в расчетах используют приближение Обербека–Буссинеска (ОБ). В рамках этого приближения считается, что тепловое расширение жидкости или плотного газа мало, а физические характеристики среды (теплопроводность, кинематическая вязкость, поверхностное натяжение) постоянны. При этом зависимостью плотности от температуры (она считается линейной) пренебрегают всюду, кроме слагаемого с силой плавучести в уравнениях движения. Во многих случаях использование ОБ-приближения оправдано в силу малости параметра температурной неоднородности плотности и большой величины силы тяжести. В нашем случае (рис. 1), в интервале температур $T_\lambda \leq T \leq T_m$ температурный коэффициент расширения He-I отрицателен, $|\beta| = 0.02 \text{ K}$, и нелинейно зависит от температуры, теплопроводность и вязкость жидкости также сильно зависят от температуры [5, 13]. Поэтому точнее говорить, что рис. 1 иллюстрирует процесс установления термогравитационной конвекции Рэлея–Бенара в объеме неоднородно нагретого слоя He-I со свободной поверхностью в условиях невыполнения приближения Обербека–Буссинеска (RBC NOB). Небуссинесковская модель описания конвекции в слое со свободной границей раздела сред подробно обсуждается, например, в монографии [14]. Особенности конвективных течений в условиях RBC NOB обсуждаются в серии современных публикаций различных авторов [15–18].

Воспользовавшись данными, приводимыми в обзоре [5], можно оценить значения безразмерных параметров — числа Рэлея $Ra = g\Delta T h^3 \beta / (\nu \chi)$ и числа Прандтля $P = \nu / \chi$, которые определяют характер конвективных течений в объеме слоя He-I на рис. 1. При температуре жидкости в середине слоя $T \approx 2.179$ К плотность жидкого гелия $\rho = 0.14$ г/см³, кинематическая вязкость He-I $\nu \approx 1.4 \cdot 10^{-4}$ см²/с, температуропроводность $\chi = \kappa / \rho C_p \approx 2.5 \cdot 10^{-4}$ см²/с (здесь κ — коэффициент теплопроводности, C_p — теплоемкость), температурный коэффициент расширения $\beta \approx 0.02$ К⁻¹. Полагая, что глубина слоя $h = 2.5$ см, а разность температур на поверхности слоя жидкости, T_s , и вблизи дна ячейки, T_b , $\Delta T = T_s - T_b \approx 5$ мК, получим $P \approx 0.56$, $Ra \geq 10^7$.

По оценкам, приводимым, например, в монографиях [6, 7] критическое значение числа Рэлея Ra_c , выше которого в объеме неоднородно нагретого слоя жидкости со свободной поверхностью со временем должна установиться турбулентная конвекция, составляет $Ra_c \approx 1.1 \cdot 10^3$. В наших экспериментах глубину слоя жидкости h мы варьировали в диапазоне $h = (1.2 - 3.4)$ см, т. е. во всех измерениях значения $Ra \geq 10^7 \gg Ra_c$, и со временем в объеме слоя He-I при $T_s \leq T_m$ должна установиться турбулентная конвекция. В соответствии с [6, 7] число Рэлея можно записать следующим образом:

$$Ra = (\tau_\nu \tau_\chi) / (\tau_B)^2, \quad (1)$$

где

$$\tau_B = (h / g \beta \Delta T)^{-1/2}$$

— характерное время всплывания (buoyancy) более легкого участка слоя жидкости со дна контейнера за счет сил Архимеда, $\tau_\chi = h^2 / \chi$ — характерное время диффузионного переноса потока тепла (diffusion) через слой, а $\tau_\nu = h^2 / \nu$ — характерное время вязких потерь (dissipation) в объеме. Воспользовавшись данными, приводимыми в обзоре [5], можно оценить, что при $T_s \leq T_m$ и $h \approx 2.5$ см время всплывания более легкого участка слоя жидкости со дна ячейки $\tau_B \approx 5$ с много меньше времени диффузионного переноса потока тепла через слой $\tau_\chi \approx 3.5 \cdot 10^4$ с и времени вязких потерь в объеме $\tau_\nu \approx 6.3 \cdot 10^4$ с, так что за времена порядка $(2 - 3)\tau_B$ (т. е. $(10 - 15)$ с) после перехода температуры нагреваемого сверху слоя жидкого гелия через λ -точку в объеме слоя начинают формироваться вертикальные вихревые структуры. Как указано в [7], при наличии асимметричных граничных условий (нижняя граница твердая, а верхняя свободная) в объеме слоя преимущественно

возникают валиковые структуры. Наблюдать установление валиковых структур в объеме слоя жидкого прозрачного гелия в металлической ячейке нам не удалось, однако во всех экспериментах мы наблюдали, что через $(10 - 15)$ с после перехода через T_λ на поверхности слоя He-I глубиной $h = (1 - 3)$ см возникают вихревые течения. Известно [6, 19, 20], что возбуждаемые на свободной поверхности жидкости вихри проникают в объем слоя. В стационарном состоянии завихренность Ω уменьшается с ростом глубины z по экспоненциальному закону:

$$\Omega \sim \exp(-2z/z_0) + \exp(-\sqrt{2}z/z_0), \quad (2)$$

где $z_0/2$ — характерная глубина проникновения. Первый член обусловлен стоковым увлечением, а второй — эйлеровым течением жидкости [6, 19–22]. Естественно полагать, что наблюдаемые на поверхности He-I вихри проникают в объем слоя и взаимодействуют с вихрями, порождаемыми конвективными течениями в объеме, т. е. RBC NOB конвекция в объеме подогреваемого сверху слоя He-I служит источником накачки энергии в вихревую систему на поверхности жидкости. И, как показали наши наблюдения, в этих условиях нелинейное взаимодействие вихрей на поверхности между собой приводит в свою очередь к формированию на поверхности He-I двух крупномасштабных вихрей — вихревого диполя, размеры которого ограничиваются диаметром рабочей ячейки и многократно превосходят глубину слоя жидкости.

При обсуждении динамики волн и вихрей на поверхности слоя жидкости обычно рассматривают по отдельности вихревые течения на поверхности трехмерного слоя жидкости (вихри на глубокой воде), и вихревые течения на поверхности двумерного слоя (крупномасштабные вихри на поверхности мелкой воды). Поэтому в нашем случае есть все основания говорить, что формирование на поверхности вихревого диполя, характерные размеры которого много больше глубины слоя, соответствует переходу от вихревого течения на поверхности глубокой воды к вихревому течению на поверхности двумерного слоя. Нелинейное взаимодействие между порождаемыми конвекцией вихрями на поверхности в присутствии накачки энергии из объема приводит к формированию обратного энергетического каскада на поверхности двумерного слоя.

Теоретически особенности нелинейного взаимодействия вихрей на свободной поверхности жидкости между собой и с вихрями, порождаемыми встречным движением холодных и теплых струй в

объеме слоя при больших числах Рэлея, ранее не изучались. Этот вопрос заслуживает отдельного обсуждения, которое не входит в задачи данной работы.

При последующем возрастании температуры слоя He-I в целом выше T_m , где коэффициент β меняет знак, см. рис. 1, возникшие ранее вертикальные струи в объеме подогреваемого сверху неподвижного слоя вязкой жидкости должны быстро затухнуть. Очевидно, что в отсутствие накачки энергии из объема полная энергия вихревой системы на поверхности слоя со временем будет также уменьшаться, и при достаточно длительных наблюдениях вихревые течения на поверхности слоя He-I в неподвижном сосуде должны затухнуть. Поэтому при обсуждении дальнейшей эволюции и затухания вихревого течения на поверхности подогреваемого сверху слоя He-I при температурах $T_s > T_b > T_m$ можно выделить два этапа. На первом этапе на поверхности He-I преобладают крупномасштабные вихри, взаимодействие которых между собой и со стенками и дном сосуда, приводит к затуханию и распаду крупномасштабных вихрей. По аналогии с результатами измерений затухания вихрей на поверхности двумерного слоя обычной воды в адиабатических условиях [19–22] следовало бы ожидать, что закон затухания полной энергии системы крупномасштабных вихрей на поверхности должен быть близок к степенному $E(t) \propto (1/t)^n$. При достаточно длительных наблюдениях, когда на поверхности слоя He-I вновь начинают преобладать вихри малых размеров (второй этап), закон затухания энергии вихревого течения на поверхности трехмерного слоя He-I, как и на поверхности обычной вязкой жидкости, должен измениться — от степенного к экспоненциальному, характерному для вязкого затухания вихрей в объеме слоя.

Выше мы отмечали, что обычно исследования процессов затухания вихрей на свободной поверхности вязкой жидкости, например, воды, проводят в двух различных экспериментах: отдельно изучают затухание вихрей на «мелкой воде», где глубина слоя жидкости h много меньше характерных размеров вихрей $h \ll 2\pi/\kappa$ (здесь κ — характерный волновой вектор вихря), и отдельно — на «глубокой», где $h \gg 2\pi/\kappa$ — глубина трехмерного слоя вязкой жидкости много больше характерных размеров вихрей.

Как показали результаты измерений [17–22], в случае «мелкой воды» полная энергия системы крупномасштабных вихрей на поверхности затухает по закону, близкому к степенному. Крупномасштабные вихри взаимодействуют не только между собой,

но и со стенками и дном сосуда, что увеличивает отток энергии из вихревой системы на поверхности квазидвумерного слоя жидкости.

На «глубокой воде» основной канал диссипации энергии вихревой системы — вязкие потери в объеме, а также трение мелкомасштабных вихрей о стенки ванны. В этом случае полная энергия вихревой системы на поверхности затухает со временем по закону близкому к экспоненциальному. Используемая нами методика — генерация вихрей на свободной поверхности He-I в условиях накачки энергии из объема, которая в отсутствие накачки сменяется затуханием вихревых течений на поверхности, позволяет в одном и том же эксперименте, при неизменной глубине слоя жидкости, наблюдать как появление и эволюцию вихрей на поверхности слоя «глубокой воды», так и затухание вихрей на поверхности слоя «мелкой воды». Поэтому представлялось интересным изучить затухания вихревого течения на поверхности нормального гелия He-I [1] для последующего сравнения результатов, полученных на обычной вязкой жидкости (вода выше 10°C), коэффициенты кинематической вязкости которых различаются почти на два порядка.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе приведена конструкция вставки в криостат, которая предназначена для изучения явлений на поверхности жидкого гелия. Там же кратко описана методика проведения измерений и обработки экспериментальных данных и приведены некоторые из результатов наблюдений за динамикой развития конвективного теплообмена в слое нормального гелия He-I вблизи T_λ в различных экспериментальных ячейках. В третьем разделе приведены и обсуждаются результаты длительных (до 2500 с) наблюдений за эволюцией и затуханием вихрей на поверхности He-I в дюралевой ячейке при температурах $T \gg T_m$. Итоги наших исследований подведены в Заключение.

2. КОНСТРУКЦИЯ УСТАНОВКИ, МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ, КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ОБЪЕМЕ ПОДОГРЕВАЕМОГО СВЕРХУ СЛОЯ НОРМАЛЬНОГО ГЕЛИЯ

2.1. Схема установки

Конструкция вставки в широкогорлый металлический криостат, которая была предназначена для изучения явлений на поверхности жидкого гелия, подробно описана в работе [23]. Схема вставки, кото-

рую использовали в данных экспериментах, приведена на рис. 2. Герметичная металлическая рабочая ячейка 1 подвешена на верхней крышке криостата на трех длинных стержнях из нержавеющей стали (на рисунке не показаны) внутри гелиевой полости криостата и охлаждается снизу жидким гелием в дополнительной ванне 5. Для герметичного уплотнения прижимного соединения прозрачного верхнего фланца из листового плексигласа толщиной 8 мм с ячейкой 1 используют индиевое колечко. Охлаждаемый парами жидкого гелия плексигласовый фланец практически полностью поглощает радиационный поток тепла в инфракрасном диапазоне, который излучается в объем криостата окнами и капкой криостата, которые находятся при комнатной температуре. В некоторых экспериментах при подборе оптимальных условий для наблюдения за эволюцией вихрей на поверхности жидкого гелия в ячейке на внешней поверхности плексигласового фланца мы устанавливали кольцевой резистивный нагреватель, как показано на рис. 2. Металлический капилляр 4 служит для соединения рабочей ячейки с наружной системой заполнения чистым газообразным ^4He . Датчик давления М используется для измерения давления насыщенных паров над слоем жидкого гелия в ячейке Pcell при перекрытом вентиле в системе набора газа. Температуру жидкого гелия вблизи дна рабочей ячейки и в дополнительной ванне 5 измеряют резистивными термометрами 2 и 3. Внутренний диаметр различных экспериментальных ячеек составлял $D \approx (10 - 12)$ см, высота ≈ 5 см, глубина слоя жидкого гелия в разных экспериментах составляла $h \approx (1.2 - 3.4)$ см.

Для удобства регистрации динамических явлений на поверхности слоя прозрачной жидкости на дно рабочей ячейки заранее насыпали порошок из легких полых стеклянных микросфер характерным диаметром около 50 мкм. При наборе жидкого гелия в ячейку 1 стеклянные микросферы всплывали и локализовались в тонком слое под поверхностью жидкого ^4He . Стеклянные частицы на поверхности подсвечивались светодиодами, расположенными над плексигласовым фланцем (на рис. 2 не показаны). В объеме жидкого гелия стеклянные микросферы объединялись в агрегаты (трассеры) характерными диаметрами порядка $(0.1 - 0.3)$ мм [24]. Плотность микросфер близка к плотности жидкого гелия, поэтому трассеры полностью увлекались как капиллярными волнами, так и вихревыми потоками, возбуждаемыми в вязком подслое вблизи поверхности жидкого гелия [24, 25]. Для регистрации движения трассеров на поверхности жидкости

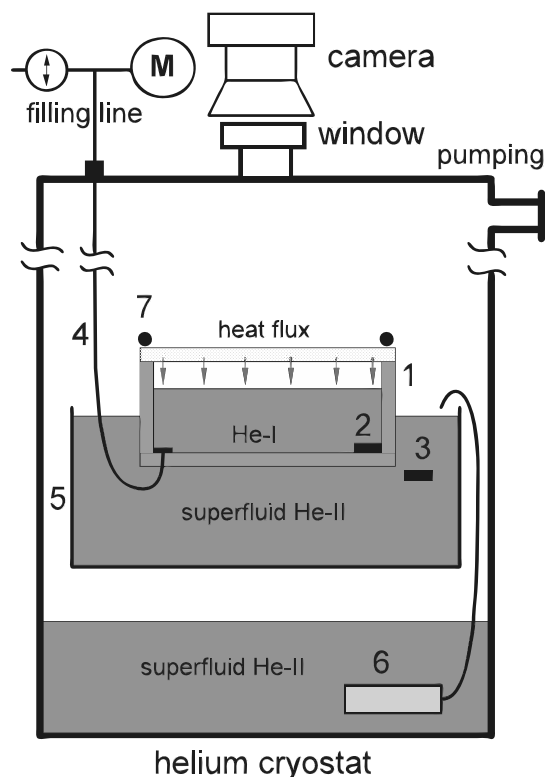


Рис. 2. Схема конструкции вставки в металлический гелиевый криостат. 1 — герметичная цилиндрическая рабочая ячейка с кольцевым резистивным нагревателем на верхнем прозрачном фланце из плексигласа; 2, 3 — резистивные термометры на дне рабочей ячейки и в дополнительной ванне 5; 4 — капилляр системы заполнения ячейки 1 газообразным ^4He ; М — датчик давления газа на линии заполнения; 6 — термомеханический насос для подлива сверхтекучего He-II в дополнительную ванну 5 из гелиевой полости криостата; 7 — кольцевой резистивный нагреватель

в рабочей ячейке использовали видеокамеру Canon EOS 6D с телескопическим объективом Sigma APO (50–500) мм F4.5–6.3. Частота кадров при видеосъемке составляла 24 кадра/с, разрешение матрицы 1920×1080 , что обеспечивало геометрическое разрешение около 0.072 мм/пиксель. Камера соединена с наружной компьютеризированной системой записи и обработки экспериментальных данных. Для выявления треков движения трассеров на поверхности жидкости отдельные кадры съемки затем суммировались [26]. К методике обработки результатов измерений вихревого течения на поверхности мы вернемся ниже.

2.2. Методика эксперимента. Конвекция в объеме неоднородно нагретого слоя He-I вблизи T_λ

Перед началом измерений газообразный ^4He из наружной системы заполнения конденсировали в рабочую ячейку, которая охлаждалась до 4.2 К жидким гелием в объеме гелиевой полости криостата. После набора необходимого количества жидкости в ячейку температуру жидкости в объеме гелиевой полости криостата плавно понижали до (1.6–1.8) К откачкой паров жидкого ^4He . В процессе откачки паров уровень He-II в гелиевой полости опускался ниже дна рабочей ячейки 1 на рис. 2, так что для дальнейшего охлаждения рабочей ячейки мы использовали дополнительную ванну 5. По достижении теплового равновесия в объеме криостата откачку паров гелия прекращали, и температура сверхтекучего He-II начинала плавно повышаться. Температура сверхтекучего гелия в экспериментальной ячейке 1 выше температуры жидкости в дополнительной ванне. Перегрев He-II в ячейке относительно жидкости во вспомогательной ванне 5 связан с тем, что значительная часть потока тепла Q_{rad} , который излучает капка криостата, находящаяся при комнатной температуре,

$$Q_{rad} \approx \sigma T^4 \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/см}^2,$$

практически полностью (более 95%) поглощается толстой плексигласовой крышкой ячейки, охлаждаемой снаружи гелиевыми парами. Тем не менее, температура плексигласовой крышки выше температуры слоя жидкого гелия в ячейке, и внутри ячейки даже в стационарных условиях возникает поток тепла, который направлен сверху вниз, от плексигласовой крышки по гелиевому пару и стенкам ячейки к поверхности слоя жидкого гелия. Далее через дно и стенки ячейки тепло передается He-II во вспомогательной ванне.

Условия переноса потока тепла через стенки рабочей ячейки в окружающую среду существенно влияют на результаты измерений конвективных явлений в жидкостях и газах [27–29], поэтому при выборе оптимальной конструкции рабочей ячейки мы испытали несколько металлических ячеек близких размеров, которые были изготовлены из меди, нержавеющей стали и из дюралюминия. Внутренний диаметр показанной на рис. 2 медной ячейки составлял 11.5 см, высота равнялась 5.4 см. Изготовленная из прозрачного листового плексигласа толщиной 0.8 см прижимная верхняя крышка герметично крепилась на верхнем фланце ячейки. На

крышке медной ячейки был установлен круговой резистивный нагреватель. Это позволяло проследить за особенностями процесса установления конвективного теплообмена в слое He-I при изменении теплоподвода к крышке ячейки. Экспериментальным исследованиям особенностей переноса тепла в подогреваемом сверху слое жидкого ^4He вблизи T_λ была посвящена работа [30]. О возникновении RBC NOB конвекции в объеме слоя нормального гелия при переходе через T_λ авторы судили по результатам измерений давления насыщенных паров $P(t)$ и распределения температуры $T(t)$ вблизи свободной поверхности и в объеме вертикального столба жидкости в стеклянном сосуде Дюара внутренним диаметром 2 см и глубиной $h = 15$ см. Теплопроводность He-II на порядки выше теплопроводности нормального He-I, поэтому при плавном повышении температуры He-II при переходе через λ -точку на кривых $P(t)$ и $T(t)$ наблюдался излом. Возникновение конвективного теплообмена в слое нагреваемого сверху He-I приводило к появлению плато на кривых $T(t)$ в интервале температур $T_\lambda \leq T \leq T_m$, которое сменялось затем быстрым возрастанием температуры и давления паров над поверхностью с дальнейшим повышением температуры жидкости выше T_m . Во избежание недоразумений следует отметить, что численные значения T_λ и T_m в работе [30] и в обзоре [5] различаются на ~ 5 мК, так как при определении температуры жидкого гелия по давлению насыщенных паров в работе [30] использовали шкалу МПТШ-58, а в обзоре [5] используют общепринятую ныне шкалу МПТШ-68.

В отличие от экспериментов авторов работы [30], в наших исследованиях мы наблюдали за возникновением конвекции в подогреваемом сверху слое гелия глубиной $h \approx (1-3)$ см в широких металлических ячейках. Паразитный радиационный поток тепла от капки криостата, который поглощался плексигласовой крышкой ячейки, приводил к тому, что даже при выключенном нагревателе на крышке ячейки температура T_b сверхтекучего He-II вблизи дна рабочей ячейки была на ~ 0.015 К выше температуры T_{add} He-II в дополнительной ванне. Чтобы оценить, как влияет подвод тепла к крышке на динамику роста температуры в жидкости и давление паров внутри герметичной ячейки 1 и в гелиевой полости криостата, на плексигласовой крышке медной ячейки был установлен резистивный нагреватель (см. рис. 2).

На рис. 3а для глубины слоя гелия $h = 2.5$ см показано, как изменялось со временем давление паров над жидким гелием в объеме медной ячейки

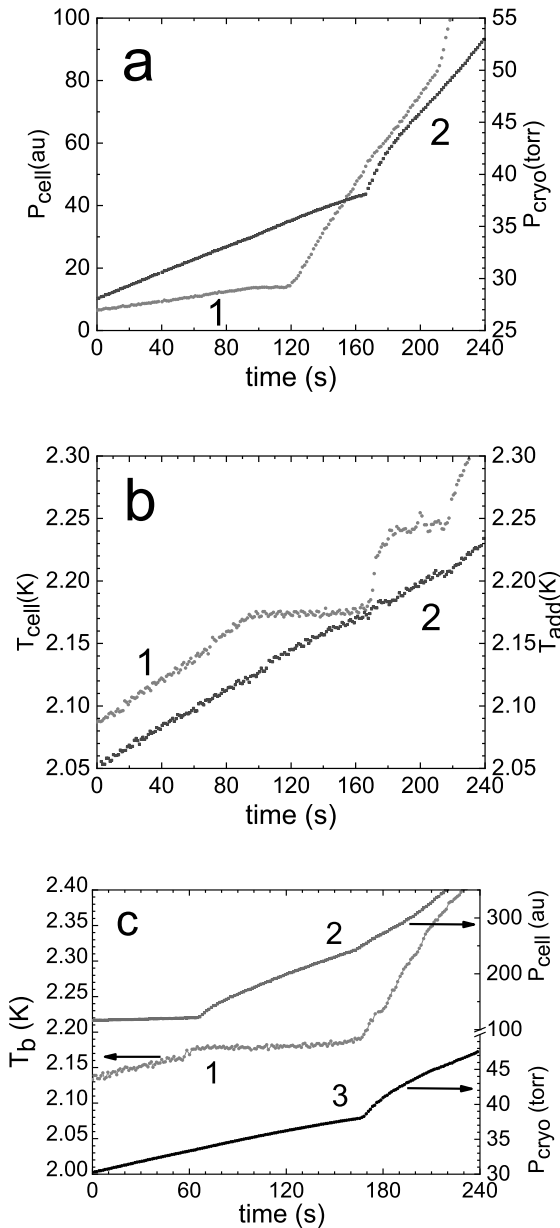


Рис. 3. *a* — Изменение давления насыщенных паров над жидким гелием в медной ячейке P_{cell} (красная кривая 1, в условных единицах) и в объеме криостата $P_{cryo} = P_{add}$ (синяя кривая 2, в Торрах), глубина слоя $h = 2.5$ см, мощность, рассеиваемая нагревателем, $W = 2$ Вт. *b* — Изменение температуры жидкого гелия на дне ячейки T_b (красная кривая 1) и в дополнительной ванне T_{add} (синяя кривая 2). *c* — Изменение температуры жидкости вблизи дна ячейки T_b (красная кривая 1), давления паров жидкого гелия в ячейке P_{cell} (зеленая кривая 2, в условных единицах) и давления паров в объеме криостата $P_{cryo} = P_{add}$ (черная кривая 3, в Торрах), глубина слоя $h = 3.4$ см

P_{cell} (красная кривая 1, шкала в условных единицах) и в объеме криостата P_{cryo} (синяя кривая 2, шкала в Торрах) при включении нагревателя в момент $t = 0$ (очевидно, что $P_{cryo} = P_{add}$). Откачка паров гелия из объема криостата заранее была отключена. Мощность, выделяемая на резистивном нагревателе, $W = 2$ Вт, сравнима с мощностью радиационного потока тепла от верхней части криостата. На рис. 3*b* показано, как изменялась со временем температура жидкого гелия вблизи дна медной ячейки T_b (красная кривая 1) и в дополнительной ванне T_{add} (синяя кривая 2). На рис. 3*c* для глубины слоя гелия $h = 3.4$ см показано, как изменялись температура жидкости вблизи дна ячейки T_b (красная кривая 1), давление паров над жидким гелием в ячейке P_{cell} (зеленая кривая 2, шкала в условных единицах) и давление паров в объеме криостата $P_{cryo} = P_{add}$ (черная кривая 3, шкала в Торрах).

Точно оценить плотность потока тепла, попадающего на поверхность слоя жидкости в ячейке довольно трудно, так как значительная часть излучаемого нагревателем потока тепла расходуется на подогрев холодного гелиевого пара, окружающего рабочую ячейку. Вид кривых $P_{cell}(t)$ и $T_b(t)$ указывает на то, что в объеме медной ячейки жидкий гелий переходил из сверхтекучего состояния в нормальное приблизительно на 100-й секунде после включения нагревателя. При этом температура He-II в дополнительной ванне T_{add} была близка к 2.13 К. Судя по положению перегибов на кривой $P_{cell}(t)$ (кривая 1), во всем объеме слоя жидкости в ячейке конвективное течение существует только в течение примерно первых 20 с (плато на кривой 1 между 100-й и 120-й секундами). Далее, положение излома на кривой $P_{cell}(t)$ и последующее быстрое повышение давления насыщенных паров в ячейке указывают на то, что температура на поверхности слоя жидкости в ячейке T_s превосходит T_m , так что положение максимума плотности жидкости (и соответственно температура T_m) смещается к середине слоя. Плотность неоднородно нагретого слоя He-I вблизи поверхности ниже, чем в середине. Это указывает на переход в режим проникающей конвекции в объеме слоя жидкости в ячейке [15]. Таким образом, в интервале $t = (120 - 170)$ с следует говорить о режиме проникающей конвекции: $T_s > T_m > T_b \geq T_\lambda$ (см. рис. 3*b*). Наконец при $t > 180$ с температура слоя в целом превосходит T_m ($T_s > T_b > T_m$), давление паров в рабочей ячейке начинает быстро возрастать, коэффициент теплового расширения жидкости $\beta > 0$, поэтому вертикальные струи в объеме подогреваемого сверх слоя He-I должны быстро затухнуть.

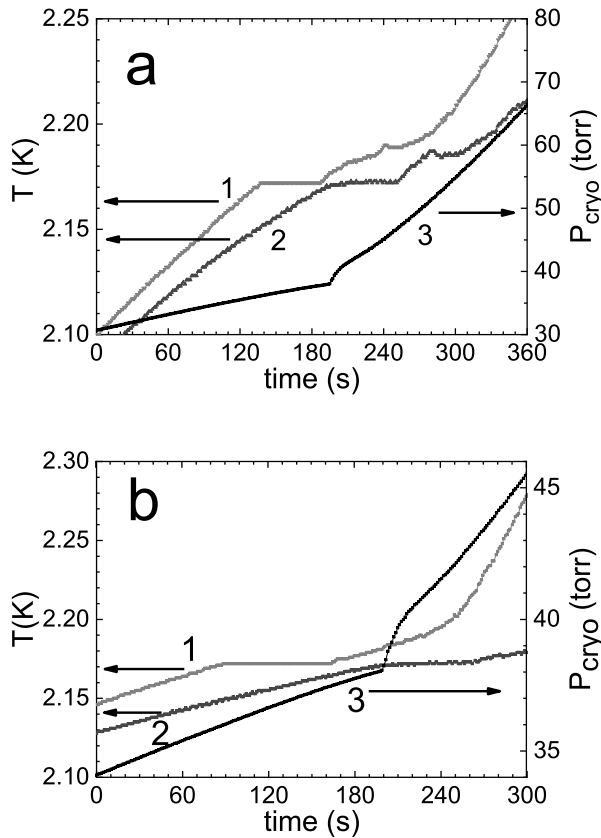


Рис. 4. Изменение температуры и давления паров жидкого гелия в дюралевой ячейке и в гелиевой ванне криостата после выключения откачки паров гелия из криостата: *a* — $h=2.5$ см, 1 — красная кривая, температура жидкости на дне сосуда T_b ; 2 — синяя кривая, температура жидкости в дополнительной ванне T_{add} ; 3 — давление паров гелия в объеме криостата $P_{cryo} = P_{add}$ (Торр). *b* — $h = 1.2$ см; 1— красная кривая, температура слоя T_b ; 2 — синяя кривая, температура гелия в дополнительной ванне T_{add} ; 3 — черная кривая, давление паров в криостате $P_{cryo} = P_{add}$ (Торр)

Аналогичные зависимости от времени температуры и давления паров жидкого гелия в медной ячейке мы наблюдали при изменении выделяемой на резистивном нагревателе мощности в интервале $W \approx 0.5 - 2$ Вт.

В режиме проникающей конвекции нам удалось наблюдать возбуждение вихрей не только на поверхности, но и в объеме слоя гелия. Зависимости от времени температуры и давления паров жидкого гелия в медной ячейке в этом эксперименте приведены на рис. 3с. На 180с слой в целом прогрелся выше T_m , конвективные вихри в объеме быстро затухли, в то время как вихревой диполь на поверхности продол-

жал существовать.

К сожалению, нам не удалось провести долговременные наблюдения за эволюцией вихревого диполя и затуханием вихревого течения на поверхности He-1, так как при установке медной ячейки в объем криостата скорость испарения жидкости из гелиевой ванны криостата заметно возрастала, в результате температура жидкости в объеме рабочей ячейки слишком быстро возрастала выше точки испарения жидкого ^4He при атмосферном давлении, что сильно затрудняло цифровую обработку видеозаписей. Поэтому в экспериментах, результаты которых приведены ниже, мы использовали рабочую ячейку, изготовленную из дюралюминия. Внутренний диаметр ячейки $D = 12.4$ см, высота 4 см, толщина стенок $\delta = 0.02$ см. Графики, описывающие изменение со временем температуры и давления паров жидкого гелия в объеме дюралевой рабочей ячейки и в гелиевой ванне криостата при глубине слоя жидкости в ячейке $h = 2.5$ и 1.2 см приведены на рис. 4.

Как следует из рис. 4, в дюралевой ячейке в отличие от медной возникновение конвективного механизма переноса тепла через слой нормально-го He-I при переходе через λ -точку (четко выраженное плато на кривых $T_b(t)$) можно было наблюдать и без дополнительного подогрева плексигласовой крышки ячейки. Радиационный поток тепла Q_{rad} , излучаемый теплой капкой криостата, $Q_{rad} \approx \sigma T^4 \approx 4 \cdot 10^{-2}$ Вт/см² практически полностью поглощался плексигласовой крышкой ячейки, которая охлаждалась гелиевыми парами в объеме гелиевой полости криостата. Плотность теплового потока Q_c , попадающего на поверхность слоя He-II в ячейке при температурах вблизи T_λ , можно оценить по порядку величины из следующих соображений. Как видно из рис. 3б и рис. 4 б, вблизи T_λ температура He-II на дне ячейки T_b на ~ 15 мК выше температуры жидкости в дополнительной ванне: $\Delta T = T_b - T_{add} \approx 15$ мК. В стационарных условиях величина ΔT определяется суммой

$$\begin{aligned} \Delta T &= 2(Q_c R_k) + Q_c \delta / \chi_w = \\ &= Q_c (2R_r + \delta / \chi_w) \approx 15 Q_c, \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя сюда из литературы значения сопротивления Кэпицы на границе металл-жидкий гелий $R_k \approx 20/T^3$ К·см²/Вт [31], теплопроводности дюралюминия при гелиевых температурах $\chi_w \approx 2 \cdot 10^{-2}$ Вт/см·К при $T \approx 2$ К [32], и полагая толщину стенок дюралевой ячейки $\delta = 0.02$ см получим, что плотность потока тепла, прихо-

дящего на поверхность слоя He-II, близка к $Q_c \approx 1 \cdot 10^{-3}$ Вт/см².

В первом приближении можно считать, что плотность теплового потока Q_c , который проходит через слой гелия в ячейке и далее передается сверхтекучему He-II в дополнительной ванне (рис. 2), существенно не изменяется при нагреве жидкости в ячейке выше T_λ . Это позволяет оценить число Нуссельта Nu , которое определяется отношением конвективного потока тепла Q_c , проходящего через слой жидкости, к кондуктивному потоку тепла при заданной разности температур $Q_{diff} = \kappa_{He}(\Delta T_c/h)$:

$$Nu = Q_c/Q_d = Q_c h / \kappa_{He} \Delta T_c, \quad (4)$$

Полагая, что разность температур на поверхности слоя и вблизи дна ячейки $\Delta T_c = T_s - T_b \approx 5$ мК, а теплопроводность He-I вблизи дна $\kappa_{He} \approx 4$ мВт/см·К, можно оценить, что значение числа Нуссельта близко к $Nu \approx 10^2$. Эта оценка разумно согласуется с оценкой числа Нуссельта по приводимым в литературе [7, 10] значениям соотношения между числами Рэлея и Нуссельта: при $Ra \approx 10^6 - 10^8$ отношение $Nu/(Ra)^{1/3} \approx 0.08$, т.е. при $Ra \approx 5 \cdot 10^7$ число Нуссельта $Nu \approx 30$. Заметим, что, согласно [7, 10], значениям Nu в диапазоне от 1 до 10 соответствуют ламинарные конвективные течения в объеме слоя, а в случае возникновения турбулентного течения в объеме неоднородно нагретого слоя значения Nu возрастают до 100–1000.

3. ВИХРИ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ He-I

3.1. Методы регистрации и обработки экспериментальных данных

Ниже мы ограничимся демонстрацией и обсуждением результатов длительных наблюдений вихревых течений на поверхности He-I в широкой дюралюминиевой ячейке внутренним диаметром $D = 12.4$ см. Высота ячейки составляла 4.0 см, толщина стенок $\delta = 0.02$ см, глубина слоя жидкости h в разных экспериментах составляла $h = (1.2 - 3.4)$ см, т.е. во всех случаях аспектное отношение $G = D/h \geq 4$. Рабочая ячейка снизу погружена в дополнительную ванну с жидким гелием. Поток тепла, направленный сверху вниз, от плексигласовой крышки по гелиевому пару и стенкам ячейки к поверхности слоя жидкого гелия по нашим оценкам составляет $Q_c \approx 1 \cdot 10^{-3}$ Вт/см². Возникновение конвективного течения в объеме

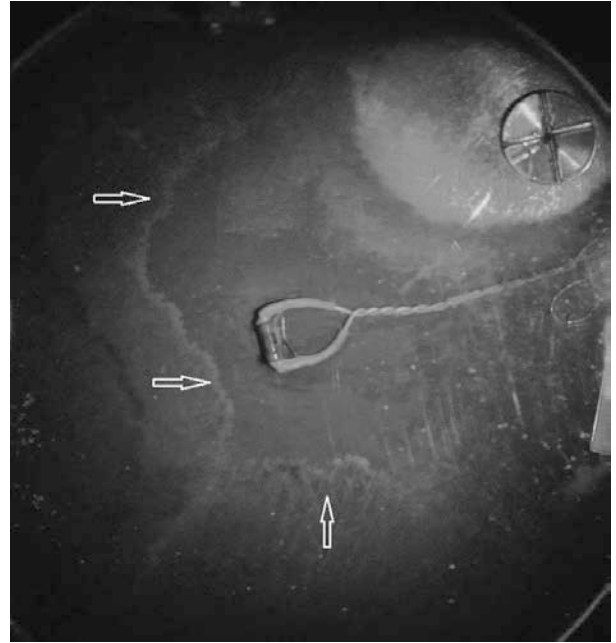


Рис. 5. Движение фронта стеклянных трассеров, локализованных под поверхностью подогреваемого сверху слоя жидкого гелия глубиной $h = 2.5$ см, при переходе через T_λ . Стрелки указывают положение фронта, который движется от стенок к центру ячейки, через 3 с после момента перехода через λ -точку. В центре кадра виден резистивный нагреватель, лежащий на дне ячейки, а справа сверху — крепление капилляра системы заполнения (4 на рис.1).

нагреваемого сверху слоя He-I при переходе через λ -точку сопровождается появлением вихревого течения на свободной поверхности жидкости. Вихревое течение на поверхности жидкости сохранялось при повышении температуры жидкости заметно выше T_m . Это позволило исследовать эволюцию вихревой системы на поверхности нормального гелия в отсутствие накачки энергии из объема слоя (в квазиadiaбатических условиях) при длительных наблюдениях в течение ~ 2500 с после перехода через λ -точку. Обработка полученных изображений программой PIVLab [26, 33] позволяла вычислять скорости движения трассеров на поверхности гелия V_x и V_y и траектории движения трассеров. Далее рассчитывали завихренность на поверхности жидкого гелия и распределение энергии по поверхности, а также суммарную кинетическую энергию на поверхности E . Вертикальная завихренность на поверхности жидкости Ω определялась как

$$\Omega = dV_x/dy - dV_y/dx. \quad (5)$$

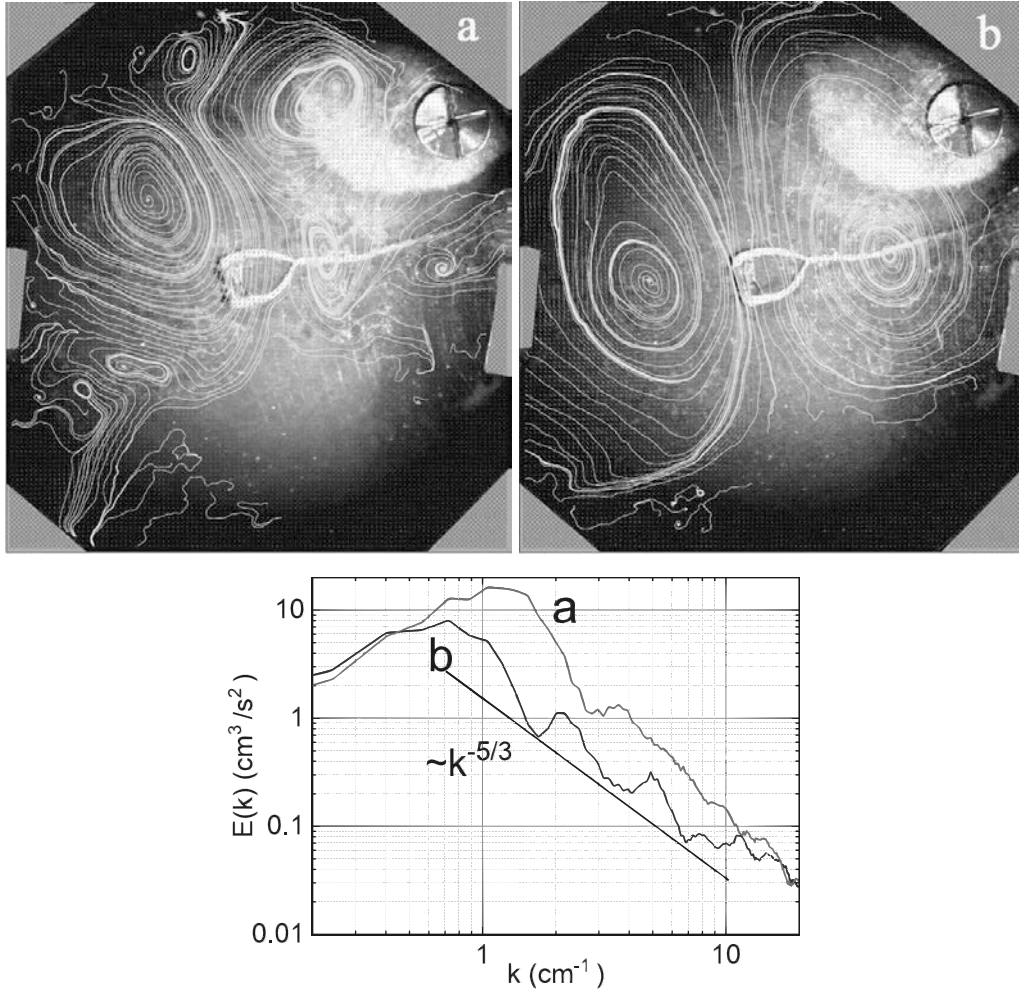


Рис. 6. Линии тока (желтые кривые) на поверхности He-I (верхние кадры) и распределение энергии вихрей по волновым векторам $E(k)$ (нижние графики) через 110 (a) и 200 (b) с после прохождения температуры жидкости через T_λ . Глубина слоя $h=2.5$ см. Прямая линия на графике $E(k)$ соответствует степенной зависимости $E(k) \propto k^{-5/3}$

Распределение энергии по поверхности вычисляли по формуле

$$E(x, y) = \frac{\rho}{2}(V_x^2 + V_y^2). \quad (6)$$

Распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ в k -пространстве вычисляли усреднением по кольцу:

$$E(k) = \frac{1}{2S\Delta k} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} |V_k|^2, \quad (7)$$

где интегрирование проводится по кольцу $k < q < k + \Delta k$. Полученное значение нормировалось на площадь поверхности жидкости S . Здесь V_k — фурье-компонента скорости трассера.

3.2. Динамические явления на поверхности нагреваемого сверх слоя He-I в цилиндрической дюралюминиевой ячейке

Стеклянные трассеры, локализованные под поверхностью жидкости позволили зарегистрировать возникновение интенсивного движения на поверхности жидкости сразу после прохождения температуры жидкости через T_λ . На рис. 5 приведен один из кадров видеозаписи — движение фронта трассеров на поверхности слоя жидкого гелия глубиной $h=2.5$ см при переходе через T_λ . Фронт потока трассеров движется от стенок к центру сосуда. При наклонном освещении поверхности слоя жидкости светодиодами, расположенными над плексигласовой крышкой ячейки (на рис. 2 не показаны), можно было зарегистрировать даже движение тени это-

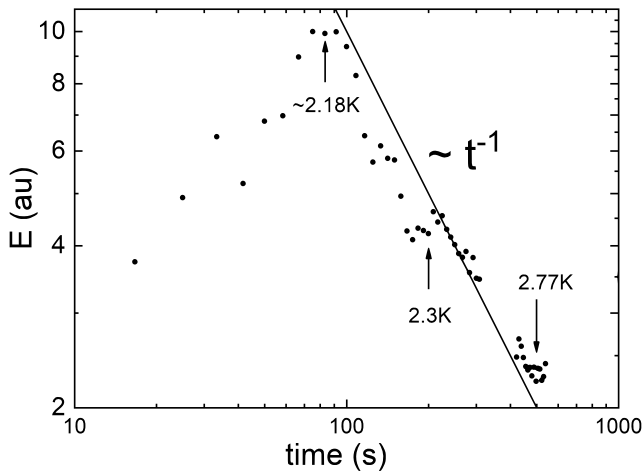


Рис. 7. Затухание энергии крупномасштабных вихрей $E(t)$ на поверхности квазидвумерного слоя He-I со временем в отсутствие накачки энергии из объема. Прямая линия соответствует степенной зависимости $E \propto t^{-1}$

го фронта трассеров, локализованных под поверхностью жидкости, по дну ячейки. Скорость центростремительного движения фронта составляла около $V_f \sim 2$ см/с, поэтому число Рейнольдса достигало $Re \sim (V_f L)/\nu \sim 4 \cdot 10^4$, что указывало на возможность возникновения вихревого течения на поверхности жидкости (здесь ν — кинематическая вязкость нормального гелия, V_f — скорость движения фронта). Аналогичные картины наблюдались при глубине слоя жидкости в ячейке 1.2 и 3.4 см.

Фронт движущихся трассеров на рис. 5 схлопывается вблизи центра ячейки, после чего на поверхности жидкости появляются несколько мелкомасштабных вихрей характерными размерами порядка (1–2) см, которые вращаются в противоположных направлениях, как показано на рис. 6 а. Суммарная завихренность на поверхности равна нулю.

Через несколько десятков секунд после прохождения через λ -точку характер вихревого течения на поверхности жидкости существенно изменяется — на поверхности слоя формируется крупномасштабный вихревой диполь, размеры которого ограничиваются шириной (диаметром) рабочей ячейки. Следует отметить, что, несмотря на большую разницу в глубине слоя жидкости ($h = 3.4, 2.5$ и 1.2 см) в разных экспериментах, а значит, и в числах Рэлея ($Ra \sim h^3$), во всех случаях мы наблюдали, что со временем на поверхности слоя He-I формируется вихревой диполь. Однако, с уменьшением глубины жидкости от 2.5 до 1.2 см скорость вращения крупномасштабных вихрей падала почти на порядок, что сильно усложняло обработку видеозаписей, особен-

но при наблюдениях на больших временах. Поэтому ниже мы ограничимся демонстрацией результатов исследования эволюции и распада вихревой системы на поверхности слоя He-I глубиной $h=2.5$ см.

Абсолютное значение завихренности $\Omega = dV_x/dy - dV_y/dx$ в одном из показанных на рис. 6 а одиночных мелкомасштабных вихрей достигает $\Omega \sim 3$ с⁻¹. По известным значениям характерных размеров этого вихря $L \sim 1$ см, завихренности и кинематической вязкости жидкого гелия можно оценить, что соответствующее число Рейнольдса $Re \sim (\Omega L^2/\nu)$ достигает $Re \sim 10^4$. Это указывает на то, что вихревое движение на поверхности жидкости, возбуждаемое конвективным движением в объеме, сильно нелинейно. И в результате нелинейного взаимодействия между этими вихрями к 200-й секунде конфигурация вихрей на поверхности слоя гелия меняется: формируются два больших вихря (вихревой диполь, на верхнем кадре рис. 6 б), которые вращаются в противоположных направлениях и занимают практически всю поверхность жидкости в ячейке. Видно, что максимум в спектре кинетической энергии $E(k)$ смещается со временем от $k \sim 1.6$ см⁻¹ в сторону меньших $k \sim 0.76$ см⁻¹, что связано с образованием двух крупномасштабных вихрей (вихревого диполя). Это соответствует переходу от 3D-слоя к 2D-слою в вихревой системе (отношение $h/L \ll 1$) и образованию обратного энергетического каскада $E(k) \propto k^{-5/3}$ в вихревой системе на поверхности квазидвумерного слоя «мелкой воды». Нелинейно взаимодействующие между собой мелкомасштабные вихри на поверхности взаимодействуют также с вихрями, порождаемыми конвективным движением струй в объеме неоднородно нагретого слоя He-I, что способствует перекачке кинетической энергии из объема жидкости в систему вихрей на поверхности (рис. 6 б).

Абсолютная величина завихренности крупномасштабного вихря составляла $\Omega \sim 0.033$ с⁻¹. Учитывая характерный размер вихря $L \sim 6$ см, можно оценить, что число Рейнольдса достигает $Re \sim 7000$. Это указывает на сильное нелинейное взаимодействие между вихрями. В соответствии с предсказаниями теории [19] и результатами экспериментов по изучению затухания крупномасштабных вихрей на поверхности воды [20–22] следовало ожидать, что взаимодействие этих вихрей между собой и со стенками и дном ячейки в отсутствие накачки энергии из объема должно приводить к степенной зависимости полной энергии вихрей от времени $E(t) \propto (1/t)^n$.

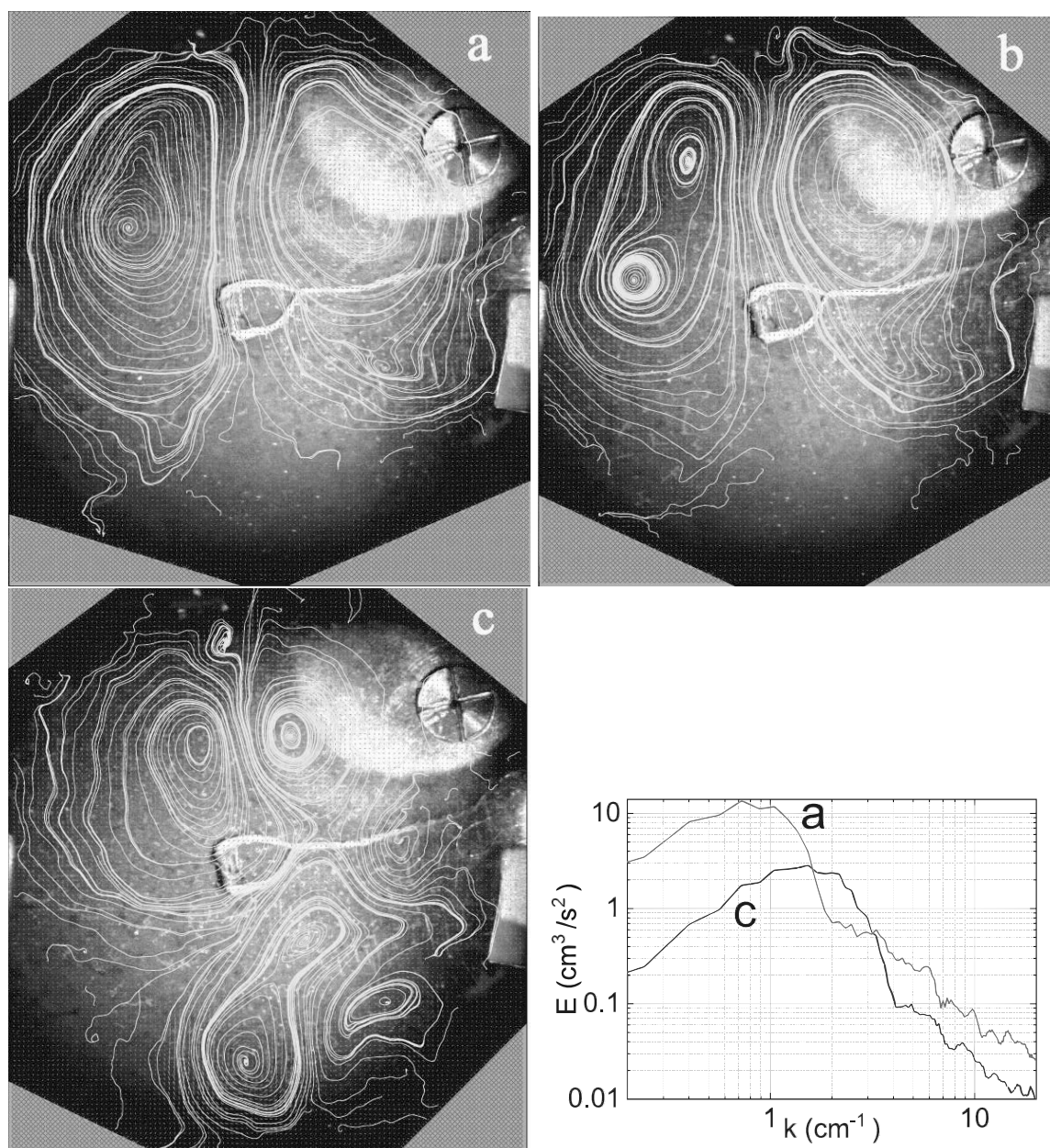


Рис. 8. Эволюцией вихревой системы на поверхности при длительных наблюдениях. Верхние кадры — линии тока жидкости на поверхности He-I (желтые кривые); нижние графики — распределение кинетической энергии $E(k)$ в k -пространстве: через $t = 1300$ (a), 1390 (b), 1900 (c) с после перехода через T_λ . Глубина слоя $h = 2.5$ см

Типичная зависимость полной энергии движения вихрей на поверхности жидкости $E(t)$ от времени, которую наблюдали в одном из экспериментов, показана на рис. 7 (в логарифмическом масштабе). На шкале времени за точку отсчета принят момент перехода жидкости из сверхтекучего в нормальное состояние. По оси ординат отложены значения E в условных единицах, рассчитанные по результатам измерений. Каждая точка рассчитывалась в опре-

деленный момент времени по всему полю скорости, полученному усреднением движения трассеров за 4.2 с (на временном интервале до ~ 140 с) и 8.4 с (на интервале после ~ 140 с). Стрелками на рис. 7 отмечены значения температуры жидкого гелия на дне ячейки T_b в определенные моменты времени. В интервале времени $t = (100 - 800)$ с затухание полной энергии крупномасштабных вихрей $E(t)$ в отсутствие накачки энергии из объема хорошо описы-

вается степенным законом $E(t) \propto (1/t)^n$ с показателем $n \approx 1$ (красная прямая линия). В разных сериях измерений, где могли различаться глубина жидкого гелия в гелиевой полости криостата, температура жидкости в момент отключения откачки паров, начальная глубина слоя жидкости во вспомогательной ячейке, скорость повышения температуры в объеме криостата и в объеме рабочей ячейки, значения показателя степени варьировались в пределах $n = 1 - 2$.

При последующих длительных наблюдениях (от 1300 до 2500 с) было обнаружено, что затухание крупномасштабных вихрей сопровождается генерацией на поверхности мелкомасштабных вихрей, которые со временем, при $t \geq 1300$ с, начинают преобладать на поверхности, как показано на рис. 8.

Соответствующие результаты расчетов изменения со временем полной энергии вихревой системы E на поверхности He-I при длительных наблюдениях в этом эксперименте (до 2500 с с момента пересечения λ -точки) показаны на рис. 9 в логарифмическом (a) и в полулогарифмическом (b) масштабах. Стрелками указаны значения температуры жидкости T_b на дне ячейки.

В различных экспериментах, где начальные условия могли различаться, значение характерного времени в выражении $E(t) \propto \exp(-t/\tau)$ составляло $\tau = (200 - 320)$ с.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Жидкий и плотный газообразный гелий — удобный модельный объект для изучения конвективных и вихревых течений на поверхности и в объеме конденсированных сред в лабораторных условиях [34]. Длительные наблюдения за вихревыми течениями на поверхности слоя He-I глубиной порядка (1–3) см в широком интервале температур выше λ — точки позволили впервые в одном эксперименте зарегистрировать возбуждение, эволюцию и затухание вихрей на свободной поверхности слоя жидкости в широкой цилиндрической ячейке в условиях как «глубокой» так и «мелкой воды». По результатам выполненных измерений можно выделить пять этапов эволюции вихревой системы на поверхности нормального гелия He-I.

На первом этапе ($T_b < T_s \leq T_m$) конвективное течение, которое развивается в объеме подогреваемого сверху слоя жидкого гелия при переходе через λ -точку (конвекция Рэлея–Бенара в небуссиновском приближении, RBC NOB), сопровождается возникновением вихревого течения на свободной поверх-

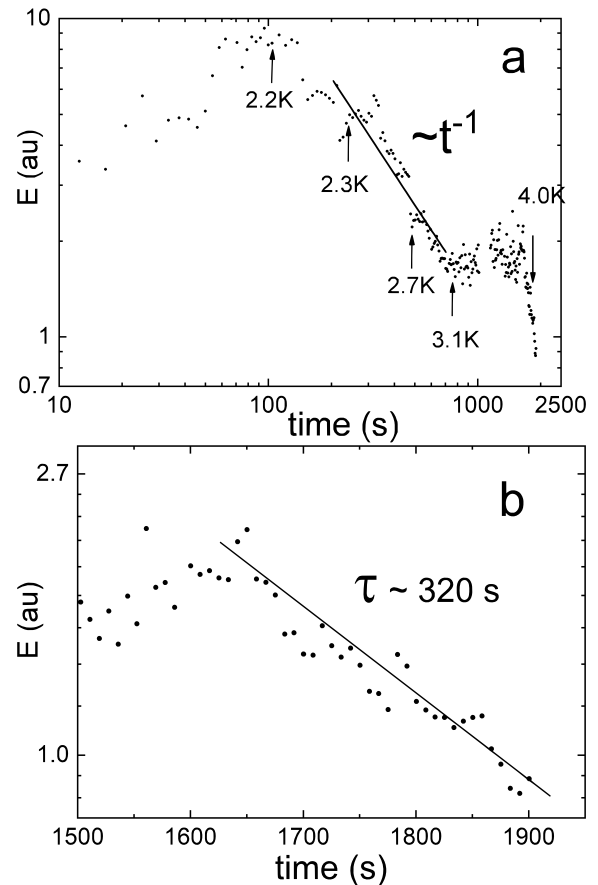


Рис. 9. Изменение со временем полной энергии вихревой системы на поверхности слоя He-I глубиной $h = 2.5$ см при длительных наблюдениях $t \geq 2500$ с. Точками показаны результаты измерений: a — зависимость $E(t)$ в логарифмическом масштабе, прямая линия соответствует степенному закону затухания $E(t) \propto (1/t)^n$ в диапазоне $t = (200 - 800)$ с; b — зависимость $E(t)$ в интервале $t = (1500 - 2500)$ с в полулогарифмическом масштабе, прямая линия соответствует $\lg E \propto \exp(-t/\tau)$

ности слоя He-I. Число Рейнольдса для возникающих на поверхности мелкомасштабных вихрей велико ($Re \sim 10^4$), что указывает на сильное нелинейное взаимодействие между этими вихрями. Взаимодействие вихрей на поверхности между собой и с турбулентными конвективными течениями, развивающимися в объеме неоднородно нагретого слоя He-I при $Ra \geq 10^7$, приводит к формированию на поверхности жидкости вихревого диполя, размеры которого много больше глубины слоя и ограничиваются диаметром рабочей ячейки. Это соответствует переходу от вихревого течения на поверхности слоя «глубокой воды» (трехмерный слой), к вихревому течению на поверхности «мелкой воды» (крупномасштабные вихри на поверхности двумерного слоя

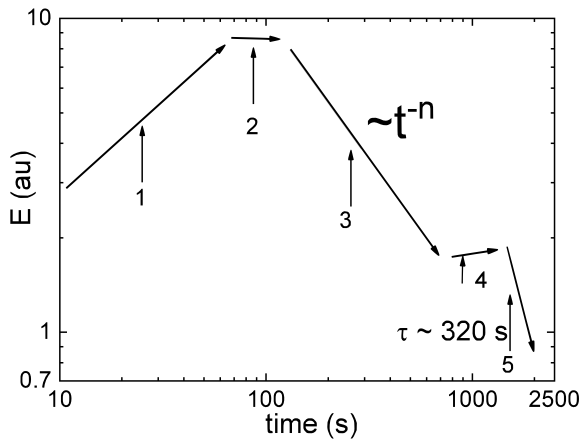


Рис. 10. Изменение со временем полной энергии вихревой системы на свободной поверхности подогреваемого сверху слоя нормального гелия He-I в широкой цилиндрической ячейке при плавном повышении температуры слоя выше T_λ . Этапы 1, 2 — температура слоя жидкости вблизи дна ячейки $T_b \leq T_m$; 3–5 — температура слоя $T_s > T_b > T_m$

жидкости). На этом этапе полная энергия вихревой системы на поверхности неоднородно нагретого слоя жидкости со временем возрастает, а максимальные значения кинетической энергии вихревой системы $E(k)$ в пространстве волновых векторов смещаются со временем в сторону меньших волновых векторов k (рис. 6). Это позволяет утверждать, что нам удалось наблюдать формирование обратного каскада энергии в вихревой системе на свободной поверхности двумерного слоя жидкости в условиях накачки энергии из объема.

На втором, переходном этапе ($T_b < T_m < T_s$) температура жидкости вблизи дна рабочей ячейки T_b ниже T_m , но температура на поверхности слоя жидкости T_s превосходит T_m , так что плотность жидкости достигает максимума где-то посередине слоя. Это соответствует случаю проникающей конвекции. Поток энергии к поверхности из объема слоя со временем быстро уменьшается, однако полная энергия вихрей на поверхности He-I практически не меняется в течение десятков секунд.

На третьем этапе ($T_m < T_b < T_s$) температура слоя в целом выше T_m . Течения, которые существовали ранее в объеме подогреваемого сверху слоя He-I, быстро затухают. На поверхности слоя преобладают крупномасштабные вихри. Значение характерного числа Рейнольдса этих крупномасштабных вихрей достаточно велико $Re \sim 7 \cdot 10^3$, так что они нелинейно взаимодействуют между собой, и, естественно, взаимодействуют со стенками и дном сосуда. В отсутствие накачки энергии из объема круп-

номасштабные вихри на поверхности начинают затухать. Полная энергия вихревой системы на поверхности двумерного слоя He-I затухает по закону, близкому к степенному $E \propto t^{-n}$, в согласии с результатами измерений на воде [19–22]. В разных экспериментах значения показателя степени лежат в пределах $n = 1–2$. В конце третьего этапа в результате диссипации энергии значение числа Рейнольдса крупномасштабных вихрей уменьшается до $Re \geq 3 \cdot 10^3$.

На четвертом — переходном — этапе затухание и распад крупномасштабных вихрей приводят к тому, что на поверхности вновь начинают преобладать мелкомасштабные вихри. Это соответствует переходу от вихревого течения на поверхности двумерного слоя к вихревому течению на поверхности трехмерного слоя (от «мелкой» к «глубокой» воде). Полная энергия вихревой системы на этом этапе изменяется слабо. Максимальные значения кинетической энергии вихревой системы $E(k)$ в пространстве волновых векторов смещаются со временем в сторону больших волновых векторов (от $k \sim 0.7 \text{ см}^{-1}$ к $k \sim 1.6 \text{ см}^{-1}$ на рис. 8). И, наконец, на пятом этапе, когда на поверхности жидкости вновь преобладают мелкомасштабные вихри, затухание полной энергии вихревой системы на поверхности слоя глубокой воды можно описать экспоненциальным законом, характерным для вязкого затухания мелкомасштабных вихрей в трехмерном слое: $E \propto \exp(-t/\tau)$. Характерное время затухания варьировалось в разных измерениях в пределах $\approx (200–320)$ с. Итак, на первом этапе накачка энергии из объема неоднородно нагреваемого слоя в систему нелинейно взаимодействующих между собой вихрей на поверхности приводит к формированию крупномасштабного вихревого диполя на поверхности He-I и возникновению обратного энергетического каскада на поверхности квазидвумерного слоя жидкости (рис. 6). На заключительном пятом этапе вихри на поверхности трехмерного слоя He-I в отсутствие накачки энергии из объема быстро затухают из-за вязких потерь в объеме нормального гелия (рис. 9). Это позволяет утверждать, что на заключительном этапе в вихревой системе на поверхности слоя «глубокой воды» в отсутствие накачки энергии из объема формируется прямой энергетический каскад (поток энергии направлен от малых волновых векторов к большим), причем ширина инерционного интервала в каскаде $E(k)$ ограничена затуханием вихрей в объеме вязкой жидкости на больших k . Заметим, что в опубликованной недавно работе [35] было показано, что интенсив-

ное турбулентное течение на поверхности 2D-слоя жидкости порождает вихревые течения в объеме благодаря возникновению спорадических вертикальных струй, которые служат источником переноса импульса в объем. Изучению формирования и затухания вихревого движения на поверхности воды нелинейными волнами, которые возбуждали на поверхности колеблющимися волнопродукторами, были посвящены работы [22, 36]. Из наших исследований следует, что процесс установления конвективного турбулентного течения в объеме слоя вязкой жидкости также сопровождается возбуждением интенсивного вихревого течения на свободной поверхности. В этом случае источником переноса импульса на свободную поверхность жидкости служат вертикальные конвективные струи в объеме.

Благодарности. Авторы благодарны А.В. Лохову за техническую помощь в эксперименте.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, проект № 075-15-2019-1893.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Пельменев, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, Письма в ЖЭТФ **110**, 545 (2019) [A. A. Pel'menev, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, JETP Lett. **110**, 551 (2019)]; doi: 10.1134/S0370274X19200062.
2. A. A. Pelmenev, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, Low Temp. Phys. **46**, 133 (2020); doi: 10.1063/1.0000531
3. A. A. Pelmenev, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, J. of Low Temp. Phys. **205**, 200 (2021); doi: 10.1007/S10909-021-02632-5.
4. A. A. Pelmenev, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, Materials **14**, 7514 (2021); doi: 10.3390/ma14247514.
5. R. J. Donnelly and C. F. Brenghi, J. Phys. Chem. Ref. Data **27**, 1217 (1998); doi: 10.1063/1.556028
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая Физика, том VI, Гидродинамика, Москва, Физматлит (2017) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics, Pergamon: New York, NY, USA, Vol. 6 (1987)].
7. А. В. Гетлинг, Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика, Едиториал УРСС URSS, (1999), 248 ISBN 5-8360-0011-5; A. V. Getling, Rayleigh–Benard Convection. Structures and Dynamics, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific, (1998), Vol. 11.
8. G. Ahlers, S. Grossmann, and D. Lohse, Rev. Mod. Phys., **81**, 503 (2009); doi: 10.1103/RevModPhys.81.503.
9. F. Chilla and J. Schumacher, Eur. Phys. J. E **35**, 58 (2012).
10. P. E. Roche, J. New, Phys. **22**, 073056 (2020).
11. S. Moller, C. Resagk, and C. Cierpka, Exp. Fluids **62**, 1 (2021); doi: 10.1017/jfm.2021.619.
12. Ping Wei, J. Fluid Mech. **924**, A28 (2021); doi: 10.1017/jfm.2021.619
13. J. J. Niemela and R. J. Donnelly, J. Low Temp Phys **98**, 1 (1995); doi: 10.1007/BF00754064.
14. Д. В. Любимов, Т. П. Любимова, А. А. Черепанов, Динамика поверхностей раздела, Физматлит, Москва (2003), с.216.
15. R. W. Walden and G. Ahlers, J. Fluid Mech. **109**, 89 (1981); doi: 10.1017/S0022112081000955.
16. A. Sameen, R. Verzicco, and K. R. Sreenivasan, Phys. Scr. **132**, 014053 (2008); doi: 10.1088/0031-8949/2008/T132/014053.
17. S. Weiss, Xiaozhou He, G. Ahlers et al., J. Fluid Mech. **851**, 374. (2018); doi: 10.1017/jfm.2018.507.
18. Hiu Fai Yik, V. Valori, and S. Weiss, Phys. Rev. Fluids **5**, 103502 (2020); doi: 10.1103/PhysRevFluids.5.103502.
19. V. M. Parfenyev, S. V. Filatov, M. Yu. Brazhnikov et al., Phys. Rev. Fluids **4**, 114701 (2019). doi: 10.1103/PhysRevFluids.4.114701.
20. S. V. Filatov and A. A. Levchenko, J. of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques **14**, 751 (2020); doi: 10.1134/s1027451020040072.
21. S. Filatov, A. Levchenko, A. Likhter et al., Mater. Lett. **254**, 444 (2019); doi: 10.1016/j.matlet.2019.07.059.
22. С. В. Филатов, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, Письма в ЖЭТФ **111**, 653 (2020); doi: 10.31857/S1234567820100031 [S.V. Filatov, A.A. Levchenko, and L.P. Mezhev-Deglin, JETP Lett. **11**, 549 (2020)].
23. А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, А. А. Пельменев, ПТЭ **6**, 133 (2016); doi: 10.7868/S0032816216060264.

24. A. A. Levchenko, E. V. Lebedeva, L. P. Mezhev-Deglin et al., *Low Temp. Phys.* **45**, 469 (2019); doi: 10.1063/1.5097354.
25. Е. В. Лебедева, А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, *ЖЭТФ*, **161**, 1 (2022); doi: 10.31857/S0044451022050157.
26. С. В. Филатов, А. А. Левченко, М. Ю. Бражников и др., *ПТЭ* **5** 135 (2018); doi: 10.1134/S0020441218040188 [S. V. Filatov, A. A. Levchenko, M. Yu. Brazhnikov et al., *Instruments and Experimental Techniques*, **61**, 757 (2018); doi: 10.1134/S0032816218040201].
27. Zhen-Hua Wan, Ping Wei, R. Verzicco et al., *J. Fluid Mech.* **881**, 218 (2019); doi: 10.1017/jfm.2019.770.
28. V.Srinivasan, U.Madanan, and R.J.Goldstein, *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **182**, 121965 (2022); doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121965.
29. P. Urban, P. Hanzelka, T. Kralik et al., *Phys. Rev. E* **99** 011101(R) (2019); doi: 10.1103/PhysRevE.99.011101.
30. В. П. Пешков, А. П. Боровиков, *ЖЭТФ* **50**, 844 (1966) [V .P. Peshkov, A. P. Borovikov, *Sov. Phys. JETP* **23**, 559 (1966)].
31. Л. П. Межов-Деглин, *ЖЭТФ* **71**, 1453 (1976) [L.P. Mezhev-Deglin, *Sov. Phys. JETP*, **44**, 761 (1976)].
32. B. Baudouy and A. Four, *Cryogenics* **60**, 1 (2014).
33. M, Thielicke and E.J Stamhuis, *J. of Open Research Software*, <http://openresearchsoftware.metajnl.com/articles/10.5334/jors.10.5334/jors.bl>. doi: 10.5334/jors.bl.
34. J. J. Niemela and K. R. Sreenivasan, *J. Low Temp. Phys.* **143**, 163 (2006); doi: 10.1007/s10909-006-9221-9.
35. R. Colombi, N. Rohde, M. Schuter et al., *Fluids* **7**, 148 (2022). doi: 10.3390/fluids7050148.
36. С. В. Филатов, Д. А. Храмов, А. А. Левченко, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 305 (2017); doi: 10.7868/S0370274X1717009X.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ И РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ

В. А. Куценко^{а*}, Д. Д. Соколов^{б,с**}, Е. Б. Яровая^{а***}

^а Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет
119991, Москва, Россия

^б Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия

^с Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук
108840, Троицк, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 октября 2022 г.,
после переработки 23 октября 2022 г.
Принята к публикации 19 декабря 2022 г.

Рассматривается система из частиц (бактерий) в среде, в которой скорости размножения и гибели случайно распределены в пространстве. В этой системе изучается рост средней численности частиц, который зависит от разности между скоростью деления и скоростью гибели, называемой случайным потенциалом. Показано, что если потенциал достаточно медленно убывает на бесконечности, то происходит взрывной рост числа бактерий и их средняя численность формально обращается в бесконечность сразу после начала эволюции системы. Кроме того, показано, что конечность средней численности бактерий для каждой конкретной реализации среды не гарантирует конечность средней численности бактерий при усреднении по всем реализациям среды. Наконец, описано поведение усредненной по среде средней численности бактерий для широкого класса потенциалов при больших временах.

DOI: 10.31857/S0044451023040120
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

При развитии различных неустойчивостей в случайных средах возникают явления, существенно отличающиеся от того, с чем обычно приходится встречаться в статистической физике. В частности, оказывается, что, скажем, средняя энергия рассматриваемой величины растет медленнее, чем корень из среднего квадрата этой величины, а обе эти скорости роста, в свою очередь, больше, чем скорость роста типичной реализации изучаемой величины. Подобное явление получило название перемежаемости (см., например, [1]).

Более того, оказывается, что в стационарной в статистическом смысле случайной среде возбуждаемая величина может расти суперэкспоненциально,

например, как $\exp(t \ln t)$. Пример такого поведения исследован, в частности, в работе [2], где рассмотрена модельная популяция бактерий. Интенсивность деления бактерий полагалась стационарной во времени и случайной по пространственным переменным, причем ее среднее значение было равно нулю. Кроме того, в модель включена диффузия бактерий. Подобный суперэкспоненциальный рост более известен для нелинейных уравнений, так что можно сказать, что случайность воспроизводит некоторые эффекты, обычно связанные с нелинейностью.

Цель настоящей работы — сделать еще один шаг в этом направлении и показать, что случайность может воспроизводить и более тонкие явления, обычно связываемые с нелинейностью, а именно, изучаемая величина может за конечное время обратиться в бесконечность. Подобное явление хорошо известно для нелинейных уравнений теплопроводности с энерговыделением, растущем при росте температуры. Подобные режимы принято называть режимами с обострением (см., например, [3]), а в контексте близкой авторам физической тематики, см. [4].

* E-mail: vlakutsenko@yandex.ru

** E-mail: sokoloff.dd@gmail.com

*** E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

В настоящей работе мы покажем, что режимы с обострением могут возникать и при развитии неустойчивостей в случайных средах. Для этого достаточно, чтобы случайное поле, от которого зависит развитие неустойчивости, достаточно часто принимало достаточно большие значения.

Конечно, развитие неустойчивости в случайной среде зависит от того, какая неустойчивость конкретно рассматривается, хотя явление перемежаемости носит общий характер. Для конкретности мы ограничимся рассмотрением простой модели из работы [2]. При построении наших примеров мы будем опираться на работы [5, 6], развивших идеи работы [2].

Конкретизация и обобщения результатов, полученных в рамках изучения рассматриваемой простой модели, проводились в различных направлениях, в частности, рассматривались неустойчивости в нестационарных случайных средах и другие сходные задачи (см., например, [7]). Непосредственно используемая нами модель востребована скорее не непосредственно в физике, а в различных естественных и гуманитарных науках, например, демографии, где ее, несмотря на очевидную упрощенность, часто рассматривают как реалистическую модель для распространения людей, и в биологии в аналогичных задачах (см., например, краткий обзор подобных работ в [8]). Отметим также очень раннюю работу Я.Б. Зельдовича по развитию неустойчивости в случайных средах, в которой во многом зародились подходы к этой проблеме [9].

2. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

Следуя работе [2], мы будем описывать нашу задачу в дискретном приближении, не фиксируя внимания на тонких деталях строения распределения плотности популяции бактерий.

Предположим, что частицы (бактерии) передвигаются по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Время полагается непрерывным. Пусть в начальный момент времени в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ находилась одна частица. За малое время эта частица может остаться на месте, переместиться в соседний узел решетки, разделиться надвое или погибнуть. Эволюция ее потомков происходит по тому же закону, независимо друга от друга и от всей предыстории. Этот процесс объединяет ветвление и блуждание частиц, потому его называют ветвящимся случайным блужданием (ВСБ) [10, 11]. Опишем конкретно механизмы ветвления и блуждания.

В нашей модели интенсивности деления и гибели частиц являются случайными величинами и не зависят от времени. Формально мы будем обозначать через $V^+(x) := V^+(x, \omega)$ интенсивность деления частиц надвое, а через $V^-(x) := V^-(x, \omega)$ — интенсивность их гибели. Переменная ω подчеркивает случайность величин. Мы считаем, что пары интенсивностей в различных точках решетки независимы и одинаково распределены. Величину $V(x) := V(x, \omega) = V^+(x) - V^-(x)$ будем называть случайным потенциалом. Математическое ожидание, вычисленное по распределению этой случайной величины или, говоря более формально, по соответствующему вероятностному пространству $(\Omega_V, \mathcal{F}_V, \mathbb{P}_V)$, будем обозначать угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$, детали см. в работе [10].

Введенный потенциал можно понимать как случайную среду на $\mathbb{Z}^d$, которая управляет процессом ветвления. Еще раз подчеркнем, что случайная среда стационарна, т.е. не зависит от времени, и поведение процесса определяется конкретной реализацией среды. Подобную реализацию $V(x, \omega)$ при некотором фиксированном ω будем называть «замороженной средой» [10]. В дальнейшем, чтобы упростить выкладки, переменную ω будем писать, только если хотим подчеркнуть зависимость от конкретной реализации среды.

Перемещение частиц по решетке в нашей модели управляется простым симметричным случайным блужданием, как в [5, 6, 10]. Частица, находящаяся в любой точке решетки, ждет время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром $\kappa > 0$, а затем равновероятно перемещается в одну из соседних точек решетки. Подобное случайное блуждание будем описывать дискретным лапласианом

$$(\kappa \Delta f)(x) = \kappa \frac{1}{2d} \sum_{|x' - x| = 1} (f(x') - f(x)),$$

где $\kappa > 0$ — коэффициент диффузии.

Соединим описанные механизмы ветвления в случайной среде и блуждания, описав эволюцию частицы в ВСБ в случайной среде. Для удобства введем среднее время ожидания в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$ как

$$\tau(x) := (\kappa + V^+(x) + V^-(x))^{-1}.$$

Эволюция частицы, находящейся в точке x , выглядит следующим образом. Частица ждет экспоненциально распределенное время с параметром $\tau(x)^{-1}$, а затем мгновенно умирает, делится надвое или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор одного из этих трех событий

производится с соответствующими вероятностями $V^-(x)\tau(x)$, $V^+(x)\tau(x)$ и $\kappa\tau(x)$.

ВСБ в случайной среде в момент времени t есть система частиц на $\mathbb{Z}^d$, а, значит, полностью описывается набором численностей частиц $\mu_t(y)$ в точках $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t . В наших предположениях $\mu_0(y) = \delta(x, y)$, где x — начальное положение первой частицы.

В замороженной среде $V(x, \omega)$, т.е. при фиксированном ω , эволюция частиц представляет собой стохастический процесс, а потому численность частиц в каждой точке $\mu_t(y) = \mu_t(y, \omega)$ есть случайная величина. Численность частиц является сложным объектом, потому в этой работе мы остановимся на изучении первого момента, т.е. средней численности частиц, как в [5]. Для замороженной среды средние численности частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ при условии старта процесса в точке x называются «замороженными» (quenched moments, см., например, [5]) и вычисляются усреднением по реализациям ВСБ в этой среде:

$$m_1(t, x, y) := m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \mu_t(y, \omega).$$

Заметим, что из локальных средних численностей частиц в точке y в момент времени t можно получить средние численности частиц в произвольной области $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ при помощи суммирования:

$$m_1(t, x, A) := \sum_{y \in A} m_1(t, x, y).$$

В том числе, можно исследовать численность частиц на всей решетке:

$$m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_1(t, x, y).$$

Каждой замороженной среде соответствует свой набор замороженных средних $m_1(t, x, y)$. В нашей модели среда случайна, поэтому замороженные моменты — тоже случайные величины. Вновь, случайные величины сложно изучать напрямую, и мы будем усреднять их, но в этот раз — по реализациям среды. Усредненные по среде моменты по устойчивой терминологии называются «отожженными» (annealed moments, см., например, [5]) и обозначаются следующим образом: $\langle m_1(t, x, y) \rangle$.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ФЕЙНМАНА–КАЦА

Можно показать (см., например, [10]), что замороженные средние численности частиц $m_1(t, x, y)$ в

ВСБ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= \kappa \Delta m_1(t, x, y) + V(x, \omega) m_1(t, x, y), \\ m_1(0, x, y) &= \delta(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотренное уравнение есть дискретный аналог уравнения теплопроводности со случайным энерговыделением.

Как показано в работе [2], эволюция поля замороженных средних $m_1(t, x, y)$ в рамках задачи (1) может быть изучена с помощью интеграла по случайным траекториям, т.е. с помощью формулы типа Фейнмана–Каца:

$$m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t V(x_s, \omega) ds \right\} \delta(x_s, y) \right], \quad (2)$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\kappa \Delta$, а математическое ожидание $\mathbb{E}_x$ вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта в точке x .

Представление (2) можно интерпретировать следующим образом. Фиксируем замороженную среду, соответствующую некоторому ω . Блуждание x_s начинается в точке x и имеет единичную «массу». Далее, в каждой точке z , в которую попадает случайное блуждание, «масса» увеличивается в $\exp(V(z)\tau(z))$ раз, где $\tau(z)$ — время пребывания в этой точке. Блуждание останавливается в момент времени t . Если оно оказалось не в точке y , то его масса зануляется. Решение $m_1(t, x, y)$ представляет собой усреднение полученных «масс» по всем траекториям блуждания x_s . Эта интерпретация позволяет говорить о представлении (2) и, соответственно, о задаче (1), как о «случайном блуждании в случайном потенциале», см., например, [12].

Важный результат, доказанный в [5], гласит, что представление (2) задает решение задачи (1) тогда и только тогда, когда оно конечно. Если представление (2) для $m_1(t, x, y)$ обращается в бесконечность, то мы не можем говорить о конечности средней численности частиц в ВСБ. То есть численность частиц в ВСБ настолько неоднородна, что не может быть описана средним.

Напомним, что в некотором эксперименте «выполнение утверждения почти наверное» значит, что вероятность исходов эксперимента, для которых утверждение выполнено, равна единице. Конечность замороженных моментов $m_1(t, x, y)$ для почти наверное каждой замороженной среды не гарантирует конечность усреднения по всем средам

$\langle m_1(t, x, y) \rangle$. Например, распределение замороженных моментов может иметь в каком-то смысле «тяжелые хвосты» и, соответственно, не иметь математического ожидания. «Хвостом» мы по умолчанию будем называть участок плотности потенциала, уходящий в плюс бесконечность. В разд. 6 будет показано, что уже экспоненциально распределенный потенциал порождает распределение замороженных моментов, не имеющее конечного среднего. Отсутствие отожденного среднего при наличии замороженных показывает, что, хотя в каждой конкретной среде описание средними численностями имеет смысл, поведение модели «в целом» не описывается средними характеристиками.

Задача следующих разделов — выяснить условия, при которых отожденные и замороженные средние обращаются в бесконечность, а также описать поведение отожденного среднего, если оно конечно. В этих разделах мы будем опираться на методы, развитые в работах [5, 10].

4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ НЕСЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Для начала рассмотрим более простой случай неслучайного потенциала, который ограничен снизу. То есть будем предполагать, что интенсивности размножения и гибели частиц не являются случайными величинами. Потенциал вновь есть разность между интенсивностью деления и интенсивностью смерти частиц каждой точке решетки.

Если потенциал $V(x)$ ограничен сверху некоторой константой $C \in \mathbb{R}$, то представление Фейнмана–Каца (2) для любого $t > 0$ ограничено:

$$\begin{aligned} m_1(t, x, y) &= \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t V(x_s) ds \right\} \delta(x_s, y) \right] \leq \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t C ds \right\} \right] = \exp\{Ct\}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение конечно для любого $t > 0$, каким бы ни был ограниченный потенциал V .

Теперь рассмотрим случай неограниченного сверху потенциала и объясним, как представление (2) может оказаться бесконечным. Главное свойство неограниченного потенциала — возможность принимать все большие и большие значения при удалении от стартовой точки x . Зафиксируем бесконечную

последовательность $\{x, x_1, x_2, \dots\}$, такую что на ней потенциал неограниченно возрастает:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(x_i) = \infty.$$

Заметим, что этот предел берется по решетке и никак не зависит от времени t .

Зафиксируем произвольно момент времени $t_0 > 0$. Случайное блуждание за время t_0 может «убежать» сколь угодно далеко от стартовой точки x . Потому существует некоторое семейство траекторий блуждания $\mathcal{T}(x_i)$, стартовавших в точке x и находящихся в точке x_i все время с $t_0/2$ до t_0 . Каждая отдельная траектория из $\mathcal{T}(x_i)$, стоя в точке x_i время $t_0/2$, набирает массу, зависящую от $V(x_i)$. Таким образом, чем больше i , тем больше «масса» каждой траектории, причем предел этой «массы» при $i \rightarrow \infty$ бесконечен. Так что рост «массы» семейства $\mathcal{T}(x_i)$ потенциально неограничен и может «взорвать» представление Фейнмана–Каца.

Однако заметим, что траектории из семейства $\mathcal{T}(x_i)$ — это редкие траектории и вероятность выбрать их среди всех возможных траекторий стремится к нулю при удалении от стартовой точки, т.е. при $i \rightarrow \infty$. Соревнование между падением «вероятности» семейства $\mathcal{T}(x_i)$ и ростом «массы» $\mathcal{T}(x_i)$ и определяет, сможет ли блуждание в представлении (2) набрать бесконечную «массу» в момент времени t_0 , т.е. будет ли само представление конечно.

Это соревнование можно описать количественно с помощью оценок, см. лемму 2.4 в работе [5]. Оказывается, что вероятность того, что случайное блуждание $\varkappa \Delta$ за время t уйдет от стартовой точки на расстояние, большее r , убывает быстрее экспоненты:

$$\mathbb{P}_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| \geq r) \leq \exp\{-r \ln r + O(r)\}. \quad (3)$$

Заметим, что главный член асимптотики в правой части не зависит от t , $\varkappa$ и размерности d .

Естественно ожидать, что, если $V(x)$ растет быстрее, чем $x \ln x$, то рост $\exp\{V(x)\}$ «обгонит» спад блуждания и интересующее нас решение обратится в бесконечность. Более точно, ожидается, что конечность или бесконечность представления Фейнмана–Каца определяется конечностью или бесконечностью предела

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup \frac{V(x)}{|x| \ln |x|}, \quad (4)$$

где $|\cdot|$ — L_1 -метрика на $\mathbb{Z}^d$, равная сумме модулей координат x .

Формальные оценки (см. лемму 1 в Приложении) отчасти подтверждают это ожидание. А именно, если предел (4) неотрицателен, то представление (2) конечно; если предел (4) не существует, то представление (2) бесконечно. Если же рассматриваемый предел конечный и положительный, то в общем случае ничего сказать нельзя. Отдельно заметим, что конечность и бесконечность утверждаются сразу для всех $t > 0$.

Например, в случае одномерной решетки для неслучайного потенциала $V(x) = |x|$ предел (4) равен нулю, а, значит, неотрицательное решение задачи (1) существует, единственно и задается соответствующим представлением Фейнмана–Каца. Для неслучайного потенциала $V(x) = |x|^2$ предел (4) обращается в бесконечность, соответственно, интеграл Фейнмана–Каца обращается в бесконечность и неотрицательных решений уже нет. С точки зрения ВСБ, этот случай означает, что численность частиц столь неоднородна, что не имеет среднего.

5. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАМОРОЖЕННЫХ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В данном разделе мы покажем, как перейти от результатов для неслучайного потенциала к результатам для случайного потенциала. Для удобства мы будем формулировать результаты для абсолютно непрерывных случайных потенциалов с плотностью f_V . Для случая дискретных потенциалов все утверждения аналогичны.

Рассмотрим случайный потенциал, ограниченный снизу. Заметим, что для замороженный потенциал $V(x, \omega)$ можно рассматривать как неслучайный потенциал. В таком случае, если для некоторого случайного потенциала почти все его реализации имеют неположительный предел (4), то для них будет существовать единственное решение задачи (1).

При подобной постановке вопроса кажется возможным существование случайных потенциалов, таких что для некоторых их реализаций предел выше существует, а для некоторых — нет. Однако в работе [5] показано, что если

$$\int_2^\infty \frac{x^d}{(\ln x)^d} f_V(x) < \infty, \quad (5)$$

то предел (4) почти наверное неположителен, в противном случае — почти наверное предел бесконечен.

Таким образом, ответ прост: если правый хвост потенциала достаточно легок в смысле (5), то задача (1) почти наверное имеет единственное неотрицательное решение. Мало того, если условие (5) нарушено, то задача (1) почти наверное не имеет единственных неотрицательных решений.

Семейство распределений со степенными хвостами часто используется на практике. Например, в математической статистике используется распределение Стюдента, в экономике — распределение Парето, а в лингвистике — закон Ципфа. Простейший пример возникновения степенного закона в физике — распределение Коши, появляющееся в эксперименте с отражением луча света от зеркала, повернутого на случайный угол. Краткий обзор зависимостей в различных областях физики, которые описываются семейством распределений со степенными хвостами можно найти, например, в работе [13].

Распределения со степенным хвостом имеют «тяжелый» правый хвост и способны порождать высокие «пики», что может привести к «взрыву» представления Фейнмана–Каца [5]. Например, одномерный потенциал с плотностью

$$f_V(x) = \begin{cases} 2/x^2, & x > 2, \\ 0, & x \leq 2, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (5):

$$\int_2^\infty \frac{x}{\ln x} \frac{2}{x^2} = \int_2^\infty \frac{2}{x \ln x} = \infty.$$

Таким образом, задача Коши (1) в этом случае не имеет неотрицательных решений, а соответствующее ВСБ не допускает описания при помощи замороженных средних $m_1(t, x, y)$.

До этого момента утверждения данного раздела сформулированы только для ограниченного снизу потенциала. Ограниченность снизу позволяла считать, что у потенциала нет точек с нехарактерно низким потенциалом, так называемых «ям». Если же потенциал неограничен снизу, то по мере удаления от стартовой точки могут появляться все более глубокие «ямы». Потенциально они могут уничтожить большую часть частиц и, тем самым, уберечь представление типа Фейнмана–Каца от набора бесконечной «массы» за конечное время.

Оказывается, что такой эффект возможен только на решетке $\mathbb{Z}^1$, так как в этом случае при движении на бесконечность блуждание обязано пройти по всем образовавшимся ямам, без возможности их обойти. На решетке размерности 2 и выше блуждание может обойти отрицательные ямы, тем самым

взорвав представление (2), подробнее см. замечание на стр. 629 в работе [5].

Таким образом, для произвольного потенциала в любых размерностях выполнение условия (5) по-прежнему гарантирует существование единственного решения. В размерностях 2 и выше это условие является необходимым и достаточным.

Как установлено в работе [5], в случае размерности 1 при невыполнении условия (5) необходимо проверить существование достаточно глубоких «ям» потенциала при помощи следующего условия:

$$\int_{-\infty}^{-2} \ln |x| f_V(x) < \infty. \quad (6)$$

Если условие (6) выполнено, то «ям» нет, соответственно, представление (2) бесконечно и неотрицательных решений нет. Однако, если левый хвост потенциала достаточно тяжел и интеграл (6) расходится, то общего ответа нет.

В первом примере этого раздела потенциал имел тяжелый правый хвост, что приводило к «взрыву» представления Фейнмана–Каца. Добавим этому потенциалу тяжелый левый хвост, чтобы породить «ямы», которые уменьшат рост средних численностей частиц. Рассмотрим размерность 1 и следующую плотность потенциала:

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 2, \\ 0, & x \in [-2, 2], \\ \frac{\log 2}{2} \frac{1}{|x| \ln^2 |x|}, & x \leq -2. \end{cases}$$

Проверим условие (6):

$$\int_{-\infty}^{-2} \ln(|x|) \frac{\log 2/2}{|x| \ln^2 |x|} = \int_2^{\infty} \ln x \frac{\log 2/2}{x \ln^2 x} = \infty.$$

То есть условие нарушено, и, потенциально, для такого $V(x)$ может существовать единственное решение задачи (1). Чтобы в этом убедиться, необходимо сделать прямую оценку представления типа Фейнмана–Каца. Подобная оценка проведена в работе [5], где показано, что представление Фейнмана–Каца будет конечным для любых (x, t) .

Подведем итог разд. 5. Задача (1) имеет смысл не для всех потенциалов. В частности, если потенциал имеет степенной хвост вида $1/x^k$, $k \geq 3$, то в размерности $(k-1)$ задача (1) не имеет неотрицательных решений для $t > 0$, а соответствующее ВСБ не допускает описание при помощи замороженных средних численностей частиц для $t > 0$.

6. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОТОЖЖЕННЫХ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В предыдущих разделах мы описали условия на потенциал $V(x, \omega)$, при которых существует решение задачи (1) для почти наверное каждой реализации случайного потенциала. Однако даже если замороженные моменты $m_1(t, x, y, \omega)$ конечны для каждой реализации среды ω , $m_1(t, x, y, \omega)$ как случайная величина может не иметь математического ожидания.

Рассмотрим этот случай более подробно. Заметим, что каждое замороженное среднее $m_1(t, x, y, \omega)$ включает в себя траектории из представления Фейнмана–Каца, которые стоят в стартовой точке x все время $[0, t]$. Вероятность «выбрать» такую траекторию равна $\exp\{-\kappa t\}$ в силу экспоненциальности времени между скачками. Тогда верна оценка

$$\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle \geq \left\langle e^{-\kappa t} \mathbb{E}_x \exp \left\{ \int_0^t V(x_s, \omega) ds \right\} \right\rangle,$$

причем последний интеграл берется по траекториям, остающимся в нуле время $[0, t]$. Поэтому $V(x_s) = V(0)$ и случайности внутри $\mathbb{E}_x(\cdot)$ нет. Для удобства обозначим $V = V(0)$ и продолжим:

$$\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle \geq \langle e^{-\kappa t} e^{Vt} \rangle = e^{-\kappa t} \langle e^{Vt} \rangle.$$

Из этой оценки вытекает, что $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$ конечен, только если конечно $\langle e^{Vt} \rangle$. Оказывается, что для потенциала V , имеющего экспоненциальное распределение, математическое ожидание по среде $\langle e^{Vt} \rangle$ конечно только конечное время t_0 . Иными словами, экспоненциально распределенный потенциал порождает настолько неоднородные реализации сред, что описывать поведение системы усреднением по средам можно только лишь конечное время $[0, t_0)$.

Экспоненциальное распределение является в некотором смысле пограничным для величины $\langle e^{Vt} \rangle$. А именно, для распределений V с хвостами, которые легче, чем хвосты у экспоненциального распределения, верно

$$\langle e^{Vt} \rangle < \infty. \quad (7)$$

В то же время для распределений V с хвостами тяжелее, чем у экспоненциального, $\langle e^{Vt} \rangle$ обращается в бесконечность для всех $t > 0$. Наконец, для экспоненциального распределения величина $\langle e^{Vt} \rangle$ конечна некоторое конечное время, а затем обращается в бесконечность.

Разумеется, интересно узнать оценку сверху для $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$, поскольку одной оценки снизу недостаточно, чтобы утверждать конечность $\langle m_1(t, x, y, \omega) \rangle$. Для этого необходимо отдельно рассмотреть два вида моментов: локальный $\langle m_1(t, x, y) \rangle$ и глобальный $\langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle$.

Для глобального момента и произвольного распределения потенциала V точные оценки получены еще в работе [5] и выглядят следующим образом:

$$e^{-\lambda t} \langle e^{Vt} \rangle \leq \langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle \leq \langle e^{Vt} \rangle. \quad (8)$$

То есть $\langle e^{Vt} \rangle$ является ограничением и сверху, и снизу с точностью до неслучайного множителя.

С помощью оценки (8) мы получаем поведение первого отожденного момента при больших временах:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle}{\ln \langle \exp\{Vt\} \rangle} = 1. \quad (9)$$

Эта форма записи удобна: она окончательно связывает конечность отоженного момента с конечностью $\langle e^{Vt} \rangle$.

Выражение (9) позволяет грубо оценить скорость роста отоженных моментов. Например, если V имеет стандартное нормальное распределение, то $\ln \langle \exp\{Vt\} \rangle = t^2/2$. Следовательно $\langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle$ растет с суперэкспоненциальной скоростью $\exp\{t^2/2\}$.

В случае локальных моментов условие конечности отоженных моментов не меняется — конечность $\langle m_1(t, x, y) \rangle$ вновь равносильна условию (7). Однако вывод выражения типа (9) более сложен. В частности, нет результатов для случая потенциала с произвольным распределением. Однако можно выделить два достаточно общих семейства потенциалов, которые покрывают практически все случаи, используемые в прикладных задачах.

Первое семейство потенциалов, «граница» которого представляет собой экспоненциальное распределение, рассмотрено в работе [10]. Это потенциалы с асимптотически экспоненциальным, так называемым «вейбулловским» хвостом: для их функции распределения $F(z)$ верно

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-\ln(1 - F(z))}{cz^\alpha} = 1, \quad c > 0, \quad \alpha > 1.$$

В случае потенциала из этого семейства соотношение (9) принимает следующий вид:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle m_1(t, x, y) \rangle}{t^{\alpha/(\alpha-1)}} = 1. \quad (10)$$

Нормальное распределение входит в семейство потенциалов с вейбулловским хвостом. В частно-

сти, для потенциала, подчиняющегося стандартному нормальному распределению? константы равны $\alpha = 2$, $c = -1/2$. Потому порядок роста $\langle m_1(t, x, y) \rangle$ будет равен $\exp\{t^2/2\}$, что совпадает с ранее вычисленной скоростью роста $\langle m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) \rangle$. Получается, что скорость роста средней численности частиц на всей решетке совпадает с ранее вычисленной скоростью роста средней численности частиц в отдельной точке.

Второе семейство потенциалов получается взятием логарифма от первого семейства и содержит потенциалы с очень легкими, так называемыми «гумбелевскими» хвостами [14], которые встречаются в теории экстремумов. Для их функции распределения $F(z)$ верно

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-\ln(1 - F(z))}{c \exp\{z\alpha\}} = 1, \quad c > 0, \quad \alpha > 1.$$

Доказательство результатов для этого семейства приведено в леммах 2–4 раздела Приложение. Для потенциалов из этого семейства соотношение (9) принимает следующий вид:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle m_1(t, x, y) \rangle}{\alpha^{-1} t \ln t} = 1. \quad (11)$$

Из выражений (10) и (11) можно заметить, что чем легче хвосты потенциала, тем скорость роста ближе к экспоненциальной. Возникает вопрос: существует ли потенциал, такой что скорость роста отоженного среднего была порядка e^{Ct} ? Оказывается, любой потенциал, ограниченный сверху константой C , обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \langle \exp\{Vt\} \rangle / t = C.$$

Поэтому для ограниченного потенциала из результата (9) следует, что скорость роста отоженного момента равна e^{Ct} .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем еще раз полученные результаты. Для того чтобы не перегружать статью математическими выкладками, мы не стремились воспроизвести начальные этапы развития популяции частиц (бактерий). Асимптотический рост средней численности частиц в описанной нами системе зависит только от асимптотического поведения правого хвоста потенциала. В частности, если потенциал достаточно медленно убывает на бесконечности, то происходит взрывной рост числа бактерий и их средняя численность формально обращается в бесконечность. Кроме того, мы показали, что конечность

средней численности бактерий для каждой конкретной реализации среды не гарантирует конечность средней численности бактерий при усреднении по самой среде. В частности, для потенциала с экспоненциальным правым хвостом усреднение средней численности существует только конечное время, а затем обращается в бесконечность. Новым результатом в этой области стала предельная теорема 1 для потенциала с гумбелевским правым хвостом.

Мы полагаем, что «взрыв» средних численностей можно устранить за счет нестационарности среды. Однако строгие исследования подобной системы с нестационарной случайной средой на конец 2022 года нам неизвестны. Первые результаты в этой области получены в диссертационной работе [15], которая, однако, пока не опубликована в рецензируемом журнале.

Построенные нами примеры формально связаны с задачей о поведении популяции бактерий, но представляется, что подобные же явления могут развиваться при подходящих условиях и при развитии других неустойчивостей в случайной среде. Как и в других случаях, формальное обращение решения в бесконечность свидетельствует об ограниченной применимости модели. Проще всего считать, что в реальных приложениях взрывной рост популяции ограничивается конечностью ресурсов среды. А именно, рост числа бактерий ограничивается тогда, когда они съедают практически всю пищу. Как и в других задачах о развитии неустойчивости в случайных средах, полученные результаты вызывают определенные жизненные аллюзии, к которым хочется относиться с осторожностью при непосредственном проектировании результатов на окружающую реальность.

Финансирование. Работа В.К. и Е.Я. поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 20-01-00487).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши для неслучайного ограниченного снизу потенциала $f(x)$:

$$\frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} = \kappa \Delta m_1(t, x, y) + f(x)m_1(t, x, y), \quad (12)$$

$$m_1(0, x, y) = \delta(x, y).$$

Представление типа Фейнмана–Каца для решения задачи (12) выглядит так:

$$m_1(t, x, y) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \delta(x_s, y) \right], \quad (13)$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\kappa \Delta$, а математическое ожидание $\mathbb{E}_x$ вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта из точки $x \in \mathbb{Z}^d$.

Напомним, что единственное неотрицательное решение задачи (12) существует тогда и только тогда, когда представление (13) конечно, см. разд. 3. Сформулируем лемму, которая связывает конечность представления (13) со скоростью возрастания функции $f(x)$ на $\mathbb{Z}^d$. Эта лемма была доказана в работе [5] сразу для случая случайного потенциала. Мы пользуемся схемой доказательства из [5], но рассматриваем неслучайный потенциал.

Лемма 1. Для представления типа Фейнмана–Каца (13) решения задачи Коши (12) верно следующее:

а) если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} \leq 0,$$

то (13) конечно для всех (x, t) ;

б) если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} = \infty,$$

то (13) бесконечно для всех (x, t) .

Доказательство пункта а). В силу оценки сверху

$$m_1(t, x, y) = \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \delta(x_s, y) \right] \leq$$

$$\leq \mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \right]$$

достаточно доказать конечность последнего интеграла.

Зафиксируем произвольно момент времени t . Рассмотрим семейство траекторий x_s , которые не успели убежать за время t дальше, чем на расстояние n от старта, т.е. $\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n$, где $|\cdot|$ — L_1 норма. Вклад каждой такой траектории в представление Фейнмана–Каца не больше вклада траектории, которая сразу прыгнула в точку из куба $|x| \leq n$ с самым большим потенциалом и оставалась там все время $(0, t]$. Этот вклад равен $\exp\{t \max_{|x| \leq n} f(x)\}$. Таким образом, получаем

$$\mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n) \exp\{t \max_{|x| \leq n} f(x)\}.$$

В лемме 2.4 работы [5] выражение $P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| \geq n)$ было оценено сверху как $\exp\{-n \ln n + O(n)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь этой оценкой, рассмотрим некоторое n_0 , начиная с которого

$$P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n) \leq \exp\{-n \ln n + Cn\}$$

для некоторой константы C .

Пользуясь условием

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \ln x} \leq 0,$$

выберем n_1 , так что для $n > n_1$ выражение $\max_{|x| \leq n} f(x)/n \ln n$ лежит в отрезке $(-\infty; \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Заметим, что можно взять сколь угодно близкое к нулю ε .

Пользуясь двумя предыдущими рассуждениями, рассмотрим $n_2 := \max(n_0, n_1)$. Для n_2 верно

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\max_{s \in [0, t]} |x_s| = n) \exp\{t \max_{|x| \leq n} f(x)\} &\leq \\ &\leq C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp\{-n \ln n + Cn\} \exp\{t \max_{|x| \leq n} f(x)\} = \\ &= C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp\left\{-n \ln n \left(1 - \frac{C}{\ln n} - t \frac{\max_{|x| \leq n} f(x)}{n \ln n}\right)\right\} \leq \\ &\leq C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp\left\{-n \ln n \left(1 - \frac{C}{\ln n} - t\varepsilon\right)\right\}, \end{aligned}$$

где C_1 — константа, отвечающая конечной сумме от 0 до n_2 .

Для каждого фиксированного t мы можем выбрать такое n_1 , чтобы $C_3 := 1 - C/\ln n_1 - t\varepsilon$ было бы строго больше нуля. Тогда исследуемый ряд ограничивается сверху сходящимся рядом:

$$\begin{aligned} C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp\left\{-n \ln n \left(1 - \frac{C}{\ln n} - t\varepsilon\right)\right\} < \\ < C_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty} \exp\{-C_3 n \ln n\} < \infty. \end{aligned}$$

Из представленной цепочки неравенств следует, что исходное представление типа Фейнмана–Каца $m_1(t, x, y)$ ограничено сходящимся рядом для любого фиксированного $t > 0$ и $x \in \mathbb{Z}^d$ и пункт а) доказан.

Доказательство пункта б). Если супремум средних по траекториям, стартующих из нуля бесконечен,

$$\sup_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \delta(x_t, y) \right] = \infty, \quad (14)$$

то общее представление типа Фейнмана–Каца также расходится:

$$\mathbb{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \delta(x_t, y) \right] = \infty. \quad (15)$$

Доказательство этого факта технически громоздкое, в точности повторяет рассуждение на стр. 628 работы [5] и, в связи с этим, здесь не приводится.

Напомним, что f ограничена снизу, и пусть $f(x) > \alpha$, $\alpha < 0$. В силу условия пункта б), мы можем выбрать путь, состоящий из $n + 1$ шагов, из нуля в y_n , такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n)}{|y_n| \ln |y_n|} = \infty. \quad (16)$$

Рассмотрим семейство траекторий блуждания, которые проходят в точности путь $\{0, y_1, \dots, y_n\}$, достигают точки y_n за время $t/2$ и оставшееся время стоят в y_n . Оценим минимальный вклад этого семейства в математическое ожидание из формулы (14):

$$\mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \delta_{y_n}(x_t) \right] \quad (17)$$

Вначале оценим приросты «массы» траекторий из рассматриваемого семейства. В силу ограниченности потенциала снизу, прирост «массы» за $[0, t/2]$, в каждой точке больше $\exp\{\alpha t/2\}$. Прирост «массы» в последней точке равен $\exp\{f(y_n)t/2\}$. Итоговая оценка снизу прироста «массы» составит

$$\exp\{\alpha t/2 + f(y_n)t/2\}. \quad (18)$$

Теперь оценим вероятность «выбрать» траекторию семейства. Вероятность выбора пути $\{0, y_1, \dots, y_n\}$ в пространстве равна $(1/2d)^n$. Количество прыжков за время t имеет пуассоновское распределение с параметром λt , потому вероятность получить ровно n скачков за время $t/2$ равна

$$P(n_{t/2}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp\{-\lambda t\}.$$

Пользуясь формулой Стирлинга для $n!$, получим

$$P(n_{t/2}) \geq \exp\{-n \ln n + O(n)\}.$$

Наконец, вероятность, того, что траектория осталась стоять в точке y_n все время $t/2$ в силу экспоненциальности времени между скачками равна $\exp\{-\kappa t/2\}$. Итоговая оценка снизу вероятности семейства траекторий равна

$$\left(\frac{1}{2d}\right)^n \exp\{-n \ln n - \kappa t/2\}. \quad (19)$$

Объединим оценки (18) и (19):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \int_0^t f(x_s) ds \right\} \delta_{y_n}(x_t) \right] &\geq \\ &\geq \exp\{\alpha t/2 + f(y_n)t/2 - n \ln(2d) - n \ln n - \kappa t/2\} = \\ &= \exp\{f(y_n)t/2 - n \ln n + O(n)\} = \\ &= \exp \left\{ -n \ln n \left(1 - \frac{t}{2} \frac{f(y_n)}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Согласно предположению (16), полученное выражение не ограничено при $n \rightarrow \infty$ для любых (x, t) . Поэтому супремум (14) равен бесконечности. Следовательно, исходное представление типа Фейнмана–Каца (17) бесконечно и лемма доказана.

Обобщение результатов работы [10] на случай произвольного семейства случайных потенциалов делается при помощи доказательства аналогов лемм 6.2, 6.3 и 6.4 из работы [10]. Мы докажем только результаты, требуемые для первого отожденного момента: аналог леммы 6.2 в виде лемм 2 и 3 и аналог леммы 6.3 в виде леммы 4.

Здесь и далее выражение $f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$. Для случайной величины $V(x)$ с функцией распределения $F(x)$ будем называть хвостовой функцией $S(x)$ дополнение к функции распределения: $S(x) := 1 - F(x)$. Введем обозначения: $M(t) := \langle e^{Vt} \rangle$ и $G(t) := \ln M(t)$.

Лемма 2. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с хвостовой функцией

$$S(x) = e^{-ce^{\alpha x}}, \quad c > 0, \quad \alpha \geq 1.$$

Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Найдем представление функции $M(t)$ через хвостовую функцию $S(x)$:

$$\begin{aligned} M(t) &= \langle e^{\xi t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF = - \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d(1 - F) = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dS = -S e^{tx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} S(x) d(e^{tx}). \end{aligned}$$

Используя монотонное убывание $S(x)$, получим

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} S(x) e^{tx} dx = t \int_{\mathbb{R}} e^{tx - ce^{\alpha x}} dx. \quad (20)$$

Рассуждение, которое мы применим далее, приводит к методу Лапласа, если изначально функция $S(x)$ более простая, например $\ln S(x) = x^a$, $a > 1$ [10, 16]. В нашем случае использовать метод Лапласа напрямую не получится и придется полностью повторить рассуждение.

Для простоты выкладок положим $c = 0$ и $\alpha = 1$. Разложим функцию $tx - e^x$ в ряд Тейлора в окрестности ее точки максимума $x^* = \ln t$:

$$tx - e^x = tx^* - e^{x^*} - \frac{1}{2} e^{x^*} (x - x^*)^2 - \sum_{k=3}^{\infty} e^{x^*} \frac{(x - x^*)^k}{k!}.$$

Подставим в предыдущее выражение $x^* = \ln t$:

$$tx - e^x = t \ln t - t - \frac{1}{2} t (x - \ln t)^2 - t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x - \ln t)^k}{k!}.$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} M(t) &= t \int_{\mathbb{R}} e^{tx - e^x} dx = \\ &= t e^{t \ln t - t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} t (x - \ln t)^2 - t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x - \ln t)^k}{k!}} dx. \quad (21) \end{aligned}$$

Исследуем правый интеграл, сделав замену $z = \sqrt{t}(x - \ln t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ \frac{1}{2} t (x - \ln t)^2 - t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(x - \ln t)^k}{k!} \right\} dx &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} \exp \left\{ - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^k t^{\frac{k-2}{2}}}{k!} \right\} dz. \end{aligned}$$

Последний интеграл исследован в разд. 2.5 работы [16], где показано, что он есть $1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$. Учитывая это, из выражения (21) получим

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} e^{tx - e^x} dx \sim e^{t \ln t - t} \sqrt{t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для $G(t) = \ln M(t)$ имеем

$$G(t) \sim t \ln t, \quad t \rightarrow \infty, \quad (22)$$

что есть условие леммы для $c = 0$ и $\alpha = 1$.

В общем случае, при $c > 0$ и $\alpha \geq 1$, вычисления более громоздки, однако общий ход рассуждения не меняется. Главный член асимптотики $t \ln t$ заменится на $\alpha^{-1} t \ln(t/\alpha c)$, что эквивалентно $\alpha^{-1} t \ln t$ при $t \rightarrow \infty$. С учетом этого замечания можно считать лемму доказанной.

Лемма 3. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, для хвостовой функции которой верно

$$\ln S(x) \sim -ce^{\alpha x}, \\ c > 0, \quad \alpha \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. По условию леммы, начиная с некоторого x_0 , для $x > x_0$ верно

$$-(1+\varepsilon)ce^{\alpha x} \leq \ln S(x) \leq -(1-\varepsilon)ce^{\alpha x}.$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$g(x) := -ce^{\alpha x}, \quad c_+ := 1+\varepsilon, \quad c_- := 1-\varepsilon.$$

В этих обозначениях, начиная с некоторого x_0 , для $x > x_0$ верно

$$c_+ce^{\alpha x} \leq \ln S(x) \leq c_-ce^{\alpha x}. \quad (23)$$

Воспользоваться оценками (23) можно только начиная с x_0 . Поэтому разобьем функцию $M(t)$ в представлении (20) на два интеграла:

$$M(t) = t \int_{\mathbb{R}} S(x)e^{tx} dx = t \int_{-\infty}^{x_0} (\dots) + t \int_{x_0}^{\infty} (\dots). \quad (24)$$

Оценим второй интеграл с двух сторон:

$$t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c+g(x)} dx \leq \\ \leq t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+\ln S(x)} dx \leq t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c_-g(x)} dx.$$

Добавим первый интеграл из (24) от $-\infty$ до x_0 :

$$t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c+g(x)} dx + t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+\ln S(x)} dx \leq \\ \leq M(t) \leq \\ \leq t \int_{x_0}^{\infty} e^{tx+c_-g(x)} dx + t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+\ln S(x)} dx. \quad (25)$$

Рассмотрим оценку снизу в предыдущем выражении. Представим ее в следующем виде:

$$t \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx+c+g(x)} dx + \\ + t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+\ln S(x)} dx - t \int_{-\infty}^{x_0} e^{tx+c+g(x)} dx.$$

Первый интеграл обозначим за J_+ , сумму второго и третьего — за B_+ . Таким же образом представим правую часть выражения (25) в виде интегралов J_- и B_- :

$$J_+ + B_+ \leq M(t) \leq J_- + B_-. \quad (26)$$

Оценим B_+ и B_- , воспользовавшись тем, что $S(x) \leq 1$, а $g(x) \leq 0$:

$$B_+ = t \int_{-\infty}^x e^{tx+\ln S(x)} dx - t \int_{-\infty}^x e^{tx+c+g(x)} dx \leq \\ \leq t \int_{-\infty}^x e^{tx} dx + t \int_{-\infty}^x e^{tx} dx \leq 2e^{tx}.$$

Таким же образом, оценив B_+ снизу и повторив рассуждения для B_- , получим

$$|B_+| \leq 2e^{tx}; \quad |B_-| \leq 2e^{tx}.$$

Интегралы J_+ и J_- представляют собой функции $M(t)$ для случайной величины с хвостовыми функциями $e^{c_+ce^{\alpha x}}$ и $e^{c_-ce^{\alpha x}}$, соответственно. В таком случае воспользуемся леммой 2:

$$\ln J_+ \sim \alpha^{-1} t \ln t; \quad \ln J_- \sim \alpha^{-1} t \ln t.$$

Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(J_+ + B_+)}{\ln J_+} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{B_+}{J_+} \right) = 1, \quad (27)$$

т.е.

$$\ln(J_+ + B_+) \sim \ln(J_- + B_-) \sim \alpha^{-1} t \ln t.$$

Возьмем логарифм от выражения (26):

$$\ln(J_+ + B_+) \leq G(t) \leq \ln(J_- + B_-).$$

Левая и правая части асимптотически эквивалентны $\alpha^{-1} t \ln t$, а, значит, $G(t)$ асимптотически эквивалентна тому же, и лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие что

$$\ln f_i(t) \sim at \ln t, \quad t \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для их свертки

$$W(t) = f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx$$

верно

$$\ln W(t) \sim at \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Запишем функции $\ln f_i(t)$ в виде

$$\ln f_i(t) = at \ln t + \varphi_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Согласно предположениям леммы, для любого $\varepsilon > 0$ существует $K = K(\varepsilon) > 0$, такое что

$$|\varphi_i(t)| \leq K + \varepsilon t \ln t, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

Эти оценки означают, что свертка $W(t)$ главным образом зависит от главной части асимптотики $at \ln t$. Обозначим за $W_0(t)$ интеграл, соответствующий свертке главных частей асимптотик:

$$W_0(t) = \int_0^t e^{ax \ln x + a(t-x) \ln(t-x)} dx.$$

Тогда $W(t)$ можно оценить следующим образом:

$$W_0(t)e^{-2K-2\varepsilon t \ln t} \leq W(t) \leq W_0(t)e^{2K+2\varepsilon t \ln t}.$$

Взяв логарифм, с обеих сторон получим

$$\begin{aligned} \ln W_0(t) - 2K - 2\varepsilon t \ln t &\leq \ln W(t) \leq \\ &\leq \ln W_0(t) + 2K + 2\varepsilon t \ln t. \end{aligned} \quad (29)$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Чтобы применить метод Лапласа, необходимо избавиться от переменного предела интегрирования, сделав замену $x = tz$:

$$W_0(t) = t \int_0^1 e^{atz \ln(tz) + a(t-tz) \ln(t-tz)} dz.$$

Упростим полученное выражение:

$$\begin{aligned} W_0(t) &= t \int_0^1 e^{at \ln t + a(t-tz) \ln(t-tz)} dz = \\ &= te^{at \ln t} \int_0^1 e^{at(z \ln z + (1-z) \ln(1-z))} dz. \end{aligned} \quad (30)$$

Мы находимся в условиях применения метода Лапласа. Он утверждает, что последний интеграл

(30) при больших t близок к значению своей подинтегральной функции в точке максимума функции $z \ln z + (1-z) \ln(1-z)$, см. [16]. Функция $z \ln z + (1-z) \ln(1-z)$ в точках 1 и -1 достигает максимума, который равен нулю. Поэтому при больших t интеграл из выражения (30) асимптотически равен единице:

$$W_0(t) \sim te^{at \ln t}, \quad \ln W_0(t) \sim at \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Подставив данное выражение в неравенство (29), получаем утверждение леммы.

Комбинируя леммы 2–4 и подходы из работы [10], получим основной результат:

Теорема 1.

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание в случайной среде с потенциалом $V(x)$. Пусть для хвостовой функции $S(x)$ потенциала верно

$$\ln S(x) \sim -ce^{\alpha x}, \quad c > 0, \quad \alpha \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle m_1(t, x, y) \rangle}{\alpha^{-1} t \ln t} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин и др., УФН **152**, 3 (1987).
2. Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, Д.Д. Соколов, ЖЭТФ **89**, 434 (1985).
3. Н.В. Змитриенко, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов и др., Письма в ЖЭТФ **26**, 620 (1977).
4. A.M. Shukurov, D.D. Sokolov, and A. Ruzmaikin, MHD **19**, 274 (1984).
5. J. Gärtner and S. Molchanov, Comm. Math. Phys., **132**, 613 (1990).
6. J. Gärtner and S. Molchanov, Probability Theory and Related Fields **111**, 1 (1998).
7. E.A. Illarionov and D.D. Sokoloff, Phys. Rev. E. **104**, 015214 (2021).
8. D.D. Sokoloff, Wulfenia **9**, 1 (2002).
9. Я.Б. Зельдович, Астроном. Ж. **41**, 1924 (1964).

10. S.A. Albeverio, L.V. Bogachev, S.A. Molchanov et al., *Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment*, Markov Processes Relat. Fields **6**, 473 (2000).
11. Е.Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, ЦПИ при мехмате Моск. ун-та (2007).
12. W. König. *The Parabolic Anderson Model: Random Walk in Random Potential*, Birkhäuser (2016).
13. J.P. Sethna. *Power laws in physics*, Nature Reviews Physics, **4**, с. 501 (2022).
14. E. Yarovaya, Comm. in Statistics — Simulation and Computation **41**, 41 (2012).
15. X. Chen, *The General Non-Stationary Anderson Parabolic Model with Correlated White Noise*, The University of North Carolina at Charlotte (2022).
16. R.W. Butler, *Saddlepoint approximations with applications*, Cambridge University Press (2007).

ИНЖЕКЦИЯ ЧИСТО СПИНОВОГО ТОКА В ГЕЛИМАГНЕТИК

И. А. Ясюлевич^{a}, Н. Г. Бебенин^a, В. В. Устинов^{a,b**}*

^a *Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук
620137, Екатеринбург, Россия*

^b *Институт естественных наук и математики,
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 10 ноября 2022 г.,
после переработки 10 ноября 2022 г.
Принята к публикации 30 ноября 2022 г.

Изучена инжекция чисто спинового тока в проводящий гелимагнетик. Найдены характерные длины затухания инжектированного в гелимагнетик спинового тока и описан их физический смысл. Показано, что в гелимагнетиках вместо длины спиновой диффузии возникает характерная длина затухания, которая всегда меньше длины спиновой диффузии, причём уменьшение определяется отношением периода спирали гелимагнетика к длине спиновой диффузии. Предсказано существование «эффекта киральной поляризации чисто спинового тока», заключающегося в том, что при инжекции в гелимагнетик вдоль оси его магнитной спирали чисто спинового тока с поперечной (продольной) относительно оси поляризацией возникает зависящий от киральности спирали спиновый ток продольной (поперечной) поляризации.

DOI: 10.31857/S0044451023040132

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

После открытия эффекта гигантского магнитосопротивления в магнитных сверхрешетках Fe/Cr [1] началось интенсивное развитие особой ветви электроники — спиновой электроники. Предмет многочисленных исследований в области спинтроники составляют сегодня явления переноса спинового момента. Здесь мы сошлемся лишь на монографию [2] с ёмким названием «Спиновый ток». Двадцать пять глав этой книги дают полное представление о сегодняшнем состоянии дел в изучении эффектов, связанных с переносом спинового момента спиновыми токами.

Перенос спинового момента в магнитных металлах и полупроводниках может осуществляться спинполяризованными электронами. В магнитных диэлектриках за перенос магнитного момента ответственны спиновые волны — магноны. Соответствующее направление спинтроники и спин-волновой электроники получило название «магноники» [3].

Спиновый ток в проводящих магнетиках может быть следствием протекания электрического тока, если перенос заряда осуществляется спинполяризованными электронами. Возможна, однако, и ситуация, когда в проводящем материале перенос спинового момента электронами проводимости в некотором заданном направлении происходит в отсутствие электрического тока, текущего в этом же направлении. Примером этому служит спиновый эффект Холла [4–6]. Спиновый ток, не сопровождаемый электрическим током (переносом электрического заряда), получил название «чисто спинового тока».

Основными материалами спинтроники сегодня являются металлы и полупроводники, причем не только ферромагнитные. За последние годы открыто большое число интересных спиновых эффектов в антиферромагнетиках и наноструктурах на их основе, см., например, обзоры [7, 8]. Было показано, что новые спиновые эффекты могут реализоваться в антиферромагнетиках с неколлинеарными подрешетками, см., например, [9, 10].

Особый класс антиферромагнетиков составляют кристаллы с модулированными магнитными структурами, многие из них указаны в обзоре [11]. Одна из структур такого рода — простая спираль —

* E-mail: yasyulevich@imp.uran.ru

** E-mail: ustinov@imp.uran.ru

была открыта еще в середине прошлого века; этот тип магнитного упорядочения реализуется в некоторых редкоземельных металлах (Eu, Dy, Ho, Tb), а также в большом числе соединений с различным типом проводимости. Такую структуру часто называют геликоидальной.

Исследование электрических свойств материалов с геликоидальной магнитной структурой началось почти сразу после их открытия и продолжается по сей день [12–20]. Спиновый ток в металлах с геликоидальным магнитным порядком изучался в [21–26]. К настоящему времени опубликован ряд экспериментальных данных по инжекции чисто спинового тока в гелимагнетик, см., например, [27–29], однако, насколько известно авторам настоящей работы, теоретический анализ такой инжекции не проводился.

Целью настоящей работы является построение теории инжекции чисто спинового тока в гелимагнетик. В рамках простого феноменологического подхода будет показано, каким образом спиральная магнитная структура влияет на глубину проникновения неравновесной электронной намагниченности в глубь гелимагнетика и каким образом поляризация спинового тока в материале с простой спиральной магнитной структурой зависит от поляризации спинового тока на границе.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Свойства проводящих магнетиков будем рассматривать в рамках $s-d(f)$ -обменной модели [30]. Ограничимся рассмотрением гелимагнетика, занимающего полупространство $z \geq 0$, в котором в отсутствие внешнего магнитного поля реализуется магнитная структура типа «простая спираль». Будем полагать, что ось магнитной спирали совпадает с осью Z , направление которой задается единичным вектором $\mathbf{e}_z$. В такой магнитной структуре отлична от нуля только поперечная относительно оси спирали Z компонента намагниченности локализованных электронов. Длину M вектора намагниченности локализованных электронов $\mathbf{M}$ будем считать не зависящей от координаты z величиной. Направление вектора $\mathbf{M}$ будем задавать единичным вектором $\mathbf{h} = \mathbf{M}/M$, который меняется с ростом z как

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}_x \cos Kqz + \mathbf{e}_y \sin Kqz,$$

где q — волновое число геликоида, $K = \pm 1$ — киральность спирали намагниченности, $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — единичные векторы соответственно вдоль осей X и Y . В гелимагнетике с волновым числом q направление

намагниченности меняется в пространстве с периодом $L_H = 2\pi/q$.

Для простоты используем приближение среднего поля. В этом приближении наличие обменного взаимодействия между локализованными электронами и электронами проводимости описывается как действие на спин электрона проводимости неоднородного обменного поля $\Lambda\mathbf{M}$, создаваемого магнитными моментами локализованных электронов, где Λ — безразмерный параметр, характеризующий величину $s-d(f)$ -обменного взаимодействия.

Координатная и временная зависимость намагниченности электронов проводимости $\mathbf{m}$ может быть описана с помощью уравнения Блоха–Торри [31]:

$$\partial\mathbf{m}/\partial t + \gamma[\mathbf{m} \times \Lambda\mathbf{M}] + \nabla \cdot \vec{J}_{\mathbf{m}} + \delta\mathbf{m}/\tau_S = 0. \quad (1)$$

Здесь $\delta\mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$ — отклонение электронной намагниченности $\mathbf{m}$ от своего локально-равновесного значения $\mathbf{m}_0$, γ — гиромагнитное отношение, τ_S — время спин-решеточной релаксации, $\vec{J}_{\mathbf{m}}$ — тензор (второго ранга) потока намагниченности. Поток намагниченности, описываемый тензором $\vec{J}_{\mathbf{m}}$, возникает, во-первых, из-за спиновой диффузии и, во-вторых, благодаря упорядоченному движению электронов с дрейфовой скоростью $\mathbf{w}$, так что

$$\vec{J}_{\mathbf{m}} = -D\nabla \otimes \delta\mathbf{m} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{m}.$$

Здесь D — коэффициент электронной диффузии, знак $\otimes$ используется для обозначения операции тензорного произведения векторов. В настоящей работе нас будут интересовать только чисто спиновые токи, поэтому будем полагать $\mathbf{w} = 0$.

Далее мы будем рассматривать уравнение (1) в предположении, что его решения $\delta\mathbf{m}$ зависят только от координаты z . Тогда

$$\vec{J}_{\mathbf{m}} = -D\mathbf{e}_z \otimes \partial\delta\mathbf{m}/\partial z,$$

откуда следует, что из девяти компонент тензора $\vec{J}_{\mathbf{m}}$ отличны от нуля только три компоненты с индексами zj , где $j = x, y, z$.

Следуя работе [25], введем в рассмотрение вектор $\mathbf{P}$ поляризации спинового тока, текущего в направлении z :

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_z \cdot \vec{J}_{\mathbf{m}}.$$

В рамках настоящей работы нас будут интересовать только стационарные решения уравнения (1), так что производная по времени в (1) может быть опу-

щена. С учётом сказанного уравнение (1) можно переписать в виде

$$\partial \mathbf{P} / \partial z + \gamma [\delta \mathbf{m} \times \Lambda \mathbf{M}] + \delta \mathbf{m} / \tau_S = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) необходимо дополнить граничным условием. Будем считать, что на границе $z = 0$ задан вектор поляризации инжектируемого спинового тока $\mathbf{P}_0$. Тогда граничное условие к уравнению (2) можно записать в виде

$$\mathbf{P}(z = 0) = \mathbf{P}_0. \quad (3)$$

Векторное уравнение (2) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} -L_S^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta m_x + \delta m_x - \tau_S \Omega_H \delta m_z \sin Kqz &= 0, \\ -L_S^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta m_y + \delta m_y + \tau_S \Omega_H \delta m_z \cos Kqz &= 0, \\ -L_S^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta m_z + \delta m_z - \tau_S \Omega_H [\delta m_x \sin Kqz - \delta m_y \cos Kqz] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $L_S = \sqrt{D\tau_S}$ — длина спиновой диффузии, $\Omega_H = \gamma \Lambda M$ — частота прецессии в обменном поле ΛM . Переходя к циркулярным компонентам, полагая

$$\begin{aligned} \delta m_{\pm} &= \delta m_x \pm i \delta m_y = \mu_{\pm} e^{\pm K i \eta \zeta}, \\ M_{\pm} &= M_x \pm i M_y = M e^{\pm K i \eta \zeta}, \end{aligned}$$

для величин $\mu_{\pm}(z)$ и δm_z получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \mu_+ + 2iK\eta \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu_+ - (1 + \eta^2) \mu_+ - i\lambda \delta m_z &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \mu_- - 2iK\eta \frac{\partial}{\partial \zeta} \mu_- - (1 + \eta^2) \mu_- + i\lambda \delta m_z &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \delta m_z - \delta m_z - i \frac{\lambda}{2} (\mu_+ - \mu_-) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\zeta = z/L_S$, $\eta = qL_S$, $\lambda = \tau_S \Omega_H$. Подставляя $\mu_{\pm} = C_{\pm} e^{-\kappa \zeta}$, $\delta m_z = C_z e^{-\kappa \zeta}$, получаем систему уравнений для констант $C_{\pm}$, C_z . Приравнявая детерминант этой системы к нулю, получаем характеристическое уравнение для определения κ :

$$\begin{aligned} (\kappa^2 - 1) \left[(\kappa^2 - 1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 \kappa^2 \right] + \\ + \lambda^2 (\kappa^2 - 1 - \eta^2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из шести корней характеристического уравнения (6) необходимо использовать только те, которые описывают решения, затухающие при стремлении ζ к $+\infty$. Подставляя найденные κ в систему уравнений для констант $C_{\pm}$, C_z , найдем соотношения между этими константами. Для того чтобы найти величину

независимых констант, используем граничное условие (3).

3. ХАРАКТЕРНЫЕ ДЛИНЫ ЗАТУХАНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ГЕЛИМАГНЕТИКЕ

Уравнение (6) имеет шесть корней, из которых три корня, удовлетворяющие условию $\text{Re } \kappa > 0$, описывают решения, затухающие при $\zeta \rightarrow +\infty$. Можно показать, что из этих трёх корней один корень κ_1 — действительный, а два других, κ_2 и κ_3 , являются комплексно-сопряжёнными. Эти корни определяют значения двух характерных длин затухания спиновых возмущений в гелимагнетике, которые мы определим как $L_D = L_S / \kappa_1$ и $L_P = L_S / \text{Re } \kappa_2$.

Решение характеристического уравнения (6) можно найти в явном виде, используя формулы Кардано. Однако получающиеся при этом выражения (см. Приложение А) трудно обозримы, поэтому ниже приводятся простые приближенные формулы, которые могут дать удовлетворительное качественное, а в некоторых случаях и количественное, описание пространственной зависимости неравновесной электронной намагниченности при спиновой инжекции в гелимагнетик.

Рассмотрим сначала предельный случай $q = 0$ ($\eta = 0$). Фактически это случай однородного ферромагнетика, в котором локализованные магнитные моменты направлены вдоль оси X . Этот случай реализуется, например, в диспрозии при $T < 87$ К. Три нужных нам корня уравнения (6) таковы: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = \sqrt{1 + i\lambda}$, $\kappa_3 = \kappa_2^*$. При вычислении κ_2 знак квадратного корня выбирается из условия $\text{Re } \kappa_2 > 0$. Знак λ для определенности выбираем положительным; если $\lambda \gg 1$, то $\kappa_2 = (1 + i) \sqrt{\lambda/2}$. Первый корень κ_1 описывает затухание x -компоненты намагниченности на длине $L_D = L_S / \kappa_1$, которая в силу выполнения равенства $\kappa_1 = 1$ в точности совпадает с длиной спиновой диффузии: $L_D = L_S$. Корни κ_2 и κ_3 описывают прецессию спиновой намагниченности электронов вокруг направления намагниченности локализованных спинов, амплитуда которой затухает на длине

$$L_P = L_S / \text{Re } \sqrt{1 + i\lambda}.$$

Поиск решения уравнения (6) в гелимагнетике существенно упрощается, когда $\lambda \gg 1 + \eta^2$. В этом случае, используя метод последовательных приближений (см. Приложение В), получаем

$$\kappa_1 = \sqrt{1 + \eta^2}, \quad \kappa_2 = (1 + i) \sqrt{\lambda/2}, \quad \kappa_3 = \kappa_2^*.$$

Соответствующие корням κ_1 и $\kappa_{2,3}$ характерные длины затухания электронной намагниченности в гелимагнетике могут быть записаны в виде

$$L_D = L_S / \sqrt{1 + \eta^2}, \quad (7)$$

$$L_P = L_S / \sqrt{\lambda/2}. \quad (8)$$

Очевидно, что характерная длина L_D в гелимагнетике является аналогом длины спиновой диффузии L_S в ферромагнетике. В случае гелимагнетика эта характерная длина тем меньше, чем меньше период спиральной структуры. Если выполнено неравенство $\eta = qL_S \gg 1$, то из (7) следует $L_D = L_H/2\pi$. Это значит, что если длина спиновой диффузии L_S существенно превышает период магнитной спирали L_H , то затухание неравновесной намагниченности в гелимагнетике целиком обусловлено неоднородностью эффективного поля, действующего на намагниченность электронов, и происходит на масштабе одного периода магнитной спирали. Поэтому короткопериодные гелимагнетики, у которых $L_H \ll L_S$, могут выступать как эффективные экраны спиновых токов, если выполняется условие $\lambda \gg \eta^2$.

Длина L_P в гелимагнетике описывает масштаб затухания прецессии спиновой намагниченности электронов проводимости вокруг локального направления намагниченности локализованных спинов. Длина затухания L_P в рассматриваемом случае много меньше длины L_D .

На рис. 1 показаны характерные длины затухания L_D и L_P , полученные из приближённых (синяя поверхность) и с помощью формул Приложения А (красная поверхность) корней характеристического уравнения (6), в зависимости от соотношения параметров η и λ .

Видно, что при выполнении условия $\lambda \gg 1 + \eta^2$ характерные длины, полученные из точного и приближенного решений, практически совпадают.

Если условие $\lambda \gg 1 + \eta^2$ не выполняется, характерные длины затухания могут быть найдены с использованием формул Приложения А. Если $\lambda \ll 1 + \eta^2$, то, как показано в Приложении В, обе характерные длины затухания L_D и L_P оказываются близки по величине к длине спиновой диффузии L_S : $L_D = L_P = L_S$. Параметр λ может иметь малые значения в силу малости параметра Λ , характеризующего величину $s-d(f)$ -обменного взаимодействия, и/или параметра τ_S , характеризующего интенсивность спин-решеточной релаксации электронов проводимости.

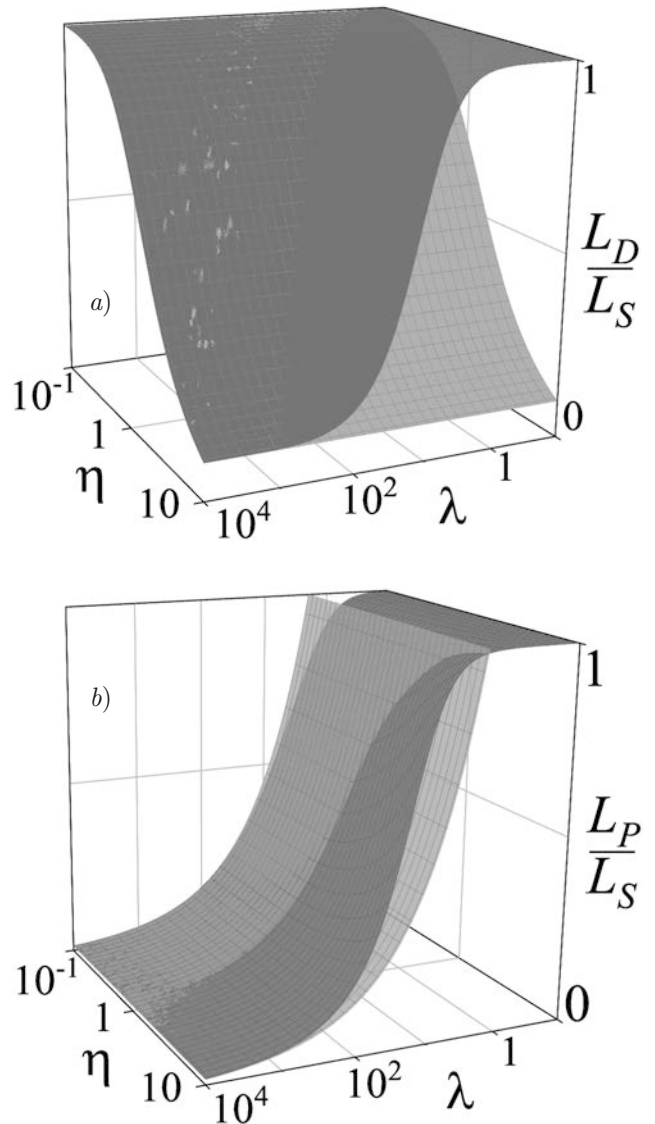


Рис. 1. Характерные длины затухания неравновесной намагниченности в гелимагнетиках, полученные из точного (красная поверхность) и приближенного (синяя поверхность) решений характеристического уравнения (6), в зависимости от соотношения параметров η и λ : а — L_D/L_S ; б — L_P/L_S

4. НЕРАВНОВЕСНАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ В ГЕЛИМАГНЕТИКЕ ПРИ ИНЖЕКЦИИ ЧИСТО СПИНОВОГО ТОКА

Перейдем к анализу неравновесной намагниченности электронов проводимости $\delta \mathbf{m}(z)$, возникающей в гелимагнетике при инжекции чисто спинового тока на границе $z = 0$. Пусть $\mathbf{M}_0$ — вектор намагниченности $\mathbf{M}(z)$ на границе $z = 0$. Направление вектора $\mathbf{M}(z)$ в произвольной точке z задается единич-

ным вектором $\mathbf{h} = \mathbf{M}/M$, на границе $z = 0$ имеем $\mathbf{h}_0 = \mathbf{M}_0/M$. Рассмотрим случай, когда на границе $z = 0$ вектор поляризации инжектируемого спинового тока $\mathbf{P}_0$ направлен вдоль намагниченности локализованных электронов $\mathbf{M}_0$. Тогда $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{h}_0$, где P_0 — длина вектора поляризации инжектируемого чисто спинового тока на границе.

Представим $\delta \mathbf{m}$ в виде суммы продольной $\delta \mathbf{m}_\ell$ и поперечной $\delta \mathbf{m}_t$ (по отношению к оси спирали) компонент: $\delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{m}_t + \delta \mathbf{m}_\ell$. Считая выполненным неравенство $\lambda \gg 1 + \eta^2$, получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{m}_t &= \delta m_{\parallel} e^{-z/L_D} \mathbf{h} + \\ &+ K \delta m_{\perp} \sin \left(\frac{z}{L_P} - \frac{\pi}{4} \right) e^{-z/L_P} [\mathbf{h} \times \mathbf{e}_z], \\ \delta \mathbf{m}_\ell &= K \delta m_{\perp} \sin \left(\frac{z}{L_P} + \frac{\pi}{4} \right) e^{-z/L_P} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \delta m_{\parallel} &= \frac{(\tau_S/L_S)}{\sqrt{1+\eta^2}} P_0, \\ \delta m_{\perp} &= \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}} \delta m_{\parallel}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из выражения (9) становится ясным физический смысл длин L_D и L_P . Длина затухания L_D является характерным масштабом убывания векторной компоненты неравновесной намагниченности электронов проводимости, сонаправленной с вектором намагниченности локализованных электронов гелимагнетика. Длина затухания L_P является характерным масштабом убывания компоненты неравновесной намагниченности электронов, направленной перпендикулярно намагниченности локализованных электронов гелимагнетика. Следует отметить, что направление этой компоненты неравновесной намагниченности электронов непосредственно определяется киральностью K спирали намагниченности гелимагнетика.

Из (7), (8) и (10) следует, что при выполнении условия $\lambda \gg 1 + \eta^2$ выполняются неравенства $L_D \gg L_P$ и $\delta m_{\parallel} \gg \delta m_{\perp}$. Это означает, во-первых, что инжектированная в гелимагнетик неравновесная намагниченность, направленная перпендикулярно $\mathbf{h}$, уменьшается по амплитуде по мере удаления от границы в глубь гелимагнетика намного быстрее, чем неравновесная намагниченность, сонаправленная с $\mathbf{h}$, и, во-вторых, что амплитуда $\delta m_{\perp}$ много меньше амплитуды $\delta m_{\parallel}$. Таким образом, при $\lambda \gg 1 + \eta^2$ имеет место эффект спиновой фильтрации — эффект, выражающийся в переориентации неравновесной намагниченности электронов проводимости в сторону намагниченности локализован-

ных электронов. Ранее эффект спиновой фильтрации был обнаружен в магнитных многослойных системах (смотрите работу [32] и ссылки в ней).

Обсудим описываемый формулой (9) эффект возникновения продольной компоненты $\delta \mathbf{m}_\ell$ неравновесной намагниченности электронов проводимости при инжекции чисто спинового тока с поперечной поляризацией $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{h}_0$. Как следует из (9), величина продольной намагниченности $\delta \mathbf{m}_\ell$ пропорциональна амплитуде P_0 инжектированного спинового тока, тогда как ее направление непосредственно определяется киральностью гелимагнетика. В работе [19] было показано, что в гелимагнетиках благодаря взаимодействию спинов электронов проводимости с пространственно-неоднородным эффективным магнитным полем возникает кинетический магнитоэлектрический эффект, предсказанный ранее в работе [33]. Этот эффект проявляется в том, что при протекании вдоль оси гелимагнетика постоянного электрического тока возникает неравновесная намагниченность электронов, направленная вдоль оси спирали, зависящая от киральности последней и величины протекающего электрического тока. В настоящей работе мы получили аналог этого эффекта, который реализуется при инжекции в гелимагнетик не электрического, а чисто спинового поперечно-поляризованного тока. Поскольку возникновение продольной намагниченности электронов сопровождается протеканием продольно-поляризованного спинового тока, то описываемый эффект проявляется как возникновение продольно-поляризованного спинового тока при инжекции поперечно-поляризованного спинового тока. Этот предсказываемый нами эффект может быть назван эффектом киральной поляризации чисто спинового тока. Для обнаружения этого эффекта могут применяться экспериментальные методики, аналогичные тем, которые были разработаны для обнаружения кинетического магнитоэлектрического эффекта в работах [34–39].

5. СПИНОВЫЙ ТОК В ГЕЛИМАГНЕТИКЕ ПРИ ИНЖЕКЦИИ

Перейдем к рассмотрению закономерностей эффекта киральной поляризации чисто спинового тока. Представим вектор поляризации спинового тока $\mathbf{P}$ в виде суммы продольной $\mathbf{P}_\ell$ и поперечной $\mathbf{P}_t$ (по отношению к оси спирали) компонент: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_\ell$. Для нахождения координатных зависимостей $\mathbf{P}_t$ и $\mathbf{P}_\ell$ рассмотрим сначала случай, когда на границе спинового тока поперечно-поляризован, причем век-

тор поляризации инжектируемого спинового тока $\mathbf{P}_0$ сонаправлен с намагниченностью локализованных электронов: $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{h}_0$.

Если выполняется неравенство $\lambda \gg 1 + \eta^2$, то из (9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t &= P_0 e^{-z/L_D} \mathbf{h} + \\ &+ KP_0 \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \left[e^{-z/L_D} - e^{-z/L_P} \cos \frac{z}{L_P} \right] [\mathbf{h} \times \mathbf{e}_z], \\ \mathbf{P}_\ell &= P_0 K \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \sin(z/L_P) e^{-z/L_P} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует, что $\mathbf{P}_t$ является суммой двух вкладов. Первый экспоненциально затухает на расстоянии L_D , тогда как второй вклад — гармонически осциллирующий и одновременно экспоненциально затухающий с характерной длиной L_P , причем $L_P \ll L_D$. На расстояниях, превышающих L_P , вектор $\mathbf{P}_t$ становится практически параллельным вектору $\mathbf{h}$. Такую «подстройку» поляризации инжектированного спинового тока под направление намагниченности локализованных спинов на расстояниях $z > L_P$ можно трактовать как вращение плоскости поляризации спинового тока. Таким образом, в гелимагнетиках в рассматриваемых условиях имеет место спиновый аналог эффекта естественной оптической активности.

Величина $\mathbf{P}_\ell$, описывающая эффект киральной поляризации чисто спинового тока, принимает нулевое значение при $z = 0$, затем растёт при движении от границы в глубь гелимагнетика, достигая своего максимума при $z/L_P = \pi/4$, после чего происходит её убывание до нуля. Максимальная величина продольной поляризации, равная $P_0 e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$, достигается в короткопериодных гелимагнетиках при $\eta \gg 1$. Важным моментом является то, что направление поляризации $\mathbf{P}_\ell$ непосредственно определяется киральностью K гелимагнетика.

Чтобы оценить реалистичность сделанных выше приближений, оценим порядок величины параметров λ и η . Длина спиновой диффузии в ферромагнетиках $L_S \sim 10\text{--}10^2 \text{ \AA}$ [40], период магнитной спирали в редких землях $L_H \sim 10\text{--}10^2 \text{ \AA}$, а в некоторых случаях может быть порядка $10^3 \text{ \AA}$. Отсюда следует, что величина η может быть как меньше, так и больше единицы, но не превышает 10^2 . Величина $s-d(f)$ -обменного интеграла в редких землях порядка $10^{-2}\text{--}10^{-1} \text{ эВ}$ [30], так что $\Omega_H \sim 10^{13}\text{--}10^{14} \text{ с}^{-1}$. О времени электронной спиновой релаксации в гелимагнетиках данных, по-видимому, нет, но есть данные для немагнитных металлов с сильным спин-орбитальным взаимодействием: $\tau_S \sim 5\text{--}7 \text{ пс}$ в случае платины и $\tau_S \sim 10 \text{ пс}$ в тантале [41]. Если исходить

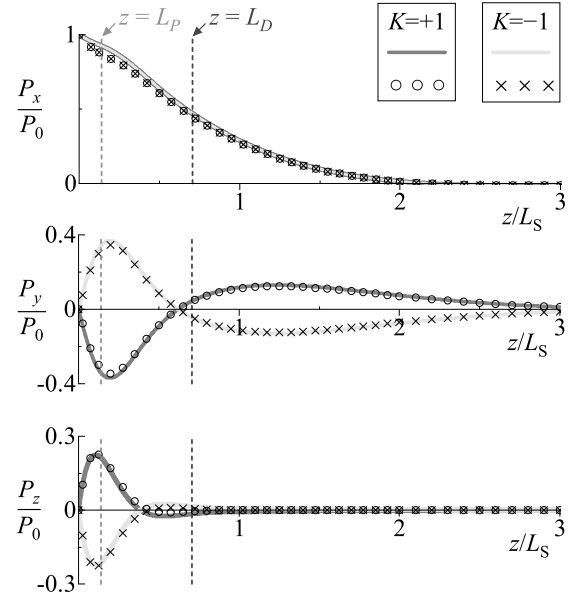


Рис. 2. Поляризация спинового тока в гелимагнетике для случая $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{h}_0$ при $\eta = 1$, $\lambda = 10^2$. Сплошные кривые построены по формулам точного решения, приведенным в Приложении С. Кружками и крестиками представлены результаты приближенного метода расчета по формулам (11)

из того, что τ_S не может превышать время релаксации импульса, которое в ферромагнитных металлах порядка 10^{-14} с , получаем, что λ лежит в диапазоне от 10^{-1} до 10^3 .

Сделанные оценки показывают, что использованное выше неравенство $\lambda \gg 1 + \eta^2$ может и не выполняться, в этом случае необходим расчет на основе точных формул, приведенных в Приложениях А и С.

На рис. 2 для случая $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{h}_0$ представлена поляризация спинового тока в гелимагнетике, в котором $\eta = 1$, $\lambda = 10^2$. Сплошные цветные кривые соответствуют поляризации, полученной с помощью расчета по точным формулам. Результаты расчета, обозначенные крестиками и кружками черного цвета, соответствуют поляризации, полученной с помощью приближенного метода решения (11). На рисунке представлены кривые как для правозакрученной ($K = +1$), так и для левозакрученной ($K = -1$) магнитных спиралей.

Для рассматриваемых численных значений параметров λ и η неравенство $\lambda \gg 1 + \eta^2$ заведомо выполняется. На рис. 2 видно, что в этом случае кривые, полученные с помощью приближенного решения, практически совпадают с точным решением.

Заметим, что при заданных значениях параметров существует иерархия длин $L_H > L_S > L_D > L_P$.

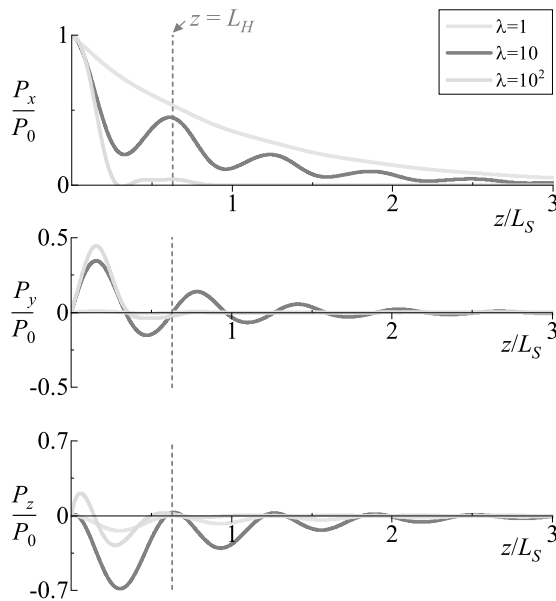


Рис. 3. Поляризация спинового тока в гелимагнетике при $\eta = 10$, $\lambda = 1; 10; 10^2$, $K = +1$ для случая инъекции спинового тока, имеющего поляризацию $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{h}_0$

Наличие такой иерархии приводит к тому, что сначала затухает компонента поляризации, направленная перпендикулярно $\mathbf{h}$, затем затухает компонента, направленная коллинеарно $\mathbf{h}$. Затухание компоненты, направленной коллинеарно $\mathbf{h}$, происходит на длине меньшей, чем длина спиновой диффузии, которая, в свою очередь, меньше периода магнитной спирали.

Если неравенство $\lambda \gg 1 + \eta^2$ не выполняется, зависимость поляризации спинового тока от координаты становится более сложной. На рис. 3 представлена координатная зависимость компонент P_x , P_y и P_z для следующих значений параметров: $\eta = 10$ ($L_H \approx 0.63 L_S$), $\lambda = 1, 10$ и 10^2 , $K = +1$. Сравнивая кривые на рисунках 2 и 3, мы видим, что наиболее заметное различие в форме кривых имеет место, когда $\eta \sim \lambda \gg 1$. При таких значениях параметров наблюдается выраженный осциллирующий характер затухания всех компонент $P_x(z)$, $P_y(z)$ и $P_z(z)$, причем период осцилляций совпадает с периодом спирали. Амплитуда осцилляций эффекта киральной поляризации чисто спинового тока может иметь значительную величину, сравнимую с P_0 .

Рассмотрим теперь зависимости $P_x(z)$, $P_y(z)$, и $P_z(z)$ для других поляризаций инжектируемого в гелимагнетик спинового тока.

На рис. 4 показана координатная зависимость поляризации спинового тока в гелимагнетике для случая, когда в гелимагнетик инжектируется поперечно-поляризованный спиновый ток, у кото-

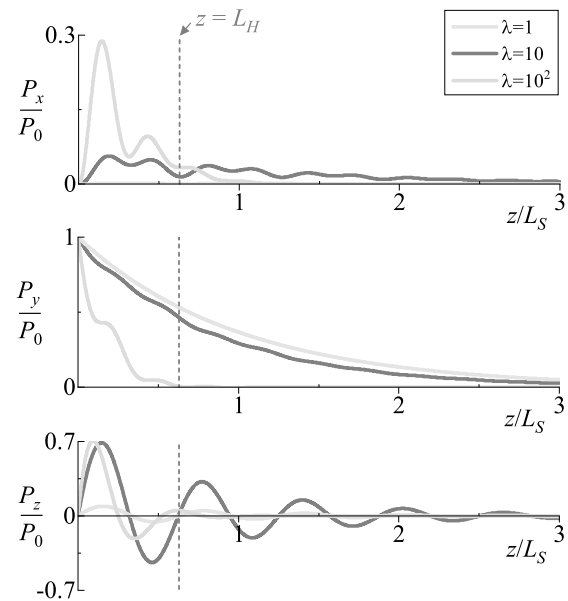


Рис. 4. Поляризация спинового тока в гелимагнетике при $\eta = 10$, $\lambda = 1; 10; 10^2$, $K = +1$ для случая инъекции поперечно-поляризованного спинового тока с поляризацией на границе $P_x = P_z = 0$, $P_y = P_0$

рого на границе $P_x = P_z = 0$, $P_y = P_0$. Приведены результаты расчета для $\eta = 10$ ($L_H \approx 0.63 L_S$), $\lambda = 1, 10$ и 10^2 , $K = +1$. Как и в предыдущем случае, когда $\eta \sim \lambda \gg 1$, наблюдается выраженный осциллирующий характер изменения компоненты $\mathbf{P}_\ell$ с периодом L_H . Амплитуда осцилляций эффекта киральной поляризации чисто спинового тока имеет при этом значительную величину, сравнимую с P_0 .

Результаты расчета для случая, когда инжектированный ток на границе продольно-поляризован, $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{e}_z$, представлены на рис. 5. При $\eta \sim \lambda \gg 1$ имеет место, как и в предыдущих случаях, выраженное осциллирующее поведение $\mathbf{P}_\ell$ как функции z с затуханием осцилляций на глубине спиновой диффузии L_S . Инжекция продольно-поляризованного спинового тока приводит к появлению поперечно-поляризованного тока, величина которого осциллирует с периодом L_H и затухает на масштабах L_S .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитая в настоящей работе теория показывает, что инжекция чисто спинового тока в проводящий гелимагнетик имеет ряд существенных особенностей, отсутствующих при инжекции в немагнитный металл или полупроводник. В отличие от немагнитных материалов, в которых затухание инжектированного спинового тока характеризуется одним

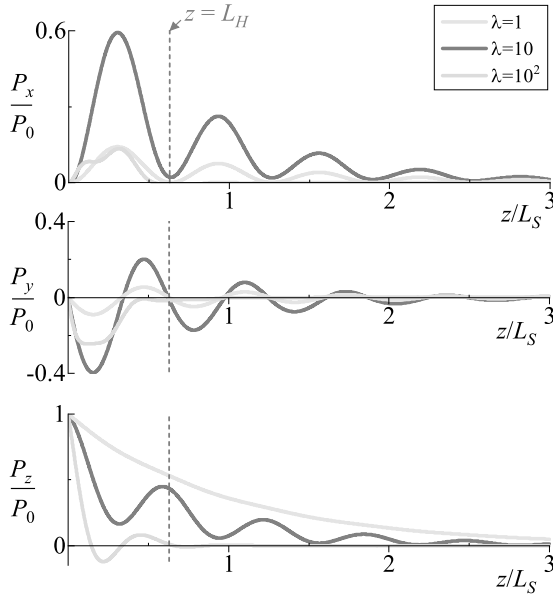


Рис. 5. Поляризация спинового тока в гелимагнетике при $\eta = 10$, $\lambda = 1; 10; 10^2$, $K = +1$ для случая инъекции продольно-поляризованного спинового тока, имеющего поляризацию $\mathbf{P}_0 = P_0 \mathbf{e}_z$

параметром — длиной спиновой диффузии L_S , в гелимагнетиках затухание спинового тока, инжектированного вдоль оси магнитной спирали, имеющей период L_H , описывается двумя характерными длинами.

Вместо длины спиновой диффузии возникает длина L_D , которая является характерным масштабом убывания неравновесной намагниченности электронов проводимости, сонаправленной с намагниченностью гелимагнетика. В гелимагнетиках, в которых период магнитной спирали L_H велик по сравнению с L_S , длина L_D совпадает с L_S . В гелимагнетиках, в которых период магнитной спирали L_H мал по сравнению с L_S , длина L_D не превышает периода спирали L_H .

Вторая характерная длина, L_P , определяет масштаб убывания векторной компоненты неравновесной намагниченности электронов проводимости, направленной перпендикулярно намагниченности гелимагнетика. Если на намагниченность электронов проводимости действует сильное обменное поле со стороны локализованных электронов, а время спиновой релаксации электронов проводимости достаточно велико, основное влияние на спиновую инъекцию на масштабах длины порядка L_P оказывает прецессия намагниченности электронов в неоднородном обменном поле. В этой ситуации в короткопериодных гелимагнетиках с $L_H \ll L_S$ существенные изменения поляризации спинового тока проис-

ходят на расстояниях L_P , много меньших периода спирали L_H .

При инъекции вдоль оси магнитной спирали поперечно-поляризованного (относительно оси) чисто спинового тока в гелимагнетике возникает компонента неравновесной намагниченности и чисто спиновый ток, векторы поляризации которых сонаправлены оси магнитной спирали; при этом направление этих векторов непосредственно определяется киральностью гелимагнетика, а их длина пропорциональна величине инжектируемого спинового тока. Справедливо и обратное утверждение: инъекция продольно-поляризованного чисто спинового тока приводит к появлению в гелимагнетике зависящего от киральности спирали спинового тока поперечной поляризации. Предсказанный эффект назван «эффектом киральной поляризации чисто спинового тока».

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-22-00220.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Используя формулы Кардано, точное решение характеристического уравнения (6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sqrt{1 - (2/3)\eta^2 + U + W}, \\ \kappa_2 &= \left(1/\sqrt{2}\right) \times \\ &\times \left(\sqrt{(1 - (2/3)\eta^2 + \operatorname{Re} V)^2 + (\operatorname{Im} V)^2} + \right. \\ &+ 1 - (2/3)\eta^2 + \operatorname{Re} V \Big)^{1/2} + \\ &+ i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} V) \left(1/\sqrt{2}\right) \times \\ &\times \left(\sqrt{(1 - (2/3)\eta^2 + \operatorname{Re} V)^2 + (\operatorname{Im} V)^2} - \right. \\ &- 1 + (2/3)\eta^2 - \operatorname{Re} V \Big)^{1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\kappa_3 = \kappa_2^*,$$

где

$$\begin{aligned} V &= -(U + W)/2 + i\sqrt{3}(U - W)/2, \\ U &= \sqrt[3]{\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{2}{9}\eta^4 + 8\eta^2 + 5\lambda^2 \right) + \sqrt{G}}, \\ W &= \sqrt[3]{\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{2}{9}\eta^4 + 8\eta^2 + 5\lambda^2 \right) - \sqrt{G}}, \\ G &= \frac{1}{27} \left(-\frac{1}{3}\eta^4 + 4\eta^2 + \lambda^2 \right)^3 + \\ &+ \frac{\eta^4}{36} \left(\frac{2}{9}\eta^4 + 8\eta^2 + 5\lambda^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для нахождения приближенных решений характеристического уравнения (6) может быть использована следующая схема.

1. Случай $\lambda \gg 1 + \eta^2$. Выполняя тождественные преобразования, запишем характеристическое уравнение (6) в виде

$$\kappa^2 = 1 + \eta^2 - (\kappa^2 - 1) \left[(\kappa^2 - 1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 \kappa^2 \right] / \lambda^2. \quad (14)$$

В силу малости параметра $(1 + \eta^2)/\lambda$ это уравнение может быть решено методом последовательных приближений. В основном приближении по малому параметру $(1 + \eta^2)/\lambda$ получаем $\kappa = \kappa_1 = \sqrt{1 + \eta^2}$. Отсюда для длины затухания L_D получаем $L_D = L_S / \sqrt{1 + \eta^2}$.

Чтобы получить корень κ_2 , запишем характеристическое уравнение (6) в тождественном виде

$$\kappa^4 = \frac{-\lambda^2}{\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) \left[\left(1 - \frac{(1+\eta^2)}{\kappa^2}\right) + \frac{4\eta^2/\kappa^2}{1 - (1+\eta^2)/\kappa^2} \right]} \quad (15)$$

и опять используем метод итераций. В нулевом приближении по $(1 + \eta^2)/\lambda$ из (15) следует, что $\kappa = \kappa_2 = (1 + i) \sqrt{\lambda/2}$. Отсюда для длины затухания L_P получаем $L_P = L_S / \sqrt{\lambda/2}$.

2. Случай $\lambda \ll 1 + \eta^2$. Для нахождения решений уравнения (6) в нулевом по малому параметру $\lambda/(1 + \eta^2)$ приближении достаточно решить уравнение

$$(\kappa^2 - 1) \left[(\kappa^2 - 1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 \kappa^2 \right] = 0, \quad (16)$$

которое формально получено из (6) при $\lambda = 0$. Действительное решение этого уравнения $\kappa = \kappa_1 = 1$. Два других корня уравнения (16) суть $\kappa = \kappa_{2,3} = 1 \pm i\eta$. Отсюда следует, что в рассматриваемом предельном случае длины затухания L_D и L_P равны между собой и совпадают по величине с длиной спиновой диффузии L_S : $L_D = L_P = L_S$.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Координатная зависимость неравновесной намагниченности электронов проводимости в гелимагнетике, полученная с использованием точных

корней (12) характеристического уравнения, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \delta m_x &= C_1 e^{-\kappa_1 \zeta} \operatorname{Re} (\Psi_1 e^{iK\eta\zeta}) + \\ &+ \operatorname{Re} (\Psi_2 C_2 e^{-\kappa_2 \zeta} e^{iK\eta\zeta}) + \\ &+ \operatorname{Re} (\Psi_3 C_2^* e^{-\kappa_2^* \zeta} e^{iK\eta\zeta}), \\ \delta m_y &= C_1 e^{-\kappa_1 \zeta} \operatorname{Im} (\Psi_1 e^{iK\eta\zeta}) + \\ &+ \operatorname{Im} (\Psi_2 C_2 e^{-\kappa_2 \zeta} e^{iK\eta\zeta}) + \\ &+ \operatorname{Im} (\Psi_3 C_2^* e^{-\kappa_2^* \zeta} e^{iK\eta\zeta}), \\ \delta m_z &= C_1 e^{-\kappa_1 \zeta} + 2 \operatorname{Re} (C_2 e^{-\kappa_2 \zeta}), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \frac{i\lambda}{\kappa_n^2 - 1 - \eta^2 - 2iK\eta\kappa_n}, \\ C_1 &= \Delta_{C_1} / \Delta, \\ C_2 &= (\Delta_{\operatorname{Re} C_2} + i\Delta_{\operatorname{Im} C_2}) / \Delta, \\ \Delta_{C_1} &= -2(\Phi_5 \operatorname{Im} \kappa_2 + \Phi_6 \operatorname{Re} \kappa_2) \tilde{P}_x + \\ &+ 2(\Phi_2 \operatorname{Im} \kappa_2 + \Phi_3 \operatorname{Re} \kappa_2) \tilde{P}_y + \\ &+ (\Phi_2 \Phi_6 - \Phi_3 \Phi_5) \tilde{P}_z, \\ \Delta_{\operatorname{Re} C_2} &= (2\Phi_4 \operatorname{Im} \kappa_2 + \kappa_1 \Phi_6) \tilde{P}_x - \\ &- (2\Phi_1 \operatorname{Im} \kappa_2 + \kappa_1 \Phi_3) \tilde{P}_y + \\ &+ (\Phi_3 \Phi_4 - \Phi_1 \Phi_6) \tilde{P}_z, \\ \Delta_{\operatorname{Im} C_2} &= -(\kappa_1 \Phi_5 - 2\Phi_4 \operatorname{Re} \kappa_2) \tilde{P}_x - \\ &- (2\Phi_1 \operatorname{Re} \kappa_2 - \kappa_1 \Phi_2) \tilde{P}_y + \\ &+ (\Phi_1 \Phi_5 - \Phi_2 \Phi_4) \tilde{P}_z, \\ \Delta &= -2\Phi_1 (\Phi_5 \operatorname{Im} \kappa_2 + \Phi_6 \operatorname{Re} \kappa_2) + \\ &+ \Phi_2 (2\Phi_4 \operatorname{Im} \kappa_2 + \kappa_1 \Phi_6) - \\ &- \Phi_3 (\kappa_1 \Phi_5 - 2\Phi_4 \operatorname{Re} \kappa_2), \\ \tilde{P}_x &= (\tau_S / L_S) (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_x), \\ \tilde{P}_y &= (\tau_S / L_S) (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_y), \\ \tilde{P}_z &= (\tau_S / L_S) (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_z), \\ \Phi_1 &= \kappa_1 \operatorname{Re} \Psi_1 + K\eta \operatorname{Im} \Psi_1, \\ \Phi_2 &= K\eta \operatorname{Im} \Psi_2 + K\eta \operatorname{Im} \Psi_3 + \\ &+ \operatorname{Re} (\Psi_2) \operatorname{Re} (\kappa_2) - \operatorname{Im} (\Psi_2) \operatorname{Im} (\kappa_2) + \\ &+ \operatorname{Re} (\Psi_3) \operatorname{Re} (\kappa_2) + \operatorname{Im} (\Psi_3) \operatorname{Im} (\kappa_2), \\ \Phi_3 &= K\eta \operatorname{Re} \Psi_2 - K\eta \operatorname{Re} \Psi_3 - \\ &- \operatorname{Re} (\Psi_2) \operatorname{Im} (\kappa_2) - \operatorname{Im} (\Psi_2) \operatorname{Re} (\kappa_2) - \\ &- \operatorname{Re} (\Psi_3) \operatorname{Im} (\kappa_2) + \operatorname{Im} (\Psi_3) \operatorname{Re} (\kappa_2), \\ \Phi_4 &= \kappa_1 \operatorname{Im} \Psi_1 - K\eta \operatorname{Re} \Psi_1, \\ \Phi_5 &= -K\eta \operatorname{Re} \Psi_2 - K\eta \operatorname{Re} \Psi_3 + \\ &+ \operatorname{Re} (\Psi_2) \operatorname{Im} (\kappa_2) + \operatorname{Im} (\Psi_2) \operatorname{Re} (\kappa_2) - \\ &- \operatorname{Re} (\Psi_3) \operatorname{Im} (\kappa_2) + \operatorname{Im} (\Psi_3) \operatorname{Re} (\kappa_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_6 = & K\eta \operatorname{Im} \Psi_2 - K\eta \operatorname{Im} \Psi_3 + \\ & + \operatorname{Re}(\Psi_2) \operatorname{Re}(\kappa_2) - \operatorname{Im}(\Psi_2) \operatorname{Im}(\kappa_2) - \\ & - \operatorname{Re}(\Psi_3) \operatorname{Re}(\kappa_2) - \operatorname{Im}(\Psi_3) \operatorname{Im}(\kappa_2).\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. Nguyen Van Dau, F. Petroff, P. Etienne, G. Creuzet, A. Friederich, and J. Chazelas, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2472 (1988).
2. *Spin Current*, ed. by S. Maekawa, S. O. Valenzuela, E. Saitoh, and T. Kimura, Oxford University Press, New York (2017), p. 520.
3. С. А. Никитов, Д. В. Калябин, И. В. Лисенков, А. Н. Славин, Ю. Н. Барабаненков, С. А. Осокин, А. В. Садовников, Е. Н. Бегинин, М. А. Морозова, Ю. П. Шараевский, Ю. А. Филимонов, Ю. В. Хивинцев, С. Л. Высоцкий, В. К. Сахаров, Е. С. Павлов, *УФН* **185**, 1099 (2015).
4. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, *Письма в ЖЭТФ* **13**, 657 (1971).
5. M. I. Dyakonov and V. I. Perel, *Phys. Lett. A* **35**, 459 (1971).
6. J. E. Hirsch, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1834 (1999).
7. V. Baltz, A. Manchon, M. Tsoi, T. Moriyama, T. Ono, and Y. Tserkovnyak, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 015005 (2018).
8. D. Xiong, Y. Jiang, K. Shi, A. Du, Y. Yao, Z. Guo, D. Zhu, K. Cao, S. Peng, W. Cai, D. Zhu, and W. Zhao, *Fundamental Research* **2**, 522 (2022).
9. H. Chen, Q. Niu, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 017205 (2014).
10. Y. Takeuchi, Y. Yamane, J. Y. Yoon, R. Itoh, B. Jinnai, S. Kanai, J. Ieda, S. Fukami, and H. Ohno, *Nature Materials* **20**, 1364 (2021).
11. Ю. А. Изюмов, *УФН* **144**, 439 (1984).
12. R. J. Elliott and F. A. Wedgwood, *Proc. Phys. Soc.* **81**, 846 (1963).
13. R. J. Elliott and F. A. Wedgwood, *Proc. Phys. Soc.* **84**, 63 (1964).
14. A. A. Fraerman and O. G. Udalov, *Phys. Rev. B* **77**, 094401 (2008).
15. T. Taniguchi and H. Imamura, *Phys. Rev. B* **81**, 012405 (2010).
16. J.-i. Kishine and A. S. Ovchinnikov, *Sol. St. Phys.* **66**, 1 (2015).
17. T. Yokouchi, N. Kanazawa, A. Kikkawa, D. Morikawa, K. Shibata, T. Arima, Y. Taguchi, F. Kagawa, and Y. Tokura, *Nat. Commun.* **8**, 866 (2017).
18. R. Aoki, Y. Kousaka, and Y. Togawa, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 057206 (2019).
19. V. V. Ustinov and I. A. Yasyulevich, *Phys. Rev. B* **102**, 134431 (2020).
20. S. Okumura, T. Morimoto, Y. Kato, and Y. Motome, *J. Phys.: Conf. Ser.* **2164**, 012068 (2022).
21. J. Xiao, A. Zangwill, and M. D. Stiles, *Phys. Rev. B* **73**, 054428 (2006).
22. H. Watanabe, K. Hoshi, and J.-i. Ohe, *Phys. Rev. B* **94**, 125143 (2016).
23. S. Okumura, H. Ishizuka, Y. Kato, J.-i. Ohe, and Y. Motome, *Appl. Phys. Lett.* **115**, 012401 (2019).
24. V. Ustinov, N. Bebenin, and I. Yasyulevich, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1389**, 012151 (2019).
25. В. В. Устинов, И. А. Ясюлевич, *Физика металлов и металловедение* **121**, 257 (2020).
26. Е. А. Караштин, *ФТТ* **62**, 1482 (2020).
27. A. Aqeel, N. Vlietstra, J. A. Heuver, G. E. W. Baer, B. Noheda, B. J. van Wees, and T. T. M. Palstra, *Phys. Rev. B* **92**, 224410 (2015).
28. A. Aqeel, N. Vlietstra, A. Roy, M. Mostovoy, B. J. van Wees, and T. T. M. Palstra, *Phys. Rev. B* **94**, 134418 (2016).
29. A. Aqeel, M. Mostovoy, B. J. van Wees, and T. T. M. Palstra, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **50**, 174006 (2017).
30. С. В. Вонсовский, *Магнетизм*, Наука, Москва (1971), с. 1032.
31. H. C. Torrey, *Phys. Rev.* **104**, 563 (1956).
32. C. Heide, *Phys. Rev. B* **65**, 054401 (2001).
33. Л. С. Левитов, Ю. В. Назаров, Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ* **88**, 229 (1985).
34. T. Furukawa, Y. Shimokawa, K. Kobayashi, and T. Itou, *Nat. Commun.* **8**, 954 (2017).

- 35. T. Furukawa, Y. Watanabe, N. Ogasawara, K. Kobayashi, and T. Itou, *Phys. Rev. Res.* **3**, 023111 (2021).
- 36. Y. Nabei, D. Hirobe, Y. Shimamoto, K. Shiota, A. Inui, Y. Kousaka, Y. Togawa, and H. M. Yamamoto, *Appl. Phys. Lett.* **117**, 052408 (2020).
- 37. A. Inui, R. Aoki, Y. Nishiue, K. Shiota, Y. Kousaka, H. Shishido, D. Hirobe, M. Suda, J.-i. Ohe, J. I. Kishine, H. M. Yamamoto, and Y. Togawa, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 166602 (2020).
- 38. K. Shiota, A. Inui, Y. Hosaka, R. Amano, Y. Onuki, M. Hedo, T. Nakama, D. Hirobe, J.-i. Ohe, J.-i. Kishine, H. M. Yamamoto, H. Shishido, and Y. Togawa, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 126602 (2021).
- 39. H. Shishido, R. Sakai, Y. Hosaka, and Y. Togawa, *Appl. Phys. Lett.* **119**, 182403 (2021).
- 40. J. Bass and W. P. Pratt Jr, *J. Phys.: Cond. Matt.* **19**, 183201 (2007).
- 41. C. Fang, C. H. Wan, B. S. Yang, J. Y. Qin, B. S. Tao, H. Wu, X. Zhang, X. F. Han, A. Hoffmann, X. M. Liu, and Z. M. Jin, *Phys. Rev. B* **96**, 134421 (2017).

СЖИМАЕМОСТЬ, МЕТАЛЛИЗАЦИЯ И ПРОЦЕССЫ РЕЛАКСАЦИИ В ХАЛЬКОГЕНИДНОМ СТЕКЛЕ НЕСТЕХИОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ ПРИ ВЫСОКИХ ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЯХ: СРАВНЕНИЕ С «КЛАССИЧЕСКИМ» СТЕКЛОМ $g\text{-As}_2\text{Te}_3$

О. Б. Циок^{а*}, В. В. Бразжкин^{а**}, Е. В. Бычков^б, А. С. Тверьянович^с

^а Институт физики высоких давлений Российской академии наук
108840, Троицк, Москва, Россия

^б LPCA, UMR 8101 CNRS, Universite du Littoral
59140, Dunkerque, France

^с Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии
198504, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15 ноября 2022 г.,
после переработки 15 ноября 2022 г.
Принята к публикации 17 ноября 2022 г.

Выполнены прецизионные исследования объема и электросопротивления стекла нестехиометрического состава $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при высоких гидростатических давлениях до 8.5 ГПа и проведено сравнение с ранее полученными результатами для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Структурные и рамановские исследования стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ показывают более существенную роль корреляций пар As–As в области промежуточного порядка по сравнению с «классическим» стеклом $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Высокий химический беспорядок приводит к тому, что даже при таком переизбытке атомов мышьяка наблюдается большая концентрация «неправильных» соседей Te–Te. Стекло $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ имеет несколько большую величину термической щели (0.43–0.48 эВ) и большее значение сопротивления при нормальных условиях ($> 10^4$ Ом·см) по сравнению с $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Как и для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, упругое поведение стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при сжатии наблюдается при давлениях до 1 ГПа, причем начальные величины модуля объемного сжатия для этих стекол практически совпадают. Полиаморфное превращение со смягчением релаксирующего модуля сжатия в $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ более размыто и затянато в область более высоких давлений (от 1.5 до 4 ГПа). Процесс металлизации для $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ также более размыт, металлический уровень проводимости достигается при давлениях 5.5–6.0 ГПа. Как и для стехиометрического стекла, на барических зависимостях модуля сжатия наблюдается излом при давлениях 4–5 ГПа. Для объема и для электросопротивления вплоть до максимальных давлений наблюдается логарифмическая по времени релаксация примерно той же интенсивности, что и для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Остаточное уплотнение в стекле $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ после сброса давления превышает таковое для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ почти в два раза и составляет 3.5%, а проводимость уплотненного стекла почти на три порядка величины выше чем у исходного. При нормальных условиях наблюдается существенная релаксация объема и электросопротивления. Как и для уплотненного стекла $g\text{-GeS}_2$, логарифмическую кинетику этой релаксации удается описать в рамках ранее предложенной нами модели, основанной на представлениях о «самоорганизованной критичности» процесса релаксации, причем сама энергия активации (1.3 эВ) остается постоянной во всем исследованном диапазоне времен до $5 \cdot 10^6$ с.

DOI: 10.31857/S0044451023040144

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Халькогенидные стекла на основе теллура являются важными технологическими материалами и активно используются для элементов оперативной

* E-mail: tsiok@hppi.troitsk.ru

** E-mail: brazhkin@hppi.troitsk.ru

памяти и в инфракрасной фотонике [1–3]. Двойные стекла в системе As–Te служат в определенной степени модельными объектами. Вместе с тем даже для этих бинарных стекол структура ближнего и промежуточного порядка остается до конца не проясненной, что затрудняет анализ их характеристик на основе корреляций структура–свойство [4–17]. Стекла в системе As–Te являются промежуточными между обычными легко стекляющимися халькогенидными стеклами и металлическими стеклами, для получения которых требуется сверхбыстрое охлаждение. Наиболее изученным в этой системе является стехиометрическое стекло $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Ранее нами были детально изучены структура этого стекла и его поведение под давлением, включая металлизацию, полиаморфизм и процессы релаксации [18, 19]. Установлена очень высокая степень химического беспорядка, которая контринтуитивно уменьшается при высоких давлениях. Была предложена модель структурных изменений при полиаморфном превращении. Обратимый переход полупроводник–металл был изучен количественно в условиях «чистой» гидростатики.

Стекла другого состава в системе As–Te при нормальном давлении изучены гораздо меньше, а под давлением практически не исследовались. Представляет большой интерес исследовать стекла с сильным отклонением от стехиометрии. Изучение поведения сжимаемости и электросопротивления стекол нестехиометрического состава при высоких давлениях поможет установить, какие черты полиаморфизма и металлизации при сжатии являются общими для стекол в системе As–Te, а какие присущи лишь «правильному» стеклу $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Для исследований нами был выбран «симметричный» состав $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ с очень большим превышением доли атомов мышьяка относительно стехиометрии. Ранее структура и динамика стекол такого состава была изучена лишь в нескольких работах [10, 20–22], а при высоких давлениях такие стекла вообще не исследовались. При нормальном давлении переход полупроводник — металл в расплаве As_3Te_2 происходит при существенно более высоких температурах чем для жидкого As_2Te_3 , соответственно расплав As_3Te_2 при сравнимых температурах имеет более высокую вязкость.

Таким образом, целью настоящей работы являлось прецизионное исследование сжимаемости, релаксационных процессов и электрического сопротивления стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при давлениях до 8.5 ГПа

при комнатной температуре в условиях идеальной гидростатики и сравнение полученных результатов с данными, полученными нами ранее для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Кроме того, представляло интерес детально исследовать при нормальном давлении кинетику релаксации образцов уплотненного стекла, полученных после обработки давлением в рамках подхода, недавно успешно реализованного в нашей группе для уплотненного стекла $g\text{-GeS}_2$ [23].

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА И ПОДГОТОВКА ОБРАЗЦОВ

Исследованное в работе стекло $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ было синтезировано из элементарных веществ As (99.9999%); Te (99.997%) (Aldrich Chemical Ltd.). Вещества помещались в предварительно очищенные кварцевые трубки с внутренним диаметром 8 мм, которые затем откачивались и герметизировались. Расплав выдерживался и перемешивался в течение 6 часов при температуре 600°C (выше купола ликвидации), после чего происходила закалка в воду. После закалки стекло отжигалось в вакууме в течение суток при температуре 110°C для снятия механических напряжений. Плотность стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ составляла 5.33 г/см³. Предварительные измерения (ДТА, $R(T)$, порошковая дифрактометрия) при атмосферном давлении были обусловлены необходимостью выяснения области температур, не приводящей к необратимым изменениям в стекле, поскольку стандартная технология приклейки тензодатчика предполагает длительный нагрев образца до температуры 150°C, а нестандартная, эпоксидным клеем, ведет к заметной потере точности методики. На этом этапе работы был обнаружен интересный эффект. В первом цикле нагрева сопротивление вело себя обратимо с точностью до 3%, однако, при температурах 150°C и выше наблюдалась необратимость уже на порядки величины (см. рис. 1). Такие необратимые изменения не могут быть приписаны каким-либо процессам отжига или релаксации в стекле. При максимальной температуре четвертого цикла нагрева (195°C) образец сильно размягчался, что было использовано в дальнейшем при выборе режима термобарической обработки стекла. На дифрактограмме была заметна небольшая (< 10%) примесь кристаллической фазы. Другой образец, приготовленный по режиму приклейки тензодатчика (155°C, 7 часов, одноосная нагрузка), не размягчался, и

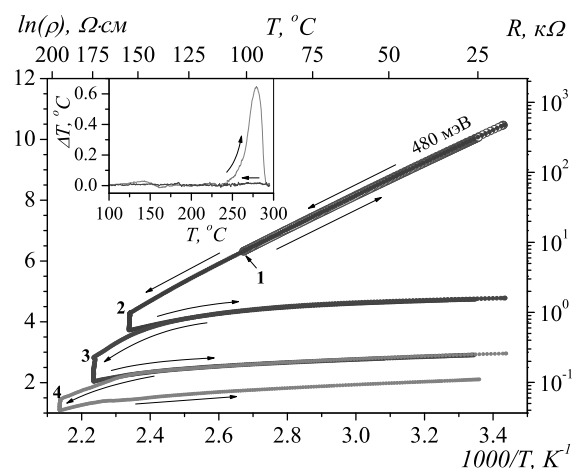


Рис. 1. Температурная зависимость электросопротивления стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при нагреве на воздухе. Использовался четырехзондовый метод на прижимных контактах из тонкой золотой проволоки. Правая ось ординат — сопротивление образца без пересчета на удельное значение — и верхняя ось температуры показаны для удобства оценки масштаба изменений сопротивления. Цифры 1–4 — номера последовательных циклов нагрева–охлаждения. Выдержка при максимальной температуре составляла 1000 с в первом цикле и около 4000 с в последующих; 480 мэВ — величина термической щели в первом цикле нагрева. На вставке представлены результаты ДТА-эксперимента при скорости нагрева $1^\circ\text{C}/\text{мин}$. Максимум пика кристаллизации составляет 279°C

примесь кристаллической фазы в нем не обнаруживалась, но его электросопротивление после такой обработки падало почти на три порядка величины. В процессе дальнейшей работы было установлено, что и высокая электропроводность, и кристаллические пики на дифрактограммах связаны лишь с тонким, менее 100 мкм, слоем на поверхности образца, после сошлифовки которого электросопротивление образцов возвращалось к исходным величинам и следы пиков на дифрактограммах исчезали. Обнаруженный «поверхностный эффект» — по-видимому, поверхностная кристаллизация — как-то связан с воздействием кислорода и/или влаги воздуха.

Важной особенностью подготовки образцов стекла к исследованиям под давлением была их термобарическая обработка — «горячее прессование». Попытки измерения сжимаемости на исходных образцах успехом не увенчались. Уже при небольших давлениях 0.6–0.8 ГПа в образцах возникали трещины из-за наличия пор размером в несколько десятков

микрон. Процедура горячего прессования успешно использовалась нами ранее при исследовании стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ [19] и подробно описана в этой статье. В настоящей работе из-за достаточно высокой температуры кристаллизации стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ отсутствовала необходимость столь точных манипуляций с температурой, и параметры обработки (0.2 ГПа, 195°C) были выбраны из соображений гарантированного размягчения стекла. Описанный выше поверхностный эффект после обработки не наблюдался (среда — застывший ацетатный силиконовый герметик), однако некоторое изменение свойств образца все же происходило. Величина электросопротивления при комнатной температуре на несколько процентов увеличивалась, а термическая щель E_g уменьшалась с исходных 480 мэВ до 440 мэВ. Для устранения возможной неоднозначности в интерпретации результатов горячее прессование проводилось для всех образцов, исследованных под давлением. После горячего прессования образцы, отрезанные с достаточным припуском, обтачивались до окончательной формы параллелепипедов со сглаженными ребрами и размерами $3 \times 2 \times 1.7 \text{ мм}^3$ для тензометрии и $3 \times 1.3 \times 1 \text{ мм}^3$ для электросопротивления.

Эксперименты по высокоэнергетической рентгеновской дифракции осуществлялись на станции 11-ID-C синхротронного фотонного источника APS (Аргоннская национальная лаборатория, США). Энергия используемых рентгеновских фотонов составляла 115.1734 кэВ, длина волны $\lambda = 0.10765 \text{ \AA}$, обеспечивая область доступных векторов рассеяния Q до $30 \text{ \AA}^{-1}$. Для получения дифракционных картин от исследуемых образцов использовался полупроводниковый детектор на основе нелегированного германия. Дифракционные измерения проводились при комнатной температуре в вертикальной геометрии для уменьшения поляризационных эффектов. Анализ дифракционных данных включал поправки на мертвое время германиевого диода, геометрические и поляризационные коррекции, поправки на самопоглощение, рассеяние воздуха и фона инструмента. Вычисления изоэлектронной функции проводились с использованием теоретических релятивистских формфакторов и комптоновского рассеяния, позволяющие получить полный рентгеновский структурный фактор $S_X(Q)$.

Спектры комбинационного рассеяния измерялись на рамановском микроскопе-спектрометре Senterra (Bruker) с использованием когерентного

излучения с длиной волны 785 нм. Стекла в системе As–Te легко плавятся и кристаллизуются под лазерным пучком, поэтому мощность твердотельного лазерного диода была ограничена 1 мВт. Выбранный участок на поверхности образца контролировался до и после рамановских измерений на отсутствие видимых изменений. Каждый образец измерялся в трех–четырех разных местах, чтобы убедиться в воспроизводимости результатов.

Эксперименты при высоком давлении проводились в аппарате типа Торойд [24] с диаметром центральной лунки 15 мм. В качестве передающей давление среды использовалась смесь метанол–этанол 4 : 1, имеющая предел гидростатичности около 10 ГПа. Давление измерялось манганиновым датчиком, калиброванным по переходам в висмуте (2.54 и 7.7 ГПа). Воспроизводимость шкалы давлений во всех экспериментах (возможность сравнивать данные разных экспериментов при одном и том же давлении) была на уровне 3 МПа.

Измерения объема образцов при гидростатическом давлении проводилось с использованием тензометрической методики [25]. Абсолютная точность измерения объема для данной методики составляет 0.2%, чувствительность измерений — 10^{–3}%. Во избежание влияния «поверхностного эффекта» датчики приклеивались эпоксидным клеем при комнатной температуре. Большим достоинством метода является возможность исследования сжимаемости стекол с точностью, характерной для лучших рентгеновских данных для кристаллических образцов и с подробностью данных на уровне «непрерывной линии». В других известных методах точность хуже как минимум на порядок, и трудоемкость измерений такова, что в работах приводится менее 10-и точек измерения во всем диапазоне давлений. Кроме того, высокая чувствительность метода позволяет исследовать кинетику изменения объема под давлением в широком диапазоне времен, 10–10⁷ с. Важным достоинством метода является то, что барические зависимости объема могут быть получены как при увеличении, так и при сбросе давления, причем в условиях чистой гидростатики. Эта методика успешно применялась ранее для исследования оксидных и халькогенидных стекол под давлением (см., например, [26, 27]).

Электросопротивление стекла под давлением измерялось четырехзондовым методом на постоянном токе. Для пайки контактов применялся низкотемпературный припой In–Bi–Sn 3 : 1 : 1 по атомным

долям [19]. Припой близкого состава известен как сплав Филдса (“Field’s alloy”). Жало паяльника делалось из сплава Ag–Cu (72 вес. % Ag). Нагрев образца при пайке не превышал 70°C. Удельное электросопротивление получалось пересчетом сопротивления к начальным размерам образца. Возможная ошибка данных по удельному электросопротивлению определяется неточностями определения геометрического фактора образца и оценивается как ±10%.

Релаксационные измерения объема и сопротивления под давлением в настоящей работе проводились только вблизи максимального давления, так как их релаксирующее поведение хорошо заметно и без специальных измерений по вариациям кажущегося объемного модуля, коррелирующим с вариациями скорости изменения давления. Специальных мер по поддержанию постоянной величины давления не предпринималось, а данные, полученные при медленно дрейфующей величине давления, пересчитывались к средней величине давления выдержки (см., например, [28]).

В связи с новыми интересными результатами, полученными в статье [23], большое внимание в настоящей работе было уделено исследованию релаксации объема и электросопротивления в уплотненном стекле после снятия давления. Акцент был сделан на построении подробной и точной «температурной истории» образцов. Температура измерялась как термпарой, закрепленной на камере высокого давления, так и цифровым термометром с датчиком, закрепленным на массивной крышке корпуса пресса, где и находились экспериментальные сборки в течение всего времени измерений. Заметим, что при резких изменениях погоды температура крышки пресса могла существенно отличаться от температуры значительно более массивного ядра пресса, хотя и не так сильно, как от температуры воздуха в лаборатории. На релаксационных зависимостях это сказывалось только в первый день измерений, когда камера, извлеченная из пресса, приходила в тепловое равновесие с крышкой пресса. Кроме того, для точной синхронизации показаний термпары и цифрового термометра вводилась также небольшая ($\approx 0.3^\circ\text{C}$) поправка, компенсирующая сдвиг их градуировок. В большом промежутке времени, где измерения в двух или трех экспериментах проводились параллельно, их температурные истории полностью совпадают с точностью до сдвига на время начала эксперимента.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Структура и динамика стекол

Результаты высокоэнергетической рентгеновской дифракции стеклообразного $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ в прямом и обратном пространстве приведены на рис. 2 в сравнении с полутонным теллуридом мышьяка $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Структурные факторы $S_X(Q)$ обоих стекол похожи и характеризуется небольшим первым острым дифракционным максимумом (FSDP, first sharp diffraction peak) при $Q_0 \approx 1.25 \text{ \AA}^{-1}$, интенсивными первым и вторым принципиальными пиками $S_X(Q)$ при 2.1 и $3.5 \text{ \AA}^{-1}$, и последующими отчетливыми осцилляциями вплоть до $Q_{max} = 30 \text{ \AA}^{-1}$, обеспечивающими хорошее разрешение в r -пространстве после фурье-преобразования. Принципиальные пики и осцилляции для стеклообразного $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ сдвинуты в сторону больших значений векторов рассеяния, означая уменьшение средних межатомных расстояний. FSDP, напротив, сдвинут в меньшие углы, а его амплитуда увеличилась вдвое по сравнению с $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Эта тенденция связана с увеличением концентрации мышьяка и большей роли корреляций As–As на уровне промежуточного порядка ($5\text{--}8 \text{ \AA}$) [20]. Полученные данные согласуются с известными опубликованными результатами [21, 22]. Рентгеновская полная корреляционная функция $T_X(r)$ двух стекол, рис. 2 г, показывает ожидаемое уменьшение межатомных расстояний и дальних корреляций в стеклообразном $g\text{-As}_3\text{Te}_2$. Пик ближайших соседей находится в районе $2.63 \text{ \AA}$, сильно асимметричный пик вторых соседей в районе $4 \text{ \AA}$, корреляции центр–центр между полиэдрами As–Te примерно при $6 \text{ \AA}$. Асимметричный пик ближайших соседей также состоит из трех атомных пар: (1) As–As при $2.48 \text{ \AA}$, (2) As–Te при $2.63 \text{ \AA}$ и (3) Te–Te при $2.76 \text{ \AA}$. Стехиометрия As_3Te_2 предполагает, что 55.6% мышьяка должны образовывать гомополярные пары As–As, а остальные 44.4% — гетерополярные связи As–Te. Тем не менее оказывается, что, как и стехиометрический, полутонный теллурид As_2Te_3 , обогащенный мышьяком As_3Te_2 , обладает сильным химическим беспорядком и обнаруживает гомополярные пары Te–Te, которые не должны существовать в упорядоченном материале. Найденные межатомные расстояния и парциальные координационные числа приведены в таблице. Они согласуются с литературными данными [21, 22].

Спектроскопия комбинационного рассеяния подтверждает результаты рентгеновской дифракции

(рис. 3). Спектр валентных колебаний стеклообразного $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ состоит из трех типов мод: (1) As–As при 223 см^{-1} , (2) As–Te при 186 см^{-1} , и (3) Te–Te при 158 см^{-1} , которые соответствуют известным литературным данным [10]. Стехиометрическое стекло $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ показывает аналогичные моды, но другой амплитуды. Относительная интенсивность As–As почти в пять раз меньше, а парциальная доля Te–Te колебаний в три раза больше по сравнению с $g\text{-As}_3\text{Te}_2$. Таким образом, стеклообразный $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ отличается от $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ только количественно, большей концентрацией As–As и меньшей фракцией атомных пар Te–Te.

3.2. Исследования под давлением

Измерения объема проводились при непрерывном изменении давления со скоростью $0.07\text{--}0.12 \text{ ГПа/мин}$ при увеличении и $0.03\text{--}0.05 \text{ ГПа/мин}$ при уменьшении давления. Барические зависимости объема для двух разных образцов стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ в сравнении с данными для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ представлены на рис. 4. Кривые сжатия–разгрузки для обоих образцов совпадают с высокой точностью (порядка 0.1%). Кривая сжатия не аппроксимируется единым простым уравнением состояния, упругое поведение, как и для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, наблюдается лишь до давления 1 ГПа . В диапазоне давлений $2\text{--}4 \text{ ГПа}$ наблюдается аномальное уменьшение объема, более растянутое по сравнению со стеклом $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Гистерезис по давлению между кривыми сжатия и разгрузки и остаточное уплотнение для $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ существенно (почти в два раза) выше чем для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. На каждом из образцов проводились релаксационные измерения при максимальном давлении. Изменение объема на больших временах пропорционально логарифму времени, интенсивность релаксации близка к таковой для стехиометрического стекла (см. врезку на рис. 4).

Высокая чувствительность тензометрического метода позволяет получить эффективные объемные модули сжатия стекол прямым дифференцированием по точкам без дополнительной обработки. На рис. 5 представлены модули сжатия для стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ в зависимости от давления в сравнении с данными для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Почти линейный рост объемного модуля сжатия с давлением наблюдается до 1 ГПа . На начальном участке модуль сжатия практически такой же, как и для стехиометрического стекла $B = 15.8 \pm 0.15 \text{ ГПа}$, а его производная по

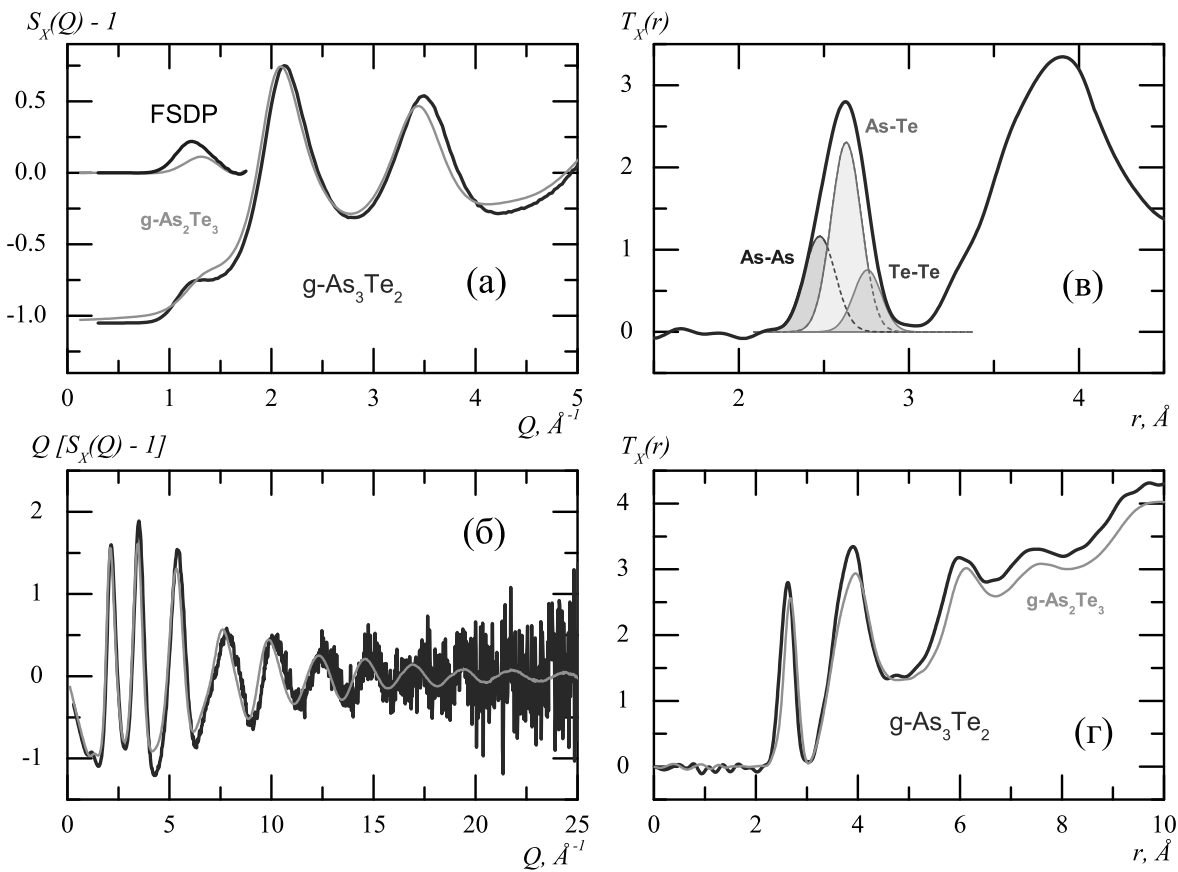


Рис. 2. Высокоэнергетическая рентгеновская дифракция стеклообразных $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ и $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. а) Структурный фактор $S_X(Q)$ в низких векторах рассеяния $Q \leq 5 \text{ \AA}^{-1}$; вставка показывает первый острый дифракционный максимум (FSDP) при $Q_0 \approx 1.25 \text{ \AA}^{-1}$. б) Приведенный структурный фактор $Q[S_X(Q) - 1]$ в расширенном диапазоне Q . в) Типичная обработка пика ближайших соседей полной корреляционной функции $T_X(r)$ для $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ в районе 2.6 $\text{\AA}$; корреляции As–As, As–Te и Te–Te выделены соответственно светло-синим, светло-зеленым и светло-красным цветом. г) Полная корреляционная функция $T_X(r)$ для $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ и $g\text{-As}_2\text{Te}_3$

Таблица 1. Межатомные расстояния r_{ij} и парциальные координационные числа N_{ij} для $g\text{-As}_3\text{Te}_2$

As–As		As–Te		Te–Te		$N_{\text{As-X}}$	$N_{\text{Te-X}}$
$r_{\text{AsAs}}, \text{\AA}$	$N_{\text{As-As}}$	$r_{\text{AsTe}}, \text{\AA}$	$N_{\text{As-Te}}$	$r_{\text{TeTe}}, \text{\AA}$	$N_{\text{Te-Te}}$		
2.48(1)	1.92(5)	2.63(1)	1.08(5)	2.76(1)	0.58(5)	3.00(8)	2.20(8)

давлению несколько выше, $dB/dP = 7 \pm 0.2$ (среднее значение в диапазоне 0–1 ГПа). При дальнейшем увеличении давления наблюдается уменьшение производной dB/dP и переход к отрицательной производной (смягчение модуля), затянутое до более высоких давлений по сравнению с аналогичным поведением для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Максимальное смягчение релаксирующего модуля наблюдается при 3.5 ГПа (для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ – соответственно при 2.5 ГПа). Небольшие нерегулярности в значениях релаксирующего модуля воспроизводят вариации скорости изменения давления в той области, где есть релаксация. Как и для стехиометрического стекла, при давлении выше 4.5 ГПа при сжатии наблюдается уменьшение

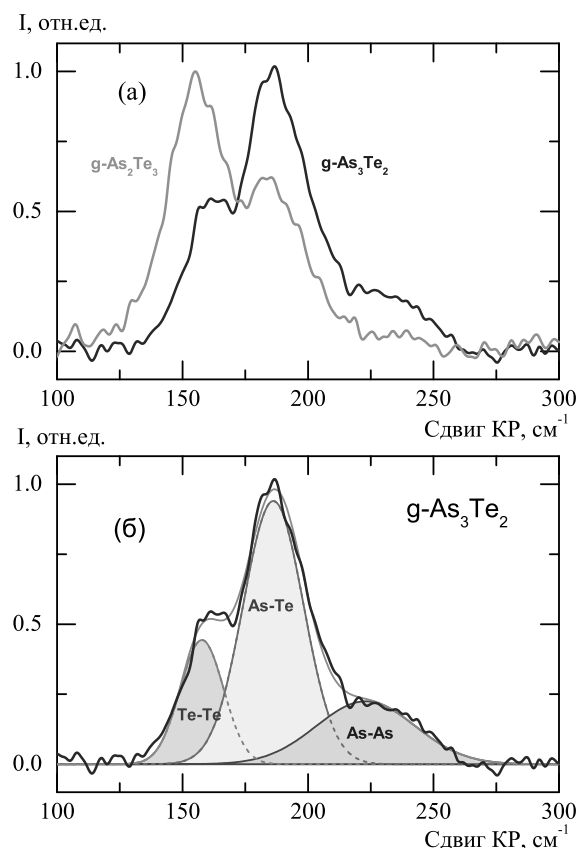


Рис. 3. а) Спектры комбинационного рассеяния стеклообразных $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ и $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. б) Типичная обработка спектра $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ тремя гауссианами, соответствующими валентным колебаниям As-As, As-Te и Te-Te, которые выделены соответственно светло-синим, светло-зеленым и светло-красным цветом

наклона барической зависимости эффективного модуля сжатия (дополнительное смягчение модуля), связанное с «включением» новых релаксационных процессов. При сбросе давления стекло $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ ведет себя упруго вплоть до 1.5 ГПа, модуль сжатия при этом соответствует отрелаксированным значениям. При более низких давлениях наблюдается нарастающее смягчение модуля, связанное с интенсивной релаксацией, которая продолжается и при нормальном давлении (см. ниже). Барическая зависимость отрелаксированного модуля сжатия при снижении давления, так же как и для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, претерпевает отчетливый излом в районе 4 ГПа, при этом значения dB/dP уменьшаются от 7.2 до 5.2.

На рис. 6 представлены барические зависимости электросопротивления стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ в срав-

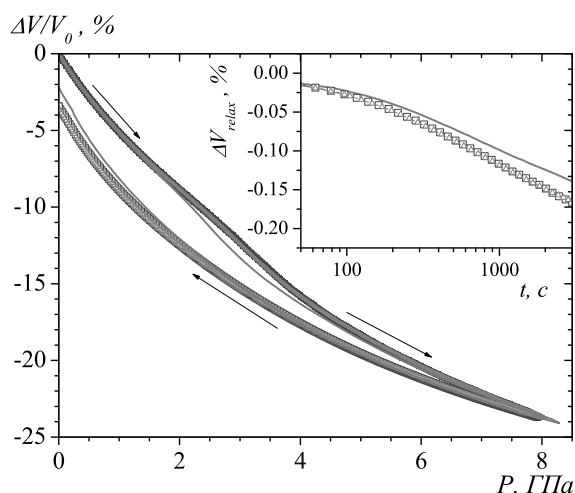


Рис. 4. Барические зависимости объема $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ стекла при увеличении (сплошные символы) и уменьшении (открытые символы) давления. Показаны результаты двух экспериментов. Стрелки указывают направление изменения давления. На вставке показана релаксация объема стекла во время выдержки при максимальном давлении. Сплошная линия (и на основном рисунке и на вставке) обозначает соответствующие данные для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, полученные в работе [19]

нении с данными для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. Сопротивление падает почти на восемь порядков величины, металлический уровень проводимости достигается при давлении 6 ГПа, что заметно выше, чем для стехиометрического стекла. Исходное сопротивление стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ более чем на порядок выше, чем для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, в целом металлизация под давлением более размыта и затянута. Сопротивление при максимальном давлении также в два раза выше, чем для стехиометрического стекла. Из абсолютно гладких барических зависимостей электросопротивления и объема можно сделать вывод, что металлизация происходит плавно без кристаллизации. Таким образом, $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ является вторым после $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ примером объемного стекла, где изучена обратимая металлизация при сжатии. Как и для объема, для сопротивления при максимальных давлениях наблюдается логарифмическая по времени релаксация примерно с той же интенсивностью, что и для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ (см. врезку на рис. 6). Обратный переход металл-диэлектрик при сбросе наблюдается примерно при 4 ГПа. Как и в случае барических зависимостей объема, гистерезис по сопротивлению между прямым и обратным ходом для нестехиометрического стекла существенно выше чем для

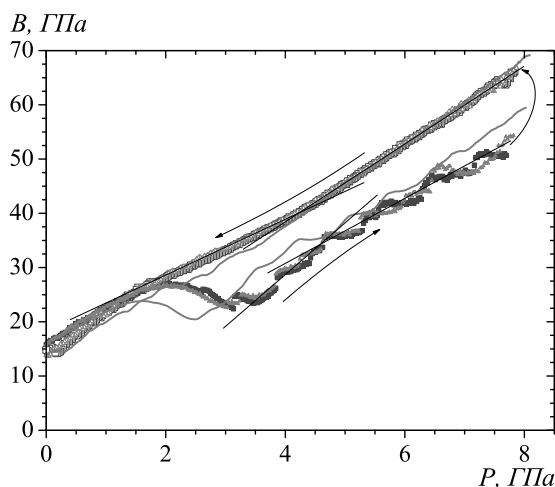


Рис. 5. Кажущиеся объемные модули стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$, полученные из исходных $V(P)$ данных как $B = -V \cdot dP/dV$, при увеличении (сплошные символы) и уменьшении (открытые символы) давления. Тонкие прямые линии подчеркивают изломы на барических зависимостях объемного модуля при увеличении и уменьшении давления. Стрелки указывают направление хода по давлению. Сплошная линия обозначает сильно сглаженные данные для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, полученные в работе [19]. Цвета и символы, которыми представлены результаты различных экспериментов, соответствуют обозначениям на графиках $V(P)$

$g\text{-As}_2\text{Te}_3$. После сброса давления образец имел электросопротивление почти на три порядка ниже исходного.

3.3. Релаксация уплотненных стекол

Как уже говорилось, остаточное уплотнение стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ после сброса давления почти в 2 раза превышает таковое для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ и составляет 3.5%. Представляло интерес детально исследовать процессы релаксации плотности и электросопротивления уплотненных стекол в зависимости от времени при нормальном давлении. Для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ такие исследования не проводились. Методика изучения релаксационных процессов в стеклах с одновременной записью «температурной истории» и введения шкалы «эффективного времени» до сих пор была апробирована лишь на уплотненном стекле $g\text{-GeS}_2$ [23]. Полученные в настоящей работе экспериментальные данные для трех образцов стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ представлены соответственно на рис. 7 и рис. 8.

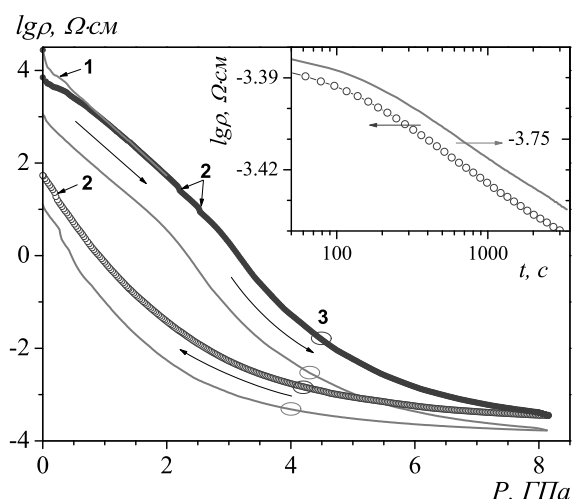


Рис. 6. Барические зависимости удельного электросопротивления стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при увеличении (сплошные символы) и уменьшении (открытые символы) гидростатического давления. Длинные стрелки указывают направление хода по давлению; 1 — линия, полученная пересчетом данных в предположении постоянства величины шунтирующего сопротивления среды (≈ 100 кОм), 2 — точки кратковременных остановок для оценки скорости релаксации сопротивления, 3 — овалы — области, соответствующие положениям изломов на барических зависимостях объемного модуля. На вставке показана релаксация электросопротивления при максимальном давлении. Сплошная линия (и на основном рисунке и на вставке) представляет данные для стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ [19]. Левая и правая оси на вставке даны соответственно для $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ и $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ (принадлежность поясняется стрелками)

За времена порядка 10^7 с объем уплотненных образцов возрастает почти на 2%, а электросопротивление — на полтора порядка величины. Во всем диапазоне времен наблюдается логарифмический характер релаксационных процессов. Отклонения от логарифмического закона в начале выдержки (многократно обсужденное в наших работах) связано с предысторией («не-мгновенностью» возбуждения системы).

Из-за наличия двух шкал времени t и t^* рис. 7 и рис. 8 сложны для восприятия и требуют дополнительных пояснений. Вначале предположим, что «правильные» релаксационные зависимости при строго постоянной температуре T_0 , скажем, при 25°C , имели бы в точности линейный вид. В реальном эксперименте при отличающейся от 25°C температуре на малом интервале времени dt скорость релаксации будет отличаться от «правильной», при-

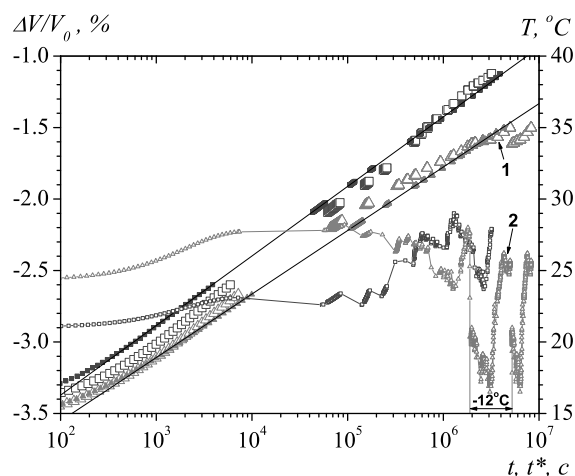


Рис. 7. Релаксация объема уплотненного стекла после снятия высокого давления. Цвета и символы, обозначающие различные эксперименты, соответствуют графикам сжимаемости и объемного модуля. Крупные открытые символы обозначают реальные экспериментальные зависимости, полученные при «комнатной» температуре. Маленькие открытые символы и правая шкала ординат — значения температур экспериментальныхборок в процессе измерения релаксации. Показана область заморозки (-12°C) одного из экспериментов. В обоих случаях нижняя шкала — реальное физическое время t ; 1 — положение точек объема и 2 — температуры при вычитании времени заморозки сборки. Они даны для удобства восприятия и в расчетах не использовались. Сплошные символы и шкала «эффективного времени» t^* — результаты пересчета исходных данных к температуре 25°C с энергией активации $E_a = 1.3$ эВ. Прямые линии подчеркивают качество выпрямления исходных зависимостей

чем это отличие будет определяться и реальной температурой, и энергией активации процесса релаксации. Суть «эффективного времени» t^* такова, что если на каком-то интервале физического времени dt скорость релаксации в два раза больше «правильной», то и интервал времени dt^* будет в два раза больше интервала физического времени dt . По этому принципу строится вычислительная схема, включающая всю релаксационную зависимость, всю «температурную историю» и одно число — предполагаемую энергию активации процесса релаксации E_a (подробности см. в [23]). Далее идет подбор величины E_a . Для каждого нового значения E_a пересчитывается весь эксперимент, строится новая шкала t^* (как последовательная сумма всех интервалов dt^*) и новая релаксационная зависимость как функция от t^* . При некотором значении E_a релаксационная зависимость (как функция от t^*) «выпрямляется»

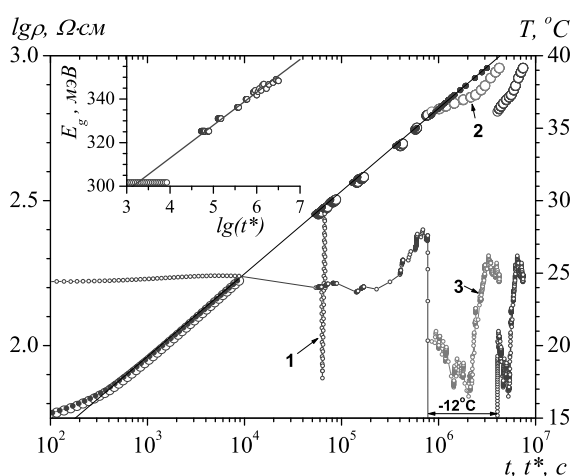


Рис. 8. Релаксация электросопротивления уплотненного стекла после снятия высокого давления. Крупные открытые символы обозначают экспериментальные значения удельного электросопротивления, приведенные к температуре 25°C с помощью термической щели E_g , определявшейся в каждый день измерений (в первый день — экстраполяция). Маленькие открытые символы и правая шкала ординат — значение температуры экспериментальной сборки в процессе измерения релаксации. Показана область заморозки (-12°C) эксперимента. В обоих случаях, нижняя шкала — реальное физическое время t ; 1 — ход по температуре для определения термической щели E_g , показан только один ход второго дня измерений для сохранения разборчивости графика температурной истории релаксации, 2 — положение точек сопротивления и 3 — температуры при вычитании времени заморозки сборки. Они даны для удобства восприятия и в расчетах не использовались. Сплошные символы и шкала «эффективного времени» t^* — результаты пересчета исходных данных к температуре 25°C с энергией активации $E_a = 1.3$ эВ. Прямая линия подчеркивают точность выпрямления. На вставке показана зависимость термической щели E_g как функции логарифма «эффективного времени» t^*

в линию. Это значение E_a и считается окончательным ответом задачи. Разумеется, при наличии трех экспериментов все три релаксационные зависимости должны «выпрямляться» при этом значении E_a , хотя для каждого эксперимента шкала t^* будет своя, так как «температурные истории» всех экспериментов различны. На этом этапе уже понятно, что первоначальное предположение было излишним. Если бы истинный релаксационный закон был бы каким-то другим, то просто отсутствовало бы единственное число E_a , решающее задачу. Заметим, что выбор T_0 , вообще говоря, произволен, при другом его значении у всех интервалов dt^* появится одинаковый множи-

тель и получившаяся релаксационная зависимость просто сдвинется, сохраняя и линейность, и наклон.

Как и для $g\text{-GeS}_2$ установлено, что релаксационным процессам в $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ соответствует постоянная энергия активации 1.3 эВ (с точностью 3–5%), при которой происходит «выпрямление» релаксационных зависимостей с тем лишь различием, что для $g\text{-GeS}_2$ E_a в начале процесса релаксации (1.6 эВ) значительно сильнее отличалась от равновесной энергии связи атомов (2.46 эВ для связи Ge–S). Последнее также легко объяснимо тем, что остаточное уплотнение стекла $g\text{-GeS}_2$ было почти втрое больше чем у $g\text{-As}_3\text{Te}_2$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Таким образом, основной результат настоящей работы состоит в том, что поведение под давлением стеклообразного теллурида мышьяка с составом, сильно отличающимся от стехиометрии, $g\text{-As}_3\text{Te}_2$, качественно похоже на поведение «классического» стекла стехиометрического состава $g\text{-As}_2\text{Te}_3$. В $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при сжатии наблюдается полиаморфное превращение со смягчением релаксирующего модуля сжатия и последующей металлизацией. Как и для стехиометрического стекла, в $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ наблюдаются изломы на барической зависимости объемного модуля сжатия в области металлизации как на прямом, так и на обратном ходу. Можно предположить, что металлизация может ускорять процессы структурной релаксации за счет снижения потенциальных барьеров для перескоков атомов между различными локальными конфигурациями. Излом на обратном ходу может быть связан со вкладом в модуль электронов проводимости при давлениях выше 4 ГПа. В случае стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ эта релаксация приводит к частичному «залечиванию» химического беспорядка [19]. Как и для $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, металлизация стекла нестехиометрического состава $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ происходит без кристаллизации и обратима: после сброса давления стекло является полупроводником, хотя и с меньшей величиной энергии активации. Основные отличия в поведении $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ от стехиометрического стекла — это затянутасть полиаморфного превращения в область более высоких давлений; более высокое давление прямого и обратного перехода полупроводник–металл; более широкий гистерезис между прямым и обратным ходом как по объему, так и по сопротивлению; существенно более высокое остаточное уплотнение стекла после

сброса давления. На первый взгляд, схожесть в поведении стехиометрического и нестехиометрического стекол представляется странной. Однако следует учесть большую степень химического беспорядка, характерную для обоих.

Ранее нами была предложена модель структуры стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$ [19], основанная на предположении, что основными элементами структуры являются пирамидки $\text{AsTe}_{3/2}$, попеременно связанными ребрами или вершинами, а также кольца As_3Te_3 и As_6Te_6 . Полиаморфизм стехиометрического стекла, очевидно, связан с изменением промежуточного порядка (типа связности части пирамидок) и изменением степени химического беспорядка. В стекле $g\text{-As}_3\text{Te}_2$, по-видимому, химический и структурный беспорядки еще больше: помимо тех же пирамидок и колец в структуре, очевидно, присутствуют элементы сетки из атомов мышьяка. Эта более высокая степень беспорядка и существенно более высокая концентрация «неправильных» пар As–As приводит к наблюдаемым различиям в поведении этого стекла под давлением и существенно более высокому остаточному уплотнению.

Детально исследована релаксация уплотненного теллуридного стекла при нормальном давлении. Оказалось, что модель, основанная на представлениях о «самоорганизованной критичности» [29] процесса релаксации, предложенная нами ранее для описания релаксации уплотненного стекла $g\text{-GeS}_2$, прекрасно описывает и поведение стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$. В рамках данной модели логарифмическая по времени релаксация связана не с изначально имеющимся очень широким распределением энергий активации, а с сильным понижением энергии активации для ряда атомов после первого прыжка частицы. В результате первый акт активации (с энергией 1.3 эВ) приводит к лавине очень большого числа прыжков ($\sim 10^{10}$ в начале релаксации). Энергия активации 1.3 эВ несколько меньше энергии разрыва связи (As–As — 1.51 эВ, As–Te — 1.41 эВ), что логично, так как разрываются сильно растянутые связи, удерживающие стекло в уплотненном состоянии. Это, в свою очередь, приводит к появлению в ближайшем окружении дополнительных «слабых» мест с низкой энергией активации прыжков. Успешное применение данной модели к стеклу $g\text{-As}_3\text{Te}_2$, сильно отличающемуся по структуре и свойствам от стекла $g\text{-GeS}_2$ является сильным аргументом в пользу универсальности данного подхода. Интересно, что за все время релаксационного эксперимента

отклонения от логарифмической зависимости не наблюдалось как для объема, так и для электросопротивления. При этом уплотнение объема отрелаксировало на 60–70% а электросопротивление — более чем на порядок величины. Экстраполяция сопротивления к начальному значению дает оценку порядка $(3-4) \cdot 10^{11}$ с. Величина термической щели E_g (при том наклоне, что показан на врезке к рис. 8) на таких временах будет около 427 мэВ, что несколько меньше исходного значения. Заметим, что релаксация сопротивления только на 90% определяется релаксацией E_g , существуют, видимо, и другие процессы. Оценка «времени возврата» по релаксационным зависимостям объема дает существенно меньшие времена в районе 10^9-10^{10} с, хотя точность такой оценки значительно хуже. Кроме того, структура стекла, отрелаксировавшего после действия давления, не обязана совпадать со структурой закаленного и отожженного стекла. Это могут быть «немного разные» стекла. На последних стадиях релаксации энергия E_a должна немного увеличиваться, приближаясь к усредненной равновесной энергии связи, что также осложняет оценки, делая их скорее умозрительными.

Таким образом, прецизионные измерения объема и электросопротивления под давлением в гидростатических условиях позволили установить основные черты превращений в стекле сильно нестехиометрического состава $g\text{-As}_3\text{Te}_2$. Имеются достаточно четко выраженные интервалы давлений: до 1 ГПа — нормальное упругое поведение; от 1 до 2 ГПа — начало неупругого поведения; от 2 до 4 ГПа — полиаморфное превращение, сопровождаемое сильным смягчением эффективного модуля сжатия; 4–8 ГПа — неупругое поведение с умеренной релаксацией и плавной металлизацией при 6 ГПа. Размытое превращение в данном стекле обратимо лишь частично. Обратный переход металл–полупроводник происходит при давлении около 4 ГПа. Остаточное уплотнение после сброса давления составляет 3.5%, электросопротивление этого уплотненного стекла почти на 3 порядка величины ниже чем у исходного. Качественно поведение стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ под давлением похоже на поведение «классического» стехиометрического стекла $g\text{-As}_2\text{Te}_3$, однако имеются существенные количественные различия. Логарифмическая релаксация объема и электросопротивления уплотненного стекла $g\text{-As}_3\text{Te}_2$ при нормальном давлении наблюдается в широком интервале времен (до $5 \cdot 10^6$ с) и хорошо описывается моделью «лавины» прыжков после первого акта активации с постоянной энергией 1.3 эВ.

Благодарности. Авторы благодарны И.П. Зиброву за помощь при фазовом анализе образцов.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант N 19-12-00111).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Wuttig and N. Yamada, *Nat. Mater.* **6**, 824 (2007).
2. S. Danto, P. Houizot, C. Boussard-Pledel, X.-H. Zhang, F. Smektala, and J. Lucas, *Adv. Funct. Mater.* **16**, 1847 (2006).
3. M. H. R. Lankhorst, B. W. S. M. M. Ketelaars, and R. A. M. Wolters, *Nature Mater.* **4**, 347 (2005).
4. J. Cornet and D. Rossier, *J. Non-Cryst. Solids* **12**, 85 (1973).
5. Q. Ma, D. Raoux, and S. Benazeth, *Phys. Rev. B* **48**, 16332 (1993).
6. K. Abe, O. Uemura, T. Usuki, Y. Kameda, and M. Sakurai, *J. Non-Cryst. Solids* **232-234**, 682 (1998).
7. G. Faigel, L. Granasy, I. Vincze, and Dewaard, *J. Non-Cryst. Solids* **57**, 411 (1983).
8. P. Jónvári, S. N. Yannopoulos, I. Kaban, A. Kalampounias, I. Lishchynskyy, B. Beuneu, O. Kostadinova, E. Welter, and A. Schöps, *J. Chem. Phys.* **129**, 214502 (2008).
9. S. Sen, S. Joshi, B. G. Aitken, and S. Khalid, *J. Non-Cryst. Solids* **354**, 4620 (2008).
10. A. Tverjanovich, K. Rodionov, and E. Bychkov, *J. Solid-State Chem.* **190**, 271 (2012).
11. D. C. Kaseman, I. Hung, K. Lee, K. Kovnir, Z. Gan, B. Aitken, and S. Sen, *J. Phys. Chem. B* **119**, 2081 (2015).
12. M. Dongol, T. Gerber, M. Hafiz, M. Abou-Zied, and A. F. Elhady, *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, 6213 (2006).
13. T. G. Edwards, E. L. Gjersing, S. Sen, S. C. Currie, and B.G. Aitken, *J. Non-Cryst. Solids* **357**, 3036 (2011).
14. M. Tenhover, P. Boolchand, and W. J. Bresser, *Phys. Rev. B* **27**, 7533 (1983).

15. S. S. K. Titus, R. Chatterjee, S. Asokan, and A. Kumar, *Phys. Rev. B* **48**, 14650 (1993).
16. S. Sen, S. Soyer Uzun, C. J. Benmore, and B. J. Aitken, *J. Phys.: Condens. Matter* **22**, 405401 (2010).
17. A. Tverjanovich, M. Yagodkina, and V. Strykanov, *J. Non-Cryst. Solids* **223**, 86 (1998).
18. V. V. Brazhkin, E. Bychkov, and O.Ю.В. Tsiok, *Phys. Rev. B* **95**, 054205 (2017).
19. В. В. Бражкин, Е. Бычков, О. Б. Циок, *ЖЭТФ* **152**, 530 (2017).
20. E. Bychkov, C. J. Benmore, and D. L. Price, *Phys. Rev. B* **72**, 172107 (2005).
21. Q. Ma, D. Raoux, and S. Bénazeth, *Phys. Rev. B* **48**, 16332 (1993).
22. P. Jónvári, S.N. Yannopoulos, I. Kaban, A. Kalampounias, I. Lishchynskyy, B. Beuneu, O. Kostadinova, E. Welter, and A. Schöps, *J. Chem. Phys.* **129**, 214502 (2008).
23. О. Б. Циок, В. В. Бражкин, А. С. Тверьянович, Е. Бычков, *ЖЭТФ* **161**(1), 65 (2022).
24. L. G. Khvostantsev, V. N. Slesarev, and V. V. Brazhkin, *High Press. Res.* **24**, 371 (2004).
25. О. Б. Tsiok, V. V. Bredikhin, V. A. Sidorov, and L. G. Khvostantsev, *High Pressure Research* **10**, 523 (1992).
26. О. Б. Tsiok, V. V. Brazhkin, A. G. Lyapin, and L. G. Khvostantsev, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 999 (1998).
27. V. V. Brazhkin, E. Bychkov, and O. B. Tsiok, *Phys. Chem. B* **120**, 358 (2016).
28. В. В. Бражкин, Е. Бычков, А. С. Тверьянович, О.Б. Циок, *ЖЭТФ* **157**, 679 (2020).
29. P. Bak, *How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality*, Springer-Verlag, New York Inc. (1996).

РЕЗОНАНСНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СПИНОВОГО ТРАНСПОРТА В СПИН-ВЕНТИЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ

Н. В. Стрелков^{}, А. В. Ведяев*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 2022 г.,
после переработки 4 декабря 2022 г.
Принята к публикации 5 декабря 2022 г.

Известные методы измерения параметров спинного транспорта в спин-вентильных структурах основываются на эффекте Ханле — прецессии спинов электронов во внешнем магнитном поле и уменьшении магниторезистивного сигнала. Они позволяют определить время спиновой релаксации в парамагнитном слое и константу относительной поляризации тока. Мы описываем альтернативный метод измерения без приложения внешнего магнитного поля, основанный на резонансном увеличении магнитной восприимчивости парамагнитного слоя в результате парамагнитного резонанса, вызванного неравновесной намагниченностью в результате эффекта спиновой аккумуляции. Предложенный метод позволяет определить абсолютное значение спиновой аккумуляции в парамагнетике, которое может использоваться как параметр для численного решения трехмерных диффузионных уравнений спинного транспорта.

DOI: 10.31857/S0044451023040156

EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Спин-вентильные структуры (рис. 1) являются элементарным элементом современных спин-транспортных устройств и состоят из двух ферромагнитных электродов, L_1 и L_3 , разделенных слоем парамагнитного металла L_2 . Устройства, построенные на базе таких структур, могут выполнять функции элементов магнитной памяти [1, 2] и датчиков магнитного поля [3] благодаря эффекту гигантского магнитосопротивления (ГМС) [4]. Задачи оптимизации и управления спинным транспортом в спин-вентильных структурах произвольной геометрии сводятся к численным расчетам диффузных уравнений [5] методом конечных элементов [6].

Спин-транспортные параметры для численных расчетов, такие как относительная спиновая поляризация тока P и спин-диффузионная длина l_{sf} измеряются методами, в основе которых лежит эффект Ханле [7]. Данный эффект заключается в прецессии спинов электронов во внешнем магнитном поле H и, как следствие, уменьшении магнитосопротивления

R системы. Измеряя зависимость сопротивления спин-вентильной структуры от H , можно построить кривую Ханле $R(H)$. Спин-транспортные параметры подбираются так, чтобы точнее аппроксимировать построенную кривую с помощью аналитической модели [8]. Этот метод легко реализовать технически, так как в нем применяются только электрические измерения. Однако внешнее магнитное поле отклоняет намагниченности ферромагнит-

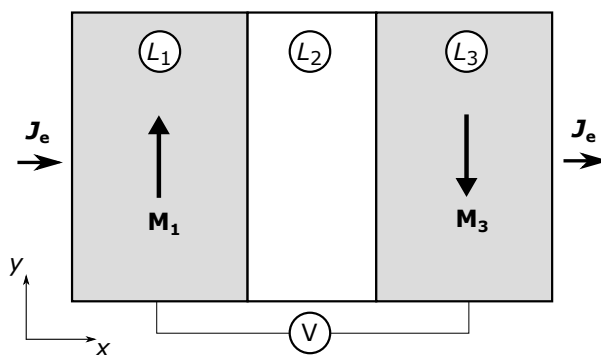


Рис. 1. Модель рассматриваемой спин-вентильной структуры. Слои L_1 и L_3 — ферромагнитные, а L_2 — металлический парамагнитный. Намагниченности M_1 и M_3 зафиксированы в противоположных направлениях, чтобы обеспечить постоянство знака спиновой аккумуляции вдоль слоя L_2 . Ток J_e протекает вдоль оси x . Напряжение V измеряется на электродах L_1 и L_3

^{*} E-mail: nik@magn.phys.msu.ru

ных электродов, что приводит к неточностям при аппроксимации аналитической функцией.

В данной работе мы описываем альтернативный метод измерения спин-транспортных параметров, основанный на эффекте парамагнитного резонанса в слое L_2 , вызванного неравновесной намагниченностью в результате эффекта спиновой аккумуляции. Измерение восприимчивости необходимо проводить с помощью высокочастотных методов, например, с использованием векторного анализатора цепей (ВАЦ) [9].

Для возбуждения неравновесной намагниченности в парамагнитном слое L_2 через спин-вентильную структуру пропускается электрический ток $\mathbf{J}_e$. Намагниченность ферромагнитных электродов зафиксирована в противоположных направлениях, чтобы знак спиновой аккумуляции оставался постоянным. Если длина спиновой диффузии l_{sf} в слое L_2 больше, чем длина этого слоя, то спиновая аккумуляция в нем может рассматриваться как однородная. Неравновесное обменное расщепление, возникающее из-за этого в слое L_2 , будет создавать условия для парамагнитного резонанса. Наличие резонанса, в свою очередь, приведет к увеличению магнитной восприимчивости.

В следующих разделах мы вычислим парамагнитную восприимчивость с учетом примесей и наличия неравновесного обменного расщепления. Далее, мы численно рассчитаем величину спиновой аккумуляции и связанную с ней величину обменного расщепления в парамагнитном слое предложенной спин-вентильной структуры. Для полученного значения мы построим резонансные кривые парамагнитной восприимчивости, которые определяют спин-транспортными параметрами системы.

2. ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

В электронном газе различают две компоненты магнитной восприимчивости: продольную $\chi_{\parallel}$ и поперечную $\chi_{\perp}$. Инвариантность по отношению к вращению устанавливает связь между ними: $\chi_{\parallel} = 2\chi_{\perp}$, поэтому мы рассмотрим только поперечную компоненту.

Восприимчивость $\chi_{\perp}$ невзаимодействующего электронного газа с учетом рассеяния на примесях с малой концентрацией была рассмотрена ранее в равновесном случае [10, 11]. Мы расширили эту теорию и учли вклад от неравновесной намагниченности, вызванный эффектом спиновой аккумуляции. Гамильтониан системы в этом случае будет записываться как $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V(\mathbf{r})$,

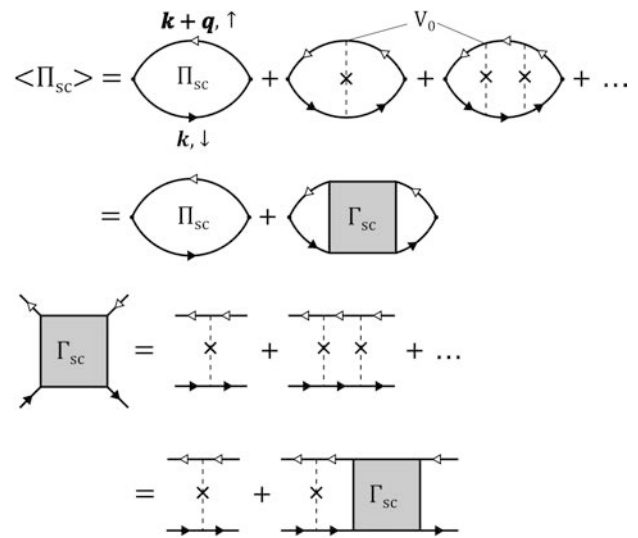


Рис. 2. Поляризационный пропагатор Π_{sc} , усредненный по примесям и определяющий восприимчивость электронного газа с рассеянием на случайном потенциале примесей V_0 . Вершинная часть Γ_{sc} — диффузионный полюс («диффузон»), рассчитанный из уравнения Бете–Солпитера в лестничном приближении

где $\mathcal{H}_0 = \varepsilon_{\sigma}(\mathbf{k})a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}a_{\mathbf{k}\sigma}$ — гамильтониан свободных электронов, $a_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}$ и $a_{\mathbf{k}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электрона со спином σ и волновым вектором $\mathbf{k}$, $V(\mathbf{r})$ — случайный потенциал примесей. Энергию электронов можно выразить как $\varepsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) = \varepsilon_k - \mu^{\sigma}$, где μ^{σ} — неравновесный спин-зависающий химический потенциал [12].

Для расчета восприимчивости необходимо вычислить вершинную часть Γ_{sc} (или «диффузон»). Величина Γ_{sc} может быть получена из уравнения Бете–Солпитера, которое упрощается в лестничном приближении суммированием диаграмм на рис. 2 с использованием примесной диаграммной техники [13]. Его можно записать в виде [11]

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{nV_0^2}{\hbar - nV_0^2\Pi_{sc}(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{nV_0^2\hbar^{-1}}{-i(\omega - \Delta\mu/\hbar)\tau + D_0\mathbf{q}^2\tau + \tau/\tau_{sf}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{q}$ и ω — волновой вектор и частота внешней электромагнитной волны соответственно, $nV_0^2 = n(\int V(r) dr)^2$, n — концентрация примесей, $V(r)$ — потенциал одной примеси, τ — время релаксации упругого рассеяния, $\Delta\mu = \mu^{\uparrow} - \mu^{\downarrow}$ — неравновесное расщепление по спину, $\tau_{sf}^{-1} = (4/3)(\tau_s^{-1} + \tau_{so}^{-1})$ — время релаксации с переворотом спина, τ_s и τ_{so} — спин-спиновая и спин-орбитальная части соответственно, $D_0 = v_F^2\tau/3$ — константа диффузии Друде и v_F — скорость

электронов на уровне Ферми. Невозмущенный поляризационный пропагатор Π_{sc} может быть вычислен как интеграл в трехмерном пространстве, учитывая золотое правило Ферми $\tau^{-1} = \pi N_F n V_0^2$:

$$\begin{aligned}\Pi_{sc}(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{\mathbf{k}} G_{\uparrow}^R(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \varepsilon + \hbar\omega) G_{\downarrow}^A(\mathbf{q}, \varepsilon) = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G_{\uparrow}^R(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \varepsilon + \hbar\omega) G_{\downarrow}^A(\mathbf{q}, \varepsilon) \approx \\ &\approx \frac{\hbar}{nV_0^2} \left(1 + i \left(\omega - \frac{\Delta\mu}{\hbar} \right) \tau - D_0 \tau \mathbf{q}^2 - \frac{\tau}{\tau_{sf}} \right). \quad (2)\end{aligned}$$

В результате можно записать поперечную восприимчивость $\chi_{\perp}^{sc}$ в виде

$$\chi_{\perp}^{sc}(\mathbf{q}, \omega) = N_F + \frac{1}{i\pi} \int [n(\varepsilon + \hbar\omega) - n(\varepsilon)] \langle \Pi_{sc} \rangle d\varepsilon, \quad (3)$$

где N_F — плотность состояний электронов на уровне Ферми на один атом, $n(\varepsilon + \hbar\omega) - n(\varepsilon) = -\hbar\omega\delta(\varepsilon - E_F)$, а $\langle \Pi_{sc} \rangle$ — поляризационный пропагатор (см. рис. 2), усредненный по примесям в лестничном приближении. С учетом того, что $\omega\tau \ll 1$, $\tau_{sf}^{-1} \ll \tau^{-1}$ и $|\mathbf{q}|l \ll 1$, он принимает следующую форму:

$$\begin{aligned}\langle \Pi_{sc}(\mathbf{q}, \omega) \rangle &= \langle G_{\uparrow}^R(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \varepsilon + \hbar\omega) G_{\downarrow}^A(\mathbf{q}, \varepsilon) \rangle = \\ &= \Pi_{sc}(\mathbf{q}, \omega) + \Pi_{sc}^2(\mathbf{q}, \omega) \Gamma_{sc}(\mathbf{q}, \omega) = \\ &= \frac{N_F \pi}{-i(\omega - \Delta\mu/\hbar) + D_0 \mathbf{q}^2 + \tau_{sf}^{-1}}. \quad (4)\end{aligned}$$

Подставляя (4) в (3), получим окончательное выражение для поперечной восприимчивости, учитывая, что $\hbar\omega \ll E_F$ и $|\mathbf{q}| \ll k_F$ [14]:

$$\chi_{\perp}^{sc}(\mathbf{q}, \omega) = -N_F \frac{\Delta\mu/\hbar - i(D_0 \mathbf{q}^2 + \tau_{sf}^{-1})}{(\omega - \Delta\mu/\hbar) + i(D_0 \mathbf{q}^2 + \tau_{sf}^{-1})}. \quad (5)$$

Как можно увидеть из выражения (5) для восприимчивости, она имеет резонансный вид из-за наведенного обменного расщепления $\Delta\mu$, вызванного эффектом спиновой аккумуляции. В отсутствие примесей ($\tau_{sf}^{-1} + D_0 \mathbf{q}^2 = 0$) восприимчивость (5) принимает вид лоренциана с резонансной частотой $\omega_R = \Delta\mu/\hbar$. В статическом случае, при $\omega = 0$, восприимчивость равна восприимчивости невзаимодействующего газа свободных электронов, $\chi_{\perp}^{sc}(0, 0) = N_F$.

Можно легко показать, что резонансная частота мнимой части восприимчивости (5), которая ответственна за поглощение, имеет вид

$$\omega_R = \sqrt{(\Delta\mu/\hbar)^2 + (\tau_{sf}^{-1} + D_0 \mathbf{q}^2)^2}. \quad (6)$$

Действительная часть выражения (5) при частоте резонанса (6) постоянна и равна половине восприимчивости невзаимодействующего газа свободных электронов, $\max(\text{Re } \chi_{\perp}^{sc}) = N_F/2$, тогда как мнимая часть имеет более сложный вид:

$$\begin{aligned}\max(\text{Im } \chi_{\perp}^{sc}) &= \frac{N_F}{2} \frac{\Delta\mu/\hbar}{\tau_{sf}^{-1} + D_0 \mathbf{q}^2} \times \\ &\times \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\tau_{sf}^{-1} + D_0 \mathbf{q}^2}{\Delta\mu/\hbar} \right)^2} \right). \quad (7)\end{aligned}$$

Для оценки энергии обменного расщепления $\Delta\mu$, вызванной эффектом спиновой аккумуляции в парамагнитном слое L_2 необходимо решить диффузные спин-зависящие транспортные уравнения в спин-вентильной структуре, как это сделано в следующем разделе.

3. СПИНОВАЯ АККУМУЛЯЦИЯ

Теория спинного транспорта в геометрии, когда ток перпендикулярен интерфейсу между слоями, была предложена в работе Вале и Ферта [5]. Уравнения диффузии в спин-вентильной структуре в случае коллинеарной ориентации намагниченности в ферромагнитных слоях записываются в виде

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} j_e^i &= 0, \\ \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} j_m^{ij} &= -\frac{m_j}{a_0^3 \tau_{sf}},\end{aligned} \quad (8)$$

где m_j — j -я компонента вектора спиновой аккумуляции на один атом, $\xi_i = x, y$. Вектор зарядового тока $\mathbf{J}_e$ с компонентами j_e^i и тензор спинового тока j_m^{ij} выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}j_e^i &= -\sigma \frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi - \frac{\beta \sigma}{|e_c| N_F} \sum_j M_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} m_j, \\ j_m^{ij} &= -\frac{\sigma \beta}{|e_c|} M_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi - \frac{\sigma}{e_c^2 N_F} \frac{\partial}{\partial \xi_i} m_j,\end{aligned} \quad (9)$$

где φ — электрический потенциал, σ — проводимость, которая связана с константой диффузии через соотношение Эйнштейна: $\sigma = e_c^2 N_F D_0 / a_0^3$ [15], M_j — j -я компонента единичного вектора вдоль намагниченности ферромагнитного слоя, a_0 — параметр решетки, β — параметр спиновой асимметрии проводимости и e_c — заряд электрона.

Система диффузных уравнений (8) с выражениями для токов (9) описывает спин-зависимый транспорт в спин-вентильной структуре. Эта система уравнений может быть решена численно с использо-

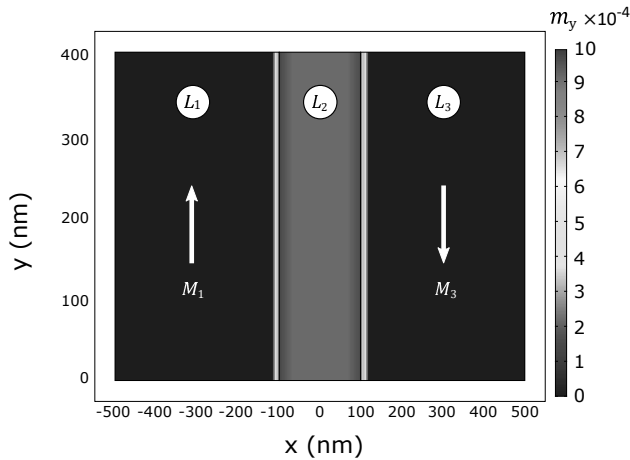


Рис. 3. (В цвете онлайн) Численный расчет спинового транспорта в спин-вентильной структуре. Цветом обозначена величина x -компоненты спиновой аккумуляции. Напряжение 0.83 В, приложенное между электродами L_1 и L_3 , создает зарядовую плотность тока 10^8 А/см². Проводимость парамагнитных и ферромагнитных слоев $\sigma_{2,4} = 10^{-2}$ (Ом · нм)⁻¹ и $\sigma_{1,3,5} = 10^{-3}$ (Ом · нм)⁻¹ соответственно. Время релаксации с переворотом спина $\tau_{sf2,4} = 2.4 \cdot 10^{-12}$ с (соответствует диффузионной длине $l_{sf} = 200$ нм) и $\tau_{sf1,3,5} = 6 \cdot 10^{-14}$ с ($l_{sf} = 10$ нм), спиновая асимметрия проводимости $\beta_{1,3,5} = 0.7$ и $N_F = 0.1$ эВ⁻¹

ванием метода конечных элементов для любой геометрии, например так, как это показано в работе [6].

Численные вычисления x -компоненты вектора спиновой аккумуляции представлены на рис. 3. Ее значение в парамагнитном слое L_2 практически постоянно и равно в среднем $9.5 \cdot 10^{-4}$. При этом плотность тока через спин-вентильную структуру составляет 10^8 А/см². Диффузионная длина l_{sf} связана со временем релаксации электрона с переворотом спина, τ_{sf} , в уравнении (8) и определяется выражением $l_{sf} = \sqrt{D_0 \tau_{sf}}$. Используя соотношение Эйнштейна и полагая параметр решетки равным $a_0 = 0.3$ нм, легко показать, что l_{sf} для пара- и ферромагнитных слоев равны 200 нм и 10 нм соответственно. Можно теперь оценить величину обменного расщепления $\Delta\mu = m_x/N_F$ в парамагнитном слое L_2 и рассчитать частотную зависимость поперечной восприимчивости. Заметим, что относительная поляризация тока выражается через $\Delta\mu$ как $P = \Delta\mu/E_F$.

На рис. 4 показана зависимость поперечной восприимчивости $\chi_{\perp}^{sc}$ (5) в парамагнитном слое L_2 с параметрами спин-вентильной структуры, перечисленными в подписи к рис. 3, как функция частоты $f = \omega/2\pi$ и волнового вектора $\mathbf{q}$ падающей волны. На вставке изображена зависимость резонансной частоты (6) от волнового вектора $\mathbf{q}$. Значение мнимой части поперечной восприимчивости опре-

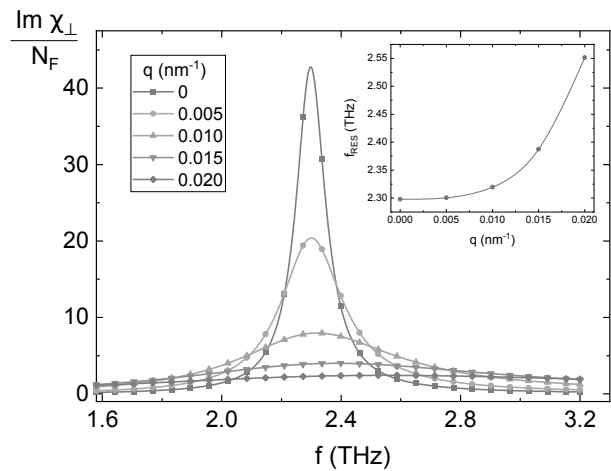


Рис. 4. Мнимая часть поперечной восприимчивости $\chi_{\perp}^{sc}$ (5), деленная на N_F , в парамагнитном слое L_2 как функция частоты $f = \omega/2\pi$ падающей волны для различных значений волнового вектора $\mathbf{q}$. На вставке показана зависимость резонансной частоты (6) от волнового вектора $\mathbf{q}$. Параметры расчета: $N_F = 0.1$ эВ⁻¹, $v_F = 10^8$ см/с, $\tau = 5.5 \cdot 10^{-14}$ с (соответствует $\sigma = 10^{-2}$ (Ом · нм)⁻¹), $\tau_{sf} = 2.4 \cdot 10^{-12}$ с (соответствует $l_{sf} = 200$ нм), $a_0 = 0.3$ нм, $m_x = 9.5 \cdot 10^{-4}$ (соответствует $\Delta\mu = 9.5 \cdot 10^{-3}$ эВ)

деляется выражением (7). Уменьшение величины плотности тока в спин-вентильной структуре приведет к уменьшению величины спиновой аккумуляции, а следовательно, и падению резонансной частоты.

Аппроксимируя экспериментальную кривую мнимой части магнитной восприимчивости функцией Лоренца, можно найти величину $\Delta\mu$, которая будет определяться положением резонанса, и величину τ_{sf} , которая будет определяться шириной резонансной кривой. Здесь мы учли, что волновой вектор $\mathbf{q}$ электромагнитной волны мал, порядка ω/c , где c — скорость света, а частота спиновой релаксации пренебрежимо мала по сравнению с частотой резонанса, $\tau_{sf}^{-1} \ll \Delta\mu/\hbar$.

4. ВЫВОДЫ

В заключение сформулируем основные результаты работы. Нами была рассчитана поперечная магнитная восприимчивость парамагнитного слоя спин-вентильной структуры с учетом упругого и спин-зависящего рассеяния под действием эффекта неравновесной спиновой аккумуляции. Было показано, что парамагнитная восприимчивость имеет резонансный характер, который зависит от величины спиновой аккумуляции, создаваемой током, протекающим через спин-вентильную структуру. Аппроксимируя экспериментальную частотную зависимость мнимой части восприимчивости

полученными аналитическими зависимостями, можно вычислить такие параметры спинного транспорта, как спин-диффузная длина l_{sf} , величина спиновой аккумуляции $\Delta\mu$ и соответствующие им величины: время спиновой релаксации τ_{sf} и относительная спиновая поляризация тока P . Данный метод позволит избежать отклонения намагниченности ферромагнитных электродов, так как не подразумевает использования внешнего магнитного поля в отличие от метода, основанного на эффекте Ханле.

Ограничением данного экспериментального метода является требование к толщине парамагнитного слоя, которая должна быть заведомо меньше, чем спин-диффузионная длина l_{sf} для обеспечения однородности спиновой аккумуляции вдоль парамагнетика. Плотность тока, протекающего через спин-вентильную структуру, должна быть как можно больше, чтобы резонанс магнитной восприимчивости хорошо выделялся на уровне термоэлектрических флуктуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. S. P. Parkin, K. P. Roche, M. G. Samant et al., J. Appl. Phys. **85**, 5828 (1999).
2. S. Tehrani, J. M. Slaughter, M. Deherra et al., Proc. IEEE **91**, 703 (2003).
3. B. Dieny, V. S. Speriosu, S. S. P. Parkin et al., Phys. Rev. B **43**, 1297 (1991).
4. M. Baibich, J. M. Broto, A. Fert et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 2472 (1988).
5. T. Valet and A. Fert, Phys. Rev. B **48**, 7099 (1993).
6. N. Strelkov, A. Vedyayev, N. Ryzhanova et al., Phys. Rev. B **84**, 024416 (2011).
7. M. Johnson and R. H. Silsbee, Phys. Rev. Lett. **55**, 1790 (1985).
8. F. J. Jedema, H. B. Heersche, A. T. Filip et al., Nature **416**, 713 (2002).
9. S. Noh, D. Monma, K. Miyake et al., IEEE Trans. Magn. **47**, 2387 (2011).
10. B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmel'nitskii, and A. I. Larkin, in *Quantum Theory of Solids*, ed. by I. M. Lifshits, Mir Publ., Moscow (1982), p. 130.
11. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, in *Electron-Electron Interactions in Disordered Systems*, ed. by A. L. Efros and M. B. Pollak, Elsevier, Amsterdam (1985), pp. 1–153.
12. P. C. van Son, H. van Kempen, and P. Wyder, Phys. Rev. Lett. **58**, 2271 (1987).
13. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматлит, Москва (1962) [A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, ed. by R. Silverman, Dover publ., New York (1963)].
14. D. Pines and P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids*, Vol. 1, CRC Press, Boca Raton (2018).
15. S. Zhang, P. M. Levy, and A. Fert, Phys. Rev. Lett. **88**, 236601 (2002).

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ФЕРРОЖИДКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*А. Ю. Зубарев, А. Ю. Мусихин**

*Уральский Федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 19 августа 2022 г.,
после переработки 21 ноября 2022 г.
Принята к публикации 21 ноября 2022 г.

Рассмотрена задача о возбуждении стационарных циркуляционных течений в канале, заполненном немагнитной жидкостью с внедренным облаком феррожидкости под действием однородного вращающегося магнитного поля. Исследование проводится с целью развития метода интенсификации транспорта лекарств в кровеносных сосудах. Показано, что при реалистических значениях параметров системы, в канале шириной несколько миллиметров могут развиваться течения со скоростью порядка нескольких миллиметров в секунду, что может обеспечить существенную интенсификацию транспорта в тромбированных сосудах с остановившимся кровотоком.

DOI: 10.31857/S0044451023040168
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема интенсификации и адресного транспорта лекарств в организме при помощи внешних электрических и магнитных полей является перспективным направлением развития современной медицины (см., например, обзор в [1]). Одной из основных сложностей терапии тромбозов кровеносных сосудов, и, в частности, провоцируемых ими инсультов, является слишком медленный диффузионный транспорт тромболитиков при остановке кровотока в сосуде. Перспективный метод решения задачи интенсификации транспорта лекарств в таких условиях был предложен и запатентован в [2, 3]. Ключевая идея этого метода состоит во введении (инъектировании) в тромбированный сосуд капли нанодисперсной феррожидкости на основе воды или других биосовместимых растворимых жидкостей. Далее к этому сосуду прикладывается осциллирующее магнитное поле, вовлекающее магнитные наночастицы во вращательное и поступательное движение. Эти движения частиц передаются содержащей жидкости и

генерируют в ней циркуляционные течения, интенсифицирующие распространение лекарства в сосуде и, за счет этого, его доставку к тромбу. Несмотря на то, что исследованию этих течений и интенсификации ими транспорта лекарств посвящено несколько исследований [3–6], ясного физического понимания природы этих течений и их оптимальной, с практической точки зрения, организации не достигнуто.

Теоретический анализ таких течений в системах со сферическими частицами под действием вращающегося сильно неоднородного поля был нами выполнен в недавней работе [6]. В частности, было показано, что эти течения возникают в системах с пространственно неоднородным распределением частиц, если градиент напряженности поля достаточно велик. Однако на практике создать поле с необходимым градиентом напряженности не просто. Поэтому представляет интерес исследование ситуаций, когда желаемые течения в несущей жидкости генерируются в слабо-градиентном или вообще в однородном поле. Отметим, что проблема генерирования макроскопических течений в однородной феррожидкости, под действием однородного вращающегося поля, обсуждается довольно давно (см., например, [7, 8] и ссылки в этих работах). Теория вращательного движения феррожидкости с пространственно однородным распределением частиц, поме-

* E-mail: antoniusmagna@yandex.ru

щенной в цилиндрический сосуд под действием однородного поля, вращающегося в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, была предложена в [7]. В [8] показано, что эта теория приводит к расхождению с экспериментами, примерно, на четыре десятичных порядков величины.

В этой работе мы предлагаем теоретическую модель циркуляционного течения, генерируемого в несущей немагнитной жидкости пространственно неоднородным облаком феррожидкости под действием однородного вращающегося поля в тонком канале, моделирующем кровеносный сосуд. Для максимального упрощения вычислений и чтобы получить физически ясные результаты в обозримой математической форме, мы рассматриваем модельную задачу, в которой канал представляет собой плоскую щель с бесконечными размерами в ее плоскости. Полученные результаты показывают, что пространственно неоднородное распределение частиц в канале может приводить к достаточно интенсивным макроскопическим течениям среды, способным, в частности, существенно интенсифицировать транспорт лекарств в сосудах.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим бесконечную плоскую щель толщины l , заполненную немагнитной жидкостью. В эту жидкость внедрена капля феррожидкости, состоящей из одинаковых эллипсоидальных магнитных наночастиц. К каналу приложено вращающееся однородное магнитное поле с компонентами $H_x = H_0 \sin \omega t$; $H_z = H_0 \cos \omega t$. Эта модельная ситуация с выбранной системой координат показана на рис. 1.

Необходимо отметить, что в кровеносный сосуд должна инжектироваться феррожидкость на основе среды, растворимой в плазме крови — иначе са-

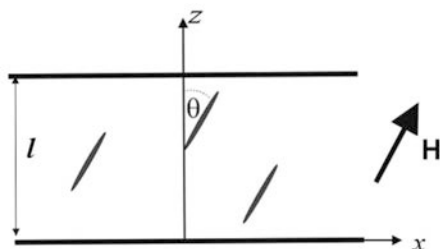


Рис. 1. Иллюстрация рассматриваемой модели и выбранной системы координат. Эллипсоиды — магнитные наночастицы. Масштаб не соблюден

ма инжектированная капля может тромбировать сосуд. При введении в сосуд растворимой феррожидкости эта капля, за счет диффузии, должна довольно быстро «расползтись» в подобие «облака» с более или менее плавным пространственным распределением частиц. Поэтому в дальнейшем мы будем вместо термина «капля» использовать термин «облако».

Обозначим локальную объемную концентрацию частиц $\Phi(x, z, t)$ и, для максимального упрощения анализа, рассмотрим двумерное приближение, предполагая, что все физические события происходят в плоскости (x, z) , показанной на рис. 1. Другими словами, мы пренебрегаем зависимостью всех величин от третьей координаты y . Мы будем предполагать, что концентрация $\Phi(x, z, t)$ мала, не превосходит нескольких процентов. Поэтому можно пренебречь ее влиянием на локальную эффективную вязкость η феррожидкости и изменением локального магнитного поля $\mathbf{H}$ за счет размагничивающих эффектов. Соответственно, будем пренебрегать вызванным этим эффектом слабым деформированием капли в направлении поля. Отметим, что приближение малых концентраций Φ соответствует ограничениям, диктуемым биологической безопасностью применения магнитных наночастиц в медицинских технологиях.

Уравнения течения намагничивающейся жидкости в пространственно однородном магнитном поле при малых числах Рейнольдса могут быть представлены в виде [8, 9]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\Phi \Gamma), \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \Gamma), \\ \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, Γ — статистически среднее значение магнитного момента сил, действующих на единицу объема частицы, т. е. величина момента сил, действующих на частицу, отнесенная к ее объему. Величина $\frac{1}{2} \Phi \Gamma$ является антисимметричным напряжением, действующим в жидкости, благодаря моменту сил Γ [8, 9]. Условие применимости приближения малых чисел Рейнольдса к рассматриваемой ситуации мы обсудим в конце работы.

Явный вид момента сил Γ определяется магнитными свойствами частиц феррожидкости. Здесь рассмотрим случай одинаковых однодоменных наночастиц с постоянным магнитным моментом

$m = MV$ каждая, где M — намагниченность насыщения частицы, V — ее объем. Считаем, что магнитный момент частицы направлен вдоль оси симметрии частицы, что типично для вытянутых феррочастиц. Пренебрегая межчастичными взаимодействиями, что оправдано, если объемная концентрация Φ находится в пределах нескольких процентов, имеем [9, 10]

$$\Gamma = \mu_0 H M (\langle e_x \rangle h_z - \langle e_z \rangle h_x).$$

Здесь $\langle e_x \rangle$ и $\langle e_z \rangle$ — статистически средние компоненты единичного вектора $\mathbf{e}$, направленного вдоль магнитного момента частиц, т. е. вдоль ее оси симметрии, $h_z = \cos \omega t$, $h_x = \sin \omega t$ — компоненты единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, где $\mathbf{H}$ — магнитное поле внутри щели с жидкостью.

Обозначим $w(\mathbf{e})$ функцию распределения (плотность вероятности) по ориентациям единичного вектора $\mathbf{e}$, и выбираем условие ее нормировки в стандартном виде:

$$\int w d\mathbf{e} = 1.$$

Функция w может быть найдена как решение соответствующего уравнения Фоккера—Планка, которое удобно записать в системе координат, вращающейся вместе с полем $\mathbf{H}$. В этой системе координат поле неподвижно, несущая жидкость вращается с угловой скоростью $-\omega$, а стационарное уравнение Фоккера—Планка имеет вид [9]

$$\omega e_{x'} e_{z'} \frac{\partial w}{\partial e_{x'}} - D_r \kappa \left[(e_i e_{z'} - h_i) \frac{\partial w}{\partial e_i} + 2w e_{z'} \right] = D_r \left(\frac{\partial^2}{\partial e_i^2} - 2e_i \frac{\partial}{\partial e_i} - e_i e_j \frac{\partial}{\partial e_i \partial e_j} \right) w, \quad (2)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{mH}{kT}, \quad D_r = \frac{kT}{6\eta V \delta(r)},$$

$$\delta(r) = \frac{2}{3} \frac{r^2 + 1}{1 + 2Nr^2 - N}.$$

Здесь $i, j = x', y', z'$ — вращающиеся с полем $\mathbf{H}$ декартовы координаты; ось z' направлена вдоль поля; ось x' находится в плоскости (x, z) (см. рис. 2), $h_{z'} = 1$, $h_{x'} = h_{y'} = 0$; D_r — коэффициент вращательной диффузии частицы; η — вязкость несущей жидкости; kT — абсолютная температура в энергетических единицах; r — аспектное отношение эллипсоида (отношение его оси симметрии к диаметру); $N(r)$ — размагничивающий фактор эллипсоида вдоль его главной оси. Явный вид функции $N(r)$

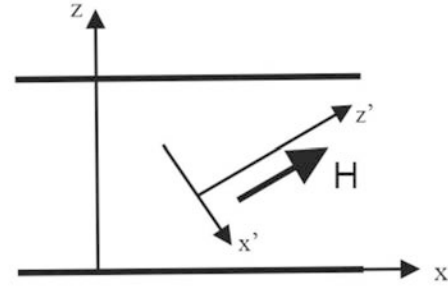


Рис. 2. Иллюстрация вращающейся системы координат x', y', z' . Ось y' не показана

можно найти, например, в [10]. В случае вытянутого эллипсоида с аспектным отношением r

$$N = \frac{1}{r^2 - 1} \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \ln \left(r + \sqrt{r^2 - 1} \right) - 1 \right].$$

Отметим, что в (2) и далее используются обозначения Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам i, j .

В общем случае точное аналитическое решение уравнения (2) не известно. К хорошим приближениям приводит математически простой метод эффективного поля, предложенный в работе [11]; его обоснование можно найти в книгах [9, 12]. Следуя основной идее этого метода, умножим обе части уравнения (2) на компоненты $e_{z'}$ и $e_{x'}$ и проинтегрируем результат по всем направлениям вектора $\mathbf{e}$. После вычислений приходим к соотношениям (детали см. в [9])

$$-\frac{1}{2} \langle e_{z'} \rangle + \omega \langle e_{x'} \rangle + \kappa (1 - \langle e_{z'}^2 \rangle) h_{z'} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \langle e_{x'} \rangle - \omega \langle e_{z'} \rangle - \kappa \langle e_{x'} e_{z'} \rangle h_{z'} = 0,$$

$$\langle \dots \rangle = \int \dots w d\mathbf{e}.$$

Для того чтобы определить вторые статистические моменты $\langle e_{z'}^2 \rangle$ и $\langle e_{x'} e_{z'} \rangle$, следуя [11], мы представим неизвестную неравновесную функцию w в виде равновесной функции, но не в истинном поле $\mathbf{H}$, а в некотором эффективном поле $\mathbf{H}_{ef}$, компоненты которого предстоит найти:

$$w = \frac{\kappa_{ef}}{\text{sh } \kappa_{ef}} \exp(\kappa_{ef} \cdot \mathbf{e}) \kappa_{ef} = \mu_0 \frac{m \mathbf{H}_{ef}}{kT}. \quad (4)$$

Простые оценки показывают, что для типичных феррожидкостей на водной основе, состоящих из частиц диаметром 10–20 нм, коэффициент вращательной диффузии D_r по порядку величины равен 10^5 – 10^6 с $^{-1}$. Это намного больше, чем угловая

скорость ω поля в типичных экспериментах. Следовательно, можно рассматривать функцию w как почти равновесную в поле $\mathbf{H}$. Математически это означает, что эффективное поле $\mathbf{H}_{ef}$ должно быть очень близко к истинному полю $\mathbf{H}$. Поэтому положим $\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}$ или $\mathbf{k}_{ef} = \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$ и примем, что выполняется сильное неравенство $\delta H \ll H$.

Используя форму (4) в уравнении (3), вычисляя статистические моменты $\langle \dots \rangle$ в линейном приближении по параметру $\delta\mathbf{k}$ и отношению ω/D_r , мы приходим к линейному алгебраическому уравнению относительно компонент $\delta\mathbf{k}$ и, как следствие, к уравнениям относительно статистических моментов $\langle e_{x'} \rangle$ и $\langle e_{z'} \rangle$. Опуская подробности, которые могут быть найдены в работах [9, 11, 12], приведем результат:

$$\langle e_{z'} \rangle = L(\kappa), \quad \langle e_{x'} \rangle = -\frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)},$$

$$L(\kappa) = \text{cth } \kappa - \frac{1}{\kappa}.$$

Отметим, что функция $L(\kappa)$ называется функцией Ланжевена. Используя вращающуюся систему координат x', y', z' , можно найти величину момента сил Γ :

$$\Gamma = \mu_0 H M \langle e_{x'} \rangle = -\mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)}. \quad (5)$$

Используя соотношение (5) в уравнениях (1), получаем

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x - \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} \Phi, \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z + \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial}{\partial x} \Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0.$$

По порядку величины характерное время инерционной релаксации жидкости в щели шириной l может быть оценено как $l^2 \rho / \eta$. Для феррожидкостей на основе воды, заполняющих щели шириной $l \sim 1$ мм, это время порядка 1 с. Поэтому здесь мы пренебрежем коротким периодом инерционного перехода от состояния покоя жидкости к ее течению, пренебрегая в (1) производной $\frac{\partial v_i}{\partial t}$.

Введем функцию потока Ψ по стандартному соотношению,

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (7)$$

автоматически обеспечивающему выполнение условия несжимаемости жидкости. Подставляя (7) в уравнения (6), пренебрегая производной $\frac{\partial v_i}{\partial t}$, после простых преобразований приходим к уравнению

$$\Delta^2 \Psi = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H M}{\eta} \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \Delta \Phi. \quad (8)$$

Граничные условия (8) соответствуют непроницаемости границ щели и отсутствию скольжения жидкости на них. Учитывая, что на бесконечном расстоянии вдоль оси x от облака феррожидкости несущая жидкость должна быть неподвижной, эти условия могут быть записаны в виде

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad z = l, \quad (9)$$

$$\Psi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Отметим, что координата $z = 0$ расположена на нижней пластине щели на рис. 1, 2.

В пространственно однородном магнитном поле уравнение для объемной концентрации частиц Φ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + (v \cdot \nabla) \Phi = D \Delta \Phi.$$

Здесь D — коэффициент трансляционной диффузии частиц. Граничные условия к этому уравнению имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = 0, l; \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\Phi = \Phi_0(x, z), \quad \text{при } t = 0,$$

где Φ_0 — начальный профиль концентрации.

В общем случае задача (8)–(10) может быть решена только численно. Здесь мы рассмотрим начальную стадию генерации течения, предполагая, что концентрация Φ совпадает со своим начальным профилем $\Phi_0(x, z)$. Для определенности мы выберем гауссово распределение концентрации:

$$\Phi_0 = \Phi^0 \exp \left(- \left(\frac{(z - Z)^2}{\sigma_z^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} \right) \right). \quad (11)$$

Здесь точки $x = 0, z = Z$ соответствуют центру «облака» феррочастиц, $\sigma_{x,z}$ — дисперсии распределения концентрации частиц в соответствующих направлениях; они задают характерный размер обла-

ка. Отметим, что распределение (11) вполне соответствует ситуации инжектирования в канал феррожидкости, растворимой в несущей среде, с некоторым ее диффузионным размытием к моменту включения вращающегося поля.

Даже при использовании приближения с начальной концентрацией $\Phi \equiv \Phi_0(x, z)$ общее решение уравнения (8) очень сложно, так как оно содержит производные четвертой степени функции Ψ по координатам. Приведенный ниже анализ показывает, что наиболее интенсивное генерирование течения, следовательно, наиболее интересный, с точки зрения практического применения, случай соответствует сильному неравенству $\sigma_x \gg \sigma_z$, означающему, что размер облака в направлении продольной оси x намного больше размера вдоль поперечной оси z . Физически добиться этого можно, например, использованием, при инжектировании феррожидкости, стационарного магнитного поля соответствующей конфигурации, которое может быть выключено при включении вращающегося поля, чтобы не затруднять движение частиц. В этом случае сильные неравенства $\frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^4}{\partial z^4} \gg \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ должны выполняться для всех физических величин задачи. В рамках этого приближения уравнение (8) может быть переписано как

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi = \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi = & C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \\ & + \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \int_0^z \int_0^\xi \Phi_0(x, \varsigma) d\varsigma d\xi \end{aligned}$$

Здесь C_i — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (9):

$$C_0 = 0; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = 3 \frac{G}{l^2} - \frac{G'}{l}; \quad C_3 = \frac{G'}{l^2} - 2 \frac{G}{l^3},$$

$$\begin{aligned} G = & -\frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \int_0^l \int_0^\xi \Phi_0(x, \varsigma) d\varsigma d\xi, \\ G' = & -\frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \int_0^l \Phi_0(x, \varsigma) d\varsigma d\xi. \end{aligned}$$

Отметим, что функция потока Ψ , и следовательно, компоненты скорости течения v , не зависят от времени. Это означает, что однородное вращающееся

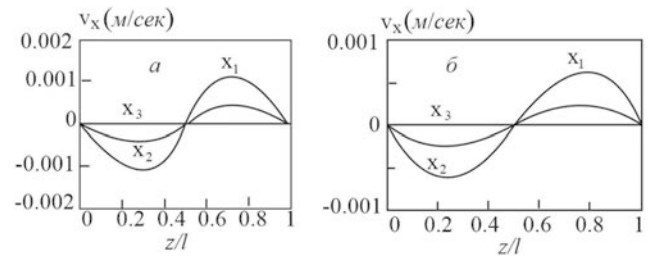


Рис. 3. Продольная v_x компонента скорости генерируемого течения для суспензии сферических частиц ($r = 1$). Параметры системы: намагниченность насыщения материала частиц $M = 450$ кА/м (магнетит); ширина щели $l = 2$ мм; напряженность поля $H = 50$ кА/м; диаметр частиц $d = 15$ нм; объемная концентрация в центре облака $\Phi^0 = 0.05$; характерный размер облака в продольном направлении $\sigma_x = 1$ см; в поперечном направлении $\sigma_z = l/5$ (а) и $\sigma_z = l/2$ (б). Центр капли находится на уровне $Z = l/2$ (середина щели). Символы у кривых — продольные координаты, для которых определяется скорость течения $x_1 = \sigma_x/4$; $x_2 = \sigma_x$; $x_3 = 2\sigma_x$. Расчеты выполнены при комнатной температуре ($kT \approx 4 \cdot 10^{-21}$ Дж); угловая частота вращения поля $\omega = 10$ с $^{-1}$, что соответствует экспериментам [2, 3]

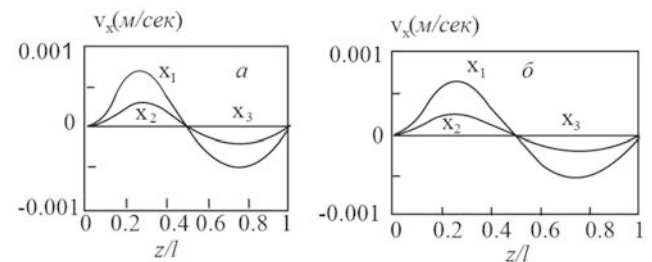


Рис. 4. То же, что на рис. 3 при $Z = \sigma_z/2$ ($\sigma_z = l/2$)

поле порождает стационарные потоки в рассматриваемом канале. Подчеркнем, что для генерирования этих потоков необходимо, чтобы концентрация частиц Φ зависела от пространственных координат.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Некоторые результаты расчетов продольной компоненты скорости v_x , представляющей наибольший интерес с точки зрения транспорта лекарства или другой нейтральной примеси вдоль оси x канала, приведены на рис. 3–5. Отметим, что ширина канала l выбиралась так, чтобы она соответствовала характерному диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого может вызывать опасность для здоровья и жизни человека.

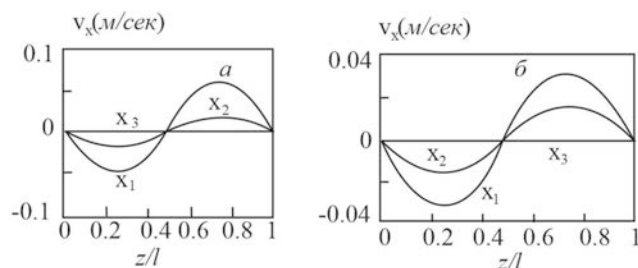


Рис. 5. То же, что на рис. 3 для вытянутых эллипсоидов с аспектным отношением $r = 20$

Эти результаты показывают, что при вполне реалистических параметрах системы можно генерировать течения с продольной скоростью выше нескольких миллиметров в секунду. Отметим, что в работе [3] темп диффузионного транспорта тромболитиков в тромбированных сосудах был оценен как 0.8 мкм/с. Следовательно, конвективные течения с характерной скоростью порядка миллиметра в секунду, действительно, могут существенно интенсифицировать транспорт лекарства в таких сосудах.

Уменьшение поперечного размера капли σ_z по сравнению с продольным σ_x , при прочих равных условиях, приводит к заметному увеличению скорости генерируемого течения. Изменение центрального уровня поперечного размера Z капли слабо влияет на величину скорости течения. Эффект же формы частиц весьма силен — вытянутые эллипсоидальные частицы генерируют существенно более сильные течения, чем сферические. По мере удаления, вдоль оси x , от внедренного облака феррожидкости, скорость генерируемых течений быстро затухает. Это значит, что феррожидкость нужно инжектировать по возможности близко к тромбу.

Оценим правомерность применения приближения малого числа Рейнольдса Re для рассматриваемой ситуации. Пусть плотность и вязкость жидкости равны таковым для воды ($\rho \sim 10^3$ кг/м³ и $\eta \sim 10^{-3}$ Па·с), а ширина щели соответствует диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого опасно для здоровья человека ($l \sim 10^{-3}$ м). Тогда $Re \sim 1$ при $v_x \sim 10^{-3}$ м/с. Это значит, что результаты, представленные на рис. 3 и 4 соответствуют верхней границе, когда линейные уравнения (1) могут быть использованы, результаты же, представленные на рис. 5 — вне области применимости этих уравнений. Однако результаты, представленные на рис. 5 качественно указывают на то, что при использовании длинных стержнеобразных частиц вместо сферических вращающее поле может генериро-

вать течения с гораздо большей скоростью. Количественный же расчет требует численного исследования уравнения Навье—Стокса с учетом нелинейного инерционного члена.

Оценим характерное время периода, при котором можно пренебречь изменением концентрации Φ за счет конвективного переноса частиц генерируемыми течениями. По порядку величины это время может быть оценено как σ_x/v_x . Если выбрать $\sigma_x \sim 10^{-2}$ м и $v_x \sim 10^{-3}$ м/с, то, по порядку величины, это время около 10 с, что вполне достаточно для экспериментального наблюдения описанной здесь начальной стадии генерации течений, соответствующей рис. 3 и 4. После этого существенным становится изменение концентрации Φ за счет конвективных явлений. Учет этого обстоятельства делает задачу (1) существенно нелинейной, допускающей только численные решения. Мы планируем в ближайшее время провести исследование полной нелинейной задачи, включающей в себя уравнение Навье—Стокса с квадратичным по скорости членом и учет изменения концентрации Φ со временем. Полученные здесь результаты свидетельствуют о перспективности таких исследований и будут служить основой для них.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована модельная задача о генерации циркуляционных течений в канале с немагнитной жидкостью и инжектированной в нее каплей (облаком) нанодисперсной феррожидкости под действием однородного вращающегося магнитного поля. Расчеты показывают, что, при вполне реалистических параметрах системы, частоты и напряженности магнитного поля, в канале могут быть генерированы течения со скоростью с амплитудой порядка 1 мм/с. Эти течения могут существенно интенсифицировать транспорт нейтральной молекулярной примеси (лекарства) в несущей жидкости, что подтверждает идею, высказанную в работах [2, 3] о перспективности метода генерирования магнитоиндуцированных течений в тромбированных кровеносных сосудах для интенсификации в них транспорта тромболитиков. Наши результаты показывают, что использование феррожидкости с длинными стержнеобразными частицами, с точки зрения генерирования течений, может быть гораздо более эффективным, чем использование традиционных феррожидкостей со сферическими частицами.

Представленные аналитические результаты получены в предположении о выполнении довольно сильных упрощений (малые числа Рейнольдса; сохранение профиля концентрации внедренных магнитных наночастиц в неизменном начальном виде). Выход за рамки этих приближений требует численного исследования нелинейных уравнений феррогидродинамики и переноса примеси, что должно быть предметом отдельной работы.

Представленные результаты могут быть основой для таких исследований. Необходимо отметить, что в этой работе мы не учитывали влияние тромба на генерируемые течения. Такая задача, в силу существенного изменения граничных условий, требует отдельного исследования.

Следует также отметить, что, в принципе, движение магнитных частиц во вращающемся поле может вызывать нагрев содержащей их жидкости. Этот эффект (магнитная гипертермия) активно исследуется в литературе в связи с перспективами его применения для лечения онкологических заболеваний (см., например, [13, 14]). Из многочисленных теоретических и экспериментальных работ известно, что заметный нагрев жидкости с вязкостью воды происходит при частотах поля порядка десятков и сотен килогерц. Поэтому при рассмотренных частотах порядка 10 Гц сколько-нибудь ощутимых термических эффектов не будет.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 21-52-12013) и Министерства науки и образования РФ (проект FEUZ-2023-0020).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Thrums, *Biomedical applications of magnetic nanoparticles in colloidal magnetic fluids. Basics, Development and application of ferrofluids*, Springer, Berlin (2009).
2. F. M. Creighton, *Magnetic-based systems for treating occluded vessels*, U.S. Patent No. 8.308.628 (2012).
3. M. J. Clements, A mathematical model for magnetically-assisted delivery of thrombolytics in occluded blood vessels for ischemic stroke treatment: Doctoral dissertation, Texas University (2016).
4. J. L. F. Gabayno, D. W. Liu, M. Chang, and Y. H. Lin, *Nanoscale* **7**, 9 (2015).
5. Q. Li, X. Liu, M. Chang, and Z. Lu, *Materials* **11**, 11 (2018).
6. A. Musikhin, A. Zubarev, M. Raboisson-Michel, G. Verger-Dubois, and P. Kuzhir, *Phil. Trans. R. Soc. A* **378**, (2020).
7. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, *Журнал прикладной механики и технической физики*, 5 (1969).
8. R. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Cambridge, New York (1985).
9. В. Покровский, *Статистическая механика разбавленных суспензий*, Наука, Москва (1978).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
11. М. А. Марценюк, Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомис, *ЖЭТФ* **65**, 1 (1973).
12. E. Blums, A. Cebers, M. Maiorov, *Magnetic Fluids*, Walter de Gruyter, Berlin (1997).
13. L. Trahms, *Biomedical applications of magnetic nanoparticle. Colloidal magnetic fluids. Basics, development and applications of ferrofluids*, Springer, Berlin (2009).
14. L. Chang, X. L. Liu, D. D. Fan, Y. Q. Miao, H. Zhang, H. P. Ma, Q. Y. Liu, P. Ma, W. M. Xue, Y. E. Luo, and H. M. Fan, *Int. J. Nanomedicine* **11**, (2016).

«ИДЕАЛЬНОСТЬ» «НЕИДЕАЛЬНОЙ» ПЛАЗМЫ

А. Л. Хомкин, А. С. Шумихин*

*Объединённый институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 сентября 2022 г.,
после переработки 12 декабря 2022 г.
Принята к публикации 26 декабря 2022 г.

На основе уравнения состояния «физической» модели плазмы, в которой рассматривается взаимодействующая смесь электронов и ядер (протонов), выведены путем тождественных преобразований две химические модели плазмы, описывающие смесь свободных электронов, ионов и атомов. Полученные химические модели удовлетворяют правилу «книжной закладки» Онзагера — уравнение состояния не зависит от положения закладки — границы, разделяющей свободные и связанные состояния. Выполнено исследование влияния возбужденных состояний атома на уравнение состояния и ионизационного равновесия. Сделан вывод о завышенном вкладе дебаевского притяжения в традиционных «химических» моделях. Полученные соотношения для снижения потенциала ионизации и уравнения состояния существенно отличаются от общепринятых выражений и качественно объясняют наблюдаемый в экспериментах эффект «идеальности» неидеальной плазмы.

DOI: 10.31857/S004445102304017X
EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию уравнения состояния плотной плазмы в условиях, когда заметную роль играют межчастичные, особенно кулоновское, взаимодействия, в последнее время было уделено большое внимание [1]. Были исследованы плазма инертных газов и плазма щелочных металлов, в основном цезия. Уравнение состояния плазмы инертных газов исследовалось ударно-волновыми методами [2], уравнение состояния плазмы цезия — на подогреваемой ударной трубе [3, 4], на установке адиабатического сжатия [5], а также с использованием электровзрыва цезиевой проволоочки в плотном инертном газе [6, 7].

Вместо ожидаемого плазменного фазового перехода [8] или каких-либо следов его существования был обнаружен неожиданный эффект — «идеальность» поведения «неидеальной» плазмы. Этот эффект был замечен и в плазме инертных газов [2], но особенно в плазме паров цезия [3–7]. При обработке результатов экспериментов [3–7] отмечалось, что

расчеты уравнения состояния по «химической» модели идеальной плазмы весьма удовлетворительно описывают данные эксперимента в условиях развитой кулоновской неидеальности по сравнению с расчетами в рамках традиционных «химических» моделей, в которых использовалась дебаевская модель для энергии заряда, помещенного в плазму. По результатам работы [6] была даже высказана рекомендация использовать «химическую» модель идеальной смеси для практических расчетов уравнения состояния плотных паров цезия, включая область двукратной ионизации.

В то время мало кто решался посягнуть на авторитет Дебая и его модель, использованную к тому же для предсказания плазменного фазового перехода. В такой ситуации, применительно к плазме инертных газов, были предложены подходы, которые не затрагивали результатов дебаевской модели, но вносили дополнительное отталкивание в расчеты и тем самым компенсировали влияние поправки Дебая, носящей характер притяжения. Среди таких моделей отметим модель «ограниченного атома», предложенную в работе [9]. В этой модели для нахождения спектра связанных состояний атома вместо традиционного граничного условия — обращения волновой функции в нуль на бесконечности, предлагалось использовать иное — обраще-

* E-mail: shum_ac@mail.ru

ние волновой функции в нуль на некотором конечном расстоянии. Такое граничное условие, по мнению авторов работы [9], качественно моделировало влияние среды на атом. Действительно, взаимодействие электронов с атомами инертных газов носит характер отталкивания, поэтому «эффект твердой стенки» в принципе возможен, но все зависит от того, как эта стенка возникает и где она находится. А вот применительно к парам щелочных металлов, где взаимодействие электронов с атомами носит характер притяжения и приводит к образованию отрицательных ионов, модель «ограниченного атома» совершенно не применима, хотя эффект «идеальности» там был зафиксирован [3–7] даже с большей определенностью, чем в плазме инертных газов. В итоге модель «ограниченного атома» в большинстве «химических» моделей не закрепилась, а обнаруженный эффект «идеальности» в плазме паров цезия, да и в плазме инертных газов так и остался без объяснения. Неплохое согласие давала дебаевская модель в большом каноническом ансамбле. Ниже мы ее рассмотрим более подробно.

Главный эффект «неидеальности» в плазме возникает при внесении в нее пробного заряда, который поляризует ее, отталкивая одноименные заряды и притягивая разноименные. В результате возникает эффект притяжения пробного заряда к плазме. Энергию, которую приобретает заряд, помещенный в классическую плазму за счет ее поляризации, будем называть дебаевской. Впервые эта энергия была рассчитана Дебаем и Хюккелем [10] применительно к растворам электролитов. Вклад дебаевской энергии в уравнение состояния плазмы и снижение потенциала ионизации атома традиционно считались главными проявлениями взаимодействия между зарядами; иногда говорят об эффектах неидеальности в плазме [11].

Параллельно с поляризацией кулоновское взаимодействие ведет к образованию связанных состояний — атомов. Это чисто квантовый эффект, по крайней мере для низколежащих уровней. Для изолированного атома число связанных состояний бесконечно велико, и формально вычисленная статистическая сумма атома расходится. Необходимо обрезать статистическую сумму на том или ином уровне, что приводит к зависимости результатов расчета от положения границы обрезания. Наличие такой зависимости противоречит правилу «книжной закладки» Онзагера, сформулированному им устно на конференции [12] (в дальнейшем правило Онзагера): как итоговый результат бухгалтерской книги не зависит от положения закладки, так и рас-

чет уравнения состояния плазмы не должен зависеть от места расположения границы, разделяющей связанные и свободные состояния. Правилу Онзагера полностью соответствуют результаты расчета уравнения состояния атомарной плазмы в большом каноническом ансамбле для ее «физической» модели — модели, в которой рассматривается взаимодействующая смесь электронов и ядер (протонов). В работах [13–16] строго получены первые члены разложения большого термодинамического потенциала (давления) по степеням активности. Учтены коллективные эффекты поляризации и парные эффекты во взаимодействии зарядов обоих знаков, в том числе приводящие к образованию атомов. Понятие «закладки» в физической модели просто отсутствует, и в этом смысле ее результаты полностью удовлетворяют правилу Онзагера. Именно такую реализацию правила Онзагера мы и используем в данной работе. К сожалению, область применимости «физической» модели ограничена только атомарной плазмой и не допускает строгого учета молекулярных ионов, молекул и так далее.

В практических расчетах доминируют «химические» модели плазмы, в которых для атомарной плазмы рассматривается смесь свободных электронов, ионов и атомов (возможно рассмотрение и более сложной номенклатуры частиц). Для конкретных расчетов, учитывающих кулоновское взаимодействие, необходимо задать две величины: статистическую сумму Σ_a атома и поправку к свободной энергии Гельмгольца Δf идеальной смеси, описывающую эффект взаимодействия между свободными электронами и ионами. Выбором этих величин и отличаются «химические» модели. В работе [17] рассмотрены более десятка вариантов «химических» моделей, используемых для расчета термодинамических функций и состава плазмы паров цезия. Вопрос о соблюдении правила Онзагера в то время вообще не ставился. И статистическая сумма, и поправка на взаимодействие свободных зарядов выбирались достаточно произвольно, исходя из вариантов, предложенных в литературе и пристрастий авторов. Естественно, результаты расчетов различались довольно существенно, а ведь ответ, в соответствии с правилом Онзагера, должен быть единственным.

В серии работ Эбелинга с сотрудниками [18, 19] впервые проанализированы некоторые «химические» модели плазмы и электролитов с использованием правила Онзагера, который рассматривается в виде принципа «стационарности». Решения для варьируемых параметров выбираются в области минимума свободной энергии Гельмгольца.

В настоящей работе сделана попытка объяснить эффект «идеальности» в «неидеальной» плазме с использованием результатов разложения уравнения состояния по степеням активностей в большом каноническом ансамбле — «физической» модели плазмы [13–16]. «Химические» модели плазмы строго выводятся из этих разложений и, следовательно, удовлетворяют правилу Онзагера, т.е. приводят к уравнению состояния, не зависящему от положения «закладки». Задавая то или иное выражение для статистической суммы атома (положение «закладки»), мы получаем «химические» модели, которые, хотя и различаются поправками к давлению, снижению потенциала ионизации, приводят к единому уравнению состояния (например, зависимости давления от плотности ядер), от положения «закладки» не зависящего. Статистическая сумма атома от положения «закладки» зависит. Передвигаясь по шкале энергий, она («закладка») меняет число связанных и свободных частиц в плазме, не меняя суммарного количества ядер. Меняются статистическая сумма атома (незначительно) и идеальный вклад в давление (существенно): если электрон-ионная пара связанная, то ее вклад в давление соответствует вкладу одной частицы, а если это пара не связанных частиц, то этот вклад соответствует вкладу двух частиц. Доля таких частиц невелика, но разность вклада в давление — это температура, умноженная на их концентрацию. Показано, что эти новые поправки в давление оказываются порядка дебаевской поправки, но с обратным знаком. На возможность такого эффекта было обращено внимание в работах [20, 21]. При этом зависимость давления от полной плотности не меняется, меняется соответствующая модель смеси — «химическая» модель. Если коротко, то цель работы состоит в том, чтобы продемонстрировать, что максимально «идеальная химическая» модель, удовлетворяющая правилу Онзагера, может быть выведена из точных разложений «физической» модели неидеальной плазмы.

2. ТРАДИЦИОННАЯ «ХИМИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ АТОМАРНОЙ ПЛАЗМЫ. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ

Рассмотрим в каноническом ансамбле реагирующую смесь, состоящую из N_e электронов, N_i ионов и N_a атомов (в дальнейшем атомарная плазма), находящуюся в объеме V при температуре $k_B T \equiv 1/\beta$. Свободная энергия Гельмгольца F в предположении, что газ атомов является идеальным, а свобод-

ные заряды слабо взаимодействуют друг с другом, имеет следующий вид [22]:

$$\beta F = -N_e \ln \left(\frac{2eV}{N_e \lambda_e^3} \right) - N_i \ln \left(\frac{eV}{N_i \lambda_i^3} \right) - N_a \ln \left(\frac{eV \Sigma_a}{N_a \lambda_a^3} \right) - (N_e + N_i) \Delta f, \quad (1)$$

где $\lambda_l = (2\pi\hbar^2\beta/m_l)^{1/2}$ и m_l — тепловая длина волны и масса частицы сорта $l = e, i, a$; Σ_a — внутренняя статистическая сумма атома; e — основание натурального логарифма; Δf — поправка к свободной энергии идеальноегазовой смеси в температурных единицах на одну частицу, обусловленная взаимодействием свободных электронов и ионов между собой. Соотношение (1) описывает систему зарядов в достаточно широкой области давлений и температур от идеального газа атомов до полностью ионизованной слабонеидеальной плазмы.

Для поправки Δf , учитывающей взаимодействие свободных зарядов, воспользуемся результатом дебаевской теории для энергии заряда в плазме:

$$E_D = \frac{q^2}{2R_D}, \quad (2)$$

где $R_D = 1/\sqrt{4\pi\beta q^2(n_e + n_i)}$ — дебаевский радиус, через который определяется плазменный параметр

$$\Gamma = \frac{\beta q^2}{R_D}. \quad (3)$$

Используя соотношение, связывающее Δf и E_D , получим

$$\Delta f = \int_T^\infty \frac{\Gamma/2}{T} dT = \frac{\Gamma}{3}. \quad (4)$$

В результате из определения $P = -\partial F/\partial V$ имеем

$$\beta P = (n_e + n_i) \left(1 - \frac{\Gamma}{6} \right) + n_a. \quad (5)$$

Концентрации электронов n_e , ионов n_i и атомов n_a связаны между собой формулой Саха, учитывающей снижение потенциала ионизации $\beta \Delta I = -\Gamma$:

$$n_a = n_i n_e \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_a e^{-\Gamma}. \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) соответствуют широко распространенной в литературе и учебниках [11] простейшей модели неидеальной плазмы. Мы назовем ее традиционной химической моделью (ТХМ).

Проблему расходимости статистической суммы атома мы обсудим ниже.

3. ОБРАЗОВАНИЕ АТОМОВ В БОЛЬШОМ КАНОНИЧЕСКОМ АНСАМБЛЕ. «ФИЗИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ

В большом каноническом ансамбле рассматривается система электронов и ядер (протонов), для которых заданы химические потенциалы μ_e, μ_i или активности $z_e = \exp(\beta\mu_e)/\lambda_e^3$, $z_i = \exp(\beta\mu_i)/\lambda_i^3$. Иногда говорят о «физической» модели плазмы, в которой предположение о наличии атомов не делается. Атомы и поправки на взаимодействие в непрерывном спектре возникают из квантовых групповых разложений для большого термодинамического потенциала (давления) в большом каноническом ансамбле. Разложение идет по степеням активностей $z_{e,i}$ — эффективных плотностей, которые затем входят из уравнений материального баланса.

Усилиями многих авторов [13–16] были получены первые члены разложения по степеням активностей электронов z_e и ионов z_i для давления P и полной концентрации частиц n . Для классической в непрерывном спектре плазмы с точностью до членов z^2 для P и n имеем

$$\beta P = (z_e + z_i) \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) + z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL}, \quad (7)$$

$$n = z_e \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) + z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL}, \quad (8)$$

где $\alpha = \beta q^2 \sqrt{4\pi\beta q^2(z_e + z_i)}$ — плазменный параметр, выраженный через активности $z_{e,i}$ (это важно), а

$$\Sigma_{PL} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \left(\exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) - 1 - \frac{\beta Ry}{k^2} \right), \quad (9)$$

где k — главное квантовое число. Возникающая в разложениях сходящаяся величина Σ_{PL} хорошо известна и носит название (не совсем корректное) статистической суммы Планка – Ларкина (PL). Она отличается от действительной статистической суммы атома наличием двух последних слагаемых в скобках. Эти слагаемые нарушают требование о бoльцмановском характере заселенностей связанных уровней в атомах. Такая структура Σ_{PL} возникла как результат взаимной компенсации вкладов от электрон-электронных, электрон-ионных и ион-ионных взаимодействий во второй групповой коэффициент. Как будет показано ниже, наличие именно этих двух слагаемых в конечных результатах (7), (8) и приводит к необычным, даже парадоксальным результатам для атомарной плазмы.

Соотношения (7), (8) носят название «физическая» модель плазмы и описывают состояния плаз-

мы от полностью ионизованной неидеальной плазмы до атомарного газа, т.е. фактически те же состояния, что и «химическая» модель (1). В «физической» модели при расчете уравнения состояния не требуется решать вопросы об ограничении статистической суммы и о снижении потенциала ионизации, поскольку не требуется решать задачу о расчете состава. Это обстоятельство и позволяет утверждать, что «физическая» модель (7), (8) полностью удовлетворяет правилу Онзагера.

4. «ХИМИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ ЭБЕЛИНГА – ЛИКАЛЬТЕРА (EL)

Выполним простейший переход к «химической» модели плазмы, исходя из соотношений (7), (8) и действуя аналогично работам [23–25].

Начнем с определения концентрации связанных состояний атомов n_a :

$$n_a = z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL}. \quad (10)$$

Из выражения (8) находим концентрацию свободных зарядов n_e и n_i :

$$n_{e,i} = n - n_a = z_{e,i} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (11)$$

Подставляя $z_{e,i} = n_{e,i}/(1 + \alpha/2)$ в (7), (8), получим

$$\begin{aligned} \beta P &= (n_e + n_i) \frac{1 + \alpha/3}{1 + \alpha/2} + n_a = \\ &= (n_e + n_i)(1 - \Delta p_{PL}) + n_a, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} n_a &= n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2(1 + \alpha/2)^2} \Sigma_{PL} = \\ &= n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL} \exp(-\beta \Delta I_{PL}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Delta p_{PL} = \frac{\alpha/6}{1 + \alpha/2}, \quad (14)$$

$$\beta \Delta I_{PL} = 2 \ln(1 + \alpha/2). \quad (15)$$

Полученная нами связь давления с полной концентрацией (уравнение состояния) является параметрическим. Чтобы завершить переход к «химической» модели, необходимо дополнить уравнения (12)–(15) соотношением, связывающим концентрации свободных частиц n_e, n_i с активностями z_e, z_i . Эту связь можно определить из уравнения (11). Сложим эти уравнения для электронных и ионных концентраций и умножим полученную сумму на ве-

личину $4\pi(\beta q^2)^3$. В результате получим уравнение, предложенное Ликальтером [26]:

$$\Gamma^2 = \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (16)$$

Будучи дополнена уравнениями электронейтральности $n_e = n_i$ и баланса $n = n_e + n_a$, «химическая» модель EL, определяемая соотношениями (12)–(16), полностью соответствует результатам «физической» модели (7), (8) и тем самым удовлетворяет правилу Онзагера.

5. «ХИМИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ ВОРОБЬЕВА – ХОМКИНА – ШУМИХИНА (VKS). РОЛЬ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМА В ПЛАЗМЕ

В литературе [1] обсуждаются десятки вариантов расчета статистической суммы атома, связанных с различными моделями реализации последнего уровня. Отметим характерные: последний уровень в дебаевском потенциале; штарковское слияние уровней; оценки предельных размеров орбиты связанного электрона (от длины Ландау до радиуса ячейки Вигнера – Зейтца) и т. д. Мы не будем обсуждать достоинства и недостатки этих моделей, а ограничимся в своих выкладках рассмотрением двух из них: статистической суммой Планка – Ларкина, в которой эффективно учитывается минимальное количество связанных состояний, и статистической суммой в приближении ближайшего соседа (nearest neighbor approximation, NNA), в которой их число предельно возможно:

$$\Sigma_a = \Sigma_{NNA} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) \omega_k(z_{e,i}). \quad (17)$$

В литературе, особенно астрофизической, это выражение для Σ_{NNA} весьма популярно [27]. Предполагается, что связанные состояния атома реализуются с вероятностью $\omega_k(z_{e,i})$, т. е. до тех пор, пока размер их орбиты не превосходит размера ячейки Вигнера – Зейтца для зарядов $R_i = (3/4\pi(z_e + z_i))^{1/3}$.

Формально нет никаких запретов повторить выкладки (12)–(16), но при этом использовать иное выражение для определения концентрации атомов:

$$n_a = z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}. \quad (18)$$

Заметим, что при таком подходе можно использовать и иные приближения для статистической суммы атома, меняя выражение для $\omega_k(z_{e,i})$.

Из (8) однозначно следует выражение для $n_e = n - n_a$, так что соотношение (8) выполняется:

$$n_e = n_i = z_e \left(1 + \frac{\alpha}{2} + z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL} - z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}\right). \quad (19)$$

Необходимо вычислить разность двух величин: статистических сумм в приближениях PL и NNA.

Способ расчета этой разности предложен в работе [28]. Рассмотрим статистическую сумму атома в приближении ближайшего соседа:

$$\Sigma_{NNA} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) \omega_k, \quad (20)$$

где

$$\omega_k = \exp\left(-\frac{4\pi}{3} r_k^3 (z_e + z_i)\right). \quad (21)$$

В (21) $r_k = \delta a_0 k^2$ — радиус орбиты связанного электрона с главным квантовым числом k . Величина $\delta = 1, 2$ соответствует квантовому и классическому определению размера орбиты. Нам представляется разумным использовать для возбужденных состояний классическое определение радиуса орбиты (по Ликальтеру [29]). Экспонента в (21) описывает пуассоновскую вероятность отсутствия свободных зарядов с концентрациями z_e, z_i внутри сферы радиуса r_k . Мы не акцентируем внимание на некоторых различиях концентраций свободных зарядов и активностей, поскольку, как будет видно из дальнейшего, для слабонеидеальной плазмы они практически совпадают. Выполним тождественное преобразование:

$$\Sigma_{NNA} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \left[\left(\exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) - 1 - \frac{\beta Ry}{k^2} \right) \omega_k + \left(1 + \frac{\beta Ry}{k^2} \right) \omega_k \right]. \quad (22)$$

В первом слагаемом в квадратных скобках действуют два обрезających фактора. В круглых скобках первый соответствует радиусу орбиты $r \sim \beta q^2$ — длине Ландау, а второй определяется величиной ω_k и соответствует радиусу орбиты $r \sim (z_e + z_i)^{-1/3}$. Поскольку длина Ландау в слабонеидеальной плазме всегда меньше среднего межчастичного расстояния, то первый фактор ($r \sim \beta q^2$) «сработает» раньше, и мы можем положить $\omega_k = 1$. Таким образом, первое слагаемое в (22) превращается в статистическую сумму PL (9). Во втором слагаемом в (22) мы можем выполнить суммирование непосредственно, а можем перейти от суммирования к интегрированию по k , поскольку главный вклад в эту сумму дают вы-

соковозбужденные уровни с большими квантовыми числами k ($dk \sim 1 \ll k$):

$$\Sigma_{NNA} = \Sigma_{PL} + \int_0^\infty dk 2k^2 \left(1 + \frac{\beta Ry}{k^2}\right) \omega_k = \Sigma_{PL} + \Delta\Sigma_a. \quad (23)$$

Второе слагаемое в (23) рассчитывается аналитически [22, 28]:

$$\Delta\Sigma_a = \frac{1}{\sqrt{3\delta^3}} \left(\frac{1}{4\pi(z_e + z_i)a_0^3} \right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\beta Ry}{3\sqrt{\delta}} \left(\frac{3}{4\pi(z_e + z_i)a_0^3} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \quad (24)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

6. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И ИОНИЗАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ VKS. ФОРМУЛА САХА

Возвращаясь к (19), из (7), (8) получим соотношения для концентрации свободных электронов и атомов, а также для уравнения состояния:

$$n_e = z_e \left(1 + \frac{\alpha}{2} - z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta\Sigma_a \right), \quad (25)$$

$$n_a = z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}, \quad (26)$$

$$\beta P = (z_e + z_i) \left(1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{z_e z_i}{z_e + z_i} \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta\Sigma_a \right) + z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}. \quad (27)$$

Заметим, что формулы (25)–(27) можно использовать и для других вариантов расчета статистической суммы. При этом точные асимптотические соотношения (7), (8) выполняются, следовательно, выполняется и правило Онзагера. Вводя обозначение $K(\alpha) = z_i(\lambda_e^3/2)\Delta\Sigma_a$ и учитывая, что $z_e = z_i$, получим

$$n_a = n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA} e^{-\Delta I}, \quad (28)$$

где $\Delta I = 2 \ln(1 + \alpha/2 - K(\alpha))$,

$$\beta P = (n_e + n_i)(1 - \Delta p) + n_a, \quad (29)$$

где

$$\Delta p = \frac{\alpha/6 - K(\alpha)/2}{1 + \alpha/2 - K(\alpha)}. \quad (30)$$

Величина $K(\alpha)$ вычислена в работе [22] и равна

$$K(\alpha) = \alpha \frac{\pi\sqrt{6}}{24\sqrt{\delta^3}} + \alpha^{5/3} \frac{\sqrt{2\pi}3^{1/6}}{48\sqrt{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right). \quad (31)$$

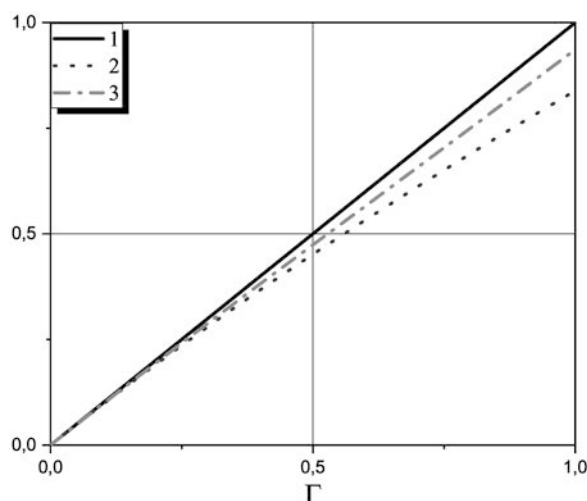


Рис. 1. Решение уравнения Ликальтера $\alpha(\Gamma)$ для $\delta = 2$: 1 — Γ ; 2 — EL-модель, уравнение (16); 3 — VKS-модель, уравнение (32)

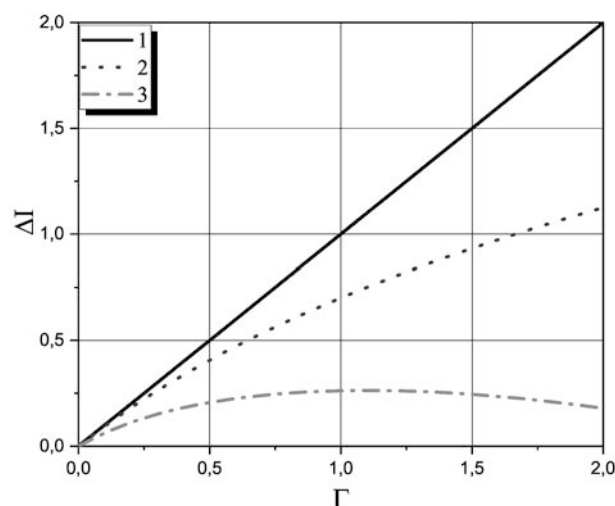


Рис. 2. Снижение потенциала ионизации $\beta\Delta I$ в зависимости от Γ для $\delta = 2$: 1 — модель ТХМ, уравнение (6); 2 — модель EL, уравнение (15); 3 — модель VKS, уравнение (28).

Уравнение Ликальтера (16) немного модифицируется:

$$\Gamma^2 = \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} - K(\alpha) \right). \quad (32)$$

«Химическая» модель VKS определяется соотношениями (28)–(32).

На рис. 1 сравниваются решения уравнения Ликальтера для EL- и VKS-моделей атомарной плазмы с величиной Γ . Близость решений $\alpha(\Gamma)$ к величине Γ означает близость концентраций свободных зарядов и активностей. Сразу заметим, что максимальную близость демонстрирует модель VKS.

На рис. 2, 3 показаны снижение потенциала ионизации и поправки к давлению как функции плазмен-

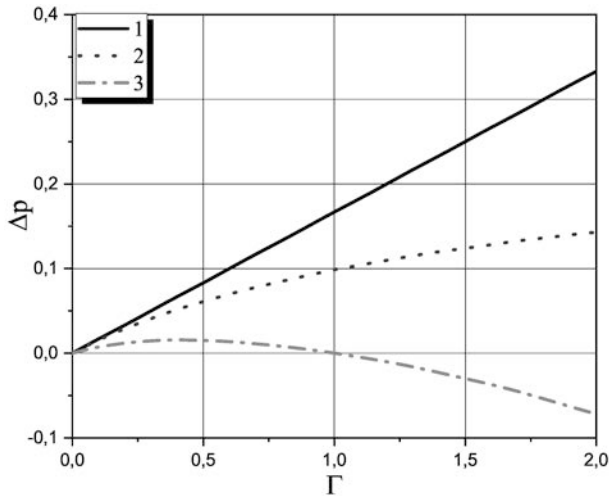


Рис. 3. Безразмерная поправка к давлению Δp в зависимости от Γ для $\delta = 2$: 1 — модель ТХМ, уравнение (6); 2 — модель EL, уравнение (14); 3 — модель VKS, уравнение (30)

ного параметра Γ .

В пределе $\alpha \rightarrow 0$ и для $\delta = 2$ получаем

$$\alpha \rightarrow \Gamma, \quad (33)$$

$$K(\alpha) \rightarrow \alpha \frac{\pi\sqrt{6}}{24 \cdot 2\sqrt{2}} \rightarrow \Gamma \frac{\pi\sqrt{6}}{48\sqrt{2}}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Delta I \rightarrow \alpha - 2K(\alpha) &= \Gamma \left(1 - \frac{\pi\sqrt{6}}{12 \cdot 2\sqrt{2}} \right) = \\ &= 0.773 \ (0.359)\Gamma, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\alpha}{6} - \frac{K(\alpha)}{2} = \frac{\Gamma}{6} \left(1 - \frac{\pi\sqrt{6}}{8 \cdot 2\sqrt{2}} \right) = \\ &= 0.66 \ (0.038) \frac{\Gamma}{6}. \end{aligned} \quad (36)$$

Величина $K(\alpha)$ описывает влияние возбужденных атомов. Сравнивая выражения (35), (36) с (5), (6), видим, что возбужденные атомы играют существенную роль при переходе от «физической» к «химической» модели, меняя численный коэффициент при параметре неидеальности. В скобках в (35) и (36) указаны величины поправок для $\delta = 1$.

«Химическая» модель VKS, определяемая соотношениями (28)–(32), полностью соответствует результатам «физической» модели (7), (8) и тем самым удовлетворяет правилу Онзагера, как и «химическая» модель EL (12)–(16). Уравнения состояния для моделей EL и VKS будут совпадать, но составы будут разные.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Формулы (35), (36) описывают необычный результат «химической» модели VKS: дебаевское снижение потенциала ионизации $\Delta I_D = \Gamma$ и поправка к давлению $\Delta p_D = \Gamma/6$ существенно уменьшаются.

Какую же «химическую» модель выбрать. Если речь идет о расчете уравнения состояния, то модели EL и VKS идентичны и дают одинаковые результаты. При обработке экспериментов использовалась традиционная «химическая» модель (ТХМ) идеальной плазмы ($\delta f = 0$). Эксперименты, особенно для плазмы паров цезия, показали явное преимущество «химической» модели идеальной плазмы. Проведенный нами анализ показывает, что максимальную «степень идеальности» демонстрирует модель VKS, что позволяет говорить о согласии с данными экспериментов [2–7] и о найденном объяснении эффекта «идеальности» неидеальной плазмы.

Рассмотрим слабонеидеальную плазму, «почти» полностью ионизованную ($\beta R_y < 1$), в которой присутствуют только возбужденные атомы n_a^* , их доля невелика и описывается вторым слагаемым статистической суммы (23):

$$n_a^* = n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta \Sigma_a. \quad (37)$$

Считая $n_a^* \ll n$, ищем решение (37) в виде

$$n_e = n(1 - \theta), \quad (38)$$

$$n_a^* = n - n_e = n\theta, \quad (39)$$

$$\theta = (1 - \theta)^2 n \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta \Sigma_a. \quad (40)$$

Для $\theta \ll 1$ получаем

$$\begin{aligned} \theta &= n \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta \Sigma_a = \Gamma \frac{\pi\sqrt{6}}{24\sqrt{\delta^3}} + \\ &+ \Gamma^{5/3} \frac{\sqrt{2\pi} 3^{1/6}}{48\sqrt{\delta}} \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) = K(\Gamma). \end{aligned} \quad (41)$$

Запишем выражение для давления смеси свободных электронов, ионов и возбужденных атомов, используя соотношение (30) для поправки к давлению $\beta \Delta p = \Gamma/6 - K(\Gamma)/2$.

Учитывая, что $\alpha \rightarrow \Gamma$ при $\alpha \rightarrow 0$, получим

$$\beta P = (n_e + n_i) \left(1 - \frac{\Gamma}{6} + \frac{K(\Gamma)}{2} \right) + n_a. \quad (42)$$

Подставляя (38), (39) в (42), в линейном по Γ приближении ($\theta \sim \Gamma$) получим

$$\beta P = 2n(1 - \theta) \left(1 - \frac{\Gamma}{6} + \frac{\theta}{2} \right) + n\theta \cong 2n \left(1 - \frac{\Gamma}{6} \right). \quad (43)$$

Оказывается, что уравнение состояния полностью ионизованной однокомпонентной неидеальной плазмы полностью соответствует результатам модели VKS для смеси свободных зарядов и возбужденных атомов. Так что, формально, в полностью ионизованной неидеальной плазме присутствует вклад возбужденных атомов и, следовательно, полностью ионизованной ее считать не вполне корректно.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе уравнения состояния «физической» модели плазмы выполнено исследование влияния возбужденных состояний атома на уравнение состояния и ионизационного равновесия. Сделан вывод о завышенном вкладе дебаевского притяжения в традиционной «химической» модели. Для модели VKS полученные соотношения для снижения потенциала ионизации и уравнения состояния существенно отличаются от общепринятых выражений. Полученные результаты качественно объясняют наблюдаемый в экспериментах [2–7] эффект «идеальности» без привлечения дополнительных эффектов отталкивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, И. Т. Якубов, *Физика неидеальной плазмы*, Физматлит, Москва (2010).
2. В. Е. Фортов, А. А. Леонтьев, А. Н. Дремин, В. К. Грязнов, ЖЭТФ **71**, 225 (1976).
3. В. А. Сеченов, Э. Е. Сон, О. Е. Щекотов, ТВТ **15**, 411 (1977).
4. А. В. Бушман, Б. А. Ломакин, А. В. Сеченов, В. Е. Фортов, О. Е. Щекотов, И. И. Шарипджанов, ЖЭТФ **69**, 1624 (1975).
5. А. Т. Кунавин, А. В. Кириллин, Ю. С. Коршунов, ТВТ **12**, 1302 (1974).
6. И. Я. Дихтер, В. А. Зейгарник, ТВТ **15**, 471 (1977).
7. И. Я. Дихтер, В. А. Зейгарник, ТВТ **15**, 196 (1977).
8. Г. Э. Норман, А. Н. Старостин, ТВТ **8**, 413 (1970).
9. В. К. Грязнов, М. В. Жерноклетов, В. Н. Зубарев, И. Л. Иосилевский, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **78**, 573 (1980).
10. P. Debye and E. Hückel, Phys. Z. **24**, 185 (1923).
11. Л. П. Кудрин, *Статистическая физика плазмы*, Атомиздат, Москва (1974).
12. L. Onsager, in *Proc. of the Conference on Electrochemistry*, Montpellier, France (1998).
13. А. А. Веденов, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **36**, 1139 (1959).
14. W. Ebeling, W. D. Kraeft, and D. Kremp, *Theory of Bound States and Ionization Equilibrium in Plasmas and Solids*, Akademie-Verlag, Berlin (1976).
15. Ю. Г. Красников, ЖЭТФ **33**, 516 (1977).
16. А. Н. Старостин, В. К. Рерих, ЖЭТФ **127**, 186 (2005).
17. В. Е. Фортов, Б. Н. Ломакин, Ю. Г. Красников, ТВТ **9**, 869 (1971).
18. W. Ebeling and S. Hilbert, Eur. Phys. J. D **20**, 93 (2002).
19. W. Ebeling, S. Hilbert, and H. Krienke, J. Mol. Liq. **96–97**, 409 (2002).
20. O. Theimer and T. Wright, Phys. Rev. **180**, 308 (1969).
21. В. С. Воробьев, А. Л. Хомкин, Физика плазмы **3**, 885 (1977).
22. А. Л. Хомкин, И. А. Муленко, ТВТ **41**, 327 (2003).
23. W. Ebeling and G. P. Bartsch, Beitr. Plasmaphys. **5**, 393 (1971).
24. W. Ebeling and R. Sändig, Ann. der Phys. **28**, 269 (1973).
25. W. Ebeling, H. Reinholz, and G. Röpke, Contrib. Plasma Phys. **61**, e202100085 (2021).
26. А. А. Ликальтер, ЖЭТФ **56**, 240 (1969).
27. W. Dappen, D. Mihalas, D. G. Hummer, and B. W. Mihalas, Astrophys. J. **332**, 261 (1988).
28. И. А. Муленко, А. Л. Хомкин, А. С. Шумихин, ТВТ **42**, 835 (2004).
29. А. А. Ликальтер, УФН **170**, 831 (2000).

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В ЖЭТФ публикуются статьи, содержащие изложение оригинальных научных результатов, не опубликованных и не предназначенных к публикации в другом месте. В отдельных случаях по заказу редколлегии публикуются актуальные статьи обзорного характера.

Редакция ЖЭТФ принимает статьи как на русском, так и на английском языках. С 1 сентября 2016 г. по требованию МАИК статьи, поступившие в редакцию на английском языке, будут переводиться на русский язык для русскоязычной версии журнала.

Редакция рекомендует направлять статьи в электронном виде по электронной почте или загружать их в режиме «on-line» через сайт журнала <http://jetp.ras.ru/>

Издательство требует от авторов при публикации статьи заключения договора о передаче авторских прав. Заполненные и подписанные договоры (форма договоров отправляется авторам ВМЕСТЕ С КОРРЕКТУРОЙ) могут быть представлены лично или по электронной почте в отсканированном виде (PDF файлы).

По всем вопросам можно обращаться в редакцию.

Адрес: 117334, Москва, ул. Косыгина, д. 2, Редакция ЖЭТФ

E-mail: jetp@kapitza.ras.ru Телефон: +7 (499) 137 56 22

Главный редактор *А. И. СМЕРНОВ*

Редколлегия:

д-р физ.-мат. наук С. О. АЛЕКСЕЕВ, канд. физ.-мат. наук Ю. С. БАРАШ,
д-р физ.-мат. наук И. Г. ЗУБАРЕВ,
д-р физ.-мат. наук Е. И. КАЦ (зам. гл. редактора, представительство ЖЭТФ во Франции),
д-р физ.-мат. наук В. П. КРАЙНОВ, д-р физ.-мат. наук А. С. МЕЛЬНИКОВ
д-р физ.-мат. наук М. С. ПШИРКОВ акад. М. В. САДОВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук С. С. СОСИН, член-корр. РАН С. В. ТРОИЦКИЙ (зам. гл. редактора),
д-р физ.-мат. наук А. В. ФИЛИППОВ, член-корр. РАН И. А. ФОМИН (зам. гл. редактора),

Редакционный совет:

акад. А. Ф. АНДРЕЕВ (председатель),
член-корр. РАН В. В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук В. С. ПОПОВ

Зав. редакцией Н. Г. Церевитинова
Редакторы: Л. Б. Кульчицкая, Т. Г. Орехова, Т. Н. Смирнова