

ЧЕРНАЯ ДЫРА И ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ В СИНХРОННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Б. Э. Мейерович ^{a*}

^a Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 декабря 2022 г.,
после переработки 16 декабря 2022 г.
Принята к публикации 22 декабря 2022 г.

Статическое состояние черной дыры во взаимодействии с темной материей рассмотрено в синхронной системе координат. Также как и в координатах Шварцшильда, в синхронных координатах существует регулярное статическое сферически симметричное решение системы уравнений Эйнштейна и Клейна–Гордона, описывающее состояние материи, предельно сжатой собственным гравитационным полем. Также нет ограничения на массу. Также существуют два гравитационных радиуса, с граничными условиями на которых, решения не являются единственными. В отличие от координат Шварцшильда, в синхронных координатах определитель метрического тензора и компонента $g^{11}(r)$ не обращаются в нуль на гравитационных радиусах. В синхронных координатах, в отличие от координат Шварцшильда, в сферическом слое между гравитационными радиусами сигнатура метрического тензора не нарушена. В синхронных координатах уравнения Эйнштейна и Клейна–Гордона сводятся к системе второго (а не четвертого) порядка. Решения получены аналитически, так что численных расчетов не потребовалось. Определен гравитационный дефект массы в модели $\lambda\psi^4$. Полная масса материи оказывается вдвое больше массы Шварцшильда, определяемой удаленным наблюдателем при сопоставлении с гравитацией Ньютона.

DOI: 10.31857/S004445102305005X
EDN: BDKUFJ

1. ВВЕДЕНИЕ. В КООРДИНАТАХ ШВАРЦШИЛЬДА

При рассмотрении гравитационного поля, создаваемого сферически симметричной материей, принято исходить из метрики Шварцшильда [1]:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^{2F_0} (dx^0)^2 - e^{2F_1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

В этих координатах на расстоянии от центра

$$\rho(r) = \int_0^r e^{F_1(x)} dx$$

длина окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ равна $2\pi r$. Экспоненциальное представление $g_{11} = -e^{2F_1}$ и

$g_{00} = e^{2F_0}$ фиксирует знаки компонент метрического тензора $g_{00} > 0$, $g_{11} < 0$ и детерминанта $g = \det g_{ik} < 0$. Мы все строго следовали гипотезе Эйнштейна. Вот цитата из его статьи [2]: "Если окажется, что в каком-нибудь месте четырехмерного континуума $\sqrt{-g}$ обращается в нуль, то это будет означать, что в этом месте конечному координатному объему соответствует бесконечно малый естественный объем. Будем считать, что этого нигде нет. В таком случае g не может менять свой знак; мы примем, в соответствии со специальной теорией относительности, что g всегда имеет конечное и отрицательное значение. Это допущение является некоторой гипотезой о физической природе рассматриваемого континуума и в то же время правилом, касающимся выбора системы координат." Конец цитаты.

Обращение детерминанта метрического тензора в нуль не обязательно связано с наличием физической особенности. Это может быть спецификой выбранной системы отсчета. Например, в плоской сферической метрике

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

* E-mail: meierovich@mail.ru

определитель

$$\det g_{ik} = -r^4 \sin^2 \theta$$

обращается в нуль в центре $r = 0$ и на полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. А в декартовых координатах везде $\det g_{ik} = -1$, так что физической особенности ни в центре, ни на полюсах нет.

Полагая в метрике (1)

$$g_{11} = -e^{2F_1},$$

мы фиксируем знак компоненты g_{11} . Тем самым, не заботясь о наличии или отсутствии особенности, мы исключаем из рассмотрения возможность $g_{11} > 0$ как якобы нефизическую. При этом система координат оказывается неполной [3–5]. Возникает критическая масса M_{cr} (для нейтронных звезд порядка массы Солнца), так что при $M > M_{cr}$ регулярных статических решений уравнений Эйнштейна не существует [6–8]. Решение Шварцшильда [1]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2)$$

не является регулярным в центре $r = 0$, хотя и описывает гравитационное поле в вакууме вдали от сферически симметричной материи независимо от массы

$$M = \frac{c^2}{2k} r_g,$$

наблюдаемой удаленным наблюдателем. При $M < M_{cr}$ метрика (2) асимптотически совпадает с регулярным решением в статье [5] при $r \gg r_g$.

Считается, что объекты с массой больше критической подвержены неограниченному сжатию [9]. Отсутствие в метрике (1) статических решений для объектов с массой больше критической не вяжется с существованием в центре нашей галактики Млечный Путь объекта с массой на 7 порядков больше массы Солнца [10]. Неограниченно сжимающиеся объекты в центрах галактик принято называть черными дырами. Черные дыры в центрах галактик, как и сами галактики, существуют столь же долго, сколько существует Вселенная. Если считать, что сжатие безостановочно, то в центрах галактик мы встречаемся с сингулярностью вопреки гипотезе Эйнштейна, что этого нигде нет. Если учесть, что в процессе коллапса с ростом давления происходят химические реакции превращения нейтронов в более "элементарные частицы", то это может замедлить и даже остановить сжатие. Чтобы найти регулярное статическое решение без ограничения массы,

описывающее состояние материи к которому может привести коллапс, пришлось отказаться от фиксирующего знак представления $g_{11} = -e^{2F_1}$. Достаточно ограничиться более слабым условием регулярности: все инварианты метрического тензора конечны. Компоненты метрического тензора g_{ik} и определитель $\det g_{ik}$, а также их знаки, не инвариантны относительно преобразований координат.

При поиске статического решения уравнений Эйнштейна, описывающего то состояние, к которому может привести гравитационный коллапс, естественно считать, что гравитационное взаимодействие является доминирующим, но не нарушающим квантовых свойств материи. То есть бозоны остаются бозонами, а фермионы — фермионами. В соответствии с принципом исключительности Паули, при нулевой температуре в равновесии фермионы поодиночке заполняют все квантовые состояния, начиная от основного и кончая уровнем Ферми, занимаемого последним фермионом. При массе $M < M_{cr}$ в статическом состоянии гравитационное сжатие скомпенсировано упругостью фермионов. При $M > M_{cr}$ упругости фермионов не достаточно чтобы сдерживать силу гравитационного сжатия. Для вырожденного релятивистского ферми-газа критическая масса $M_{crf} \sim M_{Pl}^3/m_f^2$ [8]. Масса Планка $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/k} = 2.177 \cdot 10^{-5}$ г, m_f — масса фермиона, k — гравитационная постоянная. Для нейтронных звезд (масса нейтрона $m_f = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г) критическая масса $M_{crf} \sim 10^{33}$ г — порядка массы Солнца.

Статическое состояние бозонной материи энергетически более предпочтительно, чем фермионной. В отличие от фермионов, все бозоны в равновесии при нулевой температуре находятся в основном состоянии. Это ультра квантовое состояние материи называется конденсатом Бозе-Эйнштейна. В равновесии концентрации частиц, вступающих в реакции превращения одних в другие, зависят от температуры и давления, и не зависят от каналов реакции ([11], §101). Если исходить из современной Стандартной Модели элементарных частиц [12], то в состоянии равновесия доминирующими могут быть массивные Z и W бозоны, скалярный бозон Хиггса, а также бозонные квазичастицы спаренных фермионов (эффект Купера [13]). Волновой функцией конденсата нейтральных бозонов является классическое скалярное поле ([14], §30). Лагранжиан L комплексного скалярного поля ψ имеет вид

$$L = g^{ik} \psi_{,i}^* \psi_{,k} - U(\psi^* \psi).$$

При большой массе конденсата в разложении потенциала

$$U(|\psi|^2) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^4 + \dots \quad (3)$$

основным является первый член — источник гравитации, m — масса покоя бозона. Если в потенциале (3) оставить только первый член разложения, то это значит, что рассматривается конденсат, состоящий из идеального газа невзаимодействующих бозонов. Второй и следующие члены — поправки, учитывающие негравитационные взаимодействия бозонов, включая упругость конденсата. Учет только первых двух членов разложения в потенциале (3) с $\lambda = \text{const}$ — это феноменологическая модель. Ее можно назвать " $\lambda\psi^4$ ".

Равновесие гравитирующего скалярного поля рассматривалось в ряде работ применительно к черным дырам и гипотетическим бозонным звездам, см. [15–19] и ссылки в них. Как и у фермионов, с ограничением $g_{11} = -e^{2F_1}$ равновесие гравитирующего вырожденного бозе газа существует, только если масса M конденсата меньше критической массы $M_{crb} \sim M_{Pl}^2/m_b$ [20]. Для массивных бозонов Стандартной Модели (с массой покоя m_b около 100 ГэВ/с²) критическая масса конденсата бозонов $M_{crb} \sim 10^{12}$ г. Это всего лишь порядка миллиона тон.

Я позволил себе проверить, что получится, если отказаться от ограничения $g_{11} = -e^{2F_1}$, фиксирующего знак минус. Оказывается, без этого ограничения статическое решение системы уравнений Эйнштейна и Клейна–Гордона с массой $M > M_{cr}$ существует [21]. В координатах Шварцшильда в этом решении имеют место два реальных гравитационных радиуса. Метрическая компонента $g^{rr}(r)$ дважды меняет знак: при $r = r_g$ внутри конденсата, и при $r = r_h > r_g$ на его поверхности. В сферическом слое $r_g < r < r_h$ компонента $g^{rr}(r) > 0$, и сигнатурой метрики становится $(+, +, -, -)$.

Из уравнения Эйнштейна ([22], уравнение (100.6))

$$(g^{rr})' + (1 + g^{rr})/r = \kappa r T_0^0 \quad (4)$$

следует, что если сфера $r = r_h$ является поверхностью конденсата, то есть плотность энергии $\varepsilon(r) = T_0^0(r) \neq 0$ при $r < r_h$ и $T_0^0(r) = 0$ при $r \geq r_h$, то

$$g^{rr}(r_h) = 0, \\ \frac{dg^{rr}(r_h)}{dr} = -\frac{1}{r_h}.$$

Из другого уравнения Эйнштейна ([22], уравнение (100.4))

$$g^{rr}(1 - r(\lg g^{00})') + 1 = \kappa r^2 T_r^r \quad (5)$$

видно, что поскольку $g^{rr}(r_h) = 0$, давление

$$p(r_h) = -T_r^r(r_h) = -1/\kappa r_h^2$$

не обращается в нуль на поверхности конденсата. Отрицательное давление означает, что гравитационные силы направлены на сжатие газа бозонов, а не на разлет.

На сфере $r = r_h$ черная дыра граничит с темной материей. Наблюдаемые проявления темной материи, такие как кривые вращения галактик, адекватно описываются продольным векторным полем [23]. Ковариантная дивергенция векторного поля — это скаляр, удовлетворяющий уравнению Клейна–Гордона также как и скалярная волновая функция бозе-конденсата, но только с другой массой кванта. Можно пошутить, что дивергенция продольного поля темной материи — это волновая функция бозе-конденсата, вывернутая наизнанку. Условие непрерывности давления на границе раздела позволило определить зависимость скорости на плато вращения галактики от массы черной дыры (формула (68) в [21]).

Если в потенциале (3) оставить только первый член разложения (приближение идеального бозе-газа без учета упругости), то волновая функция конденсата расходится логарифмически в центре [21]. Регулярное в центре статическое решение системы уравнений Эйнштейна и Клейна–Гордона с массой $M > M_{cr}$ существует в модели $\lambda\psi^4$ при наличии баланса упругости и плотности конденсата [24]. В координатах Шварцшильда система уравнений Эйнштейна и Клейна–Гордона, приведенная к каноническому виду, состоит из четырех уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных (уравнения (21)–(24) в работе [24]). Правые части этих уравнений не удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности на сферах $r = r_g$ и $r = r_h$, где $g^{rr} = 0$. Решение с граничными условиями регулярности в центре $r = 0$ существует, но оно является единственным только в интервале $0 \leq r < r_g$. Решение с граничными условиями на сферах $r = r_g$ и $r = r_h$ не являются единственными. Эта свобода позволяет найти решение с любой массой $M > M_{cr}$, а также обеспечить баланс на границе черной дыры с темной материей.

В координатах Шварцшильда в модели $\lambda\psi^4$ статические состояния черной дыры определяются дву-

мая свободными параметрами. Один из них λ характеризует упругость конденсата. λ однозначно задает плотность конденсата в центре и внутренний гравитационный радиус r_g . Внутри сферы $r < r_g$ уравнением состояния конденсата является

$$p = -\varepsilon/3, \quad (6)$$

а плотность энергии ε и метрическая компонента g^{00} не зависят от r . Второй свободный параметр обеспечивает существование регулярного статического решения с произвольной массой M в диапазоне $M_{cr} < M < \infty$ [25].

2. В синхронной системе координат

Система отсчета, в которой $g_{00} = 1$, $g_{0\alpha} = 0$, называется синхронной ([22], §97). В этом параграфе показано, что, с одной стороны, перейти к синхронной системе отсчета можно в любом пространстве-времени. С другой стороны, утверждается, что заполняющая пространство материя не может, вообще говоря, покоиться относительно синхронной системы отсчета. Исключение может иметь место лишь в частных случаях. Это утверждение основано на том, что в синхронной системе отсчета в статике компонента тензора Риччи $R_0^0 = 0$, а выражение в правой стороне уравнения Эйнштейна

$$R_0^0 = \kappa (T_0^0 - T/2) = \kappa (\varepsilon + 3p)/2 \quad (7)$$

при любом распределении материи положительно. Обратим внимание, что давление p положительно, когда материя стремится к расширению, и отрицательно, когда материя стремится к сжатию. С точки зрения, изложенной в [22], §97, состояние конденсата, сжатого до ультрарелятивистского предела (6) собственным гравитационным полем, можно рассматривать как "исключение в частном случае".

Еще со времен Эддингтона [26] и Лемэтра [27] известно, что гравитационный радиус r_g , на котором в метрике Шварцшильда компонента $g^{rr}(r_g) = 0$, не является физической особенностью. В задаче 4 к §100 в [22] приведено преобразование метрики Шварцшильда (2) к конформно-евклидовому виду. Не единственность решения системы уравнений Эйнштейна и Клейна–Гордона с граничными условиями именно на гравитационных радиусах $r = r_g$ и $r = r_h$, где $g^{rr}(r) = 0$ является особенностью метрики Шварцшильда [25]. В конформно-евклидовом виде $g^{rr}(r)$ в нуль не обращается.

В синхронной системе отсчета статическая сферически симметричная метрика

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{2F_1(r)} dr^2 - e^{2F_2(r)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (8)$$

содержит две функции $F_1(r)$ и $F_2(r)$, зависящие от одной координаты r , при этом

$$\int_0^r e^{F_1(r)} dr$$

— расстояние от центра. В отличие от метрики Шварцшильда (1), длина центральной окружности равна не $2\pi r$, а $2\pi e^{F_2(r)}$. В синхронной системе отсчета важную роль играют радиусы $r = r_g$ и $r = r_h$, с граничными условиями на которых решения системы уравнений Эйнштейна и Клейна–Гордона не являются единственными. Однако теперь компонента $g^{11}(r)$ не обращается в нуль на сферах $r = r_g$ и $r = r_h$. Поэтому, как это привычно всем, в метрике (8) я могу использовать экспоненциальные представления

$$g_{11}(r) = -e^{2F_1(r)}, \quad g_{22}(r) = -e^{2F_2(r)}.$$

Подстановкой

$$dx = e^{F_1(r)} dr, \quad x(r) = \int_{r_0}^r e^{F_1(r)} dr, \quad F_2(r) = F_2(x(r)) \quad (9)$$

метрика (8) приводится к виду, содержащему всего одну функцию $F_2(x)$:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 - e^{2F_2(x)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (10)$$

В метрике (10) координата x является истинным расстоянием от центра. Тензор Риччи диагональный:

$$\begin{aligned} R_0^0 &= 0, \\ R_1^1 &= 2(F_2'^2 + F_2''), \\ R_2^2 &= R_3^3 = 2F_2'^2 + F_2'' - e^{-2F_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В независимом от времени гравитационном поле энергия является интегралом движения. Волновая функция конденсата бозонов в состоянии с определенной энергией E на частицу

$$\psi_E(x^0, x) = e^{iEx^0/\hbar c} \psi(x)$$

удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$\frac{1}{\sqrt{-\det g_{ik}}} \left(\sqrt{-\det g_{ik}} g^{lm} \psi_{,l} \right)_{;m} = -\frac{\partial U}{\partial |\psi|^2} \psi.$$

Радиальная часть $\psi(x)$ волновой функции $\psi_E(x^0, x)$ подчиняется уравнению

$$\psi'' + 2F_2'\psi' = \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \lambda |\psi|^2 - \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^2 \right] \psi. \quad (12)$$

В отличие от метрики Шварцшильда, в этом уравнении коэффициент при старшей производной (равный единице) нигде не обращается в ноль.

Лагранжиан скалярного поля

$$L = g^{ik} \psi_{,i}^* \psi_{,k} - U(\psi^* \psi)$$

не зависит от производных метрического тензора g_{ik} . Тензор энергии-импульса конденсата легко вычисляется по формуле

$$T_{ik} = -g_{ik}L + 2\partial L/\partial g_{ik}.$$

Получим

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \left(\frac{E^2 + m^2 c^4}{(\hbar c)^2} + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^2 \right) |\psi|^2 + |\psi'|^2, \\ T_1^1 &= \left(-\frac{E^2 - m^2 c^4}{(\hbar c)^2} + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^2 \right) |\psi|^2 - |\psi'|^2, \\ T_2^2 &= T_3^3 = \left(-\frac{E^2 - m^2 c^4}{(\hbar c)^2} + \frac{1}{2} \lambda |\psi|^2 \right) |\psi|^2 + |\psi'|^2. \end{aligned}$$

В синхронной системе отсчета $R_0^0 = 0$ (11). Поэтому удобно работать с уравнениями Эйнштейна в представлении

$$R_k^i = \kappa \left(T_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i T \right), \quad \kappa = \frac{8\pi}{c^4} k, \quad (13)$$

$k = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$ — гравитационная постоянная. Поскольку $R_0^0 = 0$ (11), из уравнения (13) следует:

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T = \left(\frac{2E^2 - m^2 c^4}{(\hbar c)^2} - \frac{1}{2} \lambda |\psi|^2 \right) |\psi|^2 = 0. \quad (14)$$

В формуле (14) E^2 , λ и $m^2 c^4$ постоянные величины. Поэтому волновая функция конденсата ψ тоже является константой:

$$\psi = \text{const}, \quad \psi' = 0. \quad (15)$$

Из соотношений (12) и (14) с учетом (15) определяется энергия бозона E в связанном основном состоянии и баланс упругости Λ с плотностью $|\psi|^2$ конденсата:

$$E^2 = \frac{1}{3} m^2 c^4, \quad \Lambda |\psi|^2 = -\frac{2}{3}. \quad (16)$$

$\Lambda = (\hbar/mc)^2 \lambda$ — параметр, характеризующий упругость конденсата в модели $\lambda\psi^4$. С учетом (16), тензор энергии-импульса конденсата

$$T_0^0 \equiv \varepsilon = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\psi|^2, \quad (17)$$

$$T_k^i \equiv -\delta_k^i p = \frac{1}{3} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\psi|^2, \quad i > 0,$$

соответствует уравнению состояния $p = -\varepsilon/3$ материи, сжатой ее собственным гравитационным полем до ультрарелятивистского предела. Уравнения Эйнштейна (13) с тензором Риччи (11) и тензором энергии-импульса (17)

$$2(F_2'^2 + F_2'') = -2\kappa |p|, \quad (18)$$

$$2F_2'^2 + F_2'' - e^{-2F_2} = -2\kappa |p| \quad (19)$$

определяют метрическую функцию $F_2(x)$. Эти уравнения не независимы. Исключаем F_2'' , а также вычитаем (19) из (18). Получаем

$$F_2'^2 - e^{-2F_2} = -\kappa |p|, \quad (20)$$

$$F_2'' + e^{-2F_2} = 0. \quad (21)$$

Поскольку $\psi = \text{const}$ (15), плотность энергии ε и давление p (17) тоже константы. Так что уравнение (21) — это продифференцированное уравнение (20).

Умножением на e^{2F_2} уравнение (20) приводится к виду

$$\frac{de^{F_2}}{dx} = \sqrt{1 - \kappa |p| (e^{F_2})^2}. \quad (22)$$

Частная производная

$$\frac{\partial \sqrt{1 - \kappa |p| (e^{F_2})^2}}{\partial e^{F_2}}$$

терпит разрыв при $e^{F_2} = (\kappa |p|)^{-1/2}$. Согласно теореме существования и единственности (см. [28], §3) $e^{F_2} = (\kappa |p|)^{-1/2}$ является решением уравнения (22). Но оно не единственное:

$$e^{F_2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa |p|}} \sin \left(\sqrt{\kappa |p|} (x - x_0) \right)$$

тоже является решением уравнения (22), здесь x_0 — константа интегрирования. Компоненте $g_{22}(x) = -e^{2F_2(x)}$ метрики (10) присущи два решения: независимая от x константа

$$g_{22}(x) = -(\kappa |p|)^{-1}$$

и осциллирующая функция

$$g_{22}(x) = -(\kappa |p|)^{-1} \sin^2 \left(\sqrt{\kappa |p|} (x - x_0) \right),$$

которые периодически совпадают при

$$x = x_0 + (\kappa |p|)^{-1/2} \pi (n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В соответствии с (9), в общем решении для метрики (8) осциллирующее решение

$$g_{22}(r) = -(\kappa |p|)^{-1} \sin^2 \left(\sqrt{\kappa |p|} \int_{r_0}^r e^{F_1(x)} dx \right) \quad (23)$$

содержит произвольную функцию $F_1(x)$, r_0 — константа интегрирования. При $-p = \varepsilon/3 \rightarrow 0$ (в вакууме) решение (23) устанавливает в метрике

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{11}(r) dr^2 + g_{22}(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

связь $g_{11}(r)$ с $g_{22}(r)$:

$$g_{11} = \frac{1}{4} \frac{(g'_{22})^2}{g_{22}}, \quad g_{22}(r) = - \left(\int_{r_0}^r \sqrt{-g_{11}(x)} dx \right)^2.$$

Одна из этих двух функций произвольная.

Как и в координатах Шварцшильда, условием регулярности в центре является $g_{11}(0) = -1$. Из формулы (23) видно, что при этом условии $g_{22}(r) \rightarrow -r^2$ при $r \rightarrow 0$, и отношение длины окружности к радиусу стремится к 2π .

В конкретном случае $F_1(x) = 0$ решением, регулярным в центре, является

$$g_{22}(r) = -e^{2F_2(r)} = -\frac{1}{\kappa |p|} \sin^2 \left(\sqrt{\kappa |p|} r \right). \quad (24)$$

Оно является единственным только в интервале $0 \leq r < r_g$. Здесь

$$r_g = \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa |p|}} \quad (25)$$

— внутренний гравитационный радиус. В области $r > r_g$ уравнению (22) с граничным условием $e^{2F_2(r_g)} = 1/\kappa |p|$ удовлетворяют оба решения,

$$g_{22}(r) = -\frac{1}{\kappa |p|} \sin^2 \left(\sqrt{\kappa |p|} r \right)$$

и

$$g_{22}(r) = -\frac{1}{\kappa |p|}.$$

Решение в синхронной системе отсчета

$$g_{22}(r) = -e^{2F_2(r)} = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa |p|} \sin^2 \left(\sqrt{\kappa |p|} r \right), & r < r_g, \\ -\frac{1}{\kappa |p|}, & r \geq r_g, \end{cases} \quad (26)$$

— это то же аналитическое решение, что и формула (41) в [24] в координатах Шварцшильда. В этом можно убедиться, положив в формуле (23) $g_{22}(r) = -r^2$ и разрешить это уравнение относительно $e^{F_1(x)}$. Получится

$$g^{11}(x) = -e^{-2F_1(x)} = -1 + \frac{\kappa \varepsilon}{3} x^2,$$

как в формуле (41) в [24] (с точностью до обозначений).

И в метрике Шварцшильда, и в синхронной метрике, внутренний гравитационный радиус r_g — это граница центральной области, в которой решение является единственным и независимым от массы всего конденсата. В области $r > r_g$ решение с граничным условием $g_{22}(r_g) = (\kappa |p|)^{-1}$ не является единственным. Эта неоднозначность позволяет выбрать решение, соответствующее данной массе конденсата. Разница состоит в том, что в координатах Шварцшильда в точках ветвления r_g и r_h метрическая компонента $g^{11}(r) = 0$, а в синхронной системе отсчета (10) $g^{11}(r) = -1$ и нигде в нуль не обращается.

В метрике

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 + g_{22}(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

корень детерминанта $\sqrt{-\det g_{ik}} = |g_{22}(r)| \sin \theta$. Полная масса внутри сферы радиуса r получается интегрированием компоненты $T^0_0 \equiv \varepsilon$:

$$M(r) = \frac{1}{c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r T^0_0(r) |g_{22}(r)| dr. \quad (27)$$

Согласно (26) интегрирование (27) в области $r < r_g$ дает

$$M(r) = \frac{2\varepsilon}{c^2} \left(\pi r - r_g \sin \frac{\pi r}{r_g} \right), \quad r \leq r_g.$$

При $r = r_g$ $M(r_g) = \frac{3c^2}{4k} r_g$. В области $r > r_g$

$$M(r) = \frac{3c^2}{2k} \left(r - \frac{1}{2} r_g \right), \quad r > r_g. \quad (28)$$

Энергия E одной частицы в конденсате (16) меньше энергии покоя той же частицы в вакууме. Структура статического состояния гравитирующих бозонов в конденсате отличается от невзаимодействующих частиц в вакууме. В модели $\lambda\psi^4$ упругие столкновения частиц происходят без диссипации. В этой модели видно, что треть полной энергии расходуется на создание связанного состояния бозонов. Вторая треть обеспечивает баланс плотности и

упругости. И только одна треть исходной массы покоя остается источником гравитационного поля вне конденсата. Если граница конденсата $r_h \gg r_g$, то полная масса черной дыры (28) вдвое превосходит формулу Шварцшильда $M = \frac{c^2}{2k} r_h$. Таков энергетический расклад гравитационного дефекта массы черной дыры в модели $\lambda\psi^4$.

3. ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ В СИНХРОННЫХ КООРДИНАТАХ

Сфера $r = r_h$ это граница, разделяющая черную дыру и темную материю. Проявления темного сектора (например, плато на кривых вращения галактик [23]) адекватно описываются с помощью продольного векторного поля ϕ_i [29]. Лагранжианом поля ϕ_i является

$$L = (\phi_{;m}^m)^2 - V(\phi^n \phi_n). \quad (29)$$

Для гравитирующих, но не взаимодействующих друг с другом объектов темного сектора потенциал

$$V(\phi^n \phi_n) = V_0 + V_0' \phi^n \phi_n, \quad V_0' = \frac{dV(x)}{dx} \text{ при } x = 0.$$

В уравнениях Эйнштейна V_0 является простой добавкой к космологической постоянной (формула (62) в [29]). Это проявляется в однородном расширении Вселенной в масштабах, много больших чем расстояния между галактиками. В масштабе черной дыры расширение Вселенной ничтожно. Поэтому тензор энергии-импульса темной материи

$$T_i^k = \delta_i^k \left((\phi_{;m}^m)^2 - V_0' \phi^m \phi_m \right) + 2V_0' \phi^k \phi_i. \quad (30)$$

В отличие от (3)

$$V_0' = -\left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 = -\lambda^{-2},$$

где λ — длина волны де-Бройля квантов темной материи. Масса покоя кванта темной материи μ на много порядков меньше массы покоя бозонов m . Вне черной дыры правая часть уравнений Эйнштейна (13), в соответствии с (30), имеет вид

$$T_i^k - \frac{1}{2} T \delta_i^k = \begin{cases} -(\phi_{;m}^m)^2 - V_0'(\phi^r)^2, & i = r, \\ -(\phi_{;m}^m)^2, & i \neq r. \end{cases} \quad (31)$$

С тензором Риччи (11) и тензором (31) уравнения Эйнштейна вне черной дыры $r > r_h$ сводятся к

$$R_0^0: \quad \phi_{;m}^m = (\phi^r)' + 2F_2' \phi^r = 0, \quad (32)$$

$$R_1^1: \quad F_2'^2 + F_2'' = -\kappa V_0'(\phi^r)^2, \quad (33)$$

$$R_2^2: \quad 2F_2'^2 + F_2'' - e^{-2F_2} = 0. \quad (34)$$

Из уравнения (32) получаем

$$\phi^r(r) = C e^{-2F_2(r)},$$

где C — константа интегрирования. Исключая из (33) и (34) F_2'' , приходим к уравнению

$$F_2'^2 = e^{-2F_2} + \kappa V_0' C^2 e^{-4F_2}.$$

Умножением на e^{4F_2} приводим это уравнение к виду

$$\frac{1}{4} \left(\frac{de^{2F_2}}{dr} \right)^2 = e^{2F_2} + \kappa V_0' C^2$$

и определяем метрическую компоненту $g_{22}(r)$ в синхронной системе отсчета:

$$g_{22}(r) = -e^{2F_2} = \kappa V_0' C^2 - (r + D)^2, \quad r > r_h. \quad (35)$$

От лагранжиана темной материи (29) требуется, чтобы константа V_0' была отрицательной. Заметим, что $V_0' < 0$ является также условием регулярности в центре (формула (39) в [29]). Две константы интегрирования $C^2 = -(\kappa^2 |p| V_0')^{-1}$ и $D = -r_h$ в (35) обеспечивают плавный переход гравитационного поля через границу черной дыры и темной материи:

$$g_{22}(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa|p|} \sin^2 \left(\sqrt{\kappa|p|} r \right), & r < r_g, \\ -\frac{1}{\kappa|p|}, & r_g < r < r_h, \\ -\frac{1}{\kappa|p|} - (r - r_h)^2, & r > r_h. \end{cases} \quad (36)$$

Связь (25) позволяет выразить $g_{22}(r)$ через гравитационные радиусы r_g и r_h :

$$g_{22}(r) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2} r_g^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{r_g} \right), & r < r_g, \\ -\frac{4}{\pi^2} r_g^2, & r_g < r < r_h, \\ -\frac{4}{\pi^2} r_g^2 - (r - r_h)^2, & r > r_h. \end{cases} \quad (37)$$

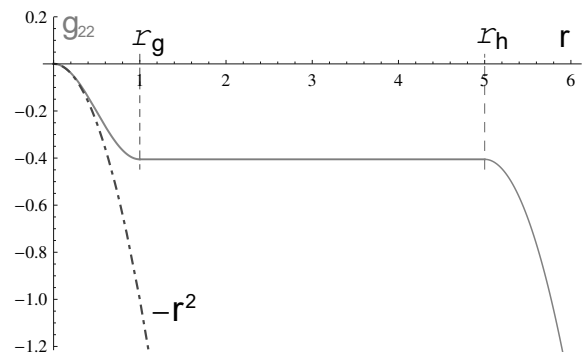


Рис. 1. Компонента метрического тензора $g_{22}(r)$ в синхронной системе координат (37) (сплошная красная линия). Параметры $r_g = 1$ и $r_h = 5$ выбраны для наглядности. В реальности r_h на много порядков больше r_g . Пунктирная линия — это $g_{22}(r) = -r^2$ в координатах Шварцшильда (2)

На рисунке приведена компонента метрического тензора $g_{22}(r)$ (37) в синхронной системе координат (для ясности показано красной сплошной линией). Параметры $r_g = 1$ и $r_h = 5$ выбраны для наглядности. В действительности гравитационные радиусы черных дыр r_h и r_g один больше другого на много порядков.

Волновая функция темной материи

$$\phi^r(r) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda r_g}{\kappa} \left[\left(\frac{2r_g}{\pi} \right)^2 + (r - r_h)^2 \right]^{-1}, \quad r \geq r_h$$

быстро убывает с расстоянием от черной дыры.

Исторически название радиуса поверхности черной дыры r_h горизонтом событий связано с тем, что в координатах Шварцшильда компонента метрического тензора $g^{rr}(r_h) = 0$. Тот факт, что g^{rr} обращается в нуль на тех же радиусах r_g и r_h , (с граничными условиями на которых решения уравнений не единственные), является исключительно свойством метрики Шварцшильда. В синхронных координатах g^{rr} на этих гравитационных радиусах остается конечным. Я не вижу оснований считать, что для удаленного наблюдателя интерфейс черной дыры и темной материи r_h является горизонтом событий.

Глобальный проект сети телескопов под названием The Event Horizon Telescope (Телескоп горизонта событий) фактически нацелен на исследование области границы раздела черной дыры и темной материи. Привлекает внимание возможность увидеть не только фасад, но и обратную сторону черной дыры особым путем гравитационного линзирования (см. [30] и приведенные там ссылки). Регулярное статическое решение для черной дыры с массой сильно больше массы Солнца найдено только при наличии границы с темной материей, а не в вакууме [24]. На мой взгляд, при гравитационном линзировании черной дыры удобно исходить из статической синхронной метрики с компонентой $g_{22}(r)$ (37):

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 - \left(\frac{4}{\pi^2} r_g^2 + (r - r_h)^2 \right) \times \\ \times (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r > r_h. \quad (38)$$

Вопрос о движении материи в метрике (38) выходит за рамки этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*; Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Academie der Wissenschaften: Berlin, Germany, 1916; pp. 189–196.
2. Einstein, A. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys. 1916, 49, 769–822.
3. M. D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
4. G. Szekers, Publ. Mat. Debrecen **7**, 285 (1960).
5. I. D. Novikov, *On the Evolution of a Semiclosed World*, Doctoral dissertation, Sternberg Astronomical Institute, Moscow (1963).
6. S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **74**, 81 (1931).
7. L. D. Landau, Phys. Zs. Sowjet. **1**, 285 (1932).
8. J. R. Oppenheimer and G. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
9. J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).
10. S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, Astrophys. J. **692**, 1075 (2009).
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 1*, Москва, Наука-физматлит (1995).
12. https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model.
13. L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
14. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 2*, Москва, Физматлит (2000).
15. G. Baym, T. Hatsuda, T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song, and T. Takatsuka, arXiv:1707.04966v1 (2018).
16. M. Colpi, S.L. Shapiro, and I. Wasserman, Phys. Rev. Lett. **57**, 2485 (1986).
17. R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang, Phys. Rev. D **35**, 3640 (1987).
18. D. J. Kaup, Phys. Rev. **172**, 1331 (1968).
19. D. F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase, Phys. Rev. D **62**, 104012 (2000).
20. Б. Э. Мейерович, ЖЭТФ **154**, 1000 (2018).
21. B. E. Meierovich, Universe **5**, 198 (2019).
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).

- 23.** В. Е. Meierovich, Phys. Rev. D Part. Fields Gravit. Cosmol. **87**, 103510 (2013).
- 24.** В. Е. Meierovich, Universe **6**, 113 (2020).
- 25.** В. Е. Meierovich, J. Phys.:Conf. Ser. **2081**, 012026 (2021).
- 26.** А. S. Eddington, Nature **113**, 192 (1924).
- 27.** G. Lemaitre, Ann.Soc.Sci. Bruxelles I. **A53**, 51 (1933).
- 28.** Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Физматлит, Москва (1961).
- 29.** В. Е. Meierovich, J.of Gravity **2014**, 568958 (2014).
- 30.** В.И. Докучаев, Н. О. Назарова, ЖЭТФ, **155**, 677 (2019).