

ISSN 0044-0027

Том 86, Номер 4

Июль - Август 2023



ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА



КУРЧАТОВСКИЙ
ИНСТИТУТ
ДЛЯ СТРАНЫ
И МИРА

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 86, номер 4, 2023

ЯДРА

Теория

- Спин-изоспиновый отклик ядра в рамках функционала Фаянса
И. Н. Борзов, С. В. Толоконников 452
- Особенности ротационных полос в тяжелых и сверхтяжелых ядрах. Описание состояний
ириид-полосы в ^{248}Cm
А. Д. Ефимов, И. Н. Изосимов 461
- Модель масс ядер на основе байесовской оценки локальных разностных соотношений
энергий связи
К. А. Стопани, Е. В. Владимирова, В. В. Негребецкий, М. В. Симонов, Т. Ю. Третьякова 476

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

Эксперимент

- Предложение и анализ эксперимента по точному измерению времени жизни мюона
и константы Ферми
А. М. Бакаляров, А. И. Климов, И. Н. Мачулин, Е. А. Мелешко, В. И. Селиванов 485
- Численное моделирование процессов ускорения быстрых протонов и инициирования
ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ при интенсивностях пикосекундного лазерного
излучения в диапазоне $10^{18} - 10^{19}$ Вт/см²
*С. Н. Андреев, А. П. Матафонов, В. П. Тараканов, В. С. Беляев, А. Ю. Кедров,
В. П. Крайнов, С. А. Муханов, А. В. Лобанов* 495

Теория

- Рассеяние положительных мюонов атомами инертных газов
Л. В. Чернышева, В. Г. Яржемский 506
- Лептонные ширины распадов релятивистской двухфермионной составной системы
Ю. Д. Черниченко 512

ПОПРАВКА

- Аппроксимация дифференциальных сечений упругого протон-ядерного рассеяния
А. А. Галюзов, М. В. Косов 524
-
-

СПИН-ИЗОСПИНОВЫЙ ОТКЛИК ЯДРА В РАМКАХ ФУНКЦИОНАЛА ФАЯНСА

© 2023 г. И. Н. Борзов^{1),2)*}, С. В. Толоконников^{1),3)**}

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.; после доработки 18.01.2023 г.; принята к публикации 20.01.2023 г.

Представлено эффективное приближение к полностью самосогласованным расчетам силовых функций β -распада. Оно базируется на описании основных состояний в рамках модифицированного энергетического функционала плотности Фаянса (DF3-f) и квазичастичного приближения случайной фазы в континууме (CQRPA). Уточнен изовекторный параметр h_2^- объемной части функционала, допустимый диапазон которого был определен нами ранее из ограничений на параметры уравнения состояния ядерной материи — энергию симметрии и ее производную при равновесной плотности, полученные из совместного анализа величины “нейтронной шубы” ΔRnp ядер ^{208}Pb и ^{48}Ca , найденной в экспериментах PREX-II, CREX, результатов *ab initio* расчетов свойств основных состояний ядер с взаимодействием N3LO и систематики данных по массам нейтронных звезд из астрофизических наблюдений. Проведены новые расчеты гамов-теллеровских силовых функций для дважды магических ядер ^{208}Pb и ^{132}Sn . Оценена точность глобальных DF3-a + CQRPA-расчетов периодов бета-распада тяжелых (квази)сферических ядер с $Z = 81-83$ и $T_{1/2} < 240$ с в предложенной модели. Экспериментальные времена жизни описываются с точностью до фактора 5.

DOI: 10.31857/S0044002723040098, EDN: EGAIAA

1. ВВЕДЕНИЕ

Спин-изоспиновые резонансы занимают важное место в фундаментальных ядерно-физических исследованиях. Изучение их свойств играет заметную роль в развитии современных микроскопических моделей атомного ядра, прежде всего мультikonфигурационной модели оболочек [1] и самосогласованной теории конечных ферми-систем (ТКФС) А.Б. Мигдала [2]. К настоящему времени наиболее изучены гигантский резонанс Гамова–Теллера (GTR) и пигми-резонансы в окне β -распада с квантовыми числами $\Delta L = 0, \Delta S = 1, \Delta T = 1$, спин-дипольные резонансы (SDR, $\Delta L = 1, \Delta S = 1, \Delta T = 1$), возбуждаемые операторами $\sigma\tau^-$, и изоспиновые моды фермиевского типа $\Delta L = 0, \Delta S = 0, \Delta T = 1$ — изобар-аналоговые резонансы (IAR), индуцируемые операторами изоспина τ^- .

Интерес к зависящим от спина зарядово-обменным возбуждениям ядер возник сразу же

после появления первых теоретических оценок, использовавших идеи вигнеровской $SU(4)$ -симметрии [3] и аргументы о возможности наблюдения спиновых резонансов в ядрах, несмотря на наличие деструктивных факторов: спин-орбитального взаимодействия и сильной фрагментации из-за несохранения квантового числа полного спина [4]. Несколько позже в микроскопических моделях — RPA с сепарабельным взаимодействием [5] и упрощенной версии теории конечных ферми-систем [6] был дан более детальный, физически адекватный прогноз полной силовой функции β -распадного типа, включающей как низколежащие пигми-резонансы, так и новый гигантский резонанс Гамова–Теллера. Эти предсказания были подтверждены при обнаружении указанных мод возбуждений в реакции перезарядки (p, n) при промежуточных начальных энергиях и малых углах рассеяния [7].

В последнее время исследования фокусируются на детальном изучении спектрального распределения силы гамов-теллеровских и спин-дипольных возбуждений в широком энергетическом интервале. Особый интерес представляют эксперименты на современных ускорителях радиоактивных ионов (FRIB). До сих пор они касались, в основном, измерений масс сильно нейтронно-избыточных изотопов и интегральных характеристик их β -распада. Зарядово-обменные реакции типа (p, n) [8] и (n, p)

¹⁾Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия.

²⁾Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия.

³⁾Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия.

*E-mail: Borzov_IN@nrcki.ru

**E-mail: Tolokonnikov_SV@nrcki.ru

[9] в обратной кинематике дают широкие возможности спектроскопических исследований, включающих измерения силовых функций нестабильных нейтронно-избыточных ядер, как в окне β -распада, так и в области гигантских резонансов.

Дополнительный анализ периодов полураспада $T_{1/2}$ и вероятностей запаздывающей мультинейтронной эмиссии P_{xn} позволяет в некоторых случаях “реконструировать” значительную часть силовой функции спин-изоспиновых возбуждений в окне β -распада. Конкуренция силы переходов Гамова–Теллера (GT) и переходов первого запрета (FF) в окне β -распада определяет полные скорости β -распада сильно нейтронно-избыточных ядер. Их надежный прогноз исключительно важен и для моделирования временной шкалы процесса быстрого астрофизического нуклеосинтеза и выходов производимых элементов [10]. Знание полных силовых функций спин-изоспиновых возбуждений нестабильных изотопов с большим избытком нейтронов дает ограничения на недостаточно хорошо известные спиновые компоненты ядерных функционалов плотности.

Объем новой информации по спин-изоспиновым резонансам и β -распаду весьма значителен. Основные приближения, используемые в теоретических подходах, обсуждались в ранних обзорах по GT-резонансам [11–14].

Наиболее надежную экстраполяцию силовых функций спин-изоспиновых возбуждений для экстремальных значений N/Z дают самосогласованные модели. Реалистичное описание распределения силы спин-изоспиновых возбуждений в окне β -распада и в области гигантских резонансов обеспечивается моделью оболочек с взаимодействием [1]. Эти расчеты выполнялись вблизи замкнутых оболочек $Z = 20, 28, 50$ и $N = 28, 50, 82$. Для более тяжелых ядер и ядер с незаполненными оболочками расчеты по мультikonфигурационной оболочечной модели требуют ресурсов на пределе возможностей современных суперкомпьютеров.

Для глобальных расчетов спин-изоспиновых резонансов и β -распадных характеристик для нескольких тысяч ядер, необходимых для астрофизического моделирования, эффективен подход энергетического функционала плотности [15, 16]. Существует большое количество расчетов на основе новых нерелятивистских [17] и релятивистских [18, 19] энергетических функционалов плотности, а также стандартного функционала Скимма [2]. Для ядер со спариванием для таких расчетов широко использовались модели CQRPA [21, 22] и RQRPA [23], основные эффекты квазичастично-фононного взаимодействия и сложных конфигураций эффективно учитывались в моделях FRSA [24] и QTBA [25, 26].

В настоящей работе самосогласованное описание свойств основных состояний базируется на новой версии энергетического функционала плотности DF3-i, предложенного в нашей работе [26] для описания изобар-аналогового резонанса. Кроме экранировки обменного кулоновского члена за счет кулон-ядерного взаимодействия [27] “в игру включен” изовекторный параметр h_2^- объемной части функционала. Раньше для его надежного определения в [17] не имелось достаточного объема данных. Теперь в [28] нами найден допустимый интервал значений h_2^- . Используются ограничения на параметры уравнения состояния ядерной материи — энергию симметрии и ее производную при равновесной плотности, полученные из совместного анализа величины “нейтронной шубы” ΔRnp ядер ^{208}Pb и ^{48}Ca , найденной в экспериментах PREX-II, CREX [29, 30], *ab initio* расчетов EOS и свойств основных состояний ядер с взаимодействием N3LO и систематики данных по массам нейтронных звезд из астрофизических наблюдений [31–35]. Учтены также данные, полученные в 2017 г. коллаборацией LIGO-Virgo [36] при обнаружении гравитационных волн от слияния двойных нейтронных звезд.

Появление большого объема новых данных делает актуальным возвращение к проблеме спин-изоспинового отклика ядра. Цель работы — дать более подробное описание формализма DF3-a + CQRPA и изучить влияние модификации изовекторной объемной компоненты ЭФП DF3-a на гамов-теллеровскую силовую функцию референтных дважды магических ядер ^{208}Pb , ^{132}Sn . С уточненным параметром h_2^- рассчитаны GT силовые функции дважды магического ядра ^{132}Sn , а также периоды β -распада (квази)сферических нейтронно-избыточных ядер с $Z = 81–83$ и $T_{1/2} < 240$ с.

2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМАЛИЗМА

Опишем самосогласованный подход ЭФП к свойствам основных состояний ядер со спариванием. Энергетический функционал зависит от нормальной ρ и аномальной плотностей ν : $E_0[\rho, \nu] = \int \mathcal{E}(\rho(\mathbf{r}), \nu(\mathbf{r})) d^3r$. Гамильтониан среднего поля $h(1, 2)$ и потенциал спаривания $\Delta(\mathbf{r})$ находятся как вариации ЭФП по ρ и ν :

$$h(1, 2) = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \rho(2, 1)},$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \nu(\mathbf{r})},$$

где $1 = (\mathbf{r}_1, \sigma_1)$, $2 = (\mathbf{r}_2, \sigma_2)$ — пространственные и спиновые координаты.

Нами используется ЭФП Фаянса [17, 26, 28, 37] с более сложной зависимостью от ядерной плотности ρ , чем в ЭФП Скимма. Для объемной и поверхностной частей ЭФП эта зависимость симулируется дробно-линейным Паде-приближением, в схематической форме ее можно записать: $\epsilon(\rho) = (1 + h_1)\rho^\alpha / (1 + h_2)\rho^\sigma$, где h_1, h_2, α, σ — параметры. Как можно видеть, значение $h_2^- = 0$ отвечает более жесткой зависимости функционала от ρ , как у ЭФП Скимма.

В настоящей работе мы применяем модифицированный ЭФП Фаянса DF3-f [27] с “активированным” параметром h_2^- , согласованным с современными ограничениями, полученными из анализа уравнения состояния ядерной материи, проведенного в нашей работе [28]. Для функционала DF3-а уравнение состояния имеет вид

$$E(\rho, \delta)/A = \mathcal{E}(\rho_p, \rho_n)/\rho, \quad (1)$$

$$E(\rho, \delta)/A = \quad (2)$$

$$= \varepsilon_{0F} \left\{ \frac{3}{10} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} \left[(1 - \delta)^{5/3} + (1 + \delta)^{5/3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} a_+ \frac{1 - h_1^+ (\rho/\rho_0)^\sigma}{1 + h_2^+ (\rho/\rho_0)^\sigma} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} a_- \frac{1 - h_1^- (\rho/\rho_0)}{1 + h_2^- (\rho/\rho_0)} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \delta^2 \right\}.$$

Здесь $\varepsilon_F^p, \rho_p, \varepsilon_F^n$ и ρ_n — энергия Ферми и плотность протонов (нейтронов), $\rho = \rho_p + \rho_n$, $\delta = (\rho_p - \rho_n)/\rho$, $\rho_0 = 2k_F^{03}/3\pi^2 = 0.164(7)$ фм⁻³ — равновесная плотность симметричной ядерной материи, $\delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ — параметр асимметрии, $\hbar k_F^0$ — импульс Ферми нуклонов одного сорта частиц, $a^{+, -}$ и $h_{1,2}^{+, -}$ — безразмерные параметры, определяемые из сравнения с экспериментальными данными по основным состояниям; для функционала DF3-а используется значение $\sigma = 1$, $C_0 = (dn/d\varepsilon_F)^1 = 4\varepsilon_{0F}/3\rho_0$ — обратная плотность состояний нуклонов одного сорта на поверхности Ферми в точке равновесия симметричной материи. Уравнение состояния для чистой нейтронной материи соответствует значению параметра изоспиновой асимметрии $\delta = 1$.

Энергия симметрии $E_{\text{sym}}(\rho) = E(\rho, 1)/N - E(\rho, 0)/A$ и ее производная по плотности $L(\rho) = 3\rho dE_{\text{sym}}(\rho)/d\rho$ определяются изовекторной частью функционала плотности. Как отмечено выше, в наших предыдущих расчетах изовекторный параметр h_2^- принимался равным изоскалярному h_2^+ ввиду недостатка в данных для фитирования. Однако, как показано в работе [28], из современных ограничений на параметры уравнения

состояния ядерной материи — энергию симметрии и ее производную при равновесной плотности — стало возможным найти допустимый интервал значений $h_2^- = 1.0-1.5$.

Отклик ядра на внешнее зарядово-обменное поле $V_0 = \hat{Q} \exp(-i\omega t)$ (+ эрмитово сопряженный оператор) в самосогласованной теории конечных ферми-систем [2] описывается уравнением для эффективного поля $\hat{V}$. Для ядер со спариванием в нейтронной и протонной системах оно имеет следующий вид (в суперматричном представлении):

$$\hat{V}(\omega) = \hat{V}_0(\omega) + \hat{\mathcal{F}} \hat{A}(\omega) \hat{V}(\omega), \quad (3)$$

где

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_0 = \begin{pmatrix} e_q V_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\hat{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathcal{F} & \mathcal{F}^{\omega\xi} & \mathcal{F}^{\omega\xi} \\ \mathcal{F}^{\xi\omega} & \mathcal{F}^\xi & 0 \\ \mathcal{F}^{\xi\omega} & 0 & \mathcal{F}^\xi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $\hat{Q}$ — зависящий от спина и изоспина одночастичный оператор ($\hat{Q} = \sigma_\alpha \tau_\beta, \mathbf{q} \tau_\alpha, \mathbf{P} \tau_\alpha$). Матрица $\hat{A} 4 \times 4$ состоит из интегралов по энергии ϵ от произведений различных комбинаций функции Грина $G(\epsilon)$ и функции Горькова $F^{(1)}(\epsilon)$ и $F^{(2)}(\epsilon)$. Они приведены в книге [2], и наиболее важный из них имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} \left[G(\varepsilon) G(\varepsilon + \omega) + \right. \\ \left. + F^{(1)}(\varepsilon) F^{(2)}(\varepsilon + \omega) \right]. \quad (6)$$

Здесь знак “+” между двумя слагаемыми интеграла (6) соответствует t -нечетному полю.

В стандартных обозначениях ТКФС для силовой функции имеем следующее выражение:

$$S(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \mathcal{P}(\omega, \mathbf{q}) = \\ = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(e_q \hat{V}_0 \hat{A}(\omega) \hat{V}(\omega, \mathbf{q}) \right). \quad (7)$$

Элементы матрицы эффективного взаимодействия (5) являются различными вторыми вариационными производными ЭФП в зависимости от нормальной ρ и аномальной плотности ν :

$$\mathcal{F} = \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta \rho^2}; \quad \mathcal{F}^{\omega\xi} = \mathcal{F}^{\xi\omega} = \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta \rho \delta \nu}; \quad \mathcal{F}^\xi = \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta \nu^2}. \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{F}$ в (8) — спин-изоспиновая компонента частично-дырочной (ph) амплитуды Ландау–Мигдала, которая входит в (3) в случае, когда внешнее поле V_0 зависит от спина. $\mathcal{F}^\xi$ (1) — “аномальная” компонента обобщенной амплитуды, или, другими словами, эффективное NN -взаимодействие в частично-частичном (pp) канале, отвечающее за зависимость спаривательной части функционала от нормальной плотности. Оно входит в уравнение для щели и включает смешанные производные $\mathcal{F}^{\omega\xi}$, $\mathcal{F}^{\xi\omega}$, обеспечивающие дополнительную связь pp -канала с ph - и hh -каналами амплитуды. (Изотопные индексы в отношениях (3)–(8) для краткости опущены.)

Для изоспиновых зарядово-обменных возбуждений, в частности для IAR, уравнения для эффективного поля содержат амплитуду $\mathcal{F}^-$, которая определяется второй вариационной производной того же ЭФП по изовекторной плотности $\rho_- = \rho_n - \rho_p$:

$$\mathcal{F}^- = \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{(\delta \rho_-)^2}. \quad (9)$$

Для спин-изоспиновых возбуждений и β -распада в модели DF3-а + CQRPA используется эффективное приближение из нашей работы [22]. Характеристики основных состояний описываются полностью самосогласованно с функционалом Фаянса DF3-f [27]. Как показано в [37], пренебрежение спиновыми компонентами в ЭФП вызывает сравнительно небольшую ошибку в энергиях связи (≈ 100 кэВ). Поэтому спин-изоспиновое эффективное NN -взаимодействие в канале частица–дырка (ph) не как вторая вариация ЭФП, а вводится независимым образом — в виде контактного NN -взаимодействия Ландау–Мигдала в канале частица–дырка (ph), дополненного однопионным π - и ρ -мезонным обменами, модифицированными ядерной средой [38]:

$$\mathcal{F}^\omega = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_\pi + \mathcal{F}_\rho. \quad (10)$$

Центральный, зависящий от спина и изоспина, член (в импульсном представлении) имеет вид

$$\mathcal{F}_0 = C_0 [g' (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2)], \quad (11)$$

где нормировочная постоянная $C_0 = (dn/d\varepsilon_F)^{-1} = 300 \text{ МэВ фм}^{-3}$, а g' — феноменологический параметр, известный как “константа Ландау–Мигдала”. Далее добавляется тензорный член, обусловленный однопионным обменом [2]: π -мезонный член имеет вид

$$\mathcal{F}_\pi = -\frac{4\pi \tilde{f}_\pi^2}{m_\pi^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{k})}{m_\pi^2 + k^2 + \Pi_\Delta} (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2), \quad (12)$$

где m_π — пионная масса, а $\tilde{f}_\pi$ — константа пион-нуклонной связи, модифицированная в ядерной среде. В ТКФС обычно принимается, что она отличается от свободной константы f_π фактором

$$\tilde{f}_\pi = (1 - 2\zeta_s^\pi) f_\pi. \quad (13)$$

Введенный здесь новый квазичастичный заряд ζ_s^π , вообще говоря, отличается от заряда ζ_s в (11) [2], однако отличие это, по-видимому, невелико, и можно использовать $\zeta_s^\pi \simeq \zeta_s$. Π_Δ в знаменателе (12) — это Δ -изобарная компонента пионного массового оператора, которая берется в виде [2, 38]:

$$\Pi_\Delta = -\frac{0.9k^2}{1 + 0.23k^2/m_\pi^2}. \quad (14)$$

Далее, следуя [39], добавляется второй тензорный член обмена ρ -мезоном:

$$\mathcal{F}_\rho = \frac{4\pi \tilde{f}_\rho^2}{m_\rho^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \times \mathbf{k})}{m_\rho^2 + k^2} (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2). \quad (15)$$

Здесь m_ρ — масса ρ -мезона, а $\tilde{f}_\rho$ — константа связи ρNN , модифицированная в ядерной среде благодаря вкладу короткодействующих NN -корреляций. Согласно [38], этот вклад может быть приближенно учтен подавлением квадрата свободной константы f_ρ^2 в два с половиной раза. Вводя обозначения, аналогичные (13), имеем:

$$\tilde{f}_\rho = (1 - 2\zeta_s^\rho) f_\rho. \quad (16)$$

Нормируя тензорные константы соразмерно параметрам g, g' в (11), переобозначим коэффициенты в (12), (15) следующим образом:

$$-\frac{4\pi \tilde{f}_\pi^2}{m_\pi^2} = C_0 g_\pi^t (1 - 2\zeta_s^\pi)^2, \quad (17)$$

$$\frac{4\pi \tilde{f}_\rho^2}{m_\rho^2} = C_0 g_\rho^t (1 - 2\zeta_s^\rho)^2. \quad (18)$$

В канале частица–дырка (pp) для расчета основного состояния используется не зависящее от плотности изовекторное ($T = 1$) спаривание нулевого радиуса с силой, зависящей от массового числа A :

$$\mathcal{F}^\xi = C_0 f_\xi. \quad (19)$$

Предполагается также, что в QRPA-расчетах спин-изоспиновых возбуждений индуцированное изоскалярное ($T = 0$) протон-нейтронное эффективное NN -взаимодействие в канале частица–частица (динамическое спаривание) имеет аналогичную форму. Такой *ansatz* для эффективного NN -взаимодействия применяется для анализа смягчения пионных мод в ядрах [12]. Он дает надежное описание спин-изоспиновых возбуждений,

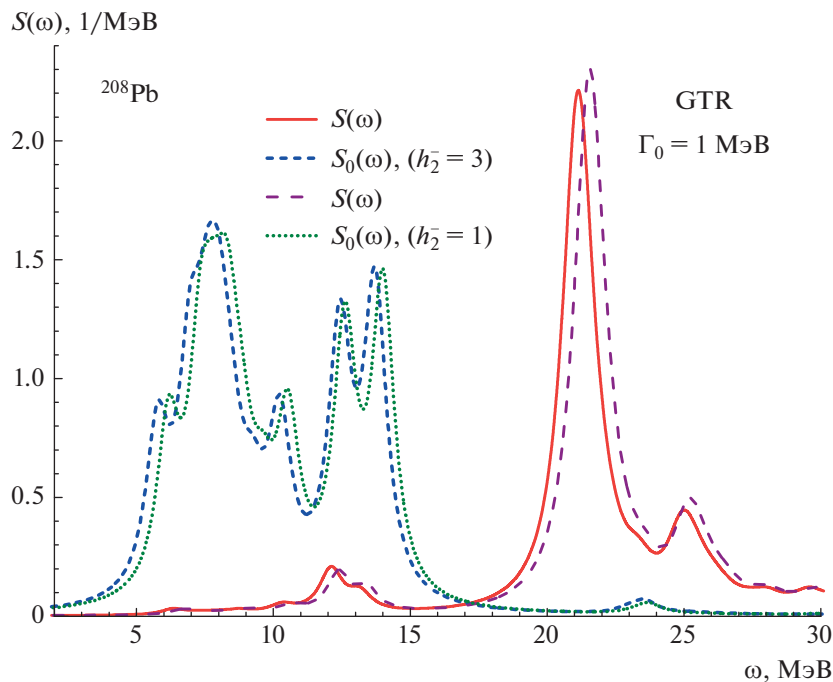


Рис. 1. Силовая функция ^{208}Pb . Расчет с функционалом DF3-f для двух значений $h_2^- = 1, 3$ (детали см. в тексте).

низколежащих состояний аномальной четности и GT-резонансов [21], а также магнитных моментов [40]. Важно, что используемое приближение (DF3-a + CQRPA) не меняет глобального характера самосогласованного подхода, поскольку параметры функционала и используемого NN -взаимодействия остаются универсальными (одинаковыми для всех зарядовых и массовых чисел Z, A). Корреляции, более сложные, чем в QRPA, включаются путем перенормировки спин-зависимых мультипольных операторов с помощью не зависящего от энергии возбуждения фактора подавления $Q^{1/2} = (g_A/G_A)$. Таким образом, соответствующие спин-изоспиновые вершины содержат дополнительный фактор Q . Считается, что фактор подавления однопионной компоненты остаточного взаимодействия также равен Q (хотя, в принципе, он может быть выбран независимо).

3. ОПИСАНИЕ GT-СИЛОВЫХ ФУНКЦИЙ В ^{208}Pb И ^{132}Sn

Силовые функции спин-мультипольных возбуждений представляют отклик ядра на внешнее поле $V_0\tau_{\pm} = [(2L+1)!!/q^L] j_L(qr) T_{JLS}^M(\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma}) \tau_{\pm}$. При $L=0$ и $q \rightarrow 0$ величина $1/\sqrt{4\pi} V_0\tau_{\pm}$ совпадает со стандартным оператором гамов-теллеровского β -распада. Энергии GT-возбуждений, рассчитанные в CQRPA, отсчитываются от основного состояния родительского ядра.

При расчете силовых функций зарядово-обменных спин-изоспиновых возбуждений, кроме естественной escape-ширины $\Gamma^{\uparrow}$, связанной с вылетом нуклона в континуум, можно добавить спредовую ширину $\Gamma^{\downarrow}$. С ее помощью полумикроскопически учитывается фрагментация возбуждений, связанная со сложными конфигурациями. В рамках континуум-QRPA ширина линейно зависит от энергии возбуждения в дочернем ядре [41]. В настоящих расчетах для удобства представления результатов используются постоянные спредовые ширины $\Gamma^{\downarrow} = 0.5$ и 1 МэВ.

В расчетах использованы следующие значения констант взаимодействия: $g' = 1.1$ и мезон-нуклонной связи $\tilde{f}_{\pi} = -1.45(1 - 2\zeta_s^{\pi})$ и $\tilde{f}_{\rho} = +2.64(1 - 2\zeta_s^{\rho})$ в нормировке $C_0 = 300$ МэВ фм³, и фактор подавления $\zeta_s = \zeta_s^{\pi} = \zeta_s^{\rho} = 0.08$. Следует отметить, что все значения силовых констант определены ранее из расчетов зарядово-обменных возбуждений [42]. Они не зависят от массового числа A , дают хорошее описание магнитных моментов [40] и периодов β -распада [22] — в данных расчетах их значения не изменяются.

На рис. 1 для референтного дважды магического ядра ^{208}Pb приведены распределения GT-силы (ω отсчитывается от основного состояния родительского ядра), рассчитанные с модифицированным функционалом DF3-a для предельных значений изовекторного параметра: $h_2^- = 1.0, 3.0$, определенных в [28]. Показаны силовые функции, полу-

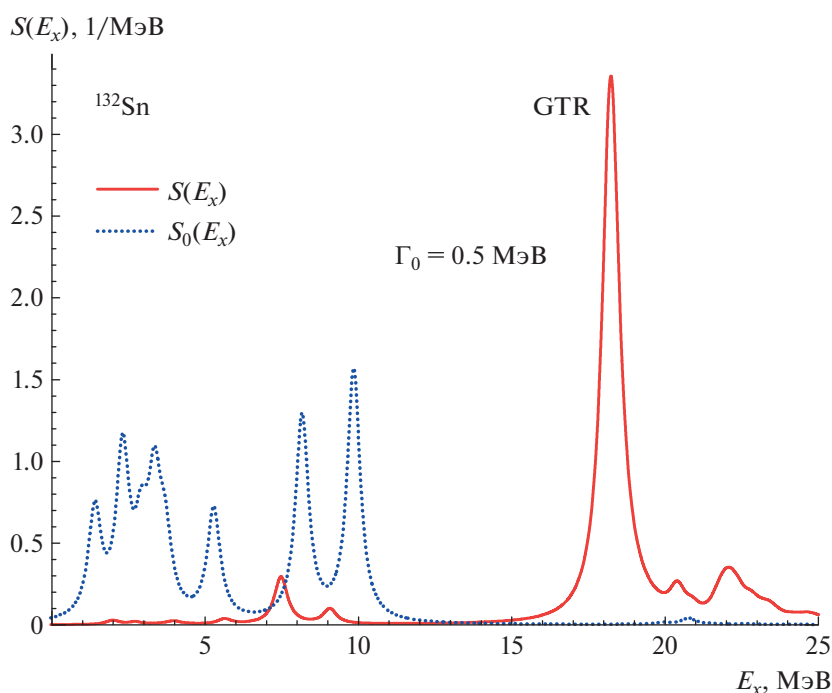


Рис. 2. Силовая функция ^{132}Sn . Расчет с функционалом DF3-f для значения параметра $h_2^- = 3$.

ченные как без, так и с включением эффективного NN -взаимодействия. В распределении GT-силы выделяются низколежащие пигми-резонансы, связанные в основном с переходами “поляризации кора” $j = l \pm 1/2 \rightarrow j = l \pm 1/2$ и “обратного спин-флипа” $j = l - 1/2 \rightarrow j = l + 1/2$, и основной пик гигантского GT-резонанса, преимущественно связанный с прямыми спин-флип переходами типа $j = l + 1/2 \rightarrow j = l - 1/2$, т.е. $1h_{11/2} \rightarrow 1h_{9/2}$, $1i_{13/2} \rightarrow 1i_{11/2}$.

Как видно, для значения свободного параметра $h_2^- = 1$ самосогласованный расчет дает превышение энергии максимума GT-резонанса на 2.30 МэВ, что типично для RPA-расчетов с явным учетом только $1p1h$ -конфигураций и без учета квазичастично-фононного взаимодействия. В то же время расчет в модифицированном ЭФП DF3-f с найденным в [28] значением $h_2^- = 1.5$ уменьшает расхождение до 1.80 МэВ. Исчерпывание оболочечного правила сумм $3(N - Z)$ в расчете составляет 13% для области энергий, включающей пигми-резонансы, и 62% до энергии $E_x = 30$ МэВ (экспериментальное значение $S(E_x < 25 \text{ МэВ}) = 64 \pm 5\%$ [43, 44]).

Как известно, в схеме с учетом однопионного обмена, используемой нами, значение силовой константы $g' = 1.1$ (надежно найденное в предыдущих расчетах) не может быть уменьшено для улучшения согласия с экспериментальным значением энергии максимума GTR $\omega = 19.2 \pm 0.2$ МэВ [43, 44]. Как

было показано в [12], это привело бы к нереалистичному смягчению спин-изоспинового отклика ядра (так называемых пионных мод) из-за приближения к точке π -конденсатной неустойчивости.

Возможность понизить энергию GT-резонанса изучалась в рамках подхода релятивистского QRPA [19]. Без изменения константы g' этого можно достичь введением контактного изовекторно-псевдовекторного взаимодействия в ph -канале: $V_{PV} = -\alpha_{PV} [\gamma_5 \gamma^\nu \tau]_1 [\gamma_5 \gamma_\nu \tau]_2$. Для ядра ^{208}Pb при достаточно сильном притяжении (большое $-\alpha_{PV}$) получалось полное совпадение с экспериментом, что вряд ли имело смысл, так как поправка на квазичастично-фононное взаимодействие в [28], как и в нашем подходе, не учитывалась.

На рис. 2 показана GT-силовая функция для нестабильного дважды магического ядра ^{132}Sn , рассчитанная с модифицированным функционалом DF3-f для значения изовекторного параметра: $h_2^- = 1.5$, из допустимого интервала, найденного в [28] (здесь E_x — энергия возбуждения в дочернем ядре, даны силовые функции, полученные без и с эффективным NN -взаимодействием). Рассчитанная энергия максимума GTR, как и в ^{208}Pb , выше (на 2.2 МэВ) экспериментальной энергии максимума GT-резонанса $E_x = 16.4 \pm 0.4 \pm 0.4$ МэВ [45]. Таким образом, в ^{132}Sn , как и в ^{208}Pb , масштаб расхождения рассчитанной энергии GTR с экспериментом близок к оценкам вклада квазичастично-фононной связи, получаемой в QTBA-расчетах

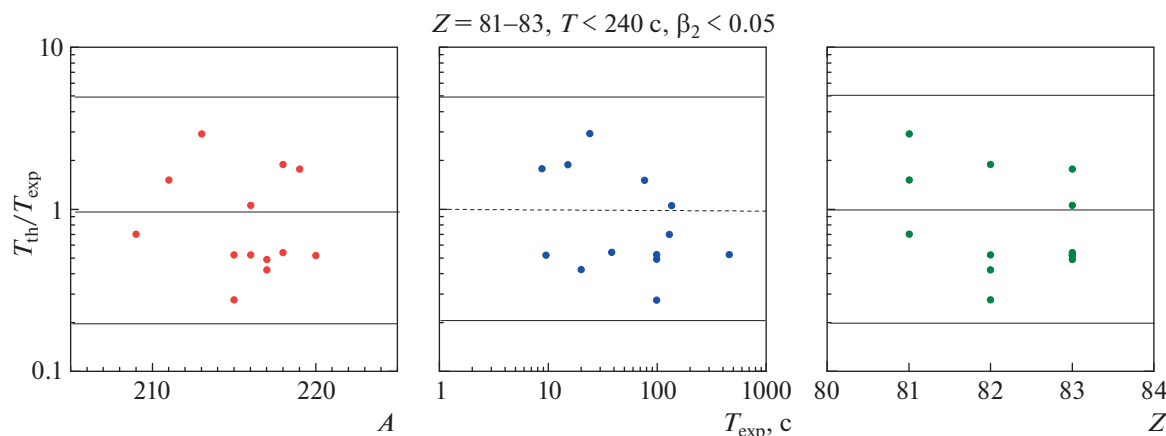


Рис. 3. Отношение рассчитанных в DF3-а + CQRPA к экспериментальным периодам полураспада для изотопов от Tl до Bi ($Z = 81-83$) в зависимости от экспериментальных периодов полураспада, атомного массового числа и заряда.

[25]. Исчерпывание оболочечного правила сумм $3(N - Z)$ до энергии $E_x = 25$ МэВ в расчете составляет 60.5% (экспериментальное значение $S(E_x < 25 \text{ МэВ}) = 53 \pm 5 - 10 + 11\%$ [45]).

Относительное слабое влияние частично-частичного (pp) взаимодействия на характеристики GTR хорошо известно, а также и его заметное влияние на вклад пигми-резонансов в ядрах со спариванием [42]. Как и в случае с притягательным однопионным взаимодействием, увеличение константы эффективного NN -взаимодействия в pp -канале по сравнению с оценкой $g' \leq -0.3$, найденной в наших предыдущих расчетах [22], в данной модели невозможно из-за приближения к точке QRPA-неустойчивости.

Для тестирования модифицированной версии функционала DF3-f рассчитаны периоды полураспада для тяжелых ядер от Tl до Bi ($Z = 81-83$). Эти величины чувствительны к распределению силы GT- и FF-переходов в окне β -распада. Детальное описание теоретической модели расчета периодов полураспада можно найти в наших работах [22, 46].

На рис. 3 для тяжелых ядер Tl, Pb, Bi с $T_{1/2 \text{ exp}} < 240$ с показано отношение предсказанных периодов полураспада к экспериментальным в зависимости от экспериментальных периодов, атомного массового числа и заряда. По мере приближения к замкнутой оболочке $N = 126$ ядра либо становятся сферическими, либо имеют небольшую деформацию основного состояния. Видно, что для ядер этой области разброс отношений периодов полураспада составляет до 5 раз.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные CRPA-расчеты гамов-теллеровских силовых функций референтных дважды магических ядер ^{208}Pb , ^{132}Sn позволяют уточнить

важный параметр h_2^- в изовекторной объемной компоненте функционала плотности энергии DF3-а. Диапазон его значений найден ранее в [28]. В самосогласованных расчетах (без какого-либо изменения других параметров функционала) получено, что в ^{132}Sn и в ^{208}Pb расхождение рассчитанной энергии GTR с экспериментом близко к оценкам вклада квазичастично-фононной связи в QTBA-расчетах [25]. Для устранения переоценки энергии GTR в полностью микроскопическом подходе представляет интерес применение модели с учетом взаимодействия Ландау–Мигдала, дополненного π - и ρ -мезонным обменом, к расчетам в рамках подхода QTBA. В качестве примера практического применения нового варианта DF3-а + CQRPA-модели рассчитаны периоды β -распада (квази)сферических нейтронно-избыточных цепочек изотопов с $Z = 76-83$ и $T_{1/2} < 240$ с, важных для моделирования астрофизического г-процесса нуклеосинтеза при слиянии нейтронных звезд в тесных двойных системах. Экспериментальные периоды β -распада [47] описываются с точностью до фактора 5, более высокой, чем в глобальных расчетах [48].

Авторы благодарны В.И. Целяеву за плодотворные обсуждения. Работа была поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ-21-52-12035.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, and A. P. Zuker, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 427 (2005).
2. А. Б. Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, 2-е изд. (Наука, Москва, 1981).

3. P. Franzini and L. A. Radikati, Phys. Lett. **6**, 322 (1963).
4. J.-I. Fujita and K. Ikeda, Nucl. Phys. **67**, 145 (1965).
5. S. I. Gabrakov, A. A. Kuliev, and N. I. Pyatov, Phys. Lett. B **36**, 275 (1971).
6. Ю. В. Гапонов, Ю. С. Лютостанский, Письма в ЖЭТФ **15**, 173 (1972).
7. R. R. Doering, A. Galonsky, D. M. Patterson, and G. F. Dertsch, Phys. Rev. Lett. **35**, 1691 (1975).
8. L. Shtul, in *Proceedings of the 10th International Conference on Direct Reactions with Exotic Beams* (DREBS2018), p. 102.
9. R. Reifarh and Yu. A. Litvinov, Phys. Rev. ST Accel. Beams **17**, 014701 (2014).
10. M. Arnould, S. Goriely, and K. Takahashi, Phys. Rep. **450**, 97 (2007).
11. Ю. В. Гапонов, Ю. С. Лютостанский, ЭЧАЯ **12**, 1324 (1981).
12. Н. И. Пятков, С. А. Фаянс, ЭЧАЯ **14**, 953 (1983).
13. Ю. В. Наумов, А. А. Быков, И. Н. Изосимов, ЭЧАЯ **14**, 420 (1983).
14. F. Osterfeld, Rev. Mod. Phys. **64**, 491 (1992).
15. W. Kohn and L. J. Sham, Phys. Rev. **140**, A1133 (1965).
16. *Energy Density Functional Methods for Atomic Nuclei*, Ed. by Schunck (IOP Publ., Bristol, 2019).
17. S. A. Fayans, S. V. Tolokonnikov, E. L. Trykov, and D. Zawischa, Nucl. Phys. A **676**, 49 (2000).
18. T. Nikšić, D. Vretenar, P. Finelli, and P. Ring, Phys. Rev. C **66**, 024306 (2002).
19. D. Vale, Y. F. Niu, and N. Paar, Phys. Rev. C **103**, 064307 (2021).
20. J. Engel, M. Bender, J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, and S. Surman, Phys. Rev. C **60**, 014302 (1999).
21. I. N. Borzov and S. Goriely, Phys. Rev. C **62**, 035501 (2000).
22. I. N. Borzov, Phys. Rev. C **67**, 025802 (2003).
23. N. Paar, T. Nikšić, D. Vretenar, and P. Ring, Phys. Rev. C **69**, 054303 (2004).
24. A. P. Severyukhin, V. V. Voronov, I. N. Borzov, N. N. Arsenyev, and N. Van Giai, Phys. Rev. C **90**, 044320 (2014).
25. V. I. Tselyaev, Phys. Rev. C **75**, 024306 (2007).
26. E. Litvinova, B. A. Brown, D.-L. Fang, T. Marketin, and R. G. T. Zegers, Phys. Lett. B **730**, 307 (2014).
27. I. N. Borzov and S. V. Tolokonnikov, Phys. At. Nucl. **82**, 560 (2020).
28. A. Bulgac and V. R. Shaginyan, Nucl. Phys. A **601**, 103 (1996).
29. I. N. Borzov and S. V. Tolokonnikov, Phys. At. Nucl. **86**, no. 3 (2023).
30. D. Adhikari *et al.* (PREX-II Collab.), Phys. Rev. Lett. **126**, 172502 (2021).
31. D. Adhikari *et al.* (CREX Collab.), Phys. Rev. Lett. **129**, 042501 (2022).
32. R. Essick, I. Tews, P. Landry, and A. Schwenk, Phys. Rev. Lett. **127**, 192701 (2021).
33. R. Essick, P. Landry, A. Schwenk, and I. Tews, Phys. Rev. **104**, 065804 (2021).
34. J. M. Lattimer, *Nuclear Matter Symmetry Energy From Experiment, Theory and Observation, in Workshop at INT S@INT Seminar, Seattle, November 9, 2021*.
35. P.-G. Reinhard, X. Roca-Maza, and W. Nazarewicz, Phys. Rev. Lett. **127**, 232501 (2022).
36. B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.), Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017).
37. J. Margueron, S. Goriely, M. Grasso, G. Colò, and H. Sagawa, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **36**, 125103 (2009).
38. A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. **50**, 107 (1978).
39. G. E. Brown, E. Osnes, and M. Rho, Phys. Lett. B **163**, 41 (1985).
40. I. N. Borzov, E. E. Saperstein, S. V. Tolokonnikov, G. Neyens, and N. Severijns, Eur. Phys. J. A **45**, 159 (2010).
41. G. F. Bertsch and R. A. Broglia, *Oscillations in Finite Quantum Systems* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).
42. I. N. Borzov, E. L. Trykov, and S. A. Fayans, Sov. J. Nucl. Phys. **52**, 627 (1990).
43. D. J. Horen, C. D. Goodman, C. C. Foster, C. A. Goulding, M. B. Greenfield, J. Rapaport, D. E. Bainum, E. Sugarbaker, T. G. Masterson, F. Petrovich, and W. G. Love, Phys. Lett. B **95**, 27 (1980).
44. A. Krasznahorkay, H. Akimune, M. Fujiwara, M. N. Harakeh, J. Jänecke, V. A. Rodin, M. H. Urin, and M. Yosoi, Phys. Rev. C **64**, 067302 (2001).
45. J. Yasuda, V. Sasanj, R. G. T. Zegers, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **121**, 132501 (2018).
46. I. N. Borzov, Phys. At. Nucl. **83**, 700 (2020).
47. R. Caballero-Folch *et al.*, Phys. Rev. Lett. **121**, 012501 (2016).
48. T. Marketin, L. Huther, and G. Martínez-Pinedo, Phys. Rev. C **93**, 025805 (2016).

NUCLEAR SPIN–ISOSPIN RESPONSE WITHIN THE FAYANS FUNCTIONAL

I. N. Borzov^{1),2)}, S. V. Tolokonnikov^{1),3)}

¹⁾ *National Research Center “Kurchatov Institute Moscow, Russia*

²⁾ *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, Dubna, Russia*

³⁾ *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Russia*

An effective approximation to a fully self-consistent global description of the total force function of β -decay within the framework of the theory of finite Fermi systems is presented, based on the calculation of ground states within the framework of the modified energy density functional of Fayans et al. (DF3-f) and the quasi-particle continuum random phase approximation (CQRPA). The isovector parameter h_2^- of the volumetric part of the functional has been refined, the permissible range of which was determined earlier by us from restrictions on the parameters of the equation of state of nuclear matter — the symmetry energy and its derivative at equilibrium density, obtained from a joint analysis of the value of the “neutron skin” ΔR_{np} of nuclei ^{208}Pb and ^{48}Ca , found in experiments PREX-II, CREX, results ab initio in calculations of the properties of the ground states of nuclei with the interaction of N3LO and systematics of data on the masses of neutron stars from astrophysical observations. New calculations of the Gamow–Teller force functions for the reference double-magic nucleus ^{208}Pb , doubly magic nucleus ^{132}Sn and nucleus with developed neutron pairing ^{130}Sn have been carried out. In the proposed model, the global DF3-a + CQRPA calculations of beta-decay half-lives of heavy (quasi) spherical nuclei with $Z = 81\text{--}83$ and $T_{1/2} < 240$ sec is done. Experimental lifetimes are described with accuracy up to factor 5.

ОСОБЕННОСТИ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС В ТЯЖЕЛЫХ И СВЕРХТЯЖЕЛЫХ ЯДРАХ. ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЙ ИРАСТ-ПОЛОСЫ В ^{248}Cm

© 2023 г. А. Д. Ефимов^{1), 2)*}, И. Н. Изосимов^{3)**}

Поступила в редакцию 09.01.2023 г.; после доработки 11.02.2023 г.; принята к публикации 13.02.2023 г.

Представлено дальнейшее развитие расширенной микроскопической версии МВБ за счет рассмотрения двухквазичастичных фоонов с мультипольностью до $J^\pi = 14^+$. Разработанная теоретическая схема применена для описания свойств состояний ираст-полосы в ^{248}Cm со спинами вплоть до 34^+ . Данное тяжелое трансактинидное ядро является единственным в этой массовой области ядром, где измерены значения $B(E2)$ вплоть до спина $I^\pi = 28^+$. Поэтому именно оно и рассматривается в первую очередь, так как информация по ядру позволяет протестировать представленную теоретическую схему, опираясь на большой объем экспериментальных данных. Область ядер отличается от более легких отсутствием эффекта обратного загиба момента инерции от квадрата частоты вращения вплоть до предельно наблюдаемого в ряде случаев спина $I^\pi = 34^+$. Рассматриваются причины этого эффекта. Обсуждается ряд особенностей ротационных полос в тяжелых и сверхтяжелых ядрах.

DOI: 10.31857/S0044002723040189, EDN: EGAPWS

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств тяжелых и сверхтяжелых ядер в настоящее время является предметом первоочередных исследований в ведущих лабораториях [1–18]. Ряд вопросов ядерной физики, физики атомов и химии сверхтяжелых элементов остается открытым [7]. Решающее значение в существовании сверхтяжелых ядер ($Z \geq 104$) имеют оболочечные эффекты [1, 5, 7]. Стабилизирующая роль оболочек в атомных ядрах приводит к существованию так называемого острова стабильности [1, 5, 7] — области сверхтяжелых элементов на карте атомных ядер, причем положение и очертания данного острова чувствительны к деталям схемы одночастичных уровней как для протонов, так и для нейтронов. Ряд подуровней сферических орбиталей из области острова стабильности становится доступными [13] для экспериментального исследования в деформированных тяжелых и

сверхтяжелых ядрах. Поэтому детальное изучение структуры ядер в области тяжелых и сверхтяжелых элементов имеет исключительно важное значение. Большинство тяжелых и сверхтяжелых ядер являются деформированными, что приводит к появлению ротационных полос в их спектрах. Экспериментальное исследование свойств возбужденных уровней ядер, включая изомеры и ротационные полосы, а также теоретический анализ соответствующих экспериментальных данных позволяют получить важную информацию о свойствах атомных ядер [9–18]. Экспериментальная техника, используемая для получения и изучения тяжелых и сверхтяжелых ядер [1, 8–11, 13–17], включает в себя масс-сепараторы и масс-спектрометры в сочетании с высокочувствительными детектирующими системами частиц и гамма-излучения. В принципе, экспериментальные методики можно разделить на два класса. В первом случае производится измерение гамма-спектров и спектров конверсионных электронов от распада ядер в области мишени с использованием техники запаздывающих совпадений с выделенными масс-сепаратором и соответствующей детектирующей системой продуктами ядерных реакций (например, с ядрами отдачи), и (или) продуктами распада (например, с осколками деления ядер отдачи) [13, 16, 17], а во втором — исследуются спектры альфа-,

¹⁾Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, Санкт-Петербург, Россия.

²⁾ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия.

³⁾Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

*E-mail: efimov98@mail.ru

**E-mail: izosimov@jinr.ru

бета-, гамма-излучений, электронов конверсии при распаде из основного или изомерных состояний ядер в фокальной плоскости масс-сепаратора [1–4, 8–11, 14, 15]. Экспериментальную информацию о структуре ротационных полос, вплоть до высоких спинов уровней, получают в основном первым способом [16, 17]. Второй способ, как правило, применим для изучения структуры ядер и изомеров с временем жизни, превышающим несколько микросекунд [1–4, 8–11]. Спектроскопия ядер в фокальной плоскости масс-сепаратора позволяет детально исследовать структуру низколежащих уровней ядер и структуру изомеров.

Исследования ротационных полос вплоть до высоких спинов с помощью спектроскопии в области мишени и построение соответствующих схем распада занимают важное место в изучении структуры возбужденных уровней и изомеров в атомных ядрах [13–18]. Данные о моменте инерции, полученные из анализа ротационных полос, чувствительны к деталям оболочечной структуры и спариванию, что дает возможность проводить тестирование теоретических подходов в области тяжелых и сверхтяжелых ядер [19]. Информация о g -факторе изомера, полученная на основании экспериментальных данных о ротационной полосе, построенной на изомерном состоянии, позволяет установить структуру конфигурации изомера [13]. Исследования структуры ядер в области $Z = 100–112$ и $N = 152–162$ позволяют отслеживать тенденции свойств уровней в цепочках изотопов и изотонов, сопоставлять полученные данные с предсказаниями различных теоретических моделей.

Для ряда изотопов Pu, Cm, Fm, No известны экспериментальные энергии состояний ираст-полос вплоть до спина 32^+ , как в ядре ^{248}Cm , и до 34^+ , как в ядре ^{244}Pu .

Анализ зависимости динамических моментов инерции от квадрата частоты вращения, проведенный для ряда трансурановых ядер в [16], показывает, что вплоть до предельно измеренных спинов не наблюдается обратного загиба (бэкбендинга), кроме единственного ядра ^{244}Pu . Отсутствие бэкбендинга означает, что не происходит пересечения основной полосы коллективных состояний и состояний, содержащих высокоспиновые квазичастичные пары. Уникальность указанных полос соответственно проявляется и в том, что энергии полос в четно-четных ядрах для указанных изотопов с высокой степенью точности воспроизводятся [20] в рамках феноменологии МВБ1. При этом в области более легких ядер для спинов с $I^\pi \geq 10^+$ расчетные энергии все более и более превышают экспериментальные по мере роста спина. Это находит естественное объяснение через взаимодействие коллективных состояний с состояниями, построенными на высокоспиновых двухквазичастичных

модах. Примеры описания данного эффекта с помощью бозонного представления различных мод возбуждений для изотопов Xe, Ba, Ce и ядра ^{156}Dy были даны соответственно в работах [21–24]. Общим для всех данных ядер является то, что реально максимальный спин двухквазичастичной пары не превышает значения $J^\pi = 10^+$. Эта пара построена на одночастичном уровне $h_{11/2}$. В рассматриваемой области ядер в валентной оболочке находятся уже два уровня со спином $11/2$, это в нейтронной системе $i_{11/2}$ и в протонной $h_{11/2}$. Уровень $h_{11/2}$ в протонной системе формально не принадлежит валентной оболочке, но в силу большого числа бозонов общее число квазичастиц на нем оказывается максимально возможным и равным 6. При этом энергия квазичастицы существенно понижается. Но помимо этого к валентной нейтронной оболочке относится и одночастичное состояние уже со спином $15/2$ — $j_{15/2}$ и пара нуклонов на этом уровне, образующая возбуждения с моментами вплоть до 12^+ и 14^+ . Этот факт требует расширения теоретической модели, описывающей эффект пересечения полос, за счет рассмотрения и двухквазичастичных пар с такими высокими спинами. При этом следует иметь в виду, что успех феноменологии в описании состояний ираст-полос до предельно высоких спинов позволяет считать, что вплоть до этих предельных спинов состояния продолжают оставаться в значительной степени коллективными и не содержат определяющих компонент с высокоспиновыми квазичастичными парами.

Попытка описания ираст-полос для ряда ядер, включая ^{248}Cm , была дана в работе [25]. В нашей работе описание спектроскопической информации дается в терминах элементарных возбуждений, а именно фононов различной мультипольности. Для квадрупольной моды это фононы в приближении Модифицированного Квазичастичного Метода Случайных Фаз (МКМСФ) [24], когда энергия фонона может быть и отрицательной, а мера корреляций в основном состоянии — произвольно малой. Фононы с прочими мультипольностями рассматриваются в приближении Тамма–Данкова. При этом все фононы формируются в сферическом одночастичном базисе, включающем все состояния, волновые функции которых имеют хотя бы заметную компоненту внутри самого ядра. Описание сугубо деформированного ядра с использованием сферических ядерных оболочек достигается рассмотрением многофононных состояний, что возможно только через переход от фононов к идеальным бозонам. Соответствие матричных элементов в бозонном и фононном пространствах позволяет определять параметры бозонной модели. Для параметров гамильтониана оно представлено в работе

[24] (см. также ссылки в ней), для параметров $E2$ -оператора — в [26].

С полученными таким образом параметрами в зависимости от их значений описываются энергии возбуждений как вибрационного, так и ротационного характера. Такой подход является универсальным для описания широкого диапазона ядер — от сферических до сильно деформированных, включая переходные.

Цель настоящей работы заключается в адаптации модели взаимодействующих бозонов для описания высокоспиновых состояний ираст-полос в тяжелых и сверхтяжелых ядрах. Для этого была расширена теоретическая модель, описывающая взаимодействие коллективных состояний, формирующихся исключительно нижайшими квадрупольными D -фононами с фононами или квазичастичными парами иной природы, в частности с парами со спинами $J^\pi = 12^+, 14^+$. Учет связи с квазичастичными парами со столь высокой мультипольностью реализуется впервые. С помощью разработанной модели нами были проанализированы свойства состояний ираст-полосы ядра ^{248}Cm . В рассматриваемой области только для этого ядра в ираст-полосе известны значения $B(E2)$ вплоть до перехода с состояния со спином $I^\pi = 28^+$.

2. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ МВБ1 С УЧЕТОМ ВЫСОКОСПИНОВЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МОД ВОЗБУЖДЕНИЙ

Используемая нами теория для описания ядерных возбуждений с ярко выраженной квадрупольной коллективностью наиболее подробно была представлена в [24]. В тяжелых и сверхтяжелых ядрах нейтроны и протоны заполняют оболочки 82–126, где присутствует одночастичный уровень с высоким полным спином $j_{15/2}$, два нуклона на котором могут дать возбуждения со спинами $J^\pi = 12^+$ и 14^+ . Поэтому используемая модель требует модификации схемы за счет явного расширения пространства неколлективных фононов со столь высокими спинами и соответственно рассмотрения их взаимодействия со всей совокупностью всех прочих мод возбуждений, включая чисто коллективные, сформированные из большой совокупности одинаковых квадрупольных возбуждений с нижайшей энергией и обозначаемые как D -фонон. Одновременное рассмотрение большого числа фононов, например, больше 8, на фермионном уровне не представляется возможным. Поэтому необходимо от фононного представления переходить к представлению идеальных бозонов, для которых точно выполняются коммутационные соотношения. Делается это в технике МВБ1 [27,

28]. Способ отображения фононных операторов на бозонные основывается на предположении замкнутости фононных операторов и их коммутаторов. Замкнутость реализуется через $SU(6)$ -алгебру, а отображение фононных операторов на идеальные квадрупольные d -бозоны осуществляется таким образом, что их операторы образуют ту же замкнутую алгебру. Предложено это в работе [27], а несколько подробнее изложено в статье [24]. Введение скалярных s -бозонов является здесь чисто формальной процедурой, позволяющей реализовать замкнутость алгебры бозонных операторов. Это приводит к бозонному гамильтониану

$$H_{\text{БМ}} = \varepsilon_d \hat{n}_d + k_1(d^+ \cdot d^+ ss + \text{Н.с.}) + \quad (1) \\ + k_2 \left((d^+ d^+)^{(2)} \cdot ds + \text{Н.с.} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_L C_L (d^+ d^+)^{(L)} \cdot (dd)^{(L)},$$

где Н.с. означает эрмитово сопряжение, точка между операторами соответствует скалярному произведению, величины ε_d , k_1 , k_2 , C_0 , C_2 , C_4 являются параметрами гамильтониана МВБ1. Все параметры бозонных операторов, включающие операторы электрических квадрупольных переходов, вычисляются на основе процедуры Марумори [29] через равенство соответствующих матричных элементов (МЭ) в фермионном и бозонном пространствах. Для получения корректных значений бозонных параметров необходимо учитывать связь коллективных, построенных из D -фононов, и прочих фононов, обозначаемых как B_J с моментами J^π , не превышающими значения 6^+ . Учет процессов с большими значениями угловых моментов фононов при вычислении параметров гамильтониана (1) является либо несущественным, либо приводящим к более сложному виду бозонного гамильтониана. Учет связи конфигураций, содержащих как коллективное пространство, так и B_J -фононы, осуществляется в технике теории возмущений в варианте Бриллюэна–Вигнера [30]. При этом конфигурационное пространство ограничивается компонентами, включающими не более одного неколлективного фонона.

При описании эффекта пересечения полос необходимо рассматривать B_J -фононы с более высокими мультипольностями $J^\pi = 8^+, 10^+$, а для тяжелых ядер и с $J^\pi = 12^+, 14^+$. При этом, чтобы воспроизвести плавный переход в ираст-полосе от основной полосы к полосе, основанной на высокоспиновой двухквазичастичной паре, необходимо учитывать примеси к коллективным состояниям фононов B_J с мультипольностями $J^\pi = 2^+, 4^+, 6^+$.

При феноменологическом исследовании коллективных состояний в рамках МВБ1 для ядер,

рассматриваемых скорее как деформированные, параметр гамильтониана ε_d становится отрицательным. Если его рассматривать как однофононную энергию, то становится очевидным, что для его описания Квазичастичный Метод Случайной Фазы (КМСФ) неприменим, так как он не может дать как нулевую, так и отрицательную энергию фонона. Это возможно в рамках метода Тамма–Данкова, однако в этом случае не учитываются корреляции в основном состоянии. Поэтому в рассматриваемом способе определения структуры коллективного нижайшего квадрупольного D -фонона используется КМСФ, но с дополнительным условием, что можно уменьшать меру корреляций в основном состоянии. Это же приводит и к возможности получить отрицательное значение для однобозонной энергии ε_d даже без последующих перенормировок. Таким образом, двухквазичастичная структура D -фонона имеет тот же вид, что и в КМСФ:

$$D_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1,2;\tau=n,p} [\psi_{12} a_1^+ a_2^+ + \varphi_{12} a_{\bar{2}} a_{\bar{1}}]_\tau (j_1 j_2 m_1 m_2 | 2\mu), \quad (2)$$

где $a^+(a)$ — операторы рождения (уничтожения) квазичастиц; 1, 2 обозначают номера одноквазичастичных состояний в сферическом базисе; состояния $\bar{1}, \bar{2}$ — сопряженные по времени к 1, 2. Амплитуды ψ_{12}, φ_{12} или $z^{(0)} = \psi + \varphi, z^{(1)} = \psi - \varphi$ не зависят от магнитных квантовых чисел и нормированы стандартным образом, $\sum_{1,2;\tau} (\psi_{12}^2 - \varphi_{12}^2)_\tau = \sum_{1,2;\tau} (z_{12}^{(0)} z_{12}^{(1)})_\tau = 1$.

Фононные амплитуды ψ, φ и параметры Боголюбова u, v находятся на основе вариационного принципа из условия минимума энергетического функционала

$$H_{\text{tot}} = E_{\text{vac.q.p.}} + E_0^{(B)} + (I|H_{\text{IBM}}|I), \quad (3)$$

включающего энергию вакуума квазичастиц $E_{\text{vac.q.p.}}$, энергию фононного вакуума $E_0^{(B)}$ и среднего значения H_{IBM} , вычисленного с бозонными волновыми функциями $|I\rangle$ довольно общего вида, полученными в результате диагонализации бозонного гамильтониана (1) в базисе состояний, соответствующих неприводимому представлению группы $SU(5)$.

Таким образом, величина $(I|H_{\text{IBM}}|I)$ явно зависит от (ψ, φ) и (u, v) через параметры $\varepsilon_d, k_1, k_2, C_0, C_2, C_4$ гамильтониана МВБ1 и неявно через бозонные волновые функции $|I\rangle$, полученные опять с теми же параметрами гамильтониана (1) — $\varepsilon_d, \dots, C_4$. Средние значения операторов от отдельных членов гамильтониана по бозонным функциям

обозначаются как

$$\begin{aligned} n_d(I) &= (I| \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} | I); \\ P_1(I) &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega(\Omega-1)}} \times \\ &\times (I|(d^+ \cdot d^+ ss + s^+ s^+ d \cdot d)|I), \\ \langle C_L(I) \rangle &= (I| \frac{1}{2} (d^+ d^+)^{(L)} \cdot (dd)^{(L)} | I). \end{aligned} \quad (4)$$

Минимизация функционала (3) по искомым амплитудам осуществляется при выполнении ряда дополнительных условий. Это условия нормировок D -фононов, амплитуд бозонных волновых функций $|I\rangle$, амплитуд Боголюбова u и v .

Следующие условия не связаны с нормировками функций. Одно из них — это фиксация максимального числа бозонов Ω , которое используется при построении $|I\rangle$. Условие неизменности Ω при вычислении фононных амплитуд (ψ, φ) для каждого коллективного состояния приводит к уменьшению числа квазичастиц на уровнях валентной оболочки и перераспределению фононных амплитуд по вневалентным состояниям.

Еще одно условие связано с требованием снижения корреляций в основном состоянии, в чем и будет помимо прочего заключаться главная идея модификации стандартного варианта КМСФ. Выполнение этого условия осуществляется введением в минимизируемый функционал слагаемого, регулирующего величину суммы квадратов φ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi} &= 2\chi \left(n_d(I) + \frac{5}{2} \right) \left(\sum_{1,2;\tau} \varphi_{12\tau}^2 + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \chi \left(n_d(I) + \frac{5}{2} \right) \left(\sum_{1,2;\tau} (z_{12}^{(1)2} + z_{12}^{(0)2})_{\tau} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее условие оказалось принципиальным для достижения согласования бозонных средних, амплитуд $z^{(n)}$, $u(v)$ и бозонных амплитуд. Иначе согласование невозможно.

В результате структура D -фонона определяется с использованием довольно сложного функционала, включающего средние от бозонных операторов. Если в рамках стандартного КМСФ решается уравнение $HD^+ = \omega D^+$ или $\langle DHD^+ \rangle - \omega \langle DD^+ \rangle \rightarrow \min$, то множитель Лагранжа ω , определяемый как ω^2 , является положительной величиной и трактуется в качестве однобозонной энергии. В используемом модифицированном варианте параметр ω не имеет уже такого смысла, а однобозонная энергия, определяемая в качестве однобозонной энергии ε_d , в ряде случаев, характерных для ядер, близких к деформированным, оказывается отрицательной.

Выражения для параметров бозонного гамильтониана через амплитуды $z^{(\eta)}$, $u(v)$ и с учетом только D -фононов приведены в работе [24], для $C_L^{(0)}$ — в [31].

Процессы, приводящие к перенормировке параметров ранее подробнее всего были изложены в работе [24]. Соответствующее взаимодействие, т.е. взаимодействие состояний, содержащих только D -фононы, с состояниями, содержащими дополнительно один неколлективный B_J -фонон, во втором порядке приводит к поправкам энергий, а в нашем случае — к поправкам параметров бозонного гамильтониана. При этом, как уже говорилось, рассматриваются только неколлективные фононы с $J^\pi \leq 6^+$. Помимо перенормировок бозонных параметров данные процессы важны при рассмотрении связи коллективных состояний с состояниями или их компонентами, содержащими двухчастичные высокоспиновые пары с еще более высокими спинами с $J^\pi \leq 10^+$. Как показали полученные оценки, не пренебрежимо малыми оказываются матричные элементы трех типов:

$$(I) \quad \langle B_{J \leq 6} D^n | H | D^{+n'} \rangle, \quad (6)$$

$$(II) \quad \langle B_{J=8,10} D^n | H | B_{J \leq 6}^+ D^{+n'} \rangle, \quad (7)$$

$$(III) \quad \langle B_{J=12,14} D^n | H | B_{J=8,10}^+ D^{+n'} \rangle. \quad (8)$$

МЭ (I) типа используются для получения поправок к бозонным параметрам, (I) и (II) — для связи коллективных состояний, сформированных только из D -фононных компонент, с состояниями, содержащими фермионные пары с $J^\pi \leq 10^+$. Этого достаточно для описания коллективных состояний и эффекта пересечения полос в ядрах с числом нуклонов, меньшим 82. Для более тяжелых ядер, нуклоны которых находятся в диапазоне от 84 до 124, необходимо рассматривать и совокупность матричных элементов (III) типа. При перенормировке параметров бозонного гамильтониана (I) неколлективные фононы рассматриваются неявно, фононы же B_J с $J^\pi > 6^+$ — явно, и бозонная волновая функция расширяется за счет соответствующих компонент. Так как для описания пересечения полос необходимо использовать всю совокупность матричных элементов (I) типа, то вводятся, соответственно, идеальные бозоны b_J с $J^\pi \geq 2^+$. При этом под неколлективными квадрупольными фононами понимаются все фононы, кроме нижайшего, для которого характерна максимальная коллективность, за исключением резонансных возбуждений. При этом следует иметь в виду, что во втором порядке по взаимодействию взаимодействие (I) типа использовано для перенормировки бозонных параметров.

Во всех описанных случаях расширенная волновая функция в фононном представлении имеет следующий вид:

$$\Psi(I) = |\psi_C(I)\rangle + \sum_{i_1, c_1} \alpha_{i_1, c_1} (B_{i_1}^+ \psi_{c_1})^{(I)}, \quad (9)$$

где $|\psi_C\rangle$ есть волновая функция, содержащая суперпозицию только D -фононов.

Конкретная схема перенормировок параметров гамильтониана приведена в [24], и она остается неизменной. Зато при изучении пересечения полос необходимо рассмотреть дополнительные моды возбуждений и взаимодействие с прочими модами.

2.1. Пересечение полос

Для описания эффекта пересечения полос неколлективные моды возбуждений рассматриваются явным образом и волновую функцию (9) удобнее представить в более развернутом виде, а именно:

$$\begin{aligned} |\Psi(I)\rangle = & \alpha_0 \psi_C(I) + \\ & + \sum_{J_1=2,4,6,c_1} \alpha_{J_1, c_1} B_{J_1}^+ |\psi_{c_1}\rangle + \\ & + \sum_{J_2=8,10,c_2} \alpha_{J_2, c_2} B_{J_2}^+ |\psi_{c_2}\rangle + \\ & + \sum_{J_3=12,14,c_3} \alpha_{J_3, c_3} B_{J_3}^+ |\psi_{c_3}\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где с правой стороны вся функция связана в угловой момент I , суммирование по J означает суммирование не только по угловым моментам, но и по всем фононам данной мультипольности. Уравнение на собственные значения E квазичастичного гамильтониана в пространстве представленной функции следующее:

$$H|\Psi(I)\rangle = E|\Psi(I)\rangle. \quad (11)$$

Умножая левую сторону этого уравнения на произвольную компоненту, содержащую неколлективный фонон $B_{J_i}^+ |\psi_{c_i}\rangle$, получаем $\langle \psi_{c_i} B_{J_i} | H | \Psi(I) \rangle = E \langle \psi_{c_i} B_{J_i} | \Psi(I) \rangle$. Если в этом уравнении не рассматривать матричные элементы (МЭ), когда фононы B_1 и B_2 находятся в одной группе в соответствии с выражением для суммы в (10), то в более развернутом виде получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \langle \psi_{c_i} B_{J_i} | H | \psi_C(I) \rangle + \\ & + (\omega_i + E_{c_i} - E) \alpha_{J_i, c_i} + \\ & + \sum'_{J, c} \alpha_{J, c} \langle \psi_{c_i} B_{J_i} | H | B_J^+ \psi_c \rangle = 0, \end{aligned}$$

где штрих у суммы означает, что в ней отсутствует слагаемое с МЭ $\langle \psi_{c_i} B_{J_i} | H | B_{J_i}^+ \psi_{c_i} \rangle$. Это приводит к выражению для амплитуд

$$\alpha_{J_i, c_i} = \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{(\omega_i + E_{c_i} - E)} \left(\alpha_0 \langle \psi_{c_i} B_{J_i} | H | \psi_C(I) \rangle + \right.$$

$$\left. + \sum'_{J, c} \alpha_{J, c} \langle \psi_{c_i} B_{J_i} | H | B_J^+ \psi_c \rangle \right).$$

Из этого уравнения последовательно получаем все амплитуды по теории возмущений.

На первом этапе для $J_1^\pi = 2^+, 4^+, 6^+$

$$\alpha_{J_1, c_1} = -\frac{\alpha_0}{(\omega_1 + E_{c_1} - E)} \times \quad (13)$$

$$\times \langle \psi_{c_1} B_{J_1} | H | \psi_C(I) \rangle.$$

На втором этапе для $J_2^\pi = 8^+, 10^+$

$$\alpha_{J_2, c_2} = \frac{\alpha_0}{(\omega_2 + E_{c_2} - E)} \times \quad (14)$$

$$\times \sum_{J_1=4,6,c_1} \frac{\langle \psi_{c_1} B_{J_1} | H | \psi_C \rangle}{(\omega_1 + E_{c_1} - E)} \times$$

$$\times \langle \psi_{c_2} B_{J_2} | H | B_{J_1}^+ \psi_{c_1} \rangle.$$

При этом МЭ $\langle \psi_{c_1} B_{J_1=8,10} | H | \psi_C \rangle$ не рассматривался, как уже говорилось ранее, в силу его малости.

Наконец, на третьем этапе реализуется связь уже рассмотренных состояний с фононами с мультипольностью $J_3^\pi = 12^+, 14^+$:

$$\alpha_{J_3, c_3} = -\frac{1}{(\omega_3 + E_{c_3} - E)} \times \quad (15)$$

$$\times \sum_{J_2=8,10,c_2} \alpha_{J_2, c_2} \langle \psi_{c_3} B_{J_3} | H | B_{J_2}^+ \psi_{c_2} \rangle =$$

$$= -\frac{\alpha_0}{(\omega_3 + E_{c_3} - E)} \sum_{J_2=8,10,c_2} \frac{1}{(\omega_2 + E_{c_2} - E)} \times$$

$$\times \sum_{J_1=4,6,c_1} \frac{\langle \psi_{c_1} B_{J_1} | H | \psi_C \rangle}{(\omega_1 + E_{c_1} - E)} \times$$

$$\times \langle \psi_{c_2} B_{J_2} | H | B_{J_1}^+ \psi_{c_1} \rangle \langle \psi_{c_3} B_{J_3} | H | B_{J_2}^+ \psi_{c_2} \rangle.$$

Для фононных МЭ вводим обозначения, которые позволяют получить более компактные выражения для амплитуд:

$$\langle \psi_C(I) | H | B_{J_1}^+(n) \psi_{c_1} \rangle = \quad (16)$$

$$= \sum_{1,2;\tau} \gamma(C, c_1, J_1, \tau, 1, 2) \psi_{12}^{(J_1)}(n), \quad J_1^\pi = 4^+, 6^+,$$

$$\langle \psi_{c_2} B_{J_2}(n) | H | B_{J_1}^+(n') \psi_{c_1} \rangle = \quad (17)$$

$$= \sum_{7,9,4;\tau} \beta(C, c_2, c_1, J_2, J_1, \tau, 7, 9, 4) \times$$

$$\times \psi_{79}^{(J_2)}(n) \psi_{94}^{(J_1)}(n'),$$

где $J_1^\pi, J_2^\pi = 4^+ - 14^+$, суммирование по τ означает суммирование по нейтронам и протонам, $\psi_{12}^{(J)}(n)$ — амплитуды неколлективных фононов, которые рассматриваются в приближении Тамма–Данкова с учетом только изоскалярного канала взаимодействия, индексы “1”, “2” означают совокупность всех квантовых чисел одночастичных состояний, кроме магнитных; J, n — мультипольность фонона и его номер среди всех существующих в рамках рассматриваемого одночастичного базиса. Величины $\gamma(\dots)$ и $\beta(\dots)$ вычисляются с помощью принятого при микроскопическом обосновании МВБ1 отображения фононов на бозоны. При этом бозонный гамильтониан с рассчитываемыми параметрами представлен соотношениями (38)–(44) в работе [24]. Кратко его можно представить в виде

$$H_b = H_{\text{IBM1}}^{(0)} + \quad (18)$$

$$+ \sum_i (\omega_i + E_0^{(b)}) b_i^+ b_i + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)},$$

где $H_{\text{IBM1}}^{(0)}$ (1) является гамильтонианом МВБ1 с параметрами, определенными только через D -фононы, т.е. без учета неколлективных фононов, $E_0^{(b)}$ — энергетический сдвиг коллективных состояний в присутствии хотя бы одного b_i -бозона. Следует иметь в виду, что при решении задачи на собственные значения и функции используется теория возмущений в варианте Бриллюэна–Вигнера, эффективно отбрасываются те члены во втором порядке по взаимодействию, которые приводят к перенормировке стандартного гамильтониана МВБ1. В этом случае $H_{\text{IBM1}}^{(0)}$ заменяется на H_{IBM1} , т.е. учитывается перенормировка параметров. Величины ω_i — энергии b_i -бозонов. Не приводя конкретных выражений для операторов $V^{(1)}, V^{(2)}$ и $V^{(3)}$, что сделано в работе [24], отметим, что взаимодействие $V^{(1)}$ содержит бозонные операторы $(d^+ d)^{(J_i)} s^+ \cdot b_i$, $(d^+ (dd)^{(L)} s^+ s^+)^{(J_i)} \cdot b_i$, $(d^+ d^+)^{(J_i)} s \cdot b_i$, $(d^+ d^+)^{(L)} d^{(J_i)} \cdot b_i$ и эрмитово сопряженные к ним. Бозонные параметры при каждом из этих четырех членов типа (1) соотношения (6) определяются соответственно МЭ $\langle D | H | B^+ D^+ \rangle$; $\langle D | H | B^+ D^+ D^+ \rangle$; $\langle DD | H | B^+ \rangle$; $\langle DD | H | B^+ D^+ \rangle$, а их графическое представление дано на рис. 1.

Взаимодействие $V^{(2)}$ содержит операторы $((d^+ d^+)^{(L)} d^+)^{(J_i)} \cdot b_i s s$. Бозонные параметры при них определяются МЭ $\langle (DDD)^{(J)} | H | B_J^+ \rangle$, также

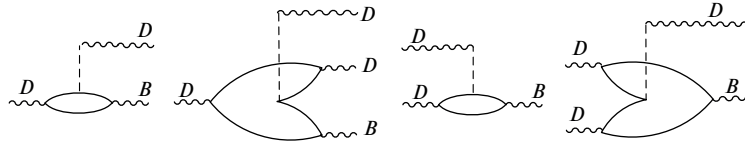


Рис. 1. Графическое изображение матричных элементов взаимодействия D - и B -фононов, соответствующее оператору $V^{(1)}$. Волнистой линией обозначается фотон, тонкой линией — квазичастица, вертикальной — взаимодействие.

членами типа (I) соотношения (6), их графическое представление дано на рис. 2. Отличие данных членов от всего ряда предыдущих в том, что один B -фотон связан с максимальным числом D -фононов. Таким образом, данный МЭ дает прямое взаимодействие коллективного состояния со спином 6^+ с однофотонным состоянием с той же мультипольностью. Данный МЭ не рассматривается при перенормировке бозонных параметров, так как члены $d^+d^+d^+ddd$ и $d^+d^+d^+dd$ в бозонном гамильтониане не рассматриваются.

Наконец, $V^{(3)}$ комбинируется из $(b_{i1}^+b_{i2})^{(2)} \cdot d^+s, (b_{i1}^+b_{i2})^{(L)} \cdot (d^+d^+)^{(L)}ss, (b_{i1}^+b_{i2})^{(L)} \cdot (d^+d)^{(L)}$. Бозонные параметры при каждом из этих трех членов типа (II) и (III) соотношений (7) и (8) определяются соответственно МЭ $\langle DB_{i1}|H|B_{i2}^+\rangle$; $\langle DDB_{i1}|H|B_{i2}^+\rangle$; $\langle DB_{i1}|H|B_{i2}^+D^+\rangle$, а их графическое представление дано на рис. 3.

Единственное отличие в рассматриваемом взаимодействии $V^{(3)}$ от его же, но в работе [24] заключается в том, что мультипольность бозонов рассматривается не до 10^+ , а до 14^+ .

Таким образом, параметры при рассмотренных членах взаимодействия находятся на основе вычисления МЭ в фермионном пространстве от квазичастичного гамильтониана по фотонным функциям с минимальным числом D -фононов, а учет многофотонности переносится на бозонную

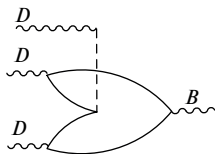


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для оператора $V^{(2)}$. Обозначения как на рис. 1.

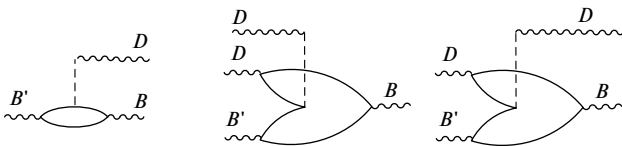


Рис. 3. То же, что на рис. 1, но для оператора $V^{(3)}$. Обозначения как на рис. 1.

задачу через расчет МЭ от различных комбинаций d -бозонов в пространстве произвольных $SU(6)$ -функций МВБ1. Конкретно это требует расчета бозонных матричных элементов от многобозонных операторов

$$d^+, (d^+d)^{(L)}, (d^+d^+d^+)^{(L)}, (d^+d^+)^{(L)}, \quad (19)$$

$$[d^+(dd)^{(L)}]^{(\lambda)}, [(d^+d)^{(L)}d]^{(\lambda)}.$$

Их расчет выполнен с помощью однобозонных генеалогических коэффициентов.

Так как решение задачи на собственные значения и функции осуществляется с помощью теории возмущений, о чем говорилось выше, то необходимо произвести суммирование по неколлективным фотонам. Их структура рассматривается в приближении Тамма—Данкова с учетом только изоскалярных мультипольных сил. В этом случае энергии фотонных с мультипольностью J находятся из уравнения

$$F^{(J)}(\omega) = \sum_{1,2;\tau} \frac{q_{12}^{(J)2}}{E_{12} - \omega} - \frac{2}{\tilde{\kappa}} = 0; \quad (20)$$

$$q_{12}^{(J)} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}}(-1)^{l_2} \times$$

$$\times \langle 1||q^{(J)}||2\rangle(u_1v_2 + v_1u_2),$$

где E_{12} — двухквазичастичная энергия, $\tilde{\kappa}$ — константа изоскалярных факторизованных сил, u_1, v_2 — боголюбовские параметры.

Каждому корню уравнения будет соответствовать соответствующая амплитуда фотона

$$\psi_{12}^{(J)}(n) = -\frac{1}{\sqrt{F^{(J)}(\omega_n)}} \frac{q_{12}^{(J)}}{E_{12} - \omega_n}. \quad (21)$$

Далее производится суммирование по всем фотонам с фиксированной мультипольностью. Делается это с помощью леммы Жордана и теоремы о вычетах. В результате получаются выражения для суммирования произведения амплитуд неколлективных фотонных. Соответствующие формулы приведены в Приложении.

Это позволяет для амплитуд $\alpha_{J,c}$ (13)–(15) с учетом обозначений для МЭ (16) и (17) получить

следующие выражения:

пользуются

$$\left. \frac{\alpha_{J_1, c_1}}{\alpha_0} \right|_{J_1=2,4,6} = -\frac{1}{\omega_{J_1}(n) + E_{c_1} - E} \times \quad (22)$$

$$\times \sum_{1,2;\tau} \gamma(C, c_1, J_1, \tau, 1, 2) \psi_{12}^{(J_1)}(n),$$

$$\left. \frac{\alpha_{J_2, c_2}}{\alpha_0} \right|_{J_2=8,10} = \frac{1}{\omega_{J_2}(n) + E_{c_2} - E} \times \quad (23)$$

$$\times \sum_{1,2;\tau} \omega_2(C, c_2, J_2, \tau, 1, 2) \psi_{12}^{(J_2)}(n),$$

$$\left. \frac{\alpha_{J_3, c_3}}{\alpha_0} \right|_{J_3=12,14} = -\frac{1}{\omega_{J_3}(n) + E_{c_3} - E} \times \quad (24)$$

$$\times \sum_{1,2;\tau} \omega_3(C, c_3, J_3, \tau, 1, 2) \psi_{12}^{(J_3)}(n).$$

$$\omega_2(C, c_2, J_2, \tau, 1, 2) = \quad (25)$$

$$= \sum_{J_1=4,6;c_1;n} \frac{\sum_{1',2';\tau'} \gamma(C, c_1, J_1, \tau', 1', 2') \psi_{1'2'}^{(J_1)}(n)}{\omega_{J_1}(n) + E_{c_1} - E} \times$$

$$\times \sum_4 \beta(C, c_2, c_1, J_2, J_1, \tau, 1, 2, 4) \psi_{24}^{(J_1)}(n) =$$

$$= \sum_{J_1=4,6;c_1} \left(\sum_4 \frac{\gamma(C, c_1, J_1, \tau, 2, 4)}{E_{24}^{(J_1)} + E_{c_1} - E} \times \right.$$

$$\times \beta(C, c_2, c_1, J_2, J_1, \tau, 1, 2, 4) -$$

$$- \frac{1}{F^{(J_1)}(E - E_{c_1})} \sum_{1',2';\tau'} \frac{\gamma(C, c_1, J_1, \tau', 1', 2') q_{1'2'}^{(J_1)}}{E_{1'2'}^{(J_1)} + E_{c_1} - E} \times$$

$$\times \sum_4 \frac{\beta(C, c_2, c_1, J_2, J_1, \tau, 1, 2, 4) q_{24}^{(J_1)}}{E_{24}^{(J_1)} + E_{c_1} - E} \Bigg),$$

Здесь помимо введенных ранее величин $\gamma(\dots)$ ис-

$$\omega_3(C, c_3, J_3, \tau, 1, 2) = \quad (26)$$

$$= \sum_{J_2=8,10;c_2;n} \frac{\sum_{1',2';\tau'} \omega_2(C, c_2, J_2, \tau', 1', 2') \psi_{1'2'}^{(J_2)}(n)}{\omega_{J_2}(n) + E_{c_2} - E} \sum_4 \beta(C, c_3, c_2, J_3, J_2, \tau, 1, 2, 4) \psi_{24}^{(J_2)}(n) =$$

$$= \sum_{J_2=8,10;c_2} \left(\sum_4 \frac{\omega_2(C, c_2, J_2, \tau, 2, 4)}{E_{24}^{(J_2)} + E_{c_2} - E} \beta(C, c_3, c_2, J_3, J_2, \tau, 1, 2, 4) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{F^{(J_2)}(E - E_{c_2})} \sum_{1',2';\tau'} \frac{\omega_2(C, c_2, J_2, \tau', 1', 2') q_{1'2'}^{(J_2)}}{E_{1'2'}^{(J_2)} + E_{c_2} - E} \sum_4 \frac{\beta(C, c_3, c_2, J_3, J_2, \tau, 1, 2, 4) q_{24}^{(J_2)}}{E_{24}^{(J_2)} + E_{c_2} - E} \right).$$

Осуществляя еще один раз суммирование по неколлективным фононам, уравнение на собственные значения $\langle \Psi | H - E | \Psi \rangle = 0$ приобретает вид

$$E_C - E - F_1 - F_2 - F_3 = 0, \quad (27)$$

где функции F_i имеют следующие выражения:

$$F_1 = \sum_{J_1=2,4,6;c_1} \left\{ \sum_{1,2;\tau} \frac{|\gamma(C, c_1, J_1, \tau, 1, 2)|^2}{E_{12}^{(J_1)} + E_{c_1} - E} - \right. \quad (28)$$

$$- \left(\sum_{1,2;\tau} \frac{\gamma(C, c_1, J_1, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J_1)}}{E_{12}^{(J_1)} + E_{c_1} - E} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{F^{(J_1)}(E - E_{c_1})} +$$

$$+ \left(\sum_{1,2;\tau} \frac{\gamma(C, c_1, J_1, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J_1)}}{E_{12}^{(J_1)} - \omega_0} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{\delta_{J_1,2}}{(E - E_{c_1} - \omega_0) F^{(J_1)}(\omega_0)} \Bigg\},$$

$$F_2 = \sum_{J_2=8,10;c_2} \left\{ \sum_{1,2;\tau} \frac{|\omega_2(C, c_2, J_2, \tau, 1, 2)|^2}{E_{12}^{(J_2)} + E_{c_2} - E} - \right. \quad (29)$$

$$- \left(\sum_{1,2;\tau} \frac{\omega_2(C, c_2, J_2, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J_2)}}{E_{12}^{(J_2)} + E_{c_2} - E} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{F^{(J_2)}(E - E_{c_2})} \Bigg\},$$

$$F_3 = \sum_{J_3=12,14;c_3} \left\{ \sum_{1,2;\tau} \frac{|\omega_3(C, c_3, J_3, \tau, 1, 2)|^2}{E_{12}^{(J_3)} + E_{c_3} - E} - \left(\sum_{1,2;\tau} \frac{\omega_3(C, c_3, J_3, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J_3)}}{E_{12}^{(J_3)} + E_{c_3} - E} \right)^2 \times \frac{1}{F^{(J_3)}(E - E_{c_3})} \right\}. \quad (30)$$

При вычислении МЭ квадрупольного электрического оператора нас будут интересовать в основном переходы вдоль ираст-полосы. Для

этого достаточно рассматривать переходы между компонентами волновой функции с одинаковыми неколлективными фононами или бозонами, учитывая действие оператора $E2$ -перехода между D -фононными или d -бозонными состояниями. Если ввести более универсальные обозначения для $\gamma(\dots)$, $\omega_2(\dots)$, $\omega_3(\dots)$, заменив их на $\omega(\dots)$, но без индекса, а именно, по правилу, $\omega(\dots) = \gamma(\dots)$ для $J^\pi = J_1^\pi = 2^+, 4^+, 6^+$; $\omega(\dots) = \omega_2(\dots)$ для $J^\pi = J_2^\pi = 8^+, 10^+$; $\omega(\dots) = \omega_3(\dots)$ для $J^\pi = J_3^\pi = 12^+, 14^+$, то приведенный МЭ $E2$ -переходов будет иметь вид

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{T}(E2) | \Psi_i \rangle &= \alpha_{0f} \alpha_{0i} \left\{ \langle \psi_C^{(f)} | \hat{T}(E2) | \psi_C^{(i)} \rangle + \right. \\ &+ \sum_{J=2}^{14} \sum_{c_1(f), c_2(i)} \Re \langle c_1 | \hat{T}(E2) | c_2 \rangle \sum_{1,2;\tau} \sum_{1',2';\tau'} \omega(C_f, c_1, J, \tau, 1, 2) \omega(C_i, c_2, J, \tau', 1', 2') \times \\ &\times \sum_n \frac{\psi_{12}^{(J)}(n) \psi_{1'2'}^{(J)}(n)}{(\omega_J(n) + E_{c_1} - E_f)(\omega_J(n) + E_{c_2} - E_i)} \Big\} = \\ &= \alpha_{0f} \alpha_{0i} \left\{ \langle \psi_C^{(f)} | \hat{T}(E2) | \psi_C^{(i)} \rangle + \sum_{J=2}^{14} \sum_{c_1(f), c_2(i)} \Re \langle c_1 | \hat{T}(E2) | c_2 \rangle \times \right. \\ &\times \left[\sum_{1,2;\tau} \frac{\omega(C_f, c_1, J, \tau, 1, 2)}{E_{12}^{(J)} - \varepsilon_1} \frac{\omega(C_i, c_2, J, \tau, 1, 2)}{E_{12}^{(J)} - \varepsilon_2} - \right. \\ &- \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon_1)} \sum_{1,2;\tau} \frac{\omega(C_f, c_1, J, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J)}}{E_{12}^{(J)} - \varepsilon_1} \sum_{1',2';\tau'} \frac{\omega(C_i, c_2, J, \tau', 1', 2') q_{1'2'}^{(J)}}{E_{1'2'}^{(J)} - \varepsilon_1} - \right. \\ &- \frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon_2)} \sum_{1,2;\tau} \frac{\omega(C_f, c_1, J, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J)}}{E_{12}^{(J)} - \varepsilon_2} \sum_{1',2';\tau'} \frac{\omega(C_i, c_2, J, \tau', 1', 2') q_{1'2'}^{(J)}}{E_{1'2'}^{(J)} - \varepsilon_2} \Big) - \\ &\left. \left. - \frac{\delta_{J,2}}{F^{(J)}(\omega_0)(\varepsilon_1 - \omega_0)(\varepsilon_2 - \omega_0)} \sum_{1,2;\tau} \frac{\omega(C_f, c_1, J, \tau, 1, 2) q_{12}^{(J)}}{(E_{12}^{(J)} - \omega_0)} \sum_{1',2';\tau'} \frac{\omega(C_i, c_2, J, \tau', 1', 2') q_{1'2'}^{(J)}}{(E_{1'2'}^{(J)} - \omega_0)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= E_f - E_{c_1}; \quad \varepsilon_2 = E_i - E_{c_2}; \\ \Re &= (-1)^{I_f + J + I_{c_2}} \begin{Bmatrix} I_f & 2 & I_i \\ I_{c_2} & J & I_{c_1} \end{Bmatrix} \times \\ &\times \sqrt{(2I_i + 1)(2I_f + 1)}. \end{aligned}$$

Переходы с неколлективных компонент в коллективные учитываются при перенормировках эффективных зарядов [26], что позволяет рассматривать

МЭ только между коллективными компонентами, выраженными через d -бозоны, не затрагивая b_J -бозоны. При этом бозонный оператор $\hat{T}(E2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{T}(E2) &= e^* (d^+ s + s^+ d + \chi_{E2} d^+ d)^{(2)} + \\ &+ e_0^* (s^+ (d^+ d)^{(0)} d + d^+ (d^+ d)^{(0)} s)^{(2)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Микроскопический расчет его параметров с учетом перенормировок представлен в работе [26].

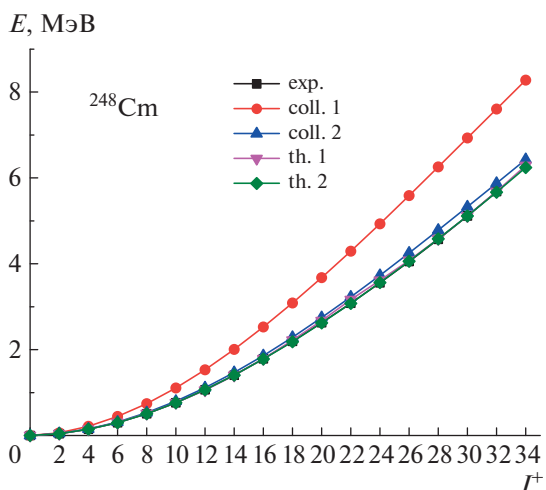


Рис. 4. Энергии состояний ираст-полосы: “coll.1” и “coll.2” — два варианта расчета без учета каналов взаимодействия $V^{(2)}$, $V^{(3)}$; “th.1”, “th.2” — теоретические (в двух вариантах расчета) и экспериментальные [34] значения (в масштабе рисунка они практически сливаются).

2.2. Результаты расчетов

С единым набором параметров среднего поля и факторизованных сил рассчитывались как амплитуды D -фононов (2), параметры гамильтониана МВБ1 (1) с учетом перенормировок, так и параметры расширенного бозонного гамильтониана (18).

В настоящей работе МЭ квазичастичного остаточного взаимодействия в частично-дырочном и частично-частичном каналах факторизуются единым образом в соответствии с [32]. Приведенные МЭ мультипольных операторов определяются через производную по радиусу от центральной части среднего поля, т.е. $q = \partial V(r)/\partial r Y_J$, и константы $G^{(2)} = G_{\tau\tau}^{(2)}$, $G_{\nu\pi}^{(2)} = 0$ и $\kappa_{\tau\tau'}^{(2)}$ квадрупольных факторизованных взаимодействий в частично-частичном (квадрупольное спаривание) и в частично-дырочном каналах. Для сил притяжения приняты знаки констант $G^{(2)}$ и $\kappa_{\tau\tau'}^{(2)} > 0$. Их значения в реальных расчетах варьируются относительно оценок, полученных в [32], и в этих единицах равны $G^{(2)} = 0.625$. Оценка для изовекторной константы через изоскалярную κ_0 , полученную там же, равна $\kappa_1 = -0.6\kappa_0$. Это приводит к $\kappa_{nn} = \kappa_{pp} = 0.4\kappa_0$; $\kappa_{pn} = 1.6\kappa_0$ и $\kappa_0 = 1.09$. Среднее поле принимается в виде сферически-симметричного потенциала Вудса–Саксона. Его параметры взяты из работы [33] и дополнительно не варьировались. Использовался широкий спектр одночастичных состояний, вплоть до резонансных состояний, — всего 40 (njl) протонных и столько же нейтронных уровней. Константы монопольного

спаривания определялись по значениям парных энергий. Мера корреляций в основном состоянии $r = \sum \varphi^2 / \sum \psi^2$ была принята весьма малой, равной 0.00225. С данными силовыми константами были произведены расчеты, в результате которых без учета каналов взаимодействия $V^{(2,3)}$ получены значения параметров H_{IBM} (1). Следует отметить, что для рассматриваемого весьма тяжелого ядра ^{248}Cm задача оказывается сильно нелинейной, что привело к возможности получения различных параметров гамильтониана. Из возможных вариантов представлены два, а соответствующие параметры (1) приведены в табл. 1, из которой видно, что их различия не слишком велики, а различия в бозонных энергиях, отмеченных на рис. 4 как “coll.”, весьма заметны. Существенная нелинейность задачи коррелирует и со значением среднего числа квадрупольных бозонов уже в основном состоянии, и, как видно из табл. 1, в первом варианте оно равно 16.7, а во втором — 15. Причем полное число бозонов равно $\Omega = 28$. Соответственно, это же приводит к существенному опусканию основного состояния $SU(6)$ -функции бозонной задачи относительно d -бозонного вакуума в первом варианте на 25.5 МэВ, во втором — на 25.4. Для двух представленных вариантов расчета были взяты различные силовые константы спаривания $G_n^{(0)}$ и $G_p^{(0)}$. В первом варианте это 0.0505 и 0.0729 МэВ, во втором — 0.052 и 0.073.

Как следует из анализа энергий состояний в переходных ядрах и как было учтено в работе [35], коллективные состояния, построенные на высокоспиновых фононах или бозонах, после пересечения полос могут отличаться в сторону меньшей коллективности. Это проявляется в больших энергиях d -бозонных состояний по сравнению с бозонными состояниями, которые строятся на фононном вакууме или в меньших значениях моментов инерции. При этом чем больше коллективность, тем меньше их различия. В силу этого при расчете свойств рассматриваемого ядра такое различие относительно энергий возбуждения не учитывалось. Однако следует иметь в виду, что явное присутствие высокоспинового двухквазичастичного возбуждения, сформированного из уровней среднего поля в валентной оболочке, приводит к сокращению конфигурационного пространства, формирующего амплитуды D -фононов. Если это может слабо сказаться на энергиях возбуждения коллективных состояний, то на энергию, формирующую основание полос, это может сказаться сильнее. Так как в работе структура коллективных состояний в присутствии высокоспиновой пары отдельно не рассматривалась, то соответствующий сдвиг следует учитывать как феноменологический параметр в данной теории. Следует добавить, что учет $V^{(2,3)}$

Таблица 1. Параметры H_{IBM} в МэВ, полученные без учета каналов взаимодействия $V^{(2,3)}$; величина n_d есть среднее число бозонов в основном состоянии, т.е. $(n_d)_{I^\pi=0^+}$, максимальное число бозонов $\Omega = 28$, $E(0_1^+)$ — энергии основных состояний, полученные с соответствующими параметрами относительно d -бозонного вакуума

Вариант	ε_d	k_1	k_2	C_0	C_2	C_4	n_d	$E(0_1^+)$	$E_0^{(b)}$
I	−0.7651	−0.0388	0.0226	0.0484	0.133	0.0255	16.7	−25.49	−0.83
II	−0.90503	−0.0354	0.02009	0.1198	0.0843	0.0297	15.0	−25.36	1.95

Таблица 2. Параметры оператора (32) $E2$ -переходов, e^* , e_0^* (в е фм²) и χ_{E2} (безразмерен)

Вариант	e^*	χ_{E2}	e_0^*
I	9.9939	−0.991	0.0728
II	9.3154	−1.0917	0.1473

канала взаимодействия приводит к сдвигу основного состояния, в данном случае — к заметному. Если в первом варианте расчета это −1.77, то во втором −0.68 МэВ. Так как за счет четырехквазичастичных мод, которые не рассматриваются, возможен также энергетический сдвиг полос, построенных не на основном состоянии, то вводимый феноменологически сдвиг может быть как отрицательным, так и положительным. В гамильтониане (18) он обозначен как $E_0^{(b)}$ и для первого варианта принят равным −0.83 МэВ, для второго он, наоборот, положителен, а именно 1.95.

Для полосы основного состояния в литературе часто используют обозначение g -полосы, которая с некоторого спина перестает быть иррастной, а иррастной становится полоса, построенная на высокоспиновом квазичастичном возбуждении, соответственно, она называется s -полосой. Для рассматриваемого ядра, в отличие от предыдущих расчетов более легких ядер, не вводится ослабление связи коллективных и квазичастичных состояний.

На рис. 4 также приведены результаты расчета с учетом $V^{(1,2,3)}$ (взаимодействие $V^{(1)}$ также включено, несмотря на то, что оно уже учтено при рассмотрении перенормировок бозонных параметров, но во втором порядке по взаимодействию его надо учитывать именно совместно с $V^{(2,3)}$ аналогично с эффектом интерференции), обозначаемые “th.”. На этом же рисунке приведены экспериментальные значения — “exp.”, которые по существу совпадают с теоретическими значениями в представленном масштабе. Реальное различие не превышает 85 кэВ для первого варианта расчета и 10 кэВ для второго при $I^\pi < 32^+$. Несмотря на малое различие расчетных значений энергий от экспериментальных во втором варианте, тем не менее не воспроизводится небольшое изменение в наклоне момента инерции

от квадрата частоты вращения, что демонстрирует, насколько тонким является рассмотренный эффект в данной массовой области.

Чтобы увидеть различие двух вариантов расчета, на рис. 5 представлены зависимости моментов инерции от квадрата частоты переходов. Экспериментальная кривая обратного загиба не дает, наблюдается лишь слабый излом. В первом варианте, несмотря на то, что в соответствии с рис. 4 имеется удовлетворительное согласие расчета и эксперимента, проявляется обратный загиб, который свидетельствует о том, что первый вариант все же дает пересечение полос. Это же подтверждает и бозонный состав волновых функций, представленный на рис. 6. Хотя, как увидим ниже, теоретические значения $B(E2)$ при этом во всей ирраст-полосе не имеют заметных спадов. В этом случае рассмотрение моментов инерции проявляет себя как исключительно чувствительный инструмент для выявления природы состояний ирраст-полосы. Следует отметить, что рассмотрение коллективных состояний в околофермиевской области в рамках феноменологии МВБ1 [20] приводит к удовлетворительному описанию ирраст-полос

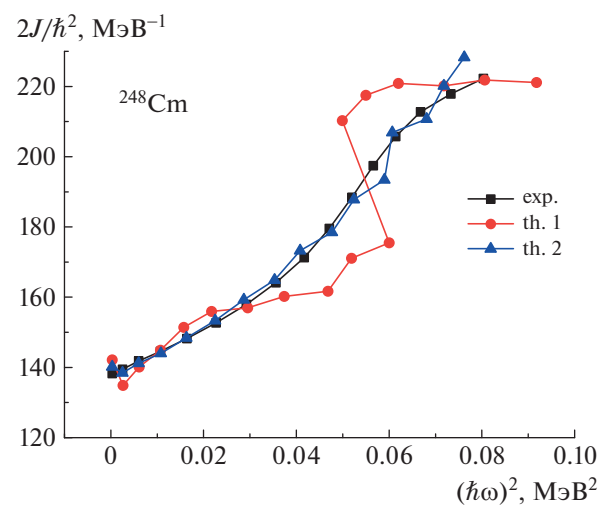


Рис. 5. Зависимость эффективного момента инерции от $(\hbar\omega)^2$ для ирраст-полосы в ядре ^{248}Cm по экспериментальным значениям энергий и для двух вариантов расчета.

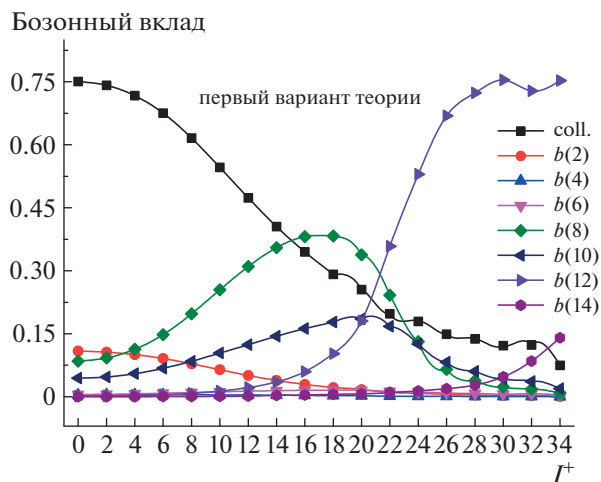


Рис. 6. Бозонный состав волновых функций ираст-полос в первом варианте расчета, “coll.” — вклад в функцию компонент, содержащих только d -бозоны; $b(J)$ — вклад от всех компонент, содержащих различные бозоны с фиксированным моментом J , т.е. $\sum_{i_1, c_1} |\alpha_{J, i_1, c_1}|^2$, где амплитуды α определяются в (9).

вплоть до предельно известных спинов. Это может свидетельствовать о том, что неколлективные высокоспиновые фононы или квазичастичные пары оказывают минимальное влияние на наблюдаемые состояния. Этому соответствует второй вариант расчета. Уже расчет энергий только с гамильтонианом МВБ1 (1) дает значения энергий, близкие к экспериментальным, а последующий учет высокоспиновых мод оказывает не такое большое влияние на результат. Происходит это из-за заметного сдвига энергий, учитываемого за счет введенного параметра $E_0^{(b)}$, приведенного в табл. 1. Именно второй вариант дает удовлетворительное описание

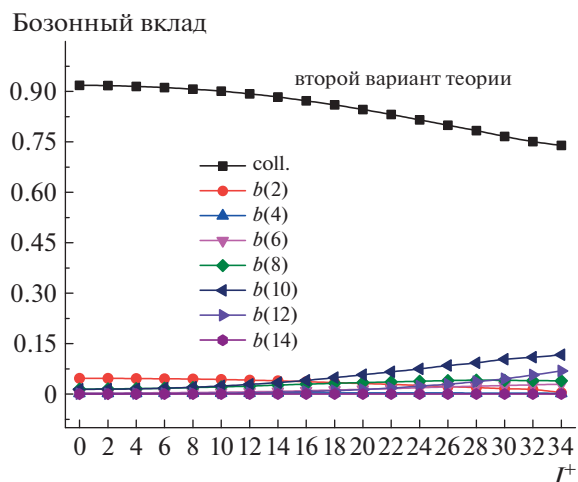


Рис. 7. То же, что и на рис. 6, но для второго варианта расчета.

моментов инерции, приведенных на рис. 5. Таким образом, можно предположить, что отсутствие пересечения полос в рассматриваемой массовой области связано с увеличением энергий состояний, построенных на неколлективных возбуждениях за счет сужения конфигурационного пространства, на котором строятся D -фононные возбуждения.

Величина данного сдвига, $E_0^{(b)}$, принята равной 1.95 МэВ и может считаться небольшой по сравнению с $E(0_1^+) = -25.36$ МэВ, также приведенной в табл. 1. Следует также учитывать малость энергий ираст-полосы. Относительная малость энергий ираст-полосы при спинах $I^\pi < 34^+$ приводит к тому, что пересечение основной и s -полос может произойти при больших спинах по сравнению с теми, что известны из эксперимента.

По результатам первого варианта расчета пересечение полос, как это видно из рис. 6, осуществляется при спинах $I^\pi = 22^+, 24^+$ за счет замещения, в том числе и чисто коллективной компоненты на компоненту, включающую квазичастичную пару с моментом именно 12^+ , а не 14^+ . Связано это оказалось с заметным превышением МЭ $\langle \psi_{c_2} B_{J_2=12} | H | B_{J_1=8,10}^+ \psi_{c_1} \rangle$ над МЭ $\langle \psi_{c_2} B_{J_2=14} | H | B_{J_1=10}^+ \psi_{c_1} \rangle$.

Для второго варианта расчета бозонный состав волновых функций представлен на рис. 7. Из него видно, что для всех состояний вплоть до спина 32^+ их природа остается практически чисто коллективной. Компоненты с высокоспиновыми парами начинают быть заметными лишь с состояниями с $I^\pi = 20^+$, доходя далее до 13%.

В работе [36] было отмечено, что только анализ энергетических спектров не может говорить о природе бэкбендинга и механизме его формирования.

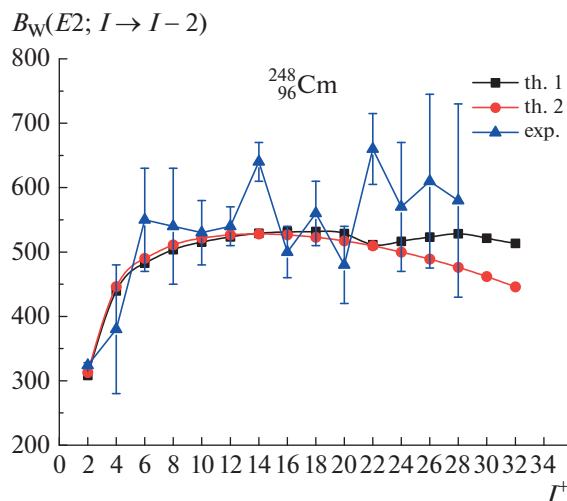


Рис. 8. Теоретические и экспериментальные [34] значения вероятностей $E2$ -переходов внутри ираст-полосы.

Необходимо привлекать дополнительные данные. К ним, в частности, относятся вероятности переходов между состояниями. Величины $B(E2; I \rightarrow I - 2)$ представлены на рис. 8, где расчетные значения получены без введения эффективных зарядов [26]. Параметры оператора $E2$ -переходов (32) приведены в табл. 2.

То, что при этом удается воспроизвести абсолютные значения $B(E2)$, связано не только с использованием большого одночастичного базиса, но и с учетом эффекта поляризации фононного вакуума (см. [26]). Этот эффект вызван примесью к фононному вакууму двухфононных состояний DB , он существенен при рассмотрении фононов в приближении Тамма–Данкова, но его нет в приближении КМСФ, а в нашем случае он возникает из-за используемой модификации КМСФ.

Как видно из рис. 8, оба варианта расчета в пределах экспериментальной неопределенности дают примерно одинаковое качество описания измерений. В методическом плане любопытен первый вариант тем, что, хотя он дает пересечение полос, но при этом заметного уменьшения значений $B(E2)$ не происходит.

По нашему мнению, в рассматриваемом тяжелом ядре и во всей соответствующей области реализуется именно то, что дается в описании через второй вариант расчета.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ротационных полосах тяжелых и сверхтяжелых ядер может проявляться ряд особенностей [13–17, 37–39]. Одна из них — отсутствие обратного загиба (бэкбендинга) в зависимости момента инерции от квадрата частоты вращения — проанализирована в настоящей работе с использованием расширенной модели взаимодействующих бозонов.

В рамках микроскопической версии МВБ1 с использованием элементарных мод и эффективного факторизованного взаимодействия на основе сферического одночастичного базиса были проанализированы свойства состояний ираст-полосы в ядре $^{248}\text{См}$. Выявлена возможная причина отсутствия пересечения полос в данной массовой области. Включение в модель бозонов с высокими спинами ($J^\pi > 10^+$) позволило существенно расширить область применения модели как для описания эффектов пересечения полос, так и для его отсутствия в данной массовой области при довольно высоких спинах (до $I^\pi \leq 34^+$). Именно факт отсутствия пересечения полос делает тяжелые и сверхтяжелые ядра, возможно, самым подходящим полигоном, на котором можно использовать традиционные ядерные модели.

Для проведения экспериментов в области сверхтяжелых ядер крайне важно иметь представление о свойствах хотя бы нескольких низлежащих уровней в исследуемых ядрах [40]. Интерпретация полученных экспериментальных данных требует применения и развития адекватных теоретических моделей. Развита в настоящей работе модель позволила успешно описать экспериментальные данные по моментам инерции для ядра $^{248}\text{См}$ и по величинам $B(E2)$ вплоть до высоких значений спина уровней ираст-полосы. Модель является перспективным инструментом как для описания, так и для предсказания свойств ираст-полос в широкой области атомных ядер, включая тяжелые и сверхтяжелые ядра.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для функции $F^{(J)}(\varepsilon)$ (20) и амплитуд фононов $\psi_{\tau 12}^{(J)}(n)$ (21) позволяют с помощью леммы Жордана и теоремы о вычетах получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\psi_{\tau 12}^{(J)}(n) \psi_{\tau' 34}^{(J)}(n)}{\varepsilon - \omega_n} &= \\ &= \frac{q_{\tau 12}^{(J)} q_{\tau' 34}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon)(E_{34} - \varepsilon) F^{(J)}(\varepsilon)} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{\tau \tau'} \frac{\delta_{13} \delta_{24} + (-1)^{j_1 - j_2 + J} \delta_{14} \delta_{23}}{E_{12} - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Если нижайший фонон именно квадрупольного типа ($n = 0$) в рассматриваемой сумме не учитывать, то имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \frac{\psi_{\tau 12}^{(J)}(n) \psi_{\tau' 34}^{(J)}(n)}{\varepsilon - \omega_n} &= \\ &= \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon)} \frac{q_{\tau' 34}^{(J)}}{(E_{34} - \varepsilon)} \frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon)} - \\ &- \frac{1}{2} \delta_{\tau \tau'} \frac{\delta_{13} \delta_{24} + (-1)^{j_1 - j_2 + J} \delta_{14} \delta_{23}}{E_{12} - \varepsilon} - \\ &- \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \omega_0)} \frac{q_{\tau' 34}^{(J)}}{(E_{34} - \omega_0)} \frac{1}{F^{(J)}(\omega_0)} \frac{1}{(\varepsilon - \omega_0)} \delta_{J,2}. \end{aligned}$$

Это позволяет получить необходимые выражения для суммирования по фононам Тамма–Данкова:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \frac{\psi_{\tau 12}^{(J)}(n) \psi_{\tau' 1' 2'}^{(J)}(n)}{(\omega_n - \varepsilon_1)(\omega_n - \varepsilon_2)} \Big|_{\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2} &= \\ &= \delta_{\tau \tau'} \delta_{1' 1} \delta_{2' 2} \frac{1}{(E_{12} - \varepsilon_1)(E_{12} - \varepsilon_2)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon_1)} \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon_1)} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \varepsilon_1)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon_2)} \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon_2)} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \varepsilon_2)} \right) - \\
& \quad - \frac{\delta_{J,2}}{F^{(J)'}(\omega_0)(\varepsilon_1 - \omega_0)(\varepsilon_2 - \omega_0)} \times \\
& \quad \times \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \omega_0)} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \omega_0)}, \\
& \sum_{n>0} \frac{\psi_{\tau 12}^{(J)}(n) \psi_{\tau' 1' 2'}^{(J)}(n)}{(\omega_n - \varepsilon)^2} = \delta_{\tau \tau'} \delta_{1' 1} \delta_{2' 2} \frac{1}{(E_{12} - \varepsilon)^2} + \\
& \quad + \frac{F^{(J)}(\varepsilon)}{F^{(J)2}(\varepsilon)} \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon)} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \varepsilon)} - \\
& \quad - \frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon)} \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon)^2} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \varepsilon)} - \\
& \quad - \frac{1}{F^{(J)}(\varepsilon)} \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \varepsilon)} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \varepsilon)^2} - \\
& \quad - \frac{\delta_{J,2}}{F^{(J)'}(\omega_0)(\varepsilon - \omega_0)^2} \frac{q_{\tau 12}^{(J)}}{(E_{12} - \omega_0)} \frac{q_{\tau' 1' 2'}^{(J)}}{(E_{1' 2'} - \omega_0)}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Ц. Оганесян, Вестн. РАН **90**, 312 (2020) [Yu. Ts. Oganessian, Herald Russ. Acad. Sci. **90**, 207 (2020)].
2. Yu. Ts. Oganessian and V. K. Utyonkov, Nucl. Phys. A **944**, 62 (2015).
3. Yu. Ts. Oganessian, V. K. Utyonkov, N. D. Kovrizhnykh, *et al.*, Phys. Rev. C **106**, L031301 (2022), doi: 10.1103/PhysRevC.106.L031301
4. Yu. Ts. Oganessian, V. K. Utyonkov, D. Ibadullayev, *et al.*, Phys. Rev. C **106**, 024612 (2022), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.106.024612>
5. Yu. Ts. Oganessian, A. Sobiczewski, and G. M. Ter-Akopian, Phys. Scr. **92**, 023003 (2017).
6. V. Utyonkov, Yu. Ts. Oganessian, S. Dmitriev, *et al.*, EPJ Web Conf. **131**, 06003 (2016).
7. S. A. Giuliani, Z. Matheson, W. Nazarewicz, *et al.*, Rev. Mod. Phys. **91**, 011001 (2019).
8. M. Block, F. Giaccoppo, F.-P. Heßberger, and S. Raeder, Riv. Nuovo Cimento **45**, 279 (2022).
9. M. S. Tezekbayeva, A. V. Yeregin, A. I. Svirikhin, *et al.*, Eur. Phys. J. A **58**, 52 (2022).
10. K. Hauschild, A. Lopez-Martens, R. Chakma, *et al.*, Eur. Phys. J. A **58**, 6 (2022), <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-021-00657-8>
11. K. Kessaci, B. J. P. Gall, O. Dorvaux, A. Lopez-Martens, R. Chakma, K. Hauschild, M. L. Chelnokov, V. I. Chepigin, M. Forge, A. V. Isaev, I. N. Izosimov, D. E. Katrasev, A. A. Kuznetsova, O. N. Malyshev, R. Mukhin, J. Piot, *et al.*, Phys. Rev. C **104**, 044609 (2021), doi: 10.1103/PhysRevC.104.044609
12. A. Sobiczewski and K. Pomorski, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 292 (2007).
13. R.-D. Herzberg and D. M. Cox, Radiochim. Acta **99**, 441 (2011).
14. D. Ackermann and Ch. Theisen, Phys. Scr. **92**, 083002 (2017).
15. D. Ackermann, EPJ Web Conf. **223**, 01001 (2019).
16. R.-D. Herzberg, EPJ Web Conf. **131**, 02004 (2016), doi: 10.1051/epjconf/201613102004
17. Ch. Theisen, P. T. Greenlees, T.-L. Khoo, P. Chowdhury, and T. Ishi, Nucl. Phys. A **944**, 333 (2015).
18. B. Nerlo-Pomorska, K. Pomorski, P. Quentin, and J. Bartel, Phys. Scr. **89**, 054004 (2014).
19. P. T. Greenlees, J. Rubert, J. Piot, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **109**, 012501 (2012).
20. А. Д. Ефимов, И. Н. Изосимов, ЯФ **84**, 421 (2021) [A. D. Efimov and I. N. Izosimov, Phys. At. Nucl. **84**, 660 (2021)].
21. А. Д. Ефимов, В. М. Михайлов, Изв. РАН. Сер. физ. **82**, 1395 (2018) [A. D. Efimov and V. M. Mikhajlov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **82**, 1266 (2018)].
22. А. Д. Ефимов, В. М. Михайлов, Изв. РАН. Сер. физ. **83**, 1244 (2019) [A. D. Efimov and V. M. Mikhajlov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **83**, 1136 (2019)].
23. А. Д. Ефимов, И. Н. Изосимов, ЯФ **84**, 298 (2021) [A. D. Efimov and I. N. Izosimov, Phys. At. Nucl. **84**, 408 (2021)].
24. А. Д. Ефимов, ЯФ **83**, 380 (2020) [A. D. Efimov, Phys. At. Nucl. **83**, 651 (2020)].
25. M. Diebel and U. Mosel, Z. Phys. A **303**, 131 (1981).
26. А. Д. Ефимов, В. М. Михайлов, Изв. РАН. Сер. физ. **77**, 948 (2013) [A. D. Efimov and V. M. Mikhajlov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **77**, 862 (2013)].
27. D. Janssen, R. V. Jolos, and F. Donau, Nucl. Phys. A **224**, 93 (1974).
28. A. Arima and F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **35**, 1069 (1975).
29. T. Marumori, K. Takada, and F. Sakata, Prog. Theor. Phys. Suppl. **71**, 1 (1981).
30. Н. Марч, У. Янг, С. Сампантхар, *Проблема многих тел в квантовой механике* (Мир, Москва, 1969) [N. H. March, W. H. Young, and S. Sampanthar, *The Many-Body Problem in Quantum Mechanics* (Cambridge, Univ. Press, 1967)].
31. A. D. Efimov and V. M. Mikhajlov, EPJ Web Conf. **38**, 17005 (2012).
32. A. Bohr and B. Mottelson, *Nuclear Structure* (Benjamin, New York, 1975), Vol. 2.
33. V. I. Isakov, K. I. Erokhina, H. Mach, M. Sanchez-Vega, and B. Fogelberg, Eur. Phys. J. A **14**, 29 (2002).
34. Brookhaven National Laboratory, National Nuclear Data Center (online), <http://www.nndc.bnl.gov/nndc/ensdf/>
35. A. D. Efimov and V. M. Mikhajlov, Phys. Rev. C **59**, 3153 (1999).

36. G.-O. Xu and J.-Y. Zhang, Nucl. Phys. A **343**, 189 (1980).
37. M. Asai, F. P. Heßberger, and A. Lopez-Martens, Nucl. Phys. A **944**, 308 (2015).
38. F. P. Heßberger, Eur. Phys. J. A **53**, 75 (2017).
39. F. P. Heßberger, S. Antalic, B. Suligano, *et al.*, Eur. Phys. J. A **43**, 55 (2010).
40. А. Д. Ефимов, И. Н. Изосимов, Письма в ЭЧАЯ **18**, 551 (2021) [A. D. Efimov and I. N. Izosimov, Phys. Part. Nucl. Lett. **18**, 658 (2021)].

PECULARITIES OF ROTATION BANDS IN HEAVY AND SUPERHEAVY NUCLEI. DESCRIPTION OF YRAST-BAND STATES IN ^{248}Cm

A. D. Efimov^{1),2)}, I. N. Izosimov³⁾

¹⁾Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg, Russia

²⁾Ioffe Physical-Technical Institute, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia

³⁾Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

A further development of the expanded microscopic version of the IBM is presented by considering two-quasiparticle phonons with multipolarity up to $J^\pi = 14^+$. The developed theoretical scheme is applied to describe the properties of the yrast-band states in ^{248}Cm up to spin 34^+ . This heavy transactinide nucleus is the only nucleus in this mass region where the values of $B(E2)$ up to spin $I^\pi = 28^+$ are measured. That is why it is considered foremost, since this information allows us to test the presented theoretical scheme based on a larger volume of experimental data. The region of transactinide nuclei differs from lighter ones by the absence of the effect of the back bending in the moment of inertia dependence on the square of the rotation frequency up to the spin $I^\pi = 34^+$. This article is intended in particular to find out the reason for this effect. Peculiar properties of the rotation bands in heavy and superheavy nuclei are discussed.

МОДЕЛЬ МАСС ЯДЕР НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ЭНЕРГИЙ СВЯЗИ

© 2023 г. К. А. Стопани^{1)*}, Е. В. Владимирова²⁾,
В. В. Негребецкий²⁾, М. В. Симонов^{2),3)}, Т. Ю. Третьякова^{1),2)}

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.; после доработки 27.02.2023 г.; принята к публикации 28.02.2023 г.

По материалам доклада на "ICPPA-2022"

С помощью метода Монте-Карло цепей Маркова и метода регуляризации Тихонова получены байесовские оценки значения величины остаточной энергии нейтрон-протонного взаимодействия Δ_{np} . С использованием этих оценок рассчитана таблица масс ядер с $A > 20$. Точность сделанных предсказаний оценивается путем сравнения с экспериментальными данными АМЕ2020 и другими теоретическими моделями.

DOI: 10.31857/S0044002723040347, EDN: EGCUVV

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели масс атомных ядер, основанные на феноменологических выражениях, связывающих массы или энергии связи соседних ядер на NZ -диаграмме, известны достаточно давно. Массовая модель, представленная в работе Гарви и Келсона [1] и построенная на базе разностных соотношений GKL и GKT, связывающих между собой массы шести соседних ядер, часто применялась в такой области, как физика нейтронных звезд [2]. В публикациях [3–5] было показано, что подобные соотношения масс соседних ядер определяют разностные уравнения в координатах N и Z , являющиеся дискретными аналогами дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенный в [1] метод построения модели заключался в нахождении семейства общих решений разностного уравнения (в этом случае однородного) и выборе того решения из семейства, которое минимально отклоняется от масс, измеренных экспериментально.

В работах [6–8] для построения массовой модели использовано локальное массовое соотношение Δ_{np} , определяющее, в соответствии с [3], неоднородное разностное уравнение. В отличие от массовых моделей на основе соотношений GKL и

GKT в этих работах метод вычисления массовой таблицы был основан на рекурсивном применении формулы массового соотношения с использованием в качестве начальных значений экспериментально измеренных ядерных масс из баз данных АМЕ. Точность предсказания масс ядер в области, непосредственно примыкающей к области экспериментально измеренных масс, не уступает точности моделей, основанных на более детальных физических принципах [9]. В ряде современных статей рассматриваются новые типы массовых уравнений, полученных на основе уравнений GKL и GKT с добавлением неоднородной правой части [10–12].

Очевидно, что в силу присущей локальным массовым соотношениям принципиальной упрощенности, а также ввиду погрешностей экспериментального измерения ядерных масс, любое из вышеупомянутых массовых уравнений является приближенным, т.е. неявно включает в себя дополнительное флуктуирующее слагаемое. В настоящей работе это слагаемое рассматривается как случайная величина, аналогичная шуму, и с помощью методов байесовской статистики производится анализ поведения случайной составляющей в массовом соотношении Δ_{np} , после чего на основе полученных результатов делаются новые оценки значений ядерных масс.

2. БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ Δ_{np}

Массовое соотношение Δ_{np} определяется следующим выражением:

$$\Delta_{np}(N, Z) = W(N, Z) - W(N - 1, Z) - \quad (1)$$

¹⁾Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, Москва, Россия.

²⁾Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия.

³⁾Университет Юстуса Либиха, Гисен, Германия.

*E-mail: kstopani@sinp.msu.ru

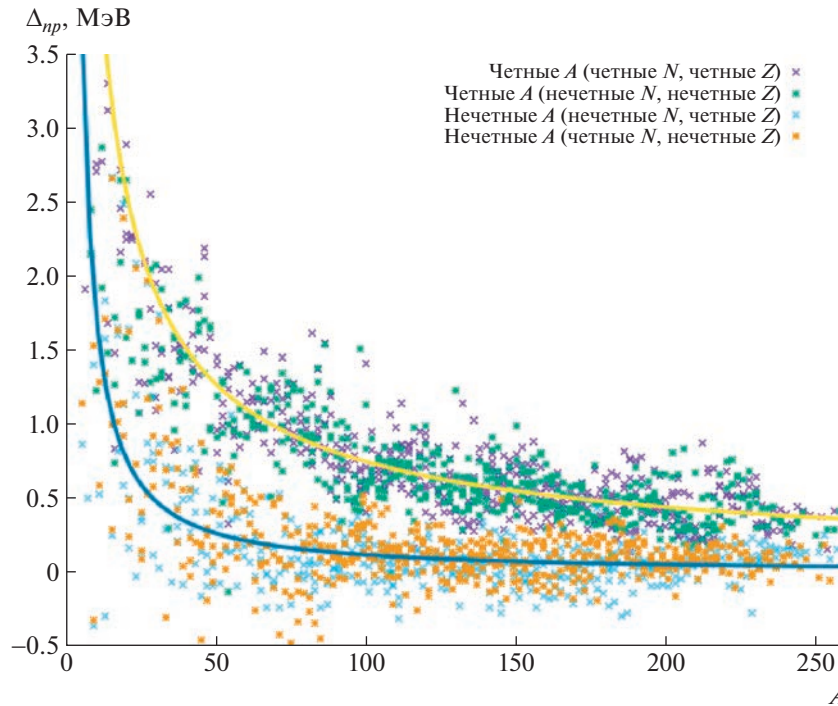


Рис. 1. Значения величины Δ_{np} , вычисленные по данным АМЕ2016. Кривые соответствуют аппроксимациям из работы [8].

$$-W(N, Z-1) + W(N-1, Z-1),$$

где $W(N, Z)$ — энергия связи ядра (N, Z) . Поведение этой величины на экспериментальных данных из библиотеки АМЕ2016 [13] в зависимости от массового числа $A = N + Z$ показано на рис. 1. Видно, что на плоскости (A, Δ_{np}) точки образуют две группы, соответствующие четным и нечетным значениям A , и при $A > 20$ в рамках каждой группы точки образуют достаточно однородные области, в которых, благодаря компенсации слагаемых в выражении (1), практически полностью сглажены эффекты скачков при заполнении оболочек. Это свойство и позволило использовать выражение Δ_{np} для построения массовых таблиц в [3, 6–8]. В то же время ввиду наличия некомпенсированных проявлений структуры каждого отдельного ядра, а также погрешностей экспериментальных данных точки на графике отнюдь не сливаются в гладкую функциональную зависимость, а хаотически распределены в пределах группы. С формальной точки зрения можно рассмотреть значения Δ_{np} как случайные величины и воспользоваться методами байесовской статистики для того, чтобы определить их распределение.

Согласно теореме Байеса апостериорное распределение $P_{\text{post}}(\theta|x)$ случайной величины θ на основе данных из наблюдений x вычисляется по формуле

$$P_{\text{post}}(\theta|x) = P(x|\theta)P_{\text{prior}}(\theta)/P(x), \quad (2)$$

где $P_{\text{post}}(x|\theta)$ — функция правдоподобия, или вероятность наблюдения данных x при данном значении параметра θ , $P_{\text{prior}}(\theta)$ — априорное распределение, $P(x)$ — маргинальное распределение x , служащее для нормировки [14]. В подходе байесовской статистики использование теоремы Байеса для оценки статистических характеристик неизвестного параметра θ имеет следующую естественную интерпретацию: из заранее известной информации о θ , содержащейся в априорном распределении, и новых данных x извлекается суммарная информация о поведении θ в виде апостериорного распределения. В рассматриваемом случае в качестве данных x выступает набор значений $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$, вычисленных на основе экспериментальной базы данных ядерных масс АМЕ2016, а неизвестным параметром θ являются интересующие нас в конечном счете параметры распределения Δ_{np} . Таким образом, для построения байесовской модели необходимо задать вид, который имеют распределения, входящие в правую часть выражения (2).

Анализируя характер разброса точек в различных областях рис. 1, можно заключить, что разумным выбором функции правдоподобия будет следующий: при каждом значении A точки Δ_{np} имеют нормальное распределение с параметрами μ_A и σ_A^2 , а ввиду независимости всех отдельных значений Δ_{np} результирующая функция правдоподобия является произведением функций плотно-

сти вероятности нормального распределения для каждого Δ_{np}^{exp} из набора $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$. Таким образом, подлежащими оценке неизвестными параметрами байесовской модели θ являются совокупности параметров μ_A и σ_A^2 для каждого A . Для удобства функция правдоподобия, а также априорные распределения записываются в логарифмическом виде

$$\ln P(\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\} | \{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (3)$$

$$= - \sum_{A=A_{\min}}^{A=A_{\max}} \left[\sum_{\text{все } \Delta_{np,i}^{\text{exp}} \text{ с данным } A} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma_A^2) + \frac{(\Delta_{np,i}^{\text{exp}} - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2} \right) \right].$$

Априорная информация о поведении параметров байесовской модели $\{\mu_A\}$ и $\{\sigma_A^2\}$ состоит в требовании достаточной плавности поведения их значений как функций массового числа A . Без этого требования значения μ_A и σ_A^2 при каждом A будут независимыми величинами, и, например, байесовская оценка μ_A совпадет со средним арифметическим всех Δ_{np}^{exp} с данным A по хорошо известному свойству байесовских оценок параметров нормального распределения. Борьба с физически недостоверными скачками при оценке параметров является задачей, решаемой методом регуляризации Тихонова [15], который обычно формулируется при использовании в рамках метода наименьших квадратов в виде дополнительного слагаемого к минимизируемой величине: $\chi_R^2 = \chi^2 + \tau \sum \theta_i^2$, где τ — регуляризационный параметр. По аналогии регуляризационная составляющая может быть определена и в априорном распределении:

$$\ln P_{\text{reg1}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (4)$$

$$= -\tau \sum \left((\mu_A)^2 + (\sigma_A^2)^2 \right),$$

где замена знака $+\tau$ на $-\tau$ отражает тот факт, что в отличие от χ_R^2 плотность вероятности P_{reg1} должна принимать тем меньшие значения, чем менее плавным является регуляризируемый набор параметров.

Пробные расчеты показали, что в рассматриваемом случае выражение (4) недостаточно эффективно выполняет функцию регуляризации параметров $\{\mu_A\}$ и $\{\sigma_A^2\}$, поскольку, сглаживая их поведение, одновременно приводит к занижению модуля значений. Поэтому рассматривались также варианты регуляризующего распределения на основе первой $\tau \sum (\theta_i - \theta_{i-1})^2$ и второй $\tau \sum ((\theta_i - \theta_{i-1}) - (\theta_{i-1} - \theta_{i-2}))^2$ дискретных производных регуляризуемых последовательностей,

для которых оптимальной формой последовательности являются, соответственно, фиксированная константа и линейная функция. Последний вариант показал наилучшие результаты и был использован для проведения расчетов. Таким образом, регуляризующее априорное распределение определяется выражением

$$\ln P_{\text{reg2}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (5)$$

$$= -\tau \sum \left((\mu_A - 2\mu_{A-2} + \mu_{A-4})^2 + (\sigma_A^2 - 2\sigma_{A-2}^2 + \sigma_{A-4}^2)^2 \right),$$

где A принимает значения с шагом 2, и подразумевается, что суммирование выполняется сначала для четных A , а затем для нечетных, чтобы требование регулярности выполнялось по-отдельности для групп Δ_{np} с четными и нечетными A .

В окончательном виде априорное распределение состоит из P_{reg2} , а также нормирующего априорного распределения, рекомендуемого в [16] для байесовской оценки параметра σ^2 нормального распределения:

$$\ln P_{\text{prior}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) = \quad (6)$$

$$= \ln P_{\text{reg2}}(\{\mu_A\}, \{\sigma_A^2\}) - 2 \sum_A \ln \sigma_A.$$

Маргинальное распределение $P(\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\})$ определяет плотность вероятности конкретных значений $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$ при любой комбинации параметров, и его нахождение может оказаться затруднительным ввиду необходимости вычисления многомерных интегралов. Однако используемый в настоящей работе численный метод получения байесовских оценок не зависит от точного указания маргинального распределения, поэтому можно определить его как $P(\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}) = \text{const.}$

Параметрами полученной статистической модели являются 238 пар значений μ_A и σ_A^2 при $20 \leq A \leq 258$. Для получения байесовских оценок их значений был использован метод Монте-Карло цепей Маркова, суть которого заключается в формировании равновесной цепи Маркова, значения которой на каждом шаге распределены в соответствии с апостериорным распределением (2), и генерации с ее помощью синтетической выборки значений параметров, а сгенерированная выборка в свою очередь используется для получения байесовских оценок статистических характеристик параметров, таких как среднее значение и стандартное отклонение [17]. Для генерации выборки применялся стандартный алгоритм Метрополиса, представляющий собой случайное блуждание в пространстве $\{\mu_A, \sigma_A^2\}$, где вероятность сделать

очередной случайный шаг определяется апостериорным распределением (2). Начальные значения μ_A и σ_A^2 для случайного блуждания определялись, соответственно, как среднее арифметическое и среднеквадратичное отклонения значений $\{\Delta_{np}^{\text{exp}}\}$ при данном A . В ходе случайного блуждания первые 100 000 сгенерированных точек отбрасывались для стабилизации алгоритма, а затем точки записывались через каждые 100 шагов для исключения корреляции между соседними точками результирующей выборки. Наконец, вычислялось среднее арифметическое значение и среднеквадратичное отклонение сгенерированной выборки параметров $\{\mu_A, \sigma_A^2\}$, и полученные величины использовались в качестве значения байесовских оценок этих параметров $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ и стандартного отклонения этих оценок соответственно.

Используя полученные $\{\mu_A^*\}$ в качестве величин Δ_{np} для всех A , по формуле (1) можно рассчитать значение неизвестной энергии связи ядра по трем соседним ядрам, для которых значение энергии связи известно. Полученное при этом значение энергии связи может быть затем использовано для той же цели при вычислении неизвестной энергии связи другого ядра, и, таким образом, эта операция может повторяться в течение нескольких повторений цикла, на каждом из которых к области ядер с известными энергиями связи на NZ -диаграмме добавляется очередной внешний слой. Для построения массовой таблицы производилось достаточное количество (несколько десятков) циклов итераций, а затем из массовой таблицы исключались несвязанные ядра с отрицательной величиной энергии отделения частиц и по полученным энергиям связи вычислялись массы.

Финальной стадией расчета был выбор параметров регуляризации τ . Вычисления показали, что вследствие различного поведения Δ_{np} необходимо использовать различные значения τ для четных и нечетных A . Как видно из (6), величина параметра регуляризации влияет на форму зависимости $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ от A . При небольших τ в ней могут присутствовать скачки, а в пределе бесконечно больших значений τ она превращается в линейную функцию. Для выбора оптимальных τ_{even} и τ_{odd} , соответственно, для четных и нечетных A , массовые таблицы вычислялись при различных значениях этих параметров $\ln \tau_{\text{even,odd}} = 5-20$ с шагом $\Delta \ln \tau = 1$. Для каждой массовой таблицы, полученной таким способом, вычислялась среднеквадратичная ошибка предсказания масс 65 проверочных ядер ΔRMS_{65} . Этими ядрами являются новые ядра, массы которых включены в базу данных AME2020 [18] и отсутствуют в предыдущей версии AME2016, на основе данных из которой

рассчитывались массовые таблицы. В качестве оптимальных $\tau_{\text{even,odd}}$ были выбраны те значения, при которых была минимальной величина ΔRMS_{65} . Их значения $\ln \tau_{\text{even}} = 19$ и $\ln \tau_{\text{odd}} = 7$. Соответствующие этим параметрам регуляризации байесовские оценки $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ показаны на рис. 2. Можно заметить, что соответствующее оптимальным оценкам поведение величины Δ_{np} для нечетных изотопов является гораздо менее плавным во всех областях массовых чисел. Поскольку Δ_{np} представляет собой остаточную энергию нейтрон-протонного взаимодействия, т.е. разность энергии отделения пары np и энергий отделения двух нуклонов по отдельности, то данное поведение при наличии одного непарного нуклона у нечетных ядер представляется объяснимым.

3. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МАССОВЫМИ МОДЕЛЯМИ

Полученные в предыдущем разделе оптимальные байесовские оценки $\{\mu_A^*, \sigma_A^{2*}\}$ были использованы для расчета массовой таблицы на основе экспериментальных масс из базы данных AME2016. В таблице 1 приведены значения ΔRMS_{65} , рассчитанные по данным ряда теоретических массовых моделей, в сравнении с результатом настоящей работы. Аббревиатурой LMR обозначена массовая модель [8] на основе того же соотношения Δ_{np} , полученная без использования байесовского оценивания (аппроксимации Δ_{np} , использованные в этой модели, показаны на рис. 1). Модель FRDM(2012) [18] представляет собой макро-микроскопическую модель с многомерной параметризацией формы ядра и оболочечными поправками Струтинского. Модель HFB-17 [20] основана на подходе Хартри-Фока-Боголюбова с использованием потенциала Скирма. Модель DZ10 [21] основана на комбинированной массовой формуле Дюфло-Цукера [22], параметры которой определены по данным AME2016, а модель DZ10GP [23] по сравнению с ней была дополнена с помощью метода гауссовских случайных процессов. Сравнение показывает, что значение величины ΔRMS_{65} представленной модели несколько лучше, чем у модели LMR без использования байесовского оценивания, и заметно превосходит показатели теоретических моделей FRDM(2012), HFB-17 и DZ10. Наименьшее значение ошибки ΔRMS_{65} демонстрирует модель DZ10GP. В этой модели энергия связи ядер была представлена в виде суммы двух слагаемых $W_{\text{DZ10GP}}(A, Z) = W_{\text{DZ10}}(A, Z) + \varepsilon(A, Z)$, т.е. энергия связи, вычисленная по модели DZ10, корректируется случайной величиной $\varepsilon(A, Z)$, которая оценивается с помощью статистического метода гауссовских процессов и аппроксимирует те аспекты физической картины, которые не входят в

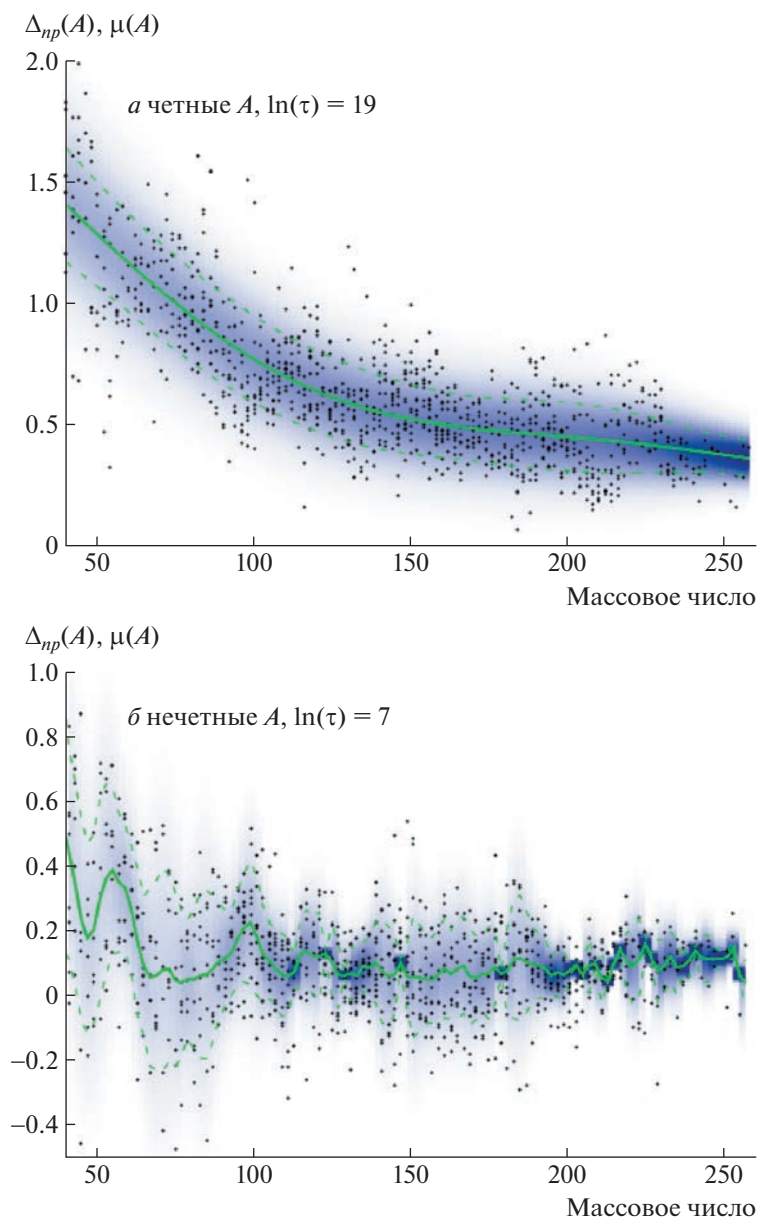


Рис. 2. Байесовские оценки параметров распределения Δ_{np} для четных (а) и нечетных (б) ядер. Сплошная кривая — оценка μ_A , штриховые кривые отстоят от μ_A на величину оценки σ_A^2 , яркость цвета соответствует апостериорному распределению Δ_{np} .

исходную теоретическую модель. Похожий подход был с успехом применен в ряде других работ: например, в [24] для коррекции порога отделения двух нейтронов в микроскопической модели на основе метода Хартри—Фока—Боголюбова гауссовским процессом или в [25] для коррекции ядерных масс, вычисленных по каплевой модели с помощью статистического метода радиальных базисных функций. Можно отметить, что хотя полученные величины μ_A^* также могут рассматриваться как одномерный гауссовский процесс (см. [26]), все же представленный в настоящей работе подход не заключается в нахождении статистической по-

правки к положенной в качестве основы модели, а, напротив, исходно предполагает оцениваемую величину Δ_{np} случайной. Несмотря на такое серьезное упрощение, модель тем не менее показывает приемлемые результаты.

Использованные для оценки точности модели 65 новых ядер из AME2020 в основном непосредственно примыкают на NZ -диаграмме к данным AME2016. Для того чтобы оценить точность экстраполяции, на более длинном отрезке была использована следующая процедура. Из AME2016 исключались ядра, находящиеся на ее внешней границе, по оставшимся данным строилась мас-

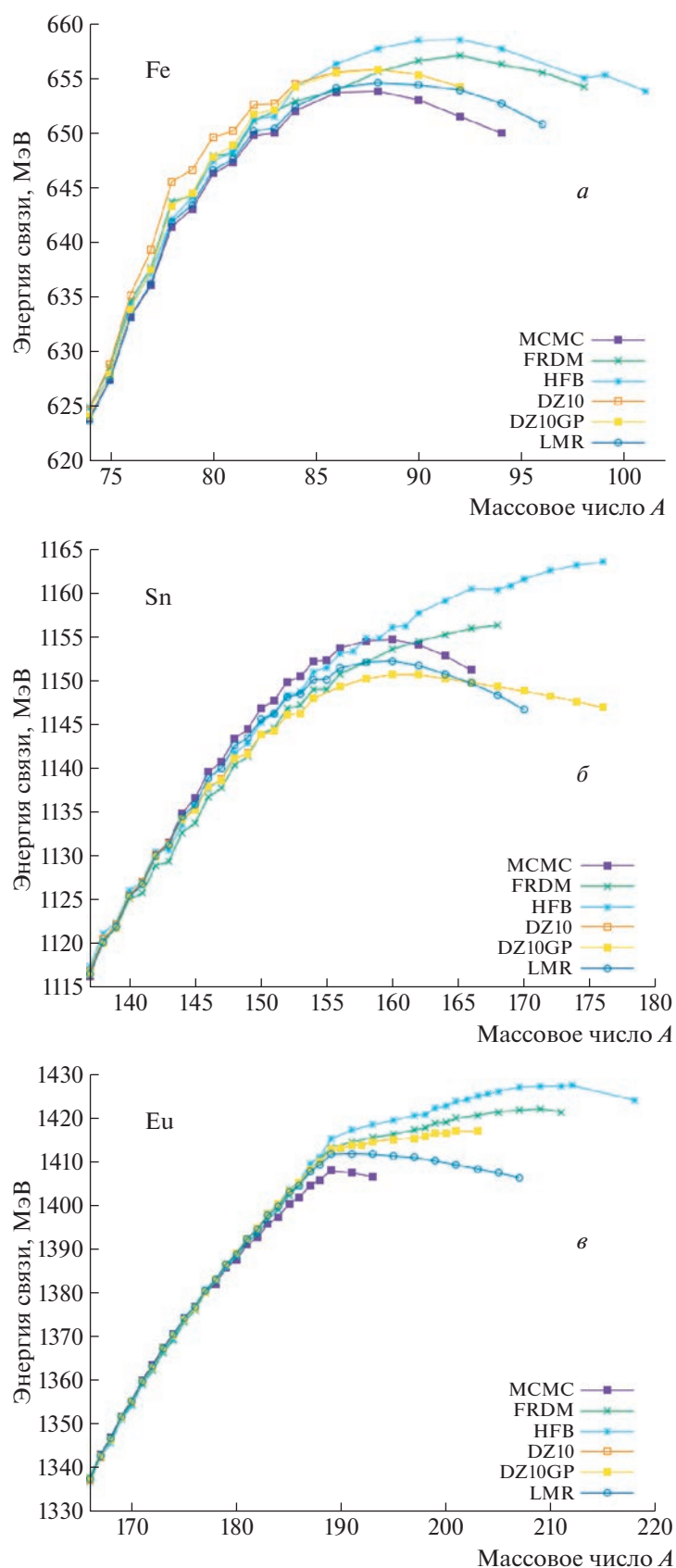


Рис. 3. Значения энергий связи нейтронно-избыточных изотопов Fe (а), Sn (б), Eu (в). MCMC — настоящая работа, LMR — данные из [8], FRDM — модель [18], HFB — модель [19], DZ10 — модель [20], DZ10GP — модель [21].

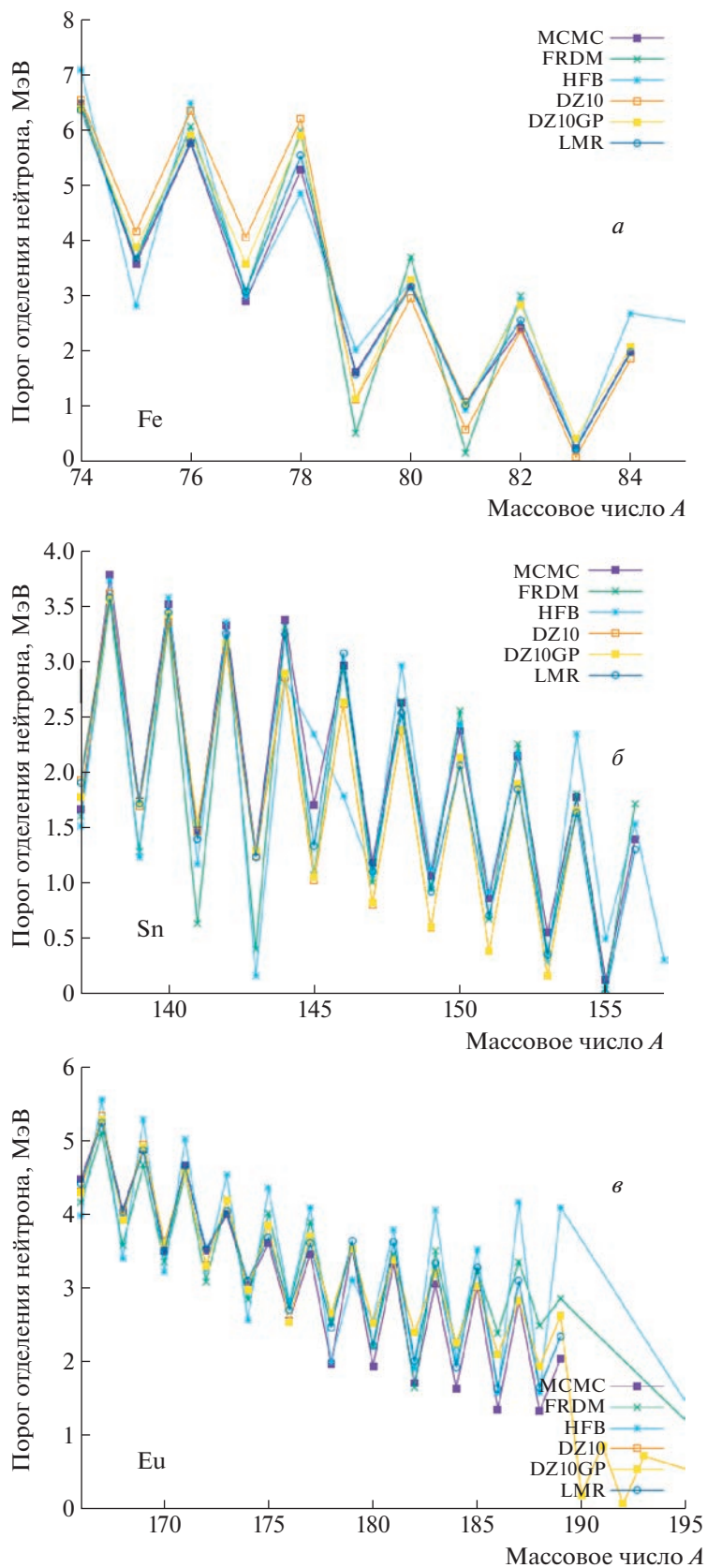


Рис. 4. Значения энергий отделения нейтрона в нейтронно-избыточных изотопах Fe (*a*), Sn (*б*), Eu (*в*). Обозначения совпадают с рис. 3.

Таблица 1. Среднеквадратичная ошибка предсказания масс 65 проверочных ядер ΔRMS_{65} по данным различных массовых моделей

Модель	ΔRMS_{65} , кэВ
Настоящая работа	361.9
LMR [8]	376.5
FRDM(2012)[18]	909.2
HFB-17 [19]	729.6
DZ10* [20]	815.2
DZ10GP* [21]	289.1

* В массовых таблицах DZ10 и DZ10GP отсутствуют ядра ^{46}Mn , ^{50}Co , ^{73}Rb , ^{211}Pa .

совая таблица и вычислялась величина ΔRMS_{65} . Этот шаг был повторен три раза, после чего из 2498 ядер AME2016 оставалось 1719. При этом величина ΔRMS_{65} плавно возрастала от 361.9 до 367.5 кэВ. Дальнейшее повторение процесса уменьшения объема входных данных было остановлено, поскольку не все из 65 проверочных ядер были достижимы при экстраполяции по формуле (1).

На рис. 3 и 4 показано сравнение вычисленных энергий связи и порогов отделения нейтрона B_n на нейтронно-избыточных изотопах Fe, Sn и Eu вплоть до границы отделения нейтрона (ввиду того, что представленная модель основана на экстраполяции экспериментальных данных AME2016, слева область сравнения ограничена изотопами, для которых данные AME2016 отсутствуют). Видно, что при длине дистанции экстраполяции до 10–20 шагов результаты настоящей работы в целом согласуются с предсказаниями других моделей, при этом расхождение предсказаний различных моделей начинается приблизительно одновременно. В области наиболее нейтронно-избыточных тяжелых ядер с $Z > 55$ энергии связи, рассчитанные в настоящей работе, оказываются систематически ниже предсказаний других моделей. Это расхождение достигает наибольшей величины около 10 МэВ в области $Z > 60$, $N > 140$.

Поскольку μ_A^* является байесовской оценкой $\Delta_{np}(A)$, а в выражение (1) входят лишь операции сложения и вычитания, то полученная с его помощью массовая таблица также является байесовской оценкой масс ядер. С другой стороны, как было сказано выше, массовые модели [1, 3–5, 10] получены как точное решение разностного уравнения

$$O^m M(A, Z) = \tau(A, Z), \quad (7)$$

где O^m — оператор соответствующего разностного выражения, а $\tau(A, Z)$ — необязательная правая часть уравнения. Упомянутые модели удовлетворяют уравнению (7) в каждой точке. В отличие от них массовая таблица в настоящей работе строится в ходе итерационной процедуры расширения AME2016, и поэтому разностное уравнение выполняется лишь в той части NZ -диаграммы, которая отсутствовала в AME2016 и была добавлена в результате расчета. Следовательно, в рамках исходной статистической модели полученная массовая таблица является математическим ожиданием ансамбля массовых таблиц, распределение значений $\Delta_{np}(A)$ в которых совпадает с распределением на рис. 1 и одной из которых является реальная массовая таблица с истинными значениями масс существующих ядер.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было исследовано статистическое поведение величины остаточной энергии нейтрон-протонного взаимодействия Δ_{np} и получены байесовские оценки параметров ее распределения, а также на их основе байесовские оценки масс ядер. Главной особенностью модели является простота как исходного массового соотношения, так и метода вычислений, не требующего сложных алгоритмов многомерной оптимизации или решения уравнений. При этом достигаемая точность экстраполяции оказывается не хуже, чем у значительно более сложных моделей, а также несколько превосходит точность предыдущей версии данной модели, не использующей байесовское оценивание. Байесовская оценка $\Delta_{np}(A)$ как функция массового числа для четно-четных и нечетно-нечетных ядер демонстрирует значительно более плавное поведение, чем для нечетных ядер. В последнем случае наиболее выраженные скачки наблюдаются вблизи $A = 60$ и $A = 100$.

Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. T. Garvey, W. J. Gerace, R. L. Jaffe, I. Talmi, and I. Kelson, *Rev. Mod. Phys.* **41**, S1 (1969).
2. С. Шапиро, С. Тьюколски, *Чёрные дыры, белые карлики и нейтронные звёзды, ч. 1* (Мир, Москва, 1985).
3. J. Jänecke and H. Behrens, *Phys. Rev. C* **9**, 1276 (1974).
4. J. Jänecke and P. J. Masson, *At. Data Nucl. Data Tables* **39**, 265 (1988).
5. P. J. Masson and J. Jänecke, *At. Data Nucl. Data Tables* **39**, 273 (1988).

6. Е. В. Владимирова, Б. С. Ишханов, М. В. Симонов, Т. Ю. Третьякова, Уч. записки физ. фак-та Моск. ун-та, 1930409 (2019).
7. E. V. Vladimirova, B. S. Ishkhanov, M. V. Simonov, S. V. Sidorov, and T. Yu. Tretyakova, *Int. J. Mod. Phys. E* **30**, 2150025 (2021).
8. E. V. Vladimirova, M. V. Simonov, and T. Yu. Tretyakova, *AIP Conf. Proc.* **2377**, 070003 (2021).
9. D. Lunney, J. M. Pearson, and C. Thibault, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1021 (2003).
10. Z. He, M. Bao, Y. M. Zhao, and A. Arima, *Phys. Rev. C* **90**, 054320 (2014).
11. J. L. Tian, N. Wang, C. Li, and J. J. Li, *Phys. Rev. C* **87**, 014313 (2013).
12. Y. Y. Cheng, Y. M. Zhao, and A. Arima, *Phys. Rev. C* **89**, 061304 (2014).
13. W. J. Huang, G. Audi, M. Wang, F. G. Kondev, S. Naimi, and X. Xu, *Chin. Phys. C* **41**, 030002 (2017); M. Wang, G. Audi, F. G. Kondev, W. J. Huang, S. Naimi, and X. Xu, *Chin. Phys. C* **41**, 030003 (2017).
14. А. А. Боровков, *Математическая статистика* (Лань, Санкт-Петербург, 2010).
15. А. Н. Тихонов, Докл. Акад. Наук СССР **151**, 501 (1963).
16. A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis, 3rd ed.* (New York, Chapman and Hall/CRC, 2013).
17. R. M. Neal, Tech. Report CRG-TR-93-1 (University of Toronto, September 1993).
18. W. J. Huang, M. Wang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, *Chin. Phys. C* **45**, 030002 (2021); M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, and S. Naimi, *Chin. Phys. C* **45**, 030003 (2021).
19. P. Möller, A. J. Sierk, T. Ichikawa, and H. Sagawa, *At. Data Nucl. Data Tables* **109**, 1 (2016).
20. S. Goriely, N. Chamel, and J. M. Pearson, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 152503 (2009).
21. A. Pastore, D. Neill, H. Powell, K. Medler, and C. Barton, *Phys. Rev. C* **101**, 035804 (2020).
22. J. Duflo and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **52**, R23 (1995).
23. M. Shelley and A. Pastore, *Universe* **7**, 131 (2021).
24. L. Neufcourt, Y. Cao, W. Nazarewicz, and F. Viens, *Phys. Rev. C* **98**, 034318 (2018).
25. N.-N. Ma, H.-F. Zhang, X.-J. Bao, and H.-F. Zhang, *Chin. Phys. C* **43**, 044105 (2019).
26. A. Gratton and M. I. Wilkinson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **485**, 4878 (2019).

NUCLEAR MASS MODEL BASED ON BAYESIAN ESTIMATES OF LOCAL DIFFERENCE EXPRESSIONS OF BINDING ENERGIES

K. A. Stopani¹⁾, E. V. Vladimirova²⁾, V. V. Negrebetskiy²⁾, M. V. Simonov^{2),3)},
T. Yu. Tretyakova^{1),2)}

¹⁾*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow, Russia*

²⁾*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia*

³⁾*Justus Liebig University, Giessen, Germany*

Using the Markov Chain Monte Carlo method and Tikhonov regularization the Bayesian estimates of the value of the residual neutron-proton interaction energy Δ_{np} were obtained. These estimates are used for calculation of the nuclear mass table for $A > 20$. The accuracy of the obtained predictions is evaluated by comparison with experimental data from AME2020 and other theoretical nuclear mass models.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ТОЧНОМУ ИЗМЕРЕНИЮ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ МЮОНА И КОНСТАНТЫ ФЕРМИ

© 2023 г. А. М. Бакаляров¹⁾, А. И. Климов¹⁾,
И. Н. Мачулин¹⁾, Е. А. Мелешко¹⁾, В. И. Селиванов^{1)*}

Поступила в редакцию 08.11.2022 г.; после доработки 08.11.2022 г.; принята к публикации 26.12.2022 г.

Предложен эксперимент по рекордному по точности измерению мировой константы Ферми G_F при распаде положительного мюона. Выполнен анализ всех систематических ошибок. Разработана и проверена программа “Fast Program” (FP), использующая данные GEANT и работающая в ≈ 1500 раз быстрее. Набрано 10^{14} событий при двух вариантах отбора событий. Получена точность 0.46 пс для времени жизни мюона и 0.1×10^{-6} для величины G_F с учетом всех систематических ошибок. Точность теоретических расчетов G_F — 0.14×10^{-6} в рамках Стандартной модели взаимодействий элементарных частиц.

DOI: 10.31857/S0044002723040062, EDN: EGDRHT

1. ВВЕДЕНИЕ

Мировая константа G_F описывает распады элементарных частиц и ядер в слабом секторе Стандартной модели. В [1] в качестве мировой постоянной приводится именно экспериментальное значение G_F , поскольку оно не зависит от теоретической модели физики элементарных частиц. В настоящее время точность экспериментальной величины $\sigma(G_F)/G_F = 0.5 \times 10^{-6}$ [2]. Эксперименты по измерению G_F при распаде мюона выполнялись 7 раз с 1973 по 2013 г. с точностью $\sigma(G_F)/G_F = 68 \times 10^{-6}$ (1973 г.) и 0.5×10^{-6} (2013 г.) [1]. Погрешность теоретического значения G_F в рамках Стандартной модели взаимодействий элементарных частиц составляет 0.14×10^{-6} [3]. Разница между ними находится в пределах ошибок. Наиболее точно величина G_F может быть измерена при распаде мюона [3]:

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} (1 + \Delta q).$$

Здесь $\tau_\mu \approx 2.2$ мкс — время жизни мюона, Δq описывает поправку из-за конечной массы электрона и радиационные поправки из-за четырехфермионного взаимодействия в пределе $m_\mu \ll M_w$. Таким образом, дальнейшее улучшение точности экспериментальной величины G_F позволяет проверить справедливость Стандартной модели, например, унитарность матрицы Cabibbo–Kobayashi–

Maskawa (СКМ) [4], которая определяет силу смешивания в кварковом секторе и является источником нарушения CP -инвариантности. СКМ, в частности, играет важную роль в попытках объяснить преобладание материи над антиматерией во Вселенной. Во-вторых, это, конечно, будет способствовать улучшению точности теоретических расчетов. В настоящей работе предложена и анализируется экспериментальная установка для рекордного по точности измерения G_F . Показано, что можно достичь точности 0.10×10^{-6} .

2. ДЕТЕКТОР

В эксперименте необходимо набрать $\approx 10^{14}$ $\mu^+ \rightarrow e^+$ распадов за разумное время 10^7 с ≈ 116 дней, чтобы улучшить существующую точность времени жизни мюона $\sigma(\tau_\mu) = 2.2$ пс (набрано 2×10^{12} событий, [2]). Для этого требуется интенсивность мюонного пучка $\geq 10^7$ μ^+ /с. Интенсивность пучка “поверхностных мюонов” в институте Пауля Шеррера (PSI, Швейцария) достигает 1.5×10^8 μ^+ /с [3]. “Поверхностные мюоны” образуются из пионов, летящих с поверхности мишени протонного ускорителя, и временная структура пучка обеспечивает практически не зависящий от времени поток событий (статистика Пуассона). “Поверхностные мюоны” имеют кинетическую энергию $E_\mu = 4.12$ МэВ и длину трека ≈ 1.4 мм в пластиковом сцинтилляторе. Интенсивность 10^7 μ^+ /с требует разделения детектора на множество независимых частей, поскольку среднее время между мюонами равно 0.1 мкс и в

¹⁾Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия.

*E-mail: selivanov@akado.ru, Selivanov_VI@nrcki.ru

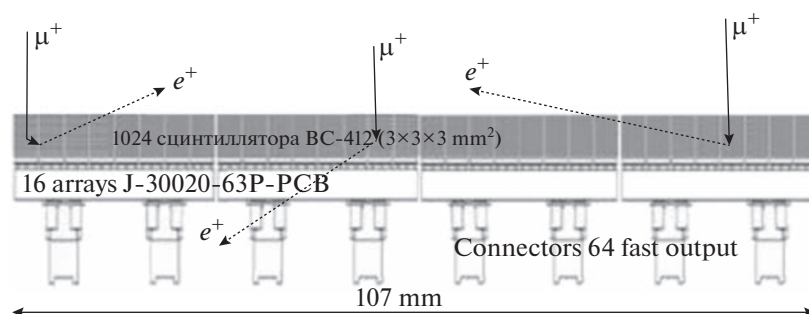


Рис. 1. Рисунок детектора, вид сбоку.

течение 20 мкс наблюдения $\mu^+ \rightarrow e^+$ распадов в одном детекторе оказываются 200 мюонов и 200 позитронов распада. В этих условиях практически невозможно найти позитрон от родившего именно его мюона. Кроме того, фон распадов от других мюонов как минимум в 200 раз превышает эффект. Предлагаемый детектор состоит из 1024 независимых элементов (детектор в работе [2] состоял из 170 элементов). Это приводит к среднему времени между двумя мюонами в одном детекторе ≈ 100 мкс, к вероятности 0.2 регистрации двух мюонов или позитронов в интервале наблюдения 20 мкс и к низкой вероятности регистрации двух позитронов в нашем интервале мертвого времени 20 нс ($\approx 2 \times 10^{-4}$). Последняя величина не зависит от времени после распада мюона. В работе [2] эта вероятность была равна 10^{-3} в начале времени регистрации и 10^{-7} в конце [5]. При оптимизации конструкции детектора учитывались различные факторы: относительная вероятность диффузии мюона в соседний сцинтиллятор, амплитудное разделение сигналов мюона и позитрона, мертвое время кремниевого фотоумножителя (SiPM). Предлагаемая экспериментальная установка изображена на рис. 1. Сцинтилляторы (элементы) разделены майларом толщиной 6 мкм, покрытым с обеих сторон алюминием. Мюоны пучка с импульсом $p_\mu \approx 28.8$ МэВ/с и с разбросом 2% останавливаются на глубине 1.4 мм сцинтиллятора BC-412. В большинстве случаев сигналы от частиц $\mu^+ \rightarrow e^+$ распада поступают от одного элемента. Небольшой процент позитронов исходит из соседнего элемента из-за диффузии медленного мюона, как это изображено для мюона слева на рисунке. Значительная часть позитронов регистрируется в нескольких элементах из-за углового распределения позитронов распада, как это изображено для мюона справа на рисунке. Полный детектор содержит 1024 сцинтиллятора размером $3 \times 3 \times 3$ мм³, $4 \times 4 = 16$ матриц кремниевых фотоумножителей (SiPM) “ArrayJ-30020-64P-PCB”. Каждая матрица содержит $8 \times 8 =$

$= 64$ ячейки SiPM с размерами 3×3 мм² каждая. Размеры детектора — 107×107 мм².

Создание установки стало возможно после разработки технологии массового производства кремниевых фотоумножителей SiPM (например, [6]), которые позволяют создавать компактные детекторы с высоким быстродействием и с высокой вероятностью регистрации сцинтилляционных фотонов. На рис. 2 приведены распределения амплитуд сигналов с SiPM в предположении переднего фронта $\tau_r = 2$ нс и заднего фронта $\tau_d = 4$ нс. В этом случае

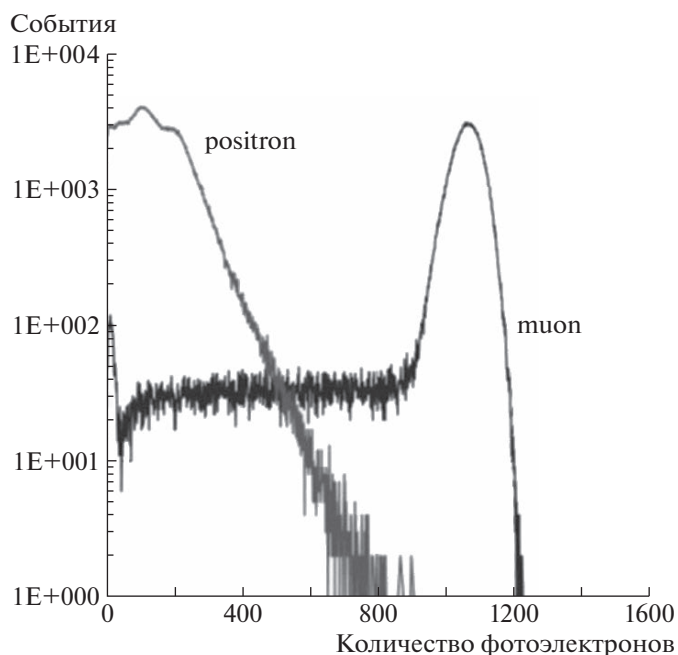


Рис. 2. Спектры средней амплитуды сигналов в фотоэлектронах (ф.э.) от всех сцинтилляторов на выходе кремниевых фотоумножителей при интенсивности 10^7 с⁻¹ $\mu^+ \rightarrow e^+$ распадов в полной сборке из $32 \times 32 = 1024$ кристалла. Размеры каждого сцинтиллятора $3 \times 3 \times 3$ мм³. Спектры сигналов для сборок из 3×3 и 32×32 кристаллов практически идентичны. Импульс мюонов в пучке 28.8 МэВ/с с разбросом 2%.

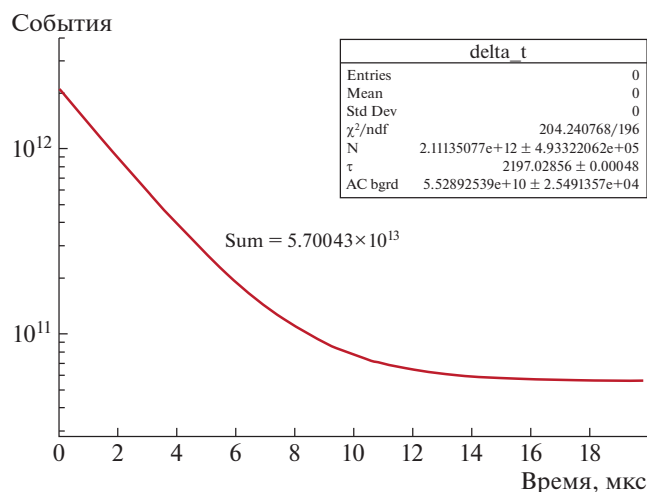


Рис. 4. Временной спектр позитронов при распаде мюона в диапазоне (0–20) мкс для 10^{14} событий. Сборка 3×3 сцинтиллятора. Программа FP (см. разд. 3.2). При моделировании статистики 10^{14} событий получено $\sigma(\tau_\mu) = 0.48$ пс для варианта отбора все_μ + все_e с антисовпадениями. При фитировании была задана величина $\tau_0 = 2197.03$ нс.

следящим порогом (CFD) для отбора сигнала от мюона (μ^+) и позитрона (e^+), а также на преобразователь заряда — код (QDC) для сигнала мюона. Используя модули QDC, можно стабилизировать усиление детектора для μ^+ - и e^+ -сигналов в течение всего периода измерения по вершине распределения числа фотоэлектронов от мюонов (рис. 2). Есть несколько причин нестабильности — уменьшение сигнала из-за радиационных повреждений сцинтиллятора и/или SiPM-детекторов, изменение амплитуды при изменении окружающей температуры и пр. Далее сигналы подаются на преобразователи время—код (TDC). Модуль V1290A/B-2eSST представляет собой 128/64 канальный TDC с шириной канала 0.1–0.8 нс, диапазоном измерения 104 мкс, мертвым временем 5 нс для парных импульсов и выходным буфером 32 кбита $\times$ 32 бита для регистрации частиц в интервале наблюдений. TDC позволяет эффективно записывать события при непрерывной передаче данных. Спектр сигналов QDC обрабатывается и используется (посылается на блок питания “Power Supply”) для изменения напряжения на SiPM и, таким образом, юстировки коэффициента усиления SiPM-детекторов. Равноценная альтернатива — регулировка порогов CFD-дифференциальных дискриминаторов SiPM (“Setting Thresholds”).

3. МОНТЕ-КАРЛО

Предложенный детектор (рис. 1) анализировался с помощью программ GEANT4 (например, [9]) и

последнего варианта GEANT3. Электромагнитные процессы анализировались с точностью 1 кэВ для GEANT4 и 10 кэВ для GEANT3. Обе программы давали идентичные результаты. Была показана идентичность результатов GEANT для 1024 и 9 элементов при статистике 10^9 событий. Это позволило набрать за разумное время достаточную для анализа статистику для сборки из 3×3 на GEANT и необходимую статистику 10^{14} событий на “Fast Program” (FP, см. ниже) за 80 сут вместо 516 для сборки 32×32 .

3.1. Выбор интенсивности пучка, интервала наблюдения и критерия отбора событий

Выполнен анализ зависимости ошибки измерения времени жизни мюона $\sigma(\tau_\mu)$ от условий наблюдения. Были рассмотрены при различных интенсивностях варианты анализа при выборе в интервале наблюдения одного события: 1_μ и/или 1_e, или всех событий: все_μ и/или все_e, а также варианты есть/нет антисовпадения между соседними элементами. 1_μ + все_e, например, соответствует отбору события только с одним мюоном и со всеми позитронами в интервале (–30–+30) мкс от времени выбранного мюона. Все_μ + все_e соответствует отбору всех событий в интервале (0–20) мкс от времени выбранного мюона. В табл. 1 приведены результаты этого анализа. Из таблицы видно, что величина σ_μ увеличивается с ростом интенсивности пучка, по-видимому, из-за увеличения фона B. Реально были выполнены расчеты также при интенсивностях $I_\mu = (1.62, 1.89 \text{ и } 2.27) \times 10^7 \mu^+/\text{с}$. Все параметры плавно изменяются от значений при $1.26 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ до значений при $2.84 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$.

Выполнен анализ при отборе событий без антисовпадений между соседними элементами и с антисовпадениями. Эти случаи различаются из-за позитронов, регистрируемых в нескольких элементах и диффузии мюона в соседний элемент (см. рис. 1). Результаты приведены в табл. 2.

На основе анализа результатов табл. 2 для моделирования статистики 10^{14} событий были выбраны два варианта — худший (все_μ + все_e с антисовпадениями) и удовлетворительный по точности — 1_μ + все_e без антисовпадений.

Сравнение величины ошибки времени жизни мюона $\sigma(\tau_\mu)$ показывает ее уменьшение на 8% при увеличении времени регистрации от 20 до 30 мкс. Далее эта ошибка неизменна вплоть до времени регистрации 120 мкс.

Таблица 1. Результаты фитирования GEANT4 сборки 3×3 кристаллов при статистике 10^9 и различных интенсивностях пучка мюонов I_μ для 1024 кристаллов при различных критериях отбора событий и при наличии антисовпадений между соседними элементами (установка регистрирует все события (нет мертвого времени); формула фитирования — $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_\mu) + B$; значения χ^2 лежат в естественных пределах для всех вариантов)

Интенсивность пучка I_μ , 10^7 с^{-1}	Отбор при $(-20-+20)$ мкс	$\Delta\tau_\mu$, пс	σ_μ , пс	$\Delta\tau/\sigma$	N_0/B
1.26	$1_\mu + 1_e$	444	126	-3.5	239
	$1_\mu + \text{все}_e$	37	133	0.3	70
	$\text{все}_\mu + \text{все}_e$	41	138	0.3	27
2.84	$1_\mu + 1_e$	972	163	6.0	108
	$1_\mu + \text{все}_e$	39	166	0.24	32
	$\text{все}_\mu + \text{все}_e$	118	161	0.73	12

На рис. 4, 5 представлены результаты фитирования статистики 10^{14} событий для вариантов $1_\mu + \text{все}_e$ и $\text{все}_\mu + \text{все}_e$. Интенсивность пучка

была равна $10^7 \mu^+/\text{с}$ на полный детектор из 1024 элементов.

3.2. Программа “Fast Program” (FP)

Таблица 2. Результаты фитирования GEANT4 сборки 3×3 кристаллов при статистике 10^9 событий, интенсивности пучка мюонов 10^7 с^{-1} на 1024 кристалла при различных критериях отбора событий (“отбор” соответствует количеству частиц в интервале $(-20-+20)$ мкс, но $(0-+20)$ мкс для $\text{все}_\mu + \text{все}_e$; установка регистрирует все события (нет мертвого времени); формула фитирования — $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_\mu) + B$; значения χ^2 лежат в естественных пределах для всех вариантов)

Нет антисовпадений между кристаллами			
Отбор	$1_\mu + 1_e$	$1_\mu + \text{все}_e$	$\text{все}_\mu + \text{все}_e$
$\sigma(\tau_\mu)$, мкс	0.127	0.134	0.139
N_0/B	234	70	28
Антисовпадения 2 нс между кристаллами			
$\sigma(\tau_\mu)$, мкс	0.138	0.141	0.154
N_0/B	368	175	36

Таблица 3. {1} — максимальное мертвое время для регистрации второго сигнала, {2} — максимальное время $t_2 - t_1$ между сигналами в паре для обеспечения сдвига второго сигнала ≤ 1 пс; передний фронт сигнала $\tau_r = 2$ нс и задний $\tau_d = 4$ нс; позитрон — (70–800) ф.э., мюон — (801–1200) ф.э.

Частицы в паре	$\mu-\mu$	$\mu-e$	$e-\mu$	$e-e$
{1}, нс	8	25	8	17
{2}, нс	15	45	15	30

Для набора статистики 10^{14} с помощью пакетов GEANT потребовалось бы при работе на 16 процессорах порядка 100 лет. Однако для розыгрыша всего процесса во времени нет необходимости использовать полное моделирование всех процессов. Развертка по времени могла быть смоделирована с помощью отдельной программы, которая не обязательно должна была разыгрывать все физические процессы, но в ней должен был присутствовать целый набор (пакет) вероятностей, который уже определялся с помощью комплексов GEANT на разумной статистике (10^9-10^{10} событий) без развертывания всего процесса во времени. Пакет вероятностей определялся при условии, что если происходит регистрация любых частиц в разных детекторах в пределах 2 нс, то такие события выбрасываются. Это существенно облегчает формирование пакета вероятностей, так как каждый детектор при некоторой потере эффективности регистрации практически был независим от других детекторов. Для каждого мюона, зарегистрированного в любом из детекторов, выбирались события только с одним позитроном в сборке. В этот пакет вероятностей входит вероятность того, что для всей сборки был обязательно зарегистрирован и мюон, и позитрон. При этом для каждого детектора, где зарегистрирован мюон, дается вероятность, где будет зарегистрирован позитрон (в большинстве случаев это тот же самый детектор). Учитывались также вероятности, что в сборке регистрируется мюон, а позитрон не регистрируется и, наоборот, мюон не регистрируется, а позитрон регистрируется. Во втором случае дается вероятность зарегистрироваться позитрону в каждом из детекторов. Кроме

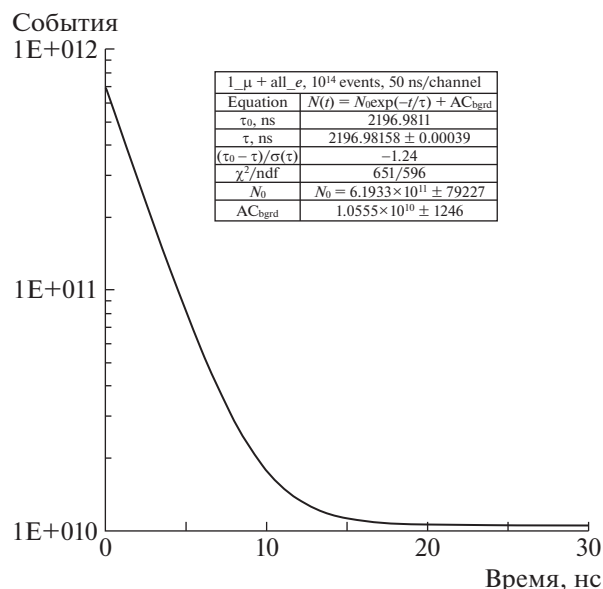


Рис. 5. Временной спектр позитронов при распаде мюона в диапазоне (0–+30) мкс для 10^{14} зарегистрированных событий. Сборка 3 × 3 сцинтиллятора. Программа FP (см. разд. 3.2). При моделировании статистики 10^{14} событий получено $\sigma(\tau_\mu) = 0.39$ пс для варианта 1_μ + все_e. Интервал (–30–+30) мкс без антисовпадений. При фитировании была задана величина $\tau_0 = 2196.9811$ нс.

вышеизложенного учитывается также вероятность того, что мюон будет зарегистрирован как позитрон и наоборот, а также вероятность того, что в сборке не будет зарегистрированных частиц и т.д. Выбор сборки 3 × 3 был обусловлен еще и тем, что это минимальная сборка, которая адекватно отражает реальную картину событий, и пакет вероятностей для нее сформировать гораздо проще, чем для сборки 32 × 32. Более того, дополнительные детекторы заметно замедляют работу быстрой программы (общее увеличение переборов в циклах, переборы при определении времени совпадений как в разных детекторах, так и при определении событий с мертвым временем). Это не позволило бы нам набрать нужную статистику в заданный срок. Набор статистики 10^{14} распадов занимает 80 суток для сборки 3 × 3 элемента и 516 суток для сборки из 32 × 32 элемента.

4. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

4.1. Мертвое время системы регистрации событий (СРС)

В работе [2] было изучено влияние мертвого времени СРС в паре $e-e$ на систематический сдвиг экспериментального значения времени жизни мюона $\Delta(\tau_\mu)$ из-за потери второго позитрона. Аналогичная систематика присутствует и в предлагаемом

эксперименте. На рис. 6 приведены значения $\Delta(\tau_\mu)$ для отбора все_μ + все_e. На самом деле это только одна из причин сдвига $\Delta(\tau_\mu)$.

Вторая причина сдвига $\Delta(\tau_\mu)$ — мертвое время 5 нс преобразователя время–код (TDC) для парных импульсов [9]. Например, минимальное мертвое время в паре $e-e$ не превышает 3 нс. Третья причина — сдвиг времени регистрации второго сигнала в каждой паре. Четвертая — мертвое время 12 нс усилительной микроячейки SiPM [6]. Величина мертвого времени и временной сдвиг второго сигнала в паре вычислены при переднем фронте сигнала $\tau_r = 2$ нс и заднем $\tau_d = 4$ нс (формула (1)) при амплитуде (70–800) ф.э. для позитрона и (801–1200) ф.э. для мюона. Результаты вычислений приведены в табл. 3. Заметим, что мертвое время в паре $\mu-e$ не влияет на систематический сдвиг времени жизни мюона при выборе времени ≥ 100 нс для регистрации позитрона распада. Были выбраны дискриминаторы со следящим порогом (CFD). Дискриминаторы с двумя фиксированными порогами (D) увеличивают величины {1} и {2} на 20–30% и исключают случайные совпадения μ -сигнала с e -сигналом (рис. 3).

Рисунок 7 демонстрирует временной спектр $N(t_2 - t_1)$ позитронов при мертвом времени 20 нс только в паре $e-e$.

В эксперименте автоматически регистрируются спектры $N(t_2 - t_1)$ между всеми парами и можно проверить соответствие мертвых времен с результатами из табл. 3. Очевидно, зависимости $N(t_2 - t_1)$ не будут дельтаобразными функциями как на рис. 6 из-за суперпозиции всех четырех причин и амплитудного разброса сигналов, но эти зависимости автоматически регистрируются во время эксперимента. Из табл. 3 следует, что отбор событий с $t_2 - t_1 > 200$ нс для пар $\mu-\mu$, $e-\mu$ и $e-e$ гарантировано исключит влияние мертвого времени на величину $\Delta(\tau_\mu)$ и несущественно уменьшит статистику, поскольку вероятность таких событий не превышает 4×10^{-3} при среднем расстоянии 100 мкс между частицами (интенсивность пучка

Таблица 4. Ошибки предложенного эксперимента для варианта 1_μ + все_e

Источник ошибки	$\sigma(\tau_\mu)$, пс	$\sigma(G_F)/G_F$, 10^{-6}
Масса мюона	0.22	0.05
Калибровка времени	0.13	0.03
Статистическая ошибка	0.39	0.09
Суммарная ошибка	0.46	0.10
Существующая ошибка	2.2	0.5

$10^7 \mu^+/\text{с}$). Отбор событий с $t_2 - t_1 > 100$ нс для пары $\mu-e$ уменьшит статистику всего на $\approx 5\%$. Распределения времен $N(t_2 - t_1)$ для всех пар частиц позволяют измерить зависимость величины $\Delta(\tau_\mu)$ от мертвого времени $t_2 - t_1$ любой пары и получить зависимости, подобные данным на рис. 3. Таким образом, это позволяет исключить влияние мертвого времени на точность величины τ_μ практически без потери скорости набора статистики.

4.2. Радиационные повреждения сцинтилляторов и SiPM

Очевидно, что для длительного (116 суток) времени работы при интенсивности пучка $10^7 \mu^+/\text{с}$ необходим анализ влияния радиационных повреждений на световыход сцинтилляторов и на шумы и усиление SiPM. В более тяжелом положении оказывается сцинтиллятор, который облучается мюонами и позитронами. Для поиска подходящего сцинтиллятора было затрачено значительное время. Была вычислена доза на один сцинтиллятор $3 \times 3 \times 3 \text{ мм}^3$ при набранной статистике 10^{14} событий на полный детектор 32×32 сцинтиллятора. Она составляет 2.5×10^3 Гр. В работе [10] для эксперимента ATLAS изучено влияние облучения на световыход нескольких сцинтилляторов. Для сцинтиллятора BC-412 (EJ-208) наблюдается уменьшение световыхода на 10% при дозе 7×10^5 Гр. Следует заметить, что авторы использовали пучок 6 МэВ протонов, которые оказывают гораздо большее радиационное воздействие на сцинтиллятор, чем мюоны, и при нашей суммарной дозе 2.5×10^3 Гр нет изменения световыхода BC-412. При наборе статистики 10^{14} доза позитронов на SiPM составляет $5 \times 10^8 \text{ мм}^{-2}$. В работе [11] показано, что существенное уменьшение коэффициента усиления (в 2 раза) наблюдается при дозе $5 \times 10^{10} \text{ мм}^{-2}$ и пренебрежимо мало при дозе $5 \times 10^8 \text{ мм}^{-2}$. Существенное увеличение шума SiPM наблюдается при дозе $3 \times 10^9 \text{ мм}^{-2}$, но этот эффект несущественен при выборе порога 70 ф.э. для регистрации позитронов.

4.3. Внешнее магнитное поле

Мы используем пучок мюонов с поляризацией, близкой к единице [12]. Эта поляризация частично теряется из-за взаимодействий спина мюона с веществом. В работе [13] измерена поляризация мюонов в сцинтилляторе NE-102. Она равна ≈ 0.24 . Спин мюона будет прецессировать в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Это приводит к искажению распределения $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_\mu) + B$ и величины τ_μ при наличии

выделенного геометрического направления регистрации позитронов. В предложенной установке позитроны регистрируются с равной вероятностью в угле 4π . Это должно быть проверено, так как даже магнитное поле Земли ≈ 1 Гс неприемлемо искажает значение τ_μ . После этого надо выбрать работу в магнитном поле $\gg 1$ Гс или без него. Было показано, что величина $\Delta(\tau_\mu) = 0$, и значения $\sigma(\tau_\mu)$ равны при $B = 0$ и $B = 1$ кГс при фитировании зависимости $N(t) = N_0(1 - (P_\mu/3) \cos \omega t) \exp(-t/\tau_\mu) + B$ с поляризацией мюона $P_\mu = 1$ и частотой ω прецессии спина мюона в магнитном поле. Позитроны регистрировались только по направлению пучка. Мы будем полагать, что присутствие внешнего магнитного поля необходимо при наличии земного поля ≈ 1 Гс, но это не влияет на результаты эксперимента.

4.4. Нестабильность усиления SiPM

Разброс коэффициентов усиления отдельных ячеек сборки SiPM не превышает 15% [14]. Изменение коэффициента усиления от температуры равно $\approx -1\%/K$. Модуль QDC (рис. 3) позволяет с большой точностью стандартизовать и стабилизировать усиление отдельных ячеек во время эксперимента. Будем полагать, что при компенсации этих эффектов они не дадут вклада в величину τ_μ .

4.5. Временная структура пучка мюонов

Временная структура пучка мюонов ускорителя PSI может быть описана как $I(t) = I_0(1 + 0.0008|\sin(t/40\text{нс})|)$ [15]. Она обусловлена временной структурой пучка протонов. Была разыграна статистика по формуле $N(t) = N_0(1 + 0.08|\sin(t/40\text{нс})|) \exp(-t/\tau_\mu) + B$ и обработана по формуле $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_\mu) + B$. Результат — $\chi^2/\text{ndf} = 19852/19978$ и отсутствие сдвига $\Delta(\tau_\mu)$. Отсюда следует, что временная структура пучка ускорителя PSI не дает вклада в величину τ_μ .

4.6. Погрешности TDC (преобразователь время—код)

Основными характеристиками TDC являются интервал наблюдения T , цена канала Least Significant Bin (LSB), дифференциальная DNL и интегральная INL нелинейности. Было показано, что $\sigma(\tau_\mu)$ не зависит от интервала наблюдения при $T > 30$ мкс и от цены канала при $1 < \text{LSB} < 100$ нс. DNL и INL также являются важными величинами при наборе статистики 10^{14} событий и высокой точности определения τ_μ .

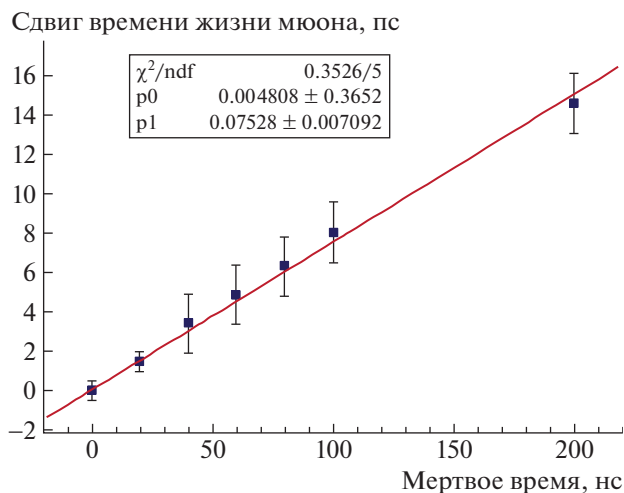


Рис. 6. Зависимость систематического сдвига $\Delta(\tau_\mu)$ от мертвого времени СРС. Анализ дан для варианта отбора все μ + все e в интервале (0–20) мкс времени распада мюона, при этом мертвое время было равно для регистрации μ – e -, μ – μ -, e – μ - и e – e -пар. Введены антисовпадения в пределах 2 нс для соседних кристаллов. Такой же анализ был выполнен при варианте отбора 1_μ + все e . Анализ дан в интервале (0–30) мкс относительно времени регистрации мюона только для e – e -пар без антисовпадений между кристаллами. Смещение $\Delta(\tau_\mu)$ в этом случае в ≈ 7 раз больше.

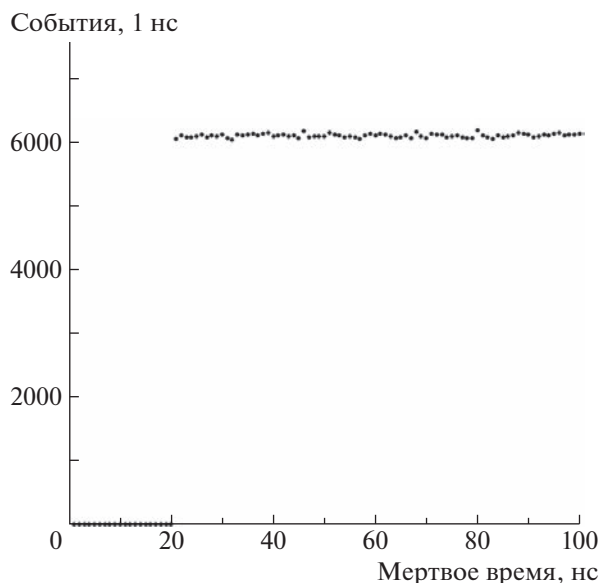


Рис. 7. Зависимость $N(t_{2e} - t_{1e})$ при заданном мертвом времени 20 нс между позитронами и при $0 < t_{1e} < 29$ мкс относительно сигнала мюона. На рисунке принято значение $t_{1e} = 0$. Вариант 1_μ + все e , нет антисовпадений между кристаллами.

Рассмотрим два способа измерения DNL и INL. Первый способ — калибровка TDC с помощью калиброванного рубидиевого эталона [2]. Авто-

ры получили систематическую ошибку $\sigma_{\text{sys}}(\tau_\mu) = 0.03$ пс. Это небольшая величина по сравнению с нашей статистической ошибкой $\sigma(\tau_\mu) = 0.39$ пс. Второй способ — подача на входы старт и стоп TDC некоррелированных событий [16]. В этом случае при $\text{DNL} = \text{INL} = 0$ количество событий в каждом канале одинаково в пределах статистической ошибки. $\text{DNL} \neq 0$ и $\text{INL} \neq 0$ искажают такое распределение. Измеренные величины таких отклонений позволяют определить LSB и правильное время каждого канала. В работе [16] показано, что DNL и INL зависимости идентичны для многих TDC и не зависят от внешних условий. При использовании предложенного здесь TDC старт не коррелирован с каналом кодировщика, поскольку TDC работает непрерывно. Величины $\sigma_i(\text{DNL})$ резко уменьшаются, но интегральная нелинейность остается. Для предложенного кодировщика TDC — V1190A2-Esst нелинейности равны: $\sigma(\text{DNL}) < 0.2$ LSB, $\sigma(\text{INL}) < 0.3$ LSB [8]. Непонятно, с какой точностью удастся описать зависимость $t_N = f(N)$ для TDC — V1190A-2Esst. Поэтому будем пессимистически предполагать, что получим $\sigma_{\text{sys}}(\tau_\mu) = 0.13$ пс, как было показано в работе [2].

4.7. Состав пучка мюонов

Пучок “поверхностных мюонов” PSI содержит $< 10^{-4}$ пионов [12] и $< 1\%$ позитронов [17]. Простые оценки показывают, что столь малая примесь пионов не влияет на результаты. Позитроны с энергией ≈ 30 МэВ имеют достаточно большой пробег и только рассеиваются в сцинтилляторе и материале SiPM. Некоррелированные по времени позитроны увеличивают фон и могут привести к увеличению $\sigma(\tau_\mu)$. Возможны два способа изучения и ослабления влияния примеси позитронов на величину $\sigma(\tau_\mu)$. Во-первых, набрать $\approx 10^{12}$ случаев распада мюона за сутки и экстраполировать полученную величину $\sigma(\tau_\mu)$ на статистику 10^{14} . После этого при неудовлетворительном результате разместить на оси пучка за SiPM сцинтилляционный детектор для регистрации примеси позитронов в пучке. Сигнал с этого детектора, совпавший по времени с сигналом любого сцинтиллятора SiPM, позволит выбросить из анализа такое событие. Это приводит к случайным совпадениям примесного позитрона с позитроном $\mu \rightarrow e$ распада. При интенсивности 10^7 с^{-1} среднее время между позитронами распада равно ≈ 100 нс. Для реальной длительности 5 нс выходного сигнала SiPM и телесного угла $0.1 \times 4\pi$ сцинтилляционного детектора это приводит к потере 5% интенсивности из-за случайных совпадений и дополнительно 10% от этой величины из-за телесного угла, всего $\approx 0.5\%$. Вариант соответствует сцинтилляционному детектору с размерами

$10 \times 10 \text{ см}^2$ на расстоянии $\approx 35 \text{ см}$ за SiPM. Предложенный метод, как и режим регулярного набора статистики, предполагает синхронную работу всех TDC. Это возможно с TDC V1190A/B-2Esst, которые позволяют непрерывную регистрацию событий и их запись в память. Такой режим был, в частности, продемонстрирован в работе [18].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена новая установка для точного измерения времени жизни мюона и константы Ферми G_F при $\mu^+ \rightarrow e^+$ распаде и проанализированы все возможные источники ошибок эксперимента. В отличие от электромагнитного и сильного взаимодействий все частицы участвуют в слабых взаимодействиях, сила которых определяется константой Ферми G_F . Многие процессы определяются слабым взаимодействием. Это процессы большого взрыва, нуклеосинтеза и горения звездного водорода, археологического датирования и медицинской визуализации, а также фундаментальной ядерной физики и физики элементарных частиц. Значение константы G_F лучше всего определяется при измерении времени жизни мюона τ_μ . Во-первых, чисто лептонный характер распада мюона обеспечивает однозначную теоретическую интерпретацию. Во-вторых, точное измерение времени жизни мюона стало возможно в настоящее время благодаря развитию методов точного измерения времени и аппаратуры для набора необходимой статистики $\approx 10^{14}$ распадов без искажений. Показано, что можно достичь точности $(G_F)/G_F = 0.1 \times 10^{-6}$. В данном предложении нового эксперимента отсутствует систематическая ошибка из-за мертвого времени системы регистрации событий. В работе [2] эта систематическая ошибка превышала 0.02×10^{-6} . Для дальнейшего улучшения точности измерения G_F потребуется, помимо улучшения точности τ_μ , экспериментальное улучшение точности массы мюона m_μ (в настоящее время $\sigma(m_\mu)/m_\mu = 0.02 \times 10^{-6}$ [1] и вклад в точность G_F составляет 0.05×10^{-6}) и улучшение временной калибровки (вклад 0.03×10^{-6} [2]). В настоящее время точность вычислений G_F составляет 0.14×10^{-6} [3] в рамках Стандартной модели взаимодействий элементарных частиц. Основные ошибки приведены в табл. 4.

Для варианта отбора все μ + все e суммарная ошибка $\sigma(G_F)/G_F$ не превышает 0.13×10^{-6} . При обработке результатов доступны для анализа все варианты отбора, введение любых мертвых времен между любыми частицами и выбор спектра с антисовпадениями или без них между любыми сцинтилляторами. Анализ вариантов и объяснение

их результатов значительно повышает достоверность полученных данных. После анализа может быть выбран оптимальный вариант по точности $\sigma(G_F)/G_F$ и/или, может быть, по величине χ^2 .

Авторы благодарны А.А. Коршенинникову и М.Д. Скорохватову за поддержку работы и Российскому фонду фундаментальных исследований, по гранту № 18-02-00007А которого была выполнена значительная часть работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025010 (2021).
2. V. Tishchenko *et al.* (MuLan Collab.), *Phys. Rev. D* **87**, 052003 (2013).
3. A. Pak and A. Czarnecki, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 241807 (2008).
4. A. Crivellin, M. Hoferichter, and C. A. Manzari, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 071801 (2021).
5. V. Tishchenko, S. Battu, R. M. Carey, D. B. Chitwood, J. Crnkovic, P. T. Debevec, S. Dhamija, W. Earle, A. Gafarov, K. Giovanetti, T. P. Goringe, F. E. Gray, Z. Hartwig, D. W. Hertzog, B. Johnson, P. Kammel, *et al.*, arXiv: 1211.0960v1 [hep-ex].
6. <https://www.onsemi.com/products/sensors/silicon-photomultipliers-sipm>
7. Y. Shao, *Phys. Med. Biol.* **52**, 1103 (2007).
8. <https://www.caen.it/products/>
9. J. Allison, K. Amako, J. Apostolakis, P. Arce, M. Asai, T. Aso, E. Bagli, A. Bagulya, S. Banerjee, G. Barrand, B. R. Beck, A. G. Bogdanov, D. Brandt, J. M. C. Brown, H. Burkhardt, Ph. Canal, *et al.*, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **835**, 186 (2016).
10. S. Liao, R. Erasmus, H. Jivan, C. Pelwan, G. Peters, and E. Sideras-Haddad, *J. Phys.: Conf. Ser.* **645**, 012021 (2015).
11. S. Sánchez Majos, P. Achenbach, and J. Pocho-dazalla, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **594**, 351 (2008).
12. <https://www.psi.ch/en/smus/pie3>
13. G. G. Myasishcheva, Yu. V. Obukhov, V. S. Roganov, and V. G. Firsov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **56**, 1199 (1969).
14. M. Renschler, W. Painter, F. Bisconti, A. Haungs, T. Huber, M. Karus, H. Schieler, and A. Weindl, arXiv: 1804.00897v1 [astro-ph.IM].
15. T. Prokscha, *Isis Muon Training Course*, 25th-Feb-2005, <https://www.psi.ch/en>
16. B. Markovic, D. Tamborini, S. Bellisai, A. Bassi, A. Pifferi, F. Villa, G. M. Padovini, and A. Tosi, in *Proceedings of SPIE, 2013, San Francisco, California, United States*, Vol. 8631, 86311F, <https://doi.org/10.1117/12.2005537>
17. T. Prokscha, E. Morenzoni, K. Deiters, F. Foroughi, D. George, R. Kobler, A. Suter, and V. Vrankovic, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **595**, 317 (2008).

18. A. U. Abeysekara, R. Alfaro, C. Alvarez, J. D. Álvarez, R. Arceo, J. C. Arteaga-Velázquez, H. A. Ayala Solares, A. S. Barber, B. M. Baughman, N. Bautista-Elivar, J. Becerra Gonzalez, E. Belmont-Moreno, S. Y. BenZvi, D. Berley, M. Bonilla Rosales, J. Braun, *et al.*, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **888**, 138 (2018).

PROPOSAL AND ANALYSIS OF THE EXPERIMENT FOR ACCURATE MEASUREMENT OF THE MUON LIFETIME AND THE FERMI CONSTANT

A. M. Bakalyarov¹⁾, A. I. Klimov¹⁾, I. N. Machulin¹⁾, E. A. Meleshko¹⁾, V. I. Selivanov¹⁾

¹⁾ National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia

An experiment is proposed for a record-breaking measurement of the world Fermi constant G_F during the decay of a positive muon. All systematic errors were analyzed. The program “Fast Program” (FP) was developed and tested using GEANT data and running ≈ 1500 times faster. 10^{14} events were collected with two options for selecting events. An accuracy of 0.46 ps for the muon lifetime and 0.1 ppm for the G_F value was obtained, taking into account all systematic errors. The accuracy of theoretical calculations G_F is 0.14 ppm within the framework of the Standard Model interactions of elementary particles.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УСКОРЕНИЯ БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ И ИНИЦИИРОВАНИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ И $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ ПРИ ИНТЕНСИВНОСТЯХ ПИКОСЕКУНДНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИАПАЗОНЕ 10^{18} – 10^{19} Вт/см²

© 2023 г. С. Н. Андреев^{1),2)}, А. П. Матафонов³⁾, **В. П. Тараканов⁴⁾**,
В. С. Беляев³⁾, А. Ю. Кедров³⁾, В. П. Крайнов^{1)*}, С. А. Муханов⁵⁾, А. В. Лобанов⁶⁾

Поступила в редакцию 13.01.2023 г.; после доработки 21.02.2023 г.; принята к публикации 24.02.2023 г.

Представлены результаты численного моделирования ускорения пучка протонов при сверхинтенсивном пикосекундном лазерном воздействии на алюминиевую мишень, дающие хорошее совпадение основных параметров пучка с экспериментальными данными в широком диапазоне интенсивностей падающего излучения от $I = 10^{18}$ Вт/см² до $I = 10^{19}$ Вт/см² при постоянной длительности лазерного импульса. Полученные параметры пучков протонов далее были использованы для расчета полного выхода α -частиц и нейтронов в результате протекания ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ при воздействии пучков протонов на борсодержащие мишени. Показано, что количество α -частиц, покидающих мишень из бора и способных достичь трековых детекторов, составляет не более 5% от полного выхода α -частиц, поскольку большая их часть задерживается в толще мишени из-за ионизационных потерь. При этом сравнение полученных расчетных значений выхода α -частиц, попадающих на детекторы, с экспериментальными данными показывает их достаточно хорошее соответствие. Рассчитан полный выход нейтронов в реакции $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ и показано, что при интенсивности $I = 10^{19}$ Вт/см² пикосекундного лазерного импульса он достигает величины $N_n = 1.4 \times 10^8$, что составляет около 3% от полного выхода α -частиц.

DOI: 10.31857/S0044002723040037, EDN: EGHTUB

1. ВВЕДЕНИЕ

Перспективность бор-водородной смеси как термоядерного топлива, обладающего важными преимуществами: малым количеством генерируемых нейтронов с невысокой энергией и дешевой, уже почти полвека обсуждается в научной литературе [1, 2].

Активность исследования ядерной реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ значительно возросла после проведения экспериментальных исследований, начало которым положила работа 2005 г. [3]. В этой работе впервые в лазерной плазме был получен выход α -частиц в результате протекания реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$. Эксперимент был проведен на лазерной установке с энергией в импульсе 10 Дж при интенсивности излучения 2×10^{18} Вт/см². Выход α -частиц был зафиксирован на уровне 10^3 в 1 ср.

Первыми после 2005 г. экспериментами в этом направлении были исследования на лазерной установке Pico 2000 в лаборатории LULI (Laboratoire d'Utilisation des Lasers Intenses) [4]. Установка для исследования реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ позволяет синхронизировать два лазерных пучка, фокусируя их в одной вакуумной камере. Лазерное излучение первого лазера с энергией в импульсе 400 Дж на длине волны 0.53 мкм при длительности импульса 1.5 нс и пиковой интенсивности излучения 6×10^{14} Вт/см² фокусировалось на поверхность мишени из бора

¹⁾Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия.

²⁾Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия.

³⁾Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев, Россия.

⁴⁾Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия.

⁵⁾Московский политехнический университет, Москва, Россия.

⁶⁾Московский инженерно-физический институт (национальный исследовательский ядерный университет), Москва, Россия.

*E-mail: vpkrainov@mail.ru

и вызывало образование плазмы. Лазерное излучение второго лазера с энергией 20 Дж, длиной волны 0.53 мкм, длительностью импульса 1 пс и интенсивностью 6×10^{18} Вт/см² генерировало в тонкой алюминиевой фольге толщиной 20 мкм быстрые протоны. Протоны взаимодействовали с ионами бора плазмы, образованной излучением первого лазера.

При оптимальной задержке между импульсами двух лазеров 1.2 нс выход α -частиц достигал максимального значения около 10^7 в 1 ср за лазерный импульс.

Следующим по значимости и по рекордному выходу α -частиц следует считать эксперименты, проведенные международным коллективом ученых из Чехии, Италии и Польши на одном из мощнейших лазеров Европы “Астерикс” [5], предназначенном для научных исследований и расположенном в Праге — PALS (Prague Asterix Laser System). В этих экспериментах был получен выход α -частиц в реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ около 10^9 в 1 ср за лазерный импульс. Параметры лазерного излучения в этих экспериментах: энергия импульса 500 Дж, длительность импульса порядка 0.3 нс, диаметр пятна фокусировки 80 мкм. В следующих экспериментах на этой установке удалось увеличить выход α -частиц до 10^{10} в 1 ср за один лазерный импульс [6] за счет оптимизации мишени.

В статье [7] представлены предварительные результаты по генерации α -частиц с использованием пикосекундного высокоинтенсивного лазера петаваттного класса. Эксперимент проводился в Институте лазерной техники в Осаке (Япония). Энергия лазерного импульса составляла 1.4 кДж при длительности импульса 2.6 пс. Лазерный импульс фокусировался на тонкой пластиковой фольге для генерации пучка протонов с тыльной стороны мишени, используя известный механизм TNSA (target normal sheath acceleration). Пучок протонов падал на мишень из нитрида бора, генерируя α -частицы в результате ядерной реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$. Генерировались α -частицы с энергиями 8–10 МэВ и с выходом около 5×10^9 в 1 ср.

Важно отметить, что в работах [4–6] для получения максимального выхода α -частиц использовали предварительно созданную плазму. В статье [4] для этой цели использовалось лазерное излучение дополнительного лазера, а в статьях [5, 6] — излучение предимпульса основного лазерного импульса. Для получения максимального выхода α -частиц в работе [4] подбирали оптимальную временную задержку между первым лазерным импульсом и основным импульсом, а в работах [5, 6] подбирали величину и длительность предимпульса. В работе [4] показано, что при изменении длительности временной задержки между наносекундным

лазером, который создает предварительную плазму, и основным пикосекундным лазерным импульсом изменяется количество α -частиц.

В следующей статье этих авторов [8] было показано, что и в случае воздействия на мишень из бора только одного лазерного импульса с повышенной интенсивностью до уровня 10^{19} Вт/см² был зарегистрирован выход α -частиц на уровне 10^5 в 1 ср. В экспериментах [8] лазерное излучение (энергия 12 Дж, длина волны 1.056 мкм, длительность импульса 350 фс, интенсивность 10^{19} Вт/см²) генерировало в тонкой алюминиевой фольге быстрые протоны, которые взаимодействовали с ионами бора мишени. Таким образом, как при воздействии быстрых протонов на предварительно созданную плазму, так и при воздействии быстрых протонов на твердотельную мишень регистрируется значительное количество α -частиц.

Во всех перечисленных выше работах [3–8] оставался нерешенным вопрос о полном выходе α -частиц в результате инициирования реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$, так как регистрируются только те α -частицы, которые вышли либо из предварительно созданной плазмы [4–6], либо из твердотельной мишени [3, 8]. При этом нет информации, сколько α -частиц не смогло выйти из плазмы или из глубины мишени.

Для решения этой проблемы в работе [9] предложен новый метод измерения абсолютного выхода α -частиц в реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$, основанный на одновременном измерении количества нейтронов в реперной ядерной реакции $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$.

В работе [10] приведены экспериментальные результаты по исследованию реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ одновременно с реперной реакцией $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ при интенсивности лазерного излучения 2×10^{18} Вт/см². Это позволило оценить полное количество α -частиц в 10^9 частиц в 4π ср.

Также необходимо отметить, что в работах [3–6, 8, 9] для анализа полученных экспериментальных результатов не использовалось численное PIC-моделирование ядерной реакции синтеза $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ в мишенях из бора. Предварительные результаты PIC-моделирования ядерной реакции синтеза $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ представлены только в работах [7, 10].

Кроме того, во всех представленных работах не использовалось численное PIC-моделирование ядерной реакции $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ в мишенях из бора.

Но PIC-моделирование ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ исключительно важно, поскольку позволяет понять основные механизмы, связанные с генерацией быстрых протонов, α -частиц и нейтронов, с процессами распространения α -частиц в мишени из бора, и позволяет адекватно интерпретировать экспериментальные результаты.

В работе [11] представлены результаты PIC-моделирования ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ при интенсивности лазерного излучения 2×10^{18} Вт/см².

Представляет несомненный интерес проведение такого PIC-моделирования в широком диапазоне интенсивностей лазерного излучения для адекватной интерпретации результатов проведенных и будущих экспериментов по генерации ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ с помощью пикосекундного лазерного излучения.

В связи с этим в настоящей работе представлены результаты численного моделирования ускорения пучка протонов и генерации ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ в широком диапазоне интенсивностей падающего пикосекундного лазерного излучения от $I = 10^{18}$ Вт/см² до $I = 10^{19}$ Вт/см².

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УСКОРЕНИЯ БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ

Расчеты по лазерному ускорению протонов под действием сверхинтенсивных лазерных импульсов проводились в двухмерной XZ-версии PIC-кода КАРАТ [12]. Схема расчетной области численного эксперимента по ускорению протонов приводится на рис. 1. Размеры расчетной области составляли 40 мкм по оси Z и 60 мкм по оси X. Мишень представляла собой прямоугольную область толщиной 10 мкм (по оси Z) и шириной 50 мкм (по оси X), заполненную плазмой, состоящей из макрочастиц, моделирующих электроны e^- и ионы алюминия Al^+ с постоянной концентрацией $n = 10 \times n_{\text{cr}} = 1.1 \times 10^{22}$ см⁻³, где $n_{\text{cr}} = 1.1 \times 10^{21}$ см⁻³ — критическая концентрация для длины волны 1 мкм падающего лазерного излучения. Стоит отметить, что реальная концентрация атомов в алюминиевой мишени более чем на порядок превышает величину, используемую в моделировании. Однако предварительные расчеты показали, что эта величина практически не влияет на характеристики потока ускоренных протонов, при этом очень существенно увеличивает время моделирования.

Перед мишенью располагался слой алюминиевой предплазмы толщиной 6 мкм и шириной 50 мкм, состоящий из электронов e^- и ионов алюминия Al^+ . Профиль концентрации плазмы вдоль оси Z изменялся по экспоненциальному закону от величины 1.1×10^{20} см⁻³ на левой границе области предплазмы до 2.2×10^{21} см⁻³ у поверхности алюминиевой мишени. В поперечном направлении X профиль концентрации предплазмы являлся однородным. Выбор параметров предплазмы определялся результатами гидродинамических расчетов

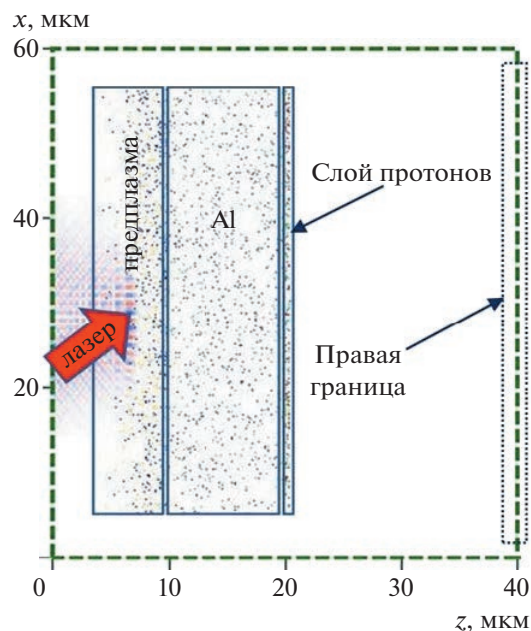


Рис. 1. Схема расчетной области численного эксперимента по ускорению протонов.

взаимодействия с алюминиевой мишенью основного мощного импульса с учетом пикосекундного предимпульса за 14 нс до основного импульса и предимпульса усиленного спонтанного излучения (УСИ) длительностью 4 нс на полувысоте [11]. Расстояние по оси Z от левой границы расчетной области до левой границы предплазмы составляло 4 мкм. На тыльной поверхности мишени располагался слой толщиной 0.2 мкм и шириной 50 мкм, состоящий из электронов e^- и протонов p^+ с концентрацией $n = 1.1 \times 10^{22}$ см⁻³. Расстояние по оси Z от протонного слоя на тыльной поверхности мишени до правой границы расчетной области составляло 20 мкм.

При попадании на любую границу расчетной области макроскопическая частица, моделирующая электрон или ион, исключалась из расчета, а ее пространственные координаты и компоненты вектора скорости фиксировались для дальнейшего анализа.

Для исследования энергетических спектров протонов были взяты следующие параметры лазерного импульса с гауссовым профилем как по времени, так и по пространству: длина волны 1 мкм, p — поляризация, длительность (FWHM) 1 пс, радиус пятна облучения $r = 2$ мкм и $r = 5$ мкм, угол падения на мишень 30° , интенсивность изменялась в диапазоне $I = 10^{18} - 10^{19}$ Вт/см². Все границы расчетной области являлись прозрачными для электромагнитного излучения. Полная длительность расчета составляла 6 пс.

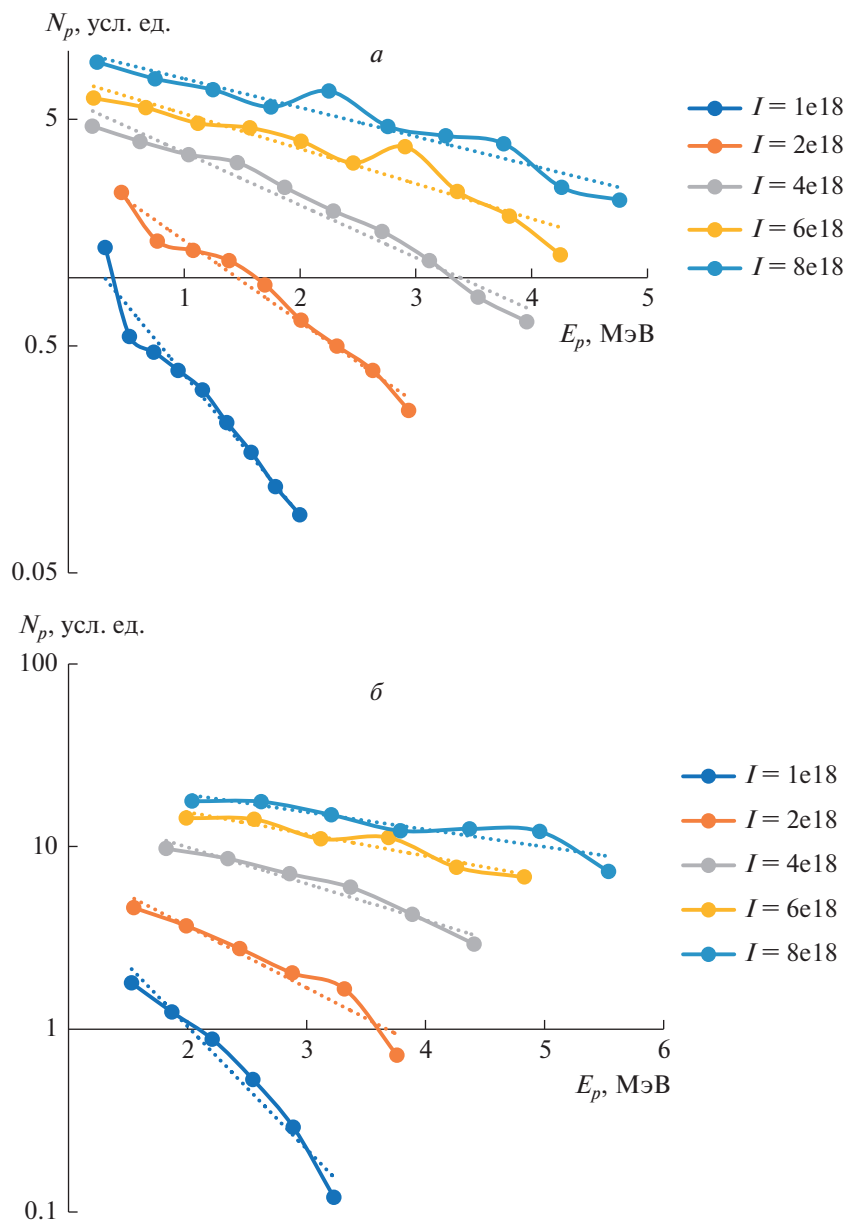


Рис. 2. Дифференциальные энергетические спектры пучка протонов при различных интенсивностях лазерного импульса с радиусом пятна облучения $r = 2$ мкм (а) и $r = 5$ мкм (б).

Для определения энергетического спектра протонов, ускоренных с тыльной поверхности мишени, применялась следующая процедура. При попадании макрочастицы, соответствующей протону, на правую границу расчетной области фиксировались: ее x -координата, кинетическая энергия, вектор скорости. Такой массив данных, полученный в течение всей длительности расчета, затем анализировался, в результате чего находились энергетический спектр протонов, диаграмма направленности пучка протонов, его линейная плотность на правой границе расчетной области. Отметим, что в рассмотренном диапазоне интенсивностей лазерного импульса поперечный размер протонного пучка

(по уровню половины амплитуды), падающего на мишень из бора, изменялся от 38 мкм при $I = 10^{18}$ Вт/см² до 47 мкм при $I = 10^{19}$ Вт/см². Для вычисления абсолютного значения числа протонов, а также пропорционального ему количества α -частиц и нейтронов (см. далее), использовалось допущение о том, что поперечный размер протонного пучка по третьему пространственному измерению (он не используется в расчете для оси Y), совпадает с поперечным размером по оси X .

На рис. 2 приводятся дифференциальные энергетические спектры пучка протонов при различных интенсивностях лазерного импульса для случаев

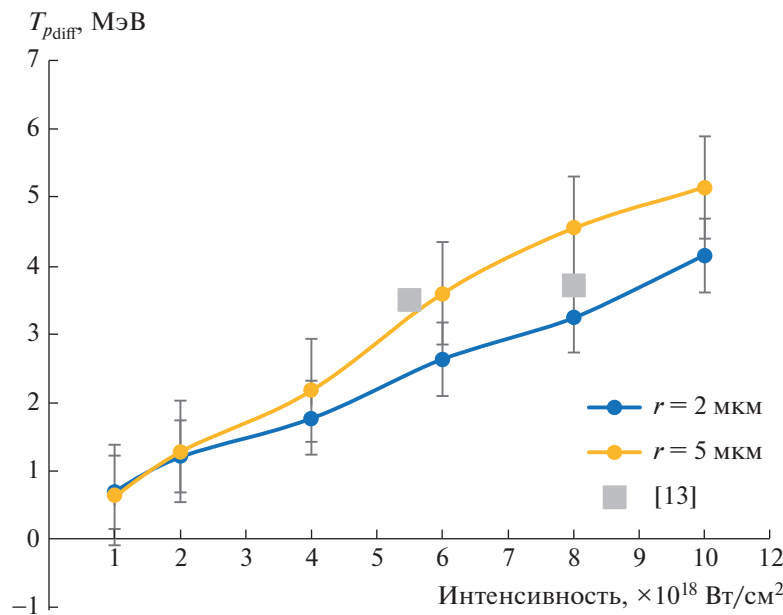


Рис. 3. Зависимость температуры пучка протонов T_{pdiff} от интенсивности лазерного импульса при различных радиусах пятна облучения: синяя и желтая сплошные кривые — расчетные данные при $r = 2$ мкм и $r = 5$ мкм соответственно. Серые квадраты — данные работы [13].

$r = 2$ мкм (а) и $r = 5$ мкм (б). Как видно из графиков, с точностью до небольших флуктуаций спектры имеют экспоненциальную форму для всего диапазона рассматриваемых интенсивностей, что позволяет ввести для них температуру T_{pdiff} .

Зависимость T_{pdiff} от интенсивности лазерного импульса приводится на рис. 3 при различных радиусах пятна облучения r (синяя кривая соответствует $r = 2$ мкм, желтая кривая — $r = 5$ мкм). Как видно из рисунка, температура протонов близка к линейной зависимости от интенсивности лазерного импульса, падающего на мишень. Кроме того, величина T_{pdiff} в пределах ошибки вычисления практически не зависит от радиуса пятна облучения лазерного импульса.

На рис. 3 также приводится значение температуры протонов T_{pdiff} , полученное в экспериментальной работе [13]. В данном эксперименте использовался лазер с энергией в импульсе 25 Дж, длиной волны 1.053 мкм и длительностью импульса 0.45 пс. В качестве мишени использовали мишень из полиэтилена толщиной 5 мкм. В указанной работе применялись методики с использованием набора трековых детекторов CR-39, позволяющие определить дифференциальный спектр протонов. Сравнение с расчетными кривыми показывает их удовлетворительное согласие с учетом определенных различий расчетной модели и условий экспериментов (длительность импульса, диаметр пятна фокусировки).

Интегральные энергетические спектры отвечают энергетическим спектрам протонов, измеряе-

мым в эксперименте путем установления фильтров, пропускающих все частицы с энергией большей, чем заданная. Таким образом, интегральный энергетический спектр отражает зависимость числа частиц с энергией выше заданной, в то время как дифференциальный спектр отражает зависимость от энергии числа частиц в расчете на единичный интервал энергии. На рис. 4 показаны интегральные спектры протонов при различных интенсивностях лазерного импульса для случаев $r = 2$ мкм (а) и $r = 5$ мкм (б).

Из графиков на рис. 4 видно, что интегральные спектры хуже описываются экспоненциальной функцией (прямой линией в полулогарифмическом масштабе), чем дифференциальные спектры протонов, приведенные на рис. 2. Если все же их аппроксимировать экспоненциальной функцией, то можно ввести соответствующую “эффективную” температуру T_{pint} , зависимость которой от интенсивности лазерного импульса показана на рис. 5.

Как видно из сравнения расчетных кривых на рис. 5 с результатами отдельных экспериментов (синий круг [4], желтый треугольник [10]), эффективная температура интегральных спектров хорошо описывает температуру протонов в широком диапазоне интенсивностей. В работе [10] использовалась лазерная установка со следующими параметрами лазерного импульса: энергия до 10 Дж, длина волны 1.055 мкм, длительность 1.5 пс. Система фокусировки на основе внеосевого параболического зеркала с фокусным расстоянием 20 см обеспечивает концентрацию не менее

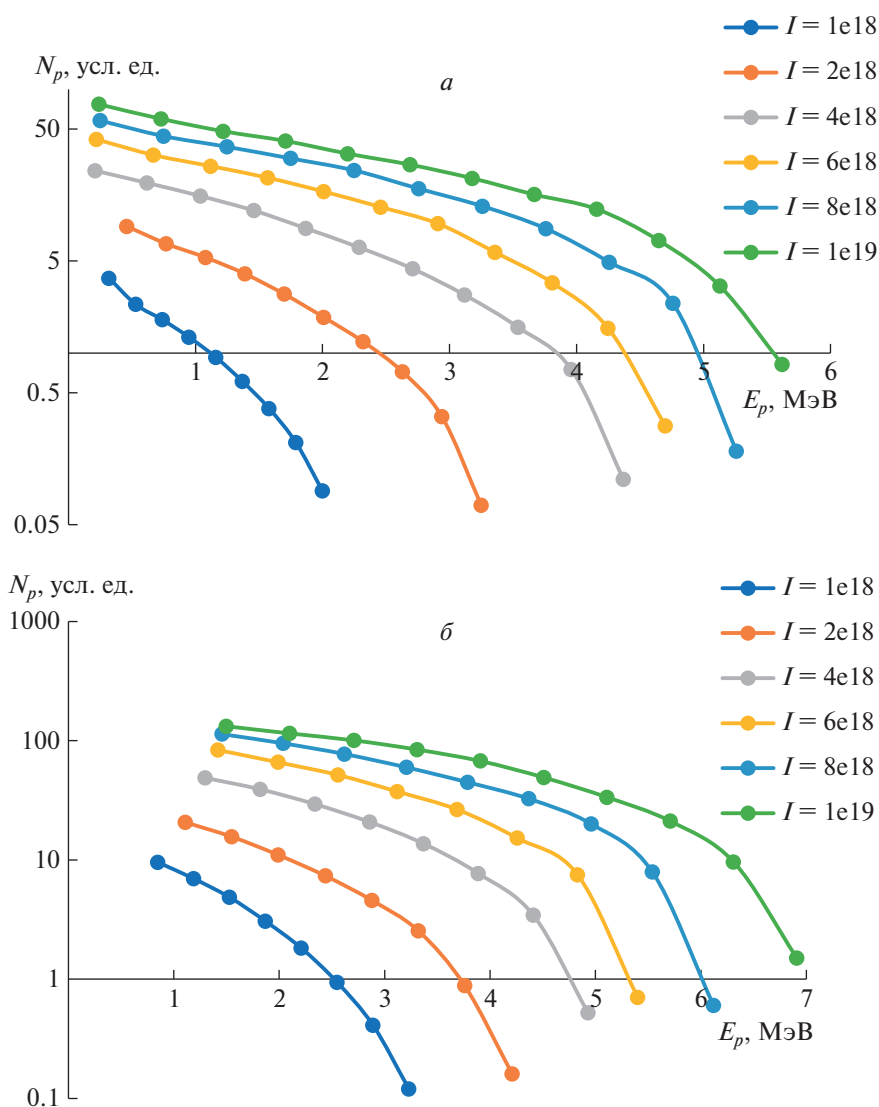


Рис. 4. Интегральные энергетические спектры пучка протонов при различных интенсивностях лазерного импульса с радиусом пятна облучения $r = 2$ мкм (а) и $r = 5$ мкм (б).

40% энергии лазерного пучка в пятно диаметром 10 мкм и, соответственно, пиковую интенсивность 2×10^{18} Вт/см². В качестве мишеней использовалась Al фольга толщиной 11 мкм.

Кроме того, из графиков видно, что кривые для $r = 2$ мкм и $r = 5$ мкм практически совпадают. Объяснение этого свойства в рамках модели виртуального катода [14] состоит в следующем. Если считать, что электрическое поле на тыльной поверхности мишени моделируется полем плоского конденсатора, то ускоряющее поле будет пропорционально Q/S , где Q — заряд пластины, равный суммарному заряду всех ускоренных электронов, а S — площадь пластины, равная площади пятна фокусировки r .

С увеличением радиуса r величины Q и S растут пропорционально r^2 , а напряженность поля

не изменяется, а следовательно, и $T_{p_{int}}$ не должна зависеть от r . При этом количество ускоренных протонов увеличивается с ростом радиуса пятна облучения.

Важной характеристикой лазерного ускорения протонов является максимальная энергия $E_{p_{max}}$, приобретаемая протонами. На начальной стадии процесса набор энергии основной массы протонов происходит в поле разделения зарядов в узком слое (порядка 10 мкм) вблизи задней поверхности мишени. Однако в дальнейшем формируется квазинейтральный пучок протонов и горячих электронов, в котором рост максимальной энергии незначительной доли протонов, движущихся на переднем фронте пучка, происходит в течение времени, в несколько раз превышающего длительность ла-

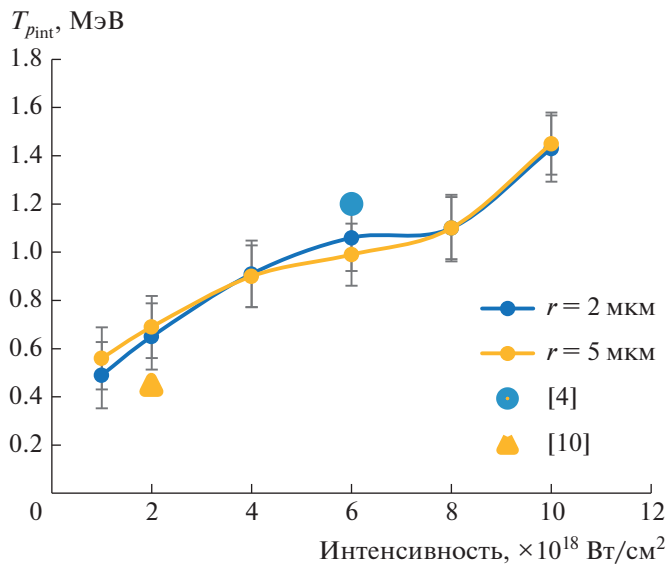


Рис. 5. Зависимость температуры пучка протонов T_{pint} от интенсивности лазерного импульса при различных радиусах пятна облучения: синяя и желтая сплошные кривые — расчетные данные при $r = 2$ мкм и $r = 5$ мкм соответственно. Отдельными символами показаны данные экспериментов [4, 10].

зерного импульса, без существенного изменения температуры основной массы протонов в пучке.

Поэтому для корректного определения E_{pmax} необходимо использовать увеличенные размеры расчетной области, чтобы кинетическая энергия протонов успела выйти на насыщение до того момента, когда частица достигнет границ расчетной области. По этой причине для определения E_{pmax} нами был проведен расчет в случае, когда размер расчетной области по оси Z увеличен в 3 раза, до 120 мкм. При этом размер по оси X не изменился и составил 60 мкм.

На рис. 6 приводятся максимальные значения энергий протонов, полученных в различных экспериментах (отдельные символы) [10, 13, 15], а также результаты моделирования (сплошные кривые) в зависимости от интенсивности лазерного импульса. Как видно из рисунка, имеет место хорошее соответствие результатов расчета и экспериментальных данных.

Таким образом, представленная численная модель взаимодействия сверхинтенсивных пикосекундных лазерных импульсов с твердотельными мишенями в широком диапазоне интенсивностей адекватно описывает свойства формируемого пучка ускоренных протонов, который будет использован на втором этапе для моделирования перспективных ядерных реакций, протекающих во вторичной мишени из бора при ее облучении протонным пучком.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ И $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$

На втором этапе выполнялось моделирование ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ при взаимодействии пучка протонов с мишенью из бора. Для задания пучка протонов в блоке моделирования ядерных реакций использовался массив данных, полученный на первом этапе моделирования для протонов, достигших правой границы. Для каждого протона фиксировались X -координата, компоненты скорости (V_x , V_z) и момент времени попадания на границу. На втором этапе протоны с параметрами, взятыми из указанного массива, запускались с левой границы ($Z = 0$) новой расчетной области, с временным сдвигом, соответствующим приходу первого протона на правую границу на первом этапе. Для расчетов выхода реакций синтеза протон–бор брались параметры пучка протонов для геометрии расчетной области 40 мкм (по оси Z) на 60 мкм (по оси X) и радиуса пятна облучения $r = 5$ мкм.

Размер расчетной области вдоль оси X совпадал с размером расчетной области PIC-модели, а вдоль оси Z размер расчетной области составлял 120 мкм (см. рис. 7).

Мишень из бора в виде прямоугольника с размерами 60 мкм вдоль оси X и 100 мкм вдоль оси Z моделировалась электрически нейтральной средой с заданной концентрацией атомов бора $n = 2.5 \times 10^{23}$ см⁻³. На каждом шаге по времени для каждого протона, движущегося со скоростью V_p области мишени, по заданным сечениям $\sigma(E_p)$ реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$, приведенным в работе [9], рассчитывались вероятности $P = \sigma(E_p) V_p n \Delta t$ актов соответствующих реакций и сравнивались со случайным числом $\xi \leq 1$. Если вероятность P оказывалась меньше ξ , то осуществлялся переход к следующему протону, в противном случае запускалась процедура, в результате которой протон исключался из расчета, а из точки его нахождения запускались α -частицы с энергиями 0.9 и 3.9 МэВ соответственно в случае реакции $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ (направление запуска α -частиц определялось из закона сохранения импульса), или нейтрон с энергией 90 кэВ в случае реакции $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ (ядро углерода в моделировании не участвовало). Ионизационные потери энергии протонов и α -частиц при их движении по своей траектории l в мишени из бора учитывались по известной формуле Бете–Блоха.

Полный выход альфа-частиц и нейтронов определялся нарастающим итогом по количеству прошедших реакций. При этом предполагалось, что поперечный размер протонного пучка по оси Y совпадает с поперечным размером по оси X .

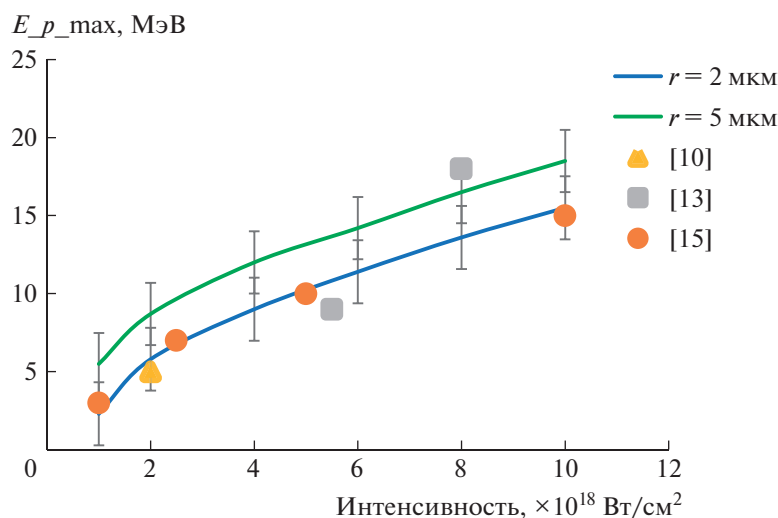


Рис. 6. Максимальная энергия протонов в зависимости от интенсивности лазерного импульса. Сплошные кривые — результаты моделирования: синяя — $r = 2 \text{ мкм}$, зеленая — $r = 5 \text{ мкм}$, отдельные символы — различные эксперименты [10, 13, 15].

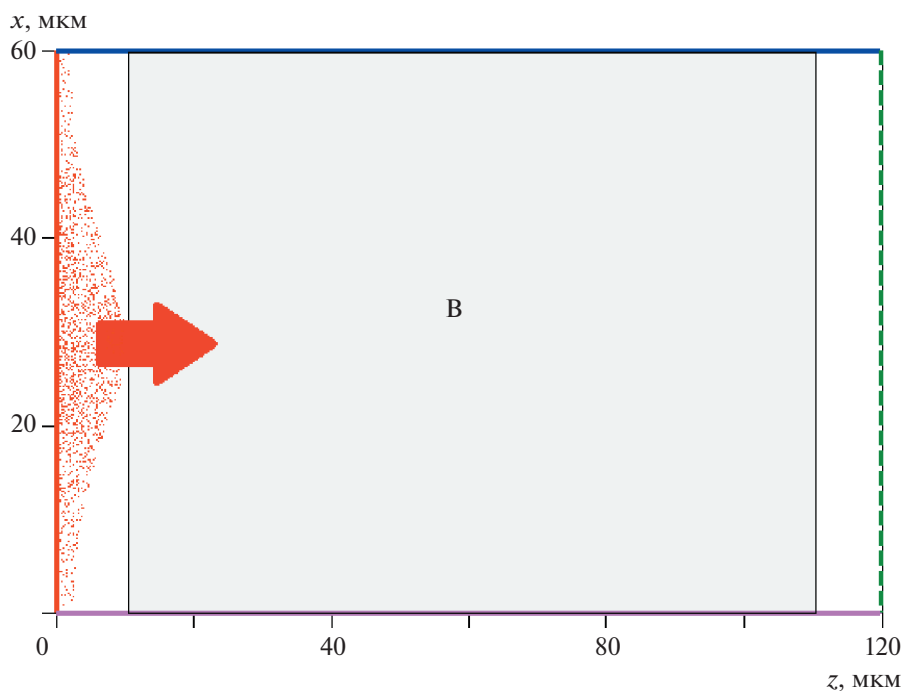


Рис. 7. Расчетная схема взаимодействия пучка протонов с мишенью из бора.

Для того чтобы оценить число α -частиц, которые могут быть зарегистрированы с помощью трековых детекторов, определялось количество α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5 \text{ МэВ}$, покинувших мишень и попавших на левую границу расчетной области (это предположение соответствует схеме эксперимента, а также учитывает чувствительность трековых детекторов CR-39 [10]). Дифференциальный спектр таких α -частиц при различных зна-

чениях интенсивности лазерного импульса приводится на рис. 8.

Как видно из рис. 8, с увеличением интенсивности лазерного излучения растет количество α -частиц с большими энергиями.

Полный выход α -частиц, нейтронов, а также количество α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5 \text{ МэВ}$, покинувших мишень и достигших левой границы расчетной области (детектора), вычислены для интен-

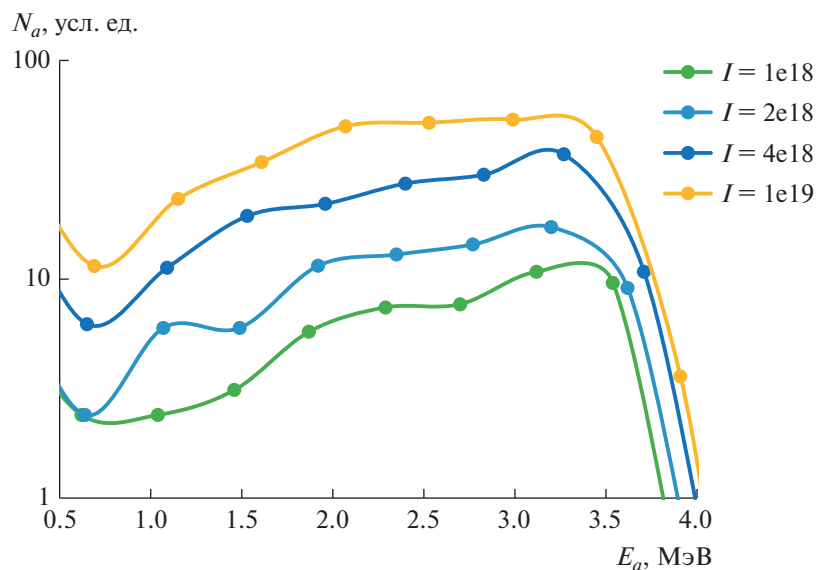


Рис. 8. Дифференциальные энергетические спектры α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5$ МэВ, попавших на левую границу расчетной области, при различных интенсивностях лазерного импульса.

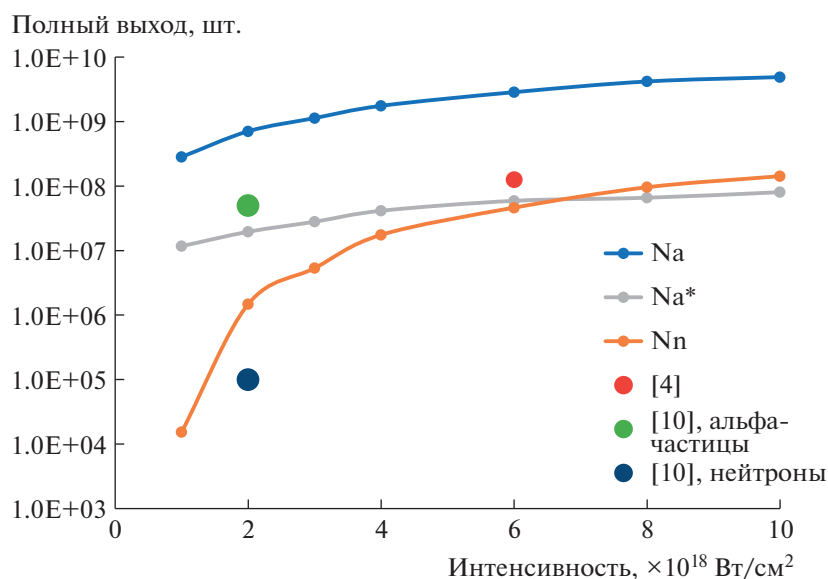


Рис. 9. Зависимость выхода α -частиц и нейтронов от интенсивности лазерного импульса. Кривые: синяя — полный выход α -частиц (N_α), серая — количество α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5$ МэВ, покинувших мишень и достигших левой границы расчетной области (N_α^*), оранжевая сплошная — полный выход нейтронов (N_n), отдельные символы — результаты экспериментов.

сивностей лазерного импульса $I = 10^{18}, 2 \times 10^{18}, 3 \times 10^{18}, 4 \times 10^{18}, 6 \times 10^{18}, 8 \times 10^{18}$ и 10^{19} Вт/см².

На рис. 9 показана зависимость полного выхода α -частиц и нейтронов от интенсивности лазерного импульса: синяя и оранжевая кривая соответственно, а также количество α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5$ МэВ, покинувших мишень и достигших границы расчетной области (серая кривая). Отдельными символами показаны результаты различных экспериментов.

С ростом интенсивности от $I = 10^{18}$ Вт/см² до $I = 10^{19}$ Вт/см² полный выход α -частиц увеличился от $N_\alpha = 2.8 \times 10^8$ шт. до $N_\alpha = 4.9 \times 10^9$ шт. Количество α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5$ МэВ, покинувших мишень и достигших левой границы расчетной области, увеличивается в указанном диапазоне интенсивностей от $N_\alpha^* = 1.2 \times 10^7$ шт. до значения $N_\alpha^* = 8 \times 10^7$ шт. Т.е. количество α -частиц, способных достичь трековых детекторов,

составляет не более 5% от полного выхода альфа-частиц, поскольку большая их часть задерживается в толщине мишени из-за ионизационных потерь. Сравнение полученных расчетных значений выхода α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5$ МэВ с экспериментальными данными (красный [4] и зеленый [10] кружки на рис. 9) показывает их достаточно хорошее соответствие.

Полный выход нейтронов N_n в реакции $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ в зависимости от интенсивности лазерного импульса приводится на рис. 9 (оранжевая кривая). Как видно из рисунка, при интенсивностях до $I = 4 \times 10^{18}$ Вт/см² полный выход нейтронов очень быстро растет, что обусловлено увеличением доли протонов с энергиями > 3 МэВ. Стоит обратить внимание на тот факт, что при интенсивности 10^{19} Вт/см² полный выход нейтронов достигает величины $N_n = 1.4 \times 10^8$ шт., сравнимой с количеством α -частиц с энергией $E_\alpha > 0.5$ МэВ, покинувших мишень и достигших левой границы расчетной области ($N_\alpha^* = 8 \times 10^7$ шт.), что составляет около 3% от полного выхода α -частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное моделирование ускорения пучка протонов при сверхинтенсивном лазерном воздействии на алюминиевую мишень, дающее хорошее совпадение основных параметров пучка с экспериментальными данными в широком диапазоне интенсивностей падающего излучения от $I = 10^{18}$ Вт/см² до $I = 10^{19}$ Вт/см². В частности, показано, что температура быстрых протонов практически не зависит от площади пятна облучения — при увеличении площади увеличивается лишь количество ускоренных частиц.

Полученные параметры пучков протонов далее были использованы для расчета полного выхода α -частиц и нейтронов в результате протекания ядерных реакций $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ и $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$, при воздействии пучков протонов на борсодержащие мишени. Показано, что количество α -частиц, покидающих мишень из бора и способных достичь трековых детекторов, составляет не более 5% от полного выхода α -частиц, поскольку большая их часть задерживается в толщине мишени из-за ионизационных потерь. При этом сравнение полученных расчетных значений выхода α -частиц, попадающих на детекторы, с экспериментальными данными показывает их достаточно хорошее соответствие. Рассчитан полный выход нейтронов в реакции $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$, и показано, что с ростом интенсивности лазерного импульса он очень быстро растет, достигая величины около 3% от полного выхода α -частиц.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания МПГУ “Физика наноструктурированных материалов: фундаментальные исследования и приложения в материаловедении, нанотехнологиях и фотонике” при поддержке Министерства просвещения РФ (номер государственной регистрации: АААА-А20-120061890084-9). Работа поддержана также Министерством науки и Высшего образования РФ (№ FSMG-2021-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изотопы: свойства, получение, применение*, под ред. В. Ю. Баранова (Наука, Москва, 1999), т. 2.
2. А. Б. Кукушкин, В. И. Коган, Физика плазмы **5**, 1264 (1979) [Sov. J. Plasma Phys. **5**, 708 (1979)].
3. V. S. Belyaev, A. P. Matafonov, V. I. Vinogradov, V. P. Krainov, V. S. Lisitsa, A. S. Roussetski, G. N. Ignatyev, and V. P. Andrianov, Phys. Rev. E **72**, 026406 (2005).
4. C. Labaune, C. Baccou, S. Depierreux, C. Goyon, G. Loisel, V. Yahia, and J. Rafelski, Nat. Commun. **4**, 2506 (2013).
5. A. Picciotto, D. Margarone, A. Velyhan, P. Bellutti, J. Krasa, A. Szydlowsky, G. Bertuccio, Y. Shi, A. Mangione, J. Prokupek, A. Malinowska, E. Krousky, J. Ullschmied, L. Laska, M. Kucharik, and G. Korn, Phys. Rev. X **4**, 031030 (2014).
6. L. Giuffrida, F. Belloni, D. Margarone, G. Petringa, G. Milluzzo, V. Scuderi, A. Velyhan, M. Rosinski, A. Picciotto, M. Kucharik, J. Dostal, R. Dudzak, J. Krasa, V. Istokskaia, R. Catalano, S. Tudisco, *et al.*, Phys. Rev. E **101**, 013204 (2020).
7. D. Margarone, A. Morace, J. Bonvalet, Y. Abe, V. Kantarelou, D. Raffestin, L. Giuffrida, P. Nicolai, M. Tosca, A. Picciotto, G. Petringa, G. A. P. Cirrone, Y. Fukuda, Y. Kuramitsu, H. Habara, Y. Arikawa, *et al.*, Front. Phys. **8**, 343 (2020).
8. C. Baccou, S. Depierreux, V. Yahia, C. Neuville, C. Goyon, R. De Angelis, F. Consoli, J. E. Ducret, G. Boutoux, J. Rafelski, and C. Labaune, Laser Part. Beams **33**, 117 (2015).
9. В. С. Беляев, А. П. Матафонов, В. П. Крайнов, А. Ю. Кедров, Б. В. Загреев, А. С. Русецкий, Н. Г. Борисенко, А. И. Громов, А. В. Лобанов, В. С. Лисица, ЯФ **83**, 370 (2020) [Phys. At. Nucl. **83**, 641 (2020)].
10. В. С. Беляев, А. П. Матафонов, С. Н. Андреев, В. П. Тараканов, В. П. Крайнов, В. С. Лисица, А. Ю. Кедров, Б. В. Загреев, А. С. Русецкий, Н. Г. Борисенко, А. И. Громов, А. В. Лобанов, ЯФ **85**, 34 (2022) [Phys. At. Nucl. **85**, 31 (2022)].
11. С. Н. Андреев, В. С. Беляев, А. П. Матафонов, В. П. Тараканов, Б. В. Загреев, В. П. Крайнов, С. А. Муханов, А. В. Лобанов, ЖЭТФ **162**, 34 (2022).
12. V. P. Tarakanov, EPJ Web Conf. **149**, 04024 (2017).
13. Y. Murakami, Y. Kitagawa, Y. Sentoku, *et al.*, Phys. Plasmas **8**, 4138 (2001).

14. T. E. Cowan, J. Fuchs, H. Ruhl, A. Kemp, P. Audebert, M. Roth, R. Stephens, I. Barton, A. Blazevic, E. Brambrink, J. Cobble, J. Fernández, J.-C. Gauthier, M. Geissel, M. Hegelich, J. Kaae, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 204801 (2004).
15. A. Macchi, M. Borghesi, and M. Passoni, Rev. Mod. Phys. **85**, 751 (2013).

NUMERICAL SIMULATIONS OF THE ACCELERATION OF FAST PROTONS AND OF THE EXCITATION OF NUCLEAR REACTIONS $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ AND $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ AT THE INTENSITIES OF PICOSECOND LASER RADIATION IN THE RANGE OF 10^{18} – 10^{19} W/cm²

S. N. Andreev^{1),2)}, A. P. Matafonov³⁾, V. P. Tarakanov⁴⁾, V. S. Belyaev³⁾, A. Yu. Kedrov³⁾,
V. P. Krainov¹⁾, S. A. Mukhanov⁵⁾, A. V. Lobanov⁶⁾

¹⁾ *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Russia*

²⁾ *Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia*

³⁾ *Central Research Institute for Machine Building, Korolev, Russia*

⁴⁾ *Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

⁵⁾ *Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia*

⁶⁾ *Moscow Engineering Physical Institute (National Research Nuclear University), Moscow, Russia*

Results of numerical simulations for acceleration of proton beams at the irradiation of Al target by a super-intense laser pulse are presented. There is a good agreement with the experimental data in a broad range of laser intensities from $I = 10^{18}$ W/cm² to $I = 10^{19}$ W/cm² at the fixed laser pulse duration. The obtained parameters of proton beams were used for calculation of the total yield of α -particles and neutrons for the nuclear reactions $^{11}\text{B}(p, 3\alpha)$ and $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$ at the collisions of proton beams with boron targets. It was shown that the number of α -particles, escaping boron target and arriving to track detectors, is less than 5% of the total amount of α -particles, since the most of these particles remain inside the target because of the ionization losses. The derived values of the α -particles' yield, which arrive to detectors, are in a good agreement with the experimental data. We calculated also the total yield of neutrons in the reaction $^{11}\text{B}(p, n)^{11}\text{C}$. It was found that at the intensity $I = 10^{19}$ W/cm² of the picosecond laser pulse, the yield is equal to $N_n = 1.4 \times 10^8$; this value is approximately of 3% of the total yield of α -particles.

РАССЕЯНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ МЮОНОВ АТОМАМИ ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ

© 2023 г. Л. В. Чернышева^{1)*}, В. Г. Яржемский^{2)**}

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.; после доработки 28.02.2023 г.; принята к публикации 28.02.2023 г.

В настоящей работе методами теории многих тел с использованием комплекса программ АТОМ-М произведены расчеты сечений упругого и неупругого рассеяния положительных мюонов атомами He и Ag при малых и средних кинетических энергиях. Для сравнения приводятся также результаты упругого и неупругого рассеяния позитрона при тех же энергиях. Обсуждается зависимость фаз и сечений рассеяния от заряда частицы и ее массы, а также от заряда ядра рассеивающего атома.

DOI: 10.31857/S004400272304013X, EDN: EGNUG

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование рассеяния положительных мюонов на атомах представляет собой важную задачу для физики, в частности в теории рассеяния положительных частиц изолированными атомами [1]. Взаимодействие положительного мюона с атомом формально такое же, как и взаимодействие позитрона, но существенные различия рассеяния этих частиц возникают из-за отличия масс. Вследствие большой массы кинетическая энергия вращения при данном угловом моменте меньше, поэтому следует ожидать большего вклада членов $l > 0$ при малых кинетических энергиях мюона. Сечения упругого и неупругого рассеяния положительных мюонов и позитронов на атомах [2–4] определялись нами методами теории многих тел в базисе функций Хартри–Фока (ХФ) [5, 6], однако неэмпирические расчеты упругого и неупругого рассеяния положительных мюонов атомами нам неизвестны.

2. МЕТОД РАСЧЕТА

При изучении рассеяния мюонов на атомах, как и ранее для электронов, мы используем аппарат квантовой теории многих тел. Как показано в работе [7], собственно энергетическая часть Σ одночастичной функции Грина, описывающей распространение электрона, совпадает с оптическим потенциалом стандартной теории рассеяния. В результате задача рассеяния сводится к вычислению собственно энергетической части в том или ином

приближении и решению уравнения Шредингера с потенциалом Σ . Этот же подход мы используем и при изучении рассеяния мюонов на атомах. Мы определяем собственно энергетическую часть Σ , которая является решением интегрального уравнения, соответствующего уравнению Шредингера с потенциалом Σ . Ядро этого уравнения содержит неприводимую собственно энергетическую часть. Последняя вычисляется в упрощенном приближении случайных фаз (УПСФ). Для решения задачи используется разложение волновой функции налетающего мюона на парциальные волны. При расчетах учитывались четыре парциальные волны $l = 0, 1, 2$ и 3 . Неприводимую собственно энергетическую часть Σ одночастичной функции Грина удобно разбить на две части: хартри-фоковскую и определяемую корреляционным взаимодействием:

$$\Sigma = \Sigma^{\text{HF}} + \Sigma^{\text{cor}}. \quad (1)$$

Собственно энергетическая часть в приближении Хартри–Фока Σ^{HF} есть самосогласованное поле [6, гл. 14], которым атом воздействует на рассеиваемый мюон. Волновая функция и фаза рассеяния δ_l^{HF} налетающего мюона рассчитывались в приближении Хартри–Фока [5].

В низшем порядке по Σ^{cor} сдвиг фаз рассеяния электронной (и мюонной) волны с моментом l по сравнению с его хартри-фоковским значением равен [4]:

$$\Delta\delta_{l_1}(E_1) = -\pi \langle \phi_{\nu_1} | \Sigma^{\text{cor}} | \phi_{\nu_1} \rangle, \quad (2)$$

где ϕ_{ν_1} — волновая функция налетающей частицы в приближении Хартри–Фока, E_1 и l_1 — ее энергия и орбитальный момент соответственно.

В рамках приближения случайных фаз (ПСФ) диагональный матричный элемент собственно

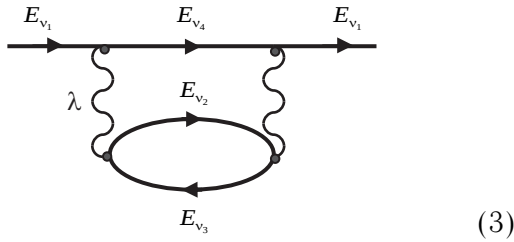
¹⁾Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург, Россия.

²⁾Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН, Москва, Россия.

*E-mail: Larissa.Chernysheva@mail.ioffe.ru

**E-mail: vgyar@igic.ras.ru

энергетической части для мюона может быть представлен графически следующим образом:



где волнистая линия обозначает кулоновское взаимодействие, а λ — его мультипольность.

Для расчета этой диаграммы надо всем линиям (включая волнистую) сопоставить угловые моменты электронов и мюона (или мультипольность λ кулоновского взаимодействия), а каждой волнистой линии кулоновского взаимодействия весовой множитель [8, 9]

$$\begin{aligned} & \langle \nu_1 \nu_3 \| V_\lambda \| \nu_4 \nu_2 \rangle = \\ & = \sqrt{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)(2l_3 + 1)(2l_4 + 1)} \times \\ & \times \begin{pmatrix} l_1 & \lambda & l_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & \lambda & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^\lambda(\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} R^\lambda(\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4) &= \int_0^\infty P_{\nu_1}(r) P_{\nu_4}(r) dr \times \\ & \times \int_0^r \frac{r'^\lambda}{r'^{\lambda+1}} P_{\nu_3}(r') P_{\nu_2}(r') dr'. \end{aligned} \quad (5)$$

Применяя правила графической техники при суммировании моментных диаграмм [8, 9], получаем

$$\begin{aligned} \langle \nu_1 | \Sigma^{\text{cor}}(E) | \nu_1 \rangle &= \sum_\lambda \frac{1}{(2l_{\nu_1} + 1)(2\lambda + 1)} \times \\ & \times \sum_{\substack{\nu_4, \nu_2 > F, \\ \nu_3 \leq F}} \frac{2 \langle \nu_1 \nu_3 \| V_\lambda \| \nu_4 \nu_2 \rangle^2}{E - E_{\nu_2} + E_{\nu_3} - E_{\nu_4} + i\eta(1 - 2n_{\nu_4})}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь “2” — результат суммирования по спинам в петле (3), ν_i означает совокупность квантовых чисел nl (E_{ν_2} — для непрерывного спектра), суммирование по ν_3 проводится по занятым (дырочным) состояниям, суммирование по ν_4, ν_2 — по свободным (частичным) состояниям, в том числе интегрируется по непрерывному спектру энергий.

В результате проблема сводится к вычислению собственно энергетической части Σ^{cor} и решению уравнения

$$\langle El | \bar{\Sigma}(\omega) | E'l \rangle = \langle El | \Sigma^{\text{cor}}(\omega) | E'l \rangle + \quad (7)$$

$$+ P \int \langle El | \Sigma^{\text{cor}}(\omega) | E''l \rangle \langle E''l | \bar{\Sigma}(\omega) | E'l \rangle \frac{dE''}{\omega - E''}.$$

Здесь знак $P \int$ означает, что интеграл рассматривается в смысле главного значения. Интегрирование по E'' включает суммирование по дискретным состояниям, в том числе и по занятым (дырочным) уровням.

Волновые функции в (5) выбираются следующим способом. Налетающий мюон ν_1 описывается волновой функцией ϕ^N , рассчитанной в поле нейтрального атома. Соответствующим выбором волновых функций виртуальных электронов можно по-разному учесть вклад многоэлектронных корреляций, а именно, выбором $\phi_{\nu_2}^{N-1}$ (т.е. в поле с дыркой ν_3) учитывается часть корреляций ПСФ во взаимодействии между электроном и дыркой.

После того как матричные элементы $\langle \nu_1 \nu_3 \| V_\lambda \| \nu_4 \nu_2 \rangle$ получены, уравнение (7) может быть решено для неприводимой собственно энергетической части, через которую выражаются поправки к фазе рассеяния

$$\Delta\delta_l(E) = \arctg [-\pi \langle \psi_{El} | \bar{\Sigma}(E) | \psi_{El} \rangle]. \quad (8)$$

При энергиях, превышающих порог ионизации атома, выражение для матричного элемента, определяемого (6), становится комплексным, а вместе с ним становятся комплексными и решение уравнения, и поправки к фазе.

Обозначим фазу

$$\delta_l(E) = \lambda_l(E) + i\mu_l(E), \quad (9)$$

где

$$\lambda_l(E) = \delta_l^{\text{HF}}(E) + \text{Re } \Delta\delta_l(E), \quad (10)$$

а

$$\mu_l(E) = \text{Im } \Delta\delta_l(E), \quad (11)$$

где $\delta_l^{\text{HF}}(E)$ — фаза волновой функции мюона, которая получается при решении уравнений Хартри–Фока для мюона в поле атома. Знание фазы (9) позволяет найти как сечения упругого рассеяния мюона на атоме [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \times \\ & \times (\cosh 2\mu_l - \cos 2\lambda_l) \exp(-2\mu_l), \end{aligned} \quad (12)$$

где $k^2 = 2mE_m$ ³⁾, масса мюона $m = 207$ и энергия мюона E_m , так и неупругого рассеяния

$$\sigma_{\text{in}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \exp(-4\mu_l)]. \quad (13)$$

³⁾В статье используется атомная система единиц $e = m_e = \hbar = 1$, где e — заряд электрона, m_e — его масса, $\hbar$ — постоянная Планка.

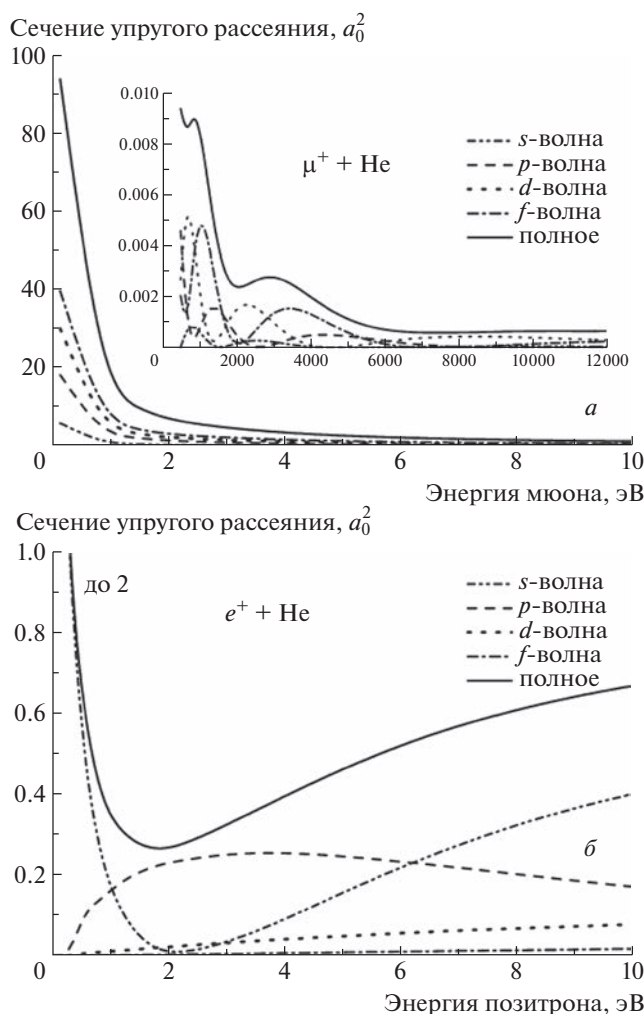


Рис. 1. Сечение упругого рассеяния μ^+/He и e^+/He .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты расчетов сечений упругого и неупругого рассеяния μ^+/He , e^+/He , μ^+/Ar , e^+/Ar с использованием программного комплекса АТОМ [6] приведены на рис. 1–4. Расчеты показали, что при рассеянии мюонов атомами также, как и при рассеянии электронов атомами [10], основной вклад в фазу рассеяния дают монопольные возбуждения ($\lambda = 0$ в формулах (3)–(6)) электронов валентных оболочек. Для сравнения приведены результаты расчетов рассеяния позитрона на этих же атомах. Эти частицы имеют одинаковый заряд, но разные массы.

На рис. 1а и 1б приводятся соответственно сечения упругого рассеяния μ^+/He и e^+/He . На врезке рис. 1а — сечения при энергиях в диапазоне 300–12 000 эВ. Сечения вычислялись для s -, p -, d -, f -волн. Вклады в сечения упругого рассеяния μ^+ парциальных волн $l = 0, 1, 2, 3$ при малых кинетических энергиях не обращаются в нуль (см.

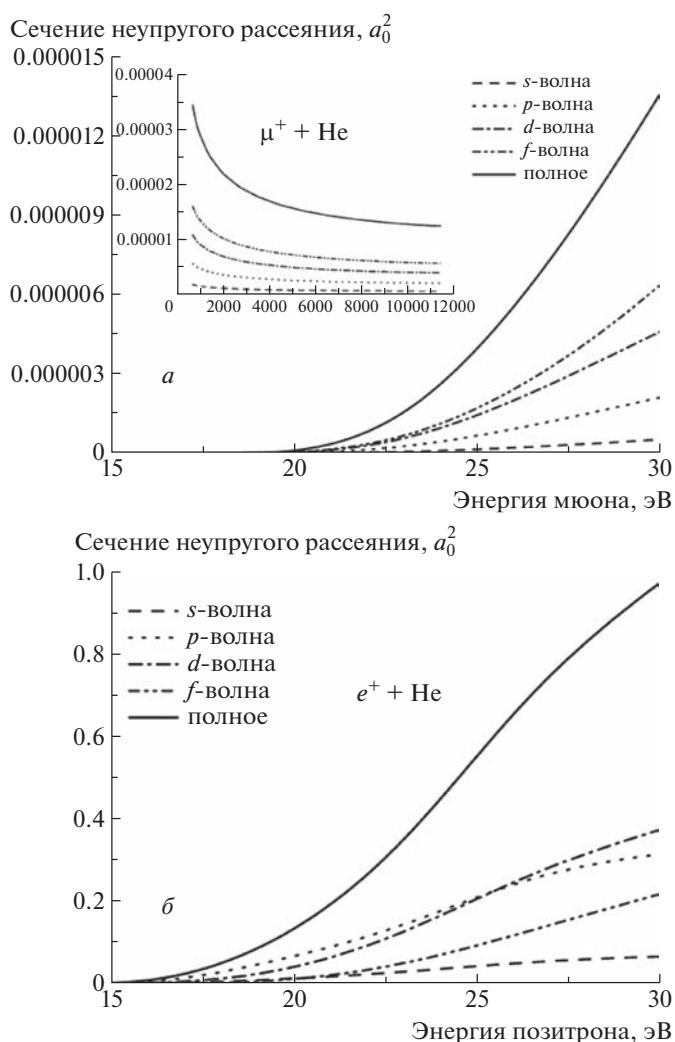


Рис. 2. Сечение неупругого рассеяния μ^+/He и e^+/He .

рис. 1а). В этом состоит их основное отличие от сечений упругого рассеяния e^+ , которые из-за наличия центробежного потенциала $\frac{l(l+1)}{2mr^2}$, препятствующего проникновению волновой функции позитрона в область атома, обращаются в нуль при малых кинетических энергиях (см. рис. 1б). Сечения неупругого рассеяния мюонов имеют два максимума: один в области нескольких сотен эВ, а другой в области нескольких тысяч эВ, и положение максимума зависит от углового момента парциальной волны.

На рис. 2а и 2б приведены соответственно сечения неупругого рассеяния μ^+/He и e^+/He . На врезке рис. 2а — сечения при энергиях в диапазоне 300–12 000 эВ. Наибольший вклад в сечения неупругого рассеяния мюонов на He дает f -волна. Соотношение между парциальными волнами не

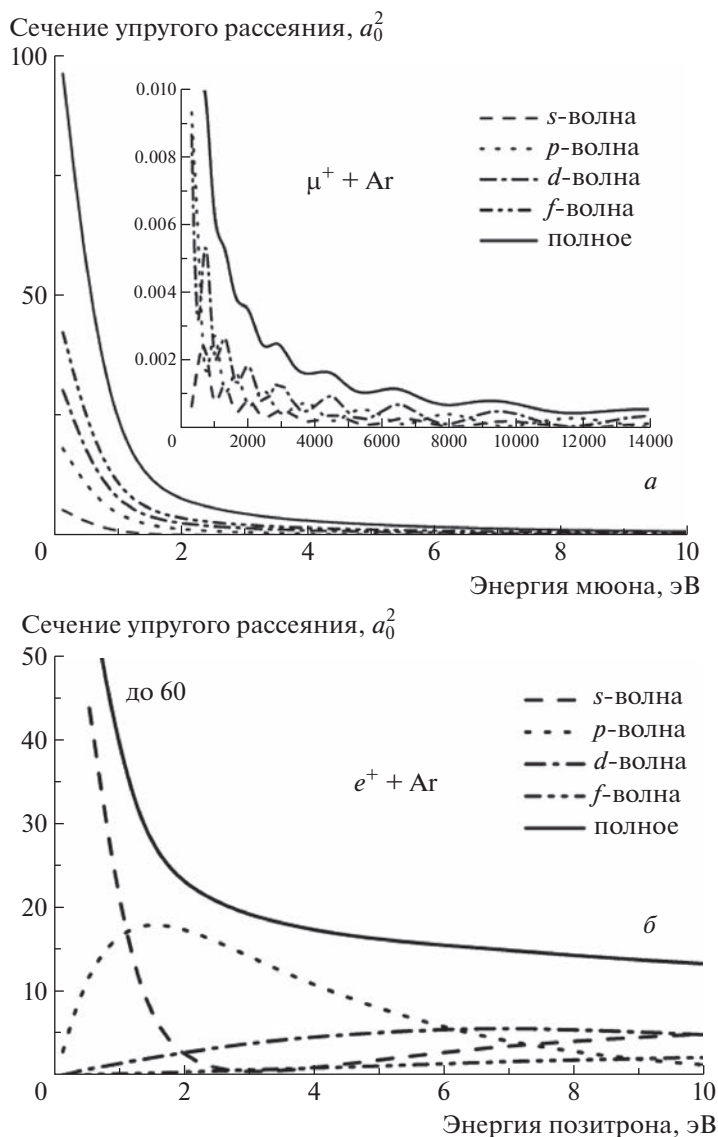


Рис. 3. Сечение упругого рассеяния μ^+/Ar и e^+/Ar .

зависит от энергии и приблизительно пропорционально величине $2l + 1$. В то же время в случае позитронов наибольший вклад дают p - и d -волны.

На рис. 3а и 3б мы даем сечения упругого рассеяния μ^+/Ar и e^+/Ar . На врезке рис. 3а — сечения при энергиях в диапазоне 300–14 000 эВ. Интересно, что осцилляции в сечениях упругого рассеяния мюонов на атоме Ar сохраняются также и при больших энергиях (до 14 000 эВ) и наибольший вклад дает f -волна. В то же время в сечении упругого рассеяния позитрона на Ar дает вклад s -волна.

На рис. 4а и 4б приведены сечения неупругого рассеяния μ^+/Ar , e^+/Ar . На врезке рис. 4а — сечения при энергиях в диапазоне 300–12 000 эВ. Ход парциальных сечений неупругого рассеяния

мюонов на атоме Ar подобен ходу сечений неупругого рассеяния на атоме He — соотношения между парциальными волнами почти постоянны при изменении энергии. Наибольший парциальный вклад в рассеяние как мюона, так и позитрона дает f -волна.

На рис. 5 приведены для сравнения фазы упругого рассеяния для p -волны μ^+/Ar в приближениях Хартри–Фока и УПСФ.

Сечения упругого и неупругого рассеяния позитронов хорошо изучены, поэтому интересно рассмотреть отличия в сечении рассеяния мюонов от сечения рассеяния позитронов. Наличие центробежного потенциала, величина которого для позитрона при $l = 1$ и $r = 1$ имеет величину порядка атомной единицы, приводит к тому, что в области

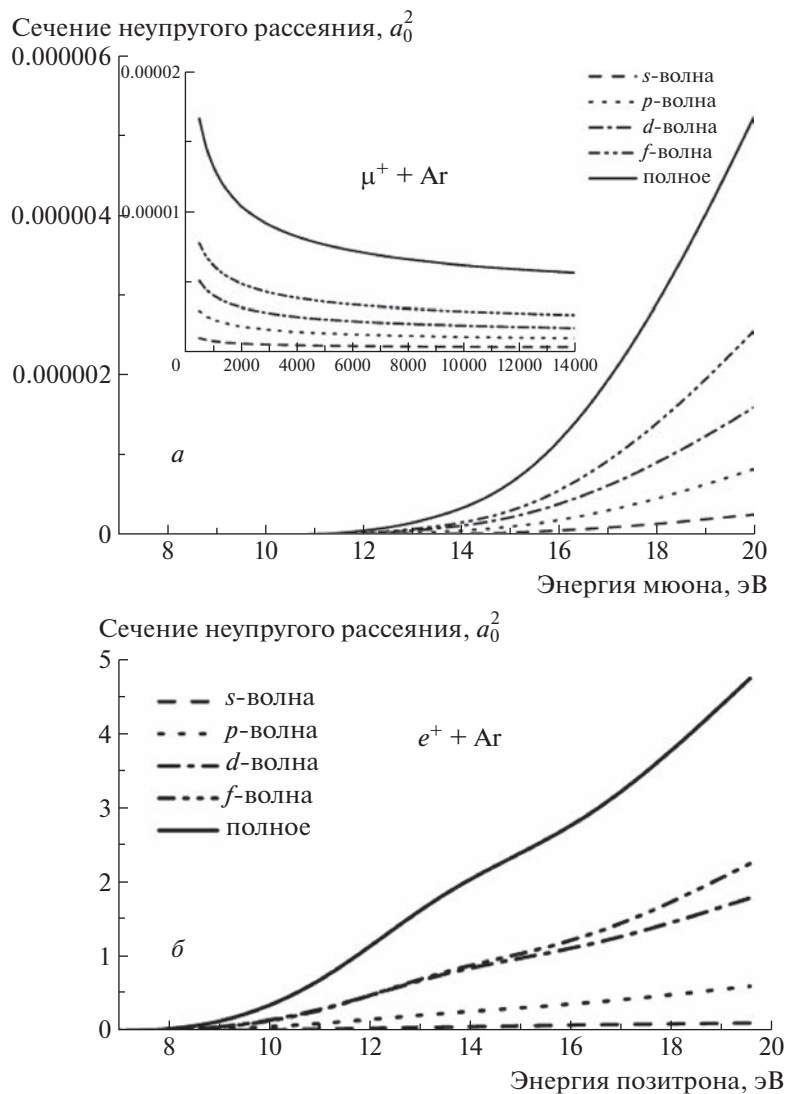


Рис. 4. Сечение неупругого рассеяния μ^+/Ar и e^+/Ar .

малых кинетических энергий основной вклад в сечение позитрона дает s -волна. В случае μ^+ центробежный потенциал примерно в 200 раз меньше и не препятствует проникновению волновой функции μ^+ в область атома. Поэтому в случае μ^+ вклады парциальных волн с $l > 0$ существенны при всех энергиях, начиная от самых малых. При больших энергиях основной вклад в сечения как e^+ , так и μ^+ дают парциальные волны с $l > 0$. Поскольку в знаменателе формулы (12) стоит величина $k^2 = 2mE_m$, сечения рассеяния μ^+ почти на два порядка меньше сечений e^+ . Также важно отметить, что сечения упругого рассеяния мюонов во всем диапазоне энергий почти на два порядка превосходят сечения неупругого рассеяния. Сечения упругого рассеяния μ^+ на атоме Ne имеют по два максимума для каждой из парциальных волн, причем их положения зависят от углового момента

парциальной волны (см. рис. 1а). Сечения упругого рассеяния μ^+ на атоме Ar в рассматриваемом диапазоне (до 14000 эВ) для всех парциальных волн имеют по 5–6 максимумов и минимумов (см. рис. 3). В качестве примера на рис. 5 приведена фаза упругого рассеяния для p -волны на атоме Ar. Из этого рисунка видно, что диапазон изменения фазы соответствует нескольким периодам косинуса в формуле (12), что приводит к осцилляционному характеру зависимости сечения от энергии. Из этого рисунка видно также, что основной вклад в фазу дает величина $\delta_l^{\text{HF}}(E)$, но при этом вклад многоэлектронных эффектов (см. графическую формулу (3)) также весьма существенный. Величины и характер изменения фаз для остальных парциальных волн аналогичны приведенным на рис. 5 для p -волны.

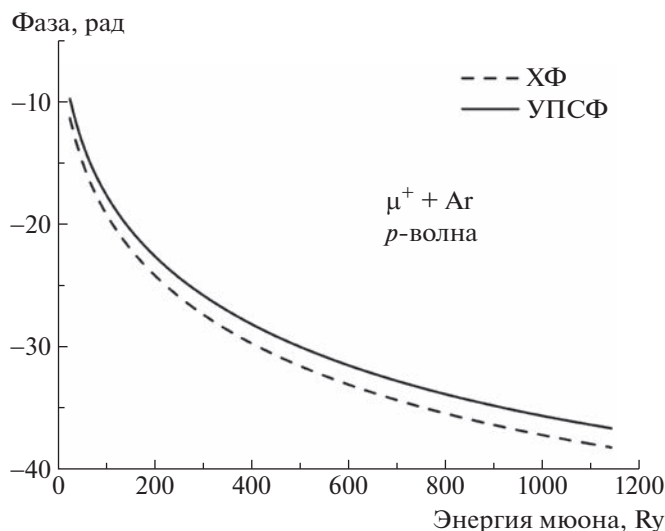


Рис. 5. Фазы упругого рассеяния μ^+/Ar (p -волна) в ХФ и УПСФ.

4. ВЫВОДЫ

Методом Хартри–Фока с применением много-частичной теории возмущений нами рассчитаны сечения упругого и неупругого рассеяния μ^+ и e^+ на атомах He и Ar. Результаты расчетов позволяют выявить следующие основные тенденции. Как при малых, так и при больших энергиях вклады всех парциальных волн $l = 0, 1, 2, 3$ в сечения как упругого, так и неупругого рассеяния существенны. Основной вклад в фазу рассеяния дают моно-польные возбуждения ($\lambda = 0$ в формулах (3)–(6)) электронов валентных оболочек. Сечения упругого рассеяния мюонов почти на два порядка больше сечений неупругого рассеяния и поэтому должны

учитываться при расчете эффективной глубины проникновения мюонов в образец. Зависимость сечений упругого рассеяния мюонов от кинетической энергии имеет осциллирующий характер во всем рассмотренном диапазоне (до 14 000 эВ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. О. Вайсенберг, *Мю-мезон* (Наука, Москва, 1964).
2. Н. А. Черепков, Л. В. Чернышева, *ЯФ* **32**, 709 (1980).
3. M. Ya. Amusia, N. A. Cherepkov, L. V. Chernysheva, and S. G. Shapiro, *J. Phys. B* **9**, 17 (1976).
4. M. Ya. Amusia, V. K. Dolmatov, and L. V. Chernysheva, *J. Phys. B* **54**, 185003 (2021).
5. M. Ya. Amusia and L. V. Chernysheva, *Computation of Atomic and Molecular Processes: Introducing the ATOM-M Software Suite* (Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, 2021), Vol. 117.
6. М. Я. Амусья, С. К. Семенов, Л. В. Чернышева, *АТОМ-М алгоритмы и программы исследований атомных и молекулярных процессов* (Наука, С.-Петербург, 2016).
7. J. S. Bell and E. J. Squires, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 96 (1959).
8. I. Lindgren and J. Morrison, *Atomic Many-Body Theory* (Springer, Berlin, 1982).
9. N. F. Mott and H. S. W. Massey, *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford, 1949).
10. M. Ya. Amusia, L. V. Chernysheva, and V. G. Yarzhevsky, *Handbook of Theoretical Atomic Physics, Data for Photon Absorption, Electron Scattering, and Vacancies Decay* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012).

SCATTERING OF POSITIVE MUONS BY ATOMS OF INERT GASES

L. V. Chernysheva¹⁾, V. G. Yarzhevsky²⁾

¹⁾ Ioffe Institute, 194021 St. Petersburg, Russia

²⁾ Kurnakov Institute of General and Inorganic Chemistry of RAS, 119991, Moscow, Russia

In the present work, the cross sections of elastic and inelastic scattering of positive muons by He and Ar atoms at low and medium kinetic energies are calculated by the methods of many-body theory with the use of the ATOM-M software package. For comparison, the results of elastic and inelastic positron scattering at the same energies are also given. The dependence of the phases and scattering cross sections on the charge of the particle and its mass, as well as on the charge of the nucleus of the scattering atom, is discussed.

ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. Ю. Д. Черниченко^{1), 2)*}

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.; после доработки 17.01.23 г.; принята к публикации 21.01.2023 г.

Получено новое релятивистское квазиклассическое выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов как составной системы двух спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием. Проведено сравнение нового выражения с его релятивистским бесспиновым аналогом. Изучено влияние спиновых параметров векторных мезонов (масс кварков) на поведение их лептонных ширин распадов. Исследование проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс.

DOI: 10.31857/S0044002723040116, EDN: EGRURU

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [1] и посвящена описанию лептонных ширин распадов векторных мезонов на основе знания волновых функций составной системы двух релятивистских фермионов (спинорных кварков) произвольных масс. С этой целью мы будем использовать релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход, предложенный Кадышевским в работе [2], основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке проблемы двух тел в квантовой теории поля [3] и совпадающий по форме с РКП-подходом Логунова–Тавхелидзе [4], предложенным в рамках одновременного описания системы двух тел в квантовой теории поля. При этом важно, что в РКП-подходе трехмерность заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях. Тем самым двухчастичная задача сводится к одночастичной, описание которой ведется на языке волновой РКП-функции одной релятивистской частицы, удовлетворяющей полностью ковариантному трехмерному РКП-уравнению в импульсном пространстве с квазипотенциалом (см., например, работы [5–8]). Квазипотенциал в общем случае параметрически зависит от энергии составной системы и не является эрмито-

вым [2], а вся особенность, как и в нерелятивистской теории, которую вносит спин в волновую РКП-функцию составной системы, является следствием зависимости квазипотенциала от спина. Кроме того, РКП-подход [2] для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс $m_1 = m_2 = m$ позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению ($\mathbf{r}$ -представление), введенному в [9]³⁾.

Для нахождения лептонных ширин распадов векторных мезонов V широко используют нерелятивистскую формулу Матвеева, Струминского, Тавхелидзе [10] или Ван Роена–Вайскопфа [11] (см. также работы [12–14])

$$\Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2 Q_V^2 N_c}{3M_n^2} |\varphi_{n,\ell=0}(0)|^2, \quad (1)$$

где α — постоянная тонкой структуры, Q_V — множители, обусловленные изотопической структурой векторных мезонов V и зарядами кварков, образующих их и выраженных в единицах электрического заряда e , M_n — полная энергия связанного состояния двух спиновых кварков с числом цветов $N_c = 3$, массами m_1, m_2 и относительным 3-импульсом $\mathbf{q}$, т.е. e^+e^- (или $q\bar{q}$)-системы с

¹⁾Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь.

²⁾Международный центр перспективных исследований, ГГТУ, Гомель, Беларусь.

*E-mail: chyud@mail.ru; chern@gstu.by

³⁾Напомним, что в рамках рассматриваемого РКП-подхода как модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$, так и 3-импульс $\mathbf{k}$ релятивистской частицы являются релятивистскими инвариантами [9].

относительным орбитальным моментом $\ell = 0$ для данного уровня n , а $\varphi_{n,\ell=0}(0)$ — волновая функция связанного состояния. Обычно в качестве нее используют нерелятивистскую волновую функцию $\varphi_{n,\ell=0}^{\text{nr}}(r)$, отвечающую нерелятивистскому уравнению Шредингера для случая двух частиц равных масс с несингулярным в нуле потенциалом записания $V_{\text{conf}}(r)$ путем добавления к нему кулоновского взаимодействия [15, 16]

$$V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{\alpha_s}{r}, \quad (2)$$

где α_s — сильная константа связи.

Релятивистская модификация формулы (1) для лептонной ширины распада векторного мезона в s -состоянии ($\ell = 0$) на лептон-антилептонную пару была выполнена в работе [17]. Разработанный в [17] подход базируется на решении релятивистским квазиклассическим (ВКБ) методом [18] модифицированного уравнения Бете—Солпитера, не зависящего от относительного времени x_0 . Это означает выполнение следующих предположений (одновременное взаимодействие): фоковское $q\bar{q}$ -состояние дает доминирующий вклад в функцию Бете—Солпитера двух заряженных частиц $\chi_{\text{BS}}(x)$ при $x = (x_0, \mathbf{r}) = 0$ в области $r > m^{-1}$ ($\hbar = c = 1$); $q\bar{q}$ -взаимодействие адекватно описывается одновременным кулоновским взаимодействием (2); возможные (дальнего порядка) спин-зависимые эффекты игнорируются. При этих предположениях доминирующий вклад в функцию Бете—Солпитера для s -состояния при $x_0 = 0$ в области $r \gg m^{-1}$ дает решение одновременного уравнения Солпитера для волновой функции $\Psi_{n,\ell=0}^{\text{rel}}(r)$ $q\bar{q}$ -системы, вычисленную в нуле, так что $\chi_{\text{BS}}((0, \mathbf{r}))|_{\ell=0} = \Psi_{n,\ell=0}^{\text{rel}}(r)$.

Иной подход для нахождения лептонных ширин распадов векторных мезонов в s -состоянии основан на применении РКП-подхода [2]. В рамках этого РКП-подхода для случая составной системы двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс m релятивистская модификация формулы (1) для лептонной ширины распада векторного мезона в s -состоянии и с полной энергией $M_n < 2mc^2$ на лептон-антилептонную пару была выполнена в работе [19] и состояла в замене функции Бете—Солпитера $\chi_{\text{BS}}((0, \mathbf{r}))|_{\ell=0}$ на волновую РКП-функцию $\psi_{M_n,\ell=0}(\mathbf{r})$ в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении [9], вычисленную в нуле. Для этого РКП-уравнение для волновой РКП-функции $\psi_{M_n,\ell=0}(\mathbf{r})$ с потенциалом $V(r) = -\alpha_s/r + \sigma r^s$ ($\sigma, s > 0$) было решено релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода [18].

РКП-подход [2] для случая составной системы двух релятивистских фермионов равных масс m

был применен в работах [20], чтобы получить в ВКБ-приближении выражения для лептонных ширин распадов векторных и псевдоскалярных мезонов с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$, также заменяя функцию Бете—Солпитера $\chi_{\text{BS},\ell}((0, \mathbf{r}))$ на волновую РКП-функцию $\psi_{M_n,\ell}(\mathbf{r})$ в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении [9], вычисленную в нуле. При этом авторы ограничились предположением, что квазипотенциал является действительным и представляет собой сумму потенциала записания $V_{\text{conf}}(r)$ и кулоновской части образа однобозонного обменного потенциала $V_c(r) = -\text{cth}(\pi mr)/r$ ($\hbar = c = 1$) в $\mathbf{r}$ -представлении, опуская функцию $\text{cth}(\pi mr)$, т.е. заменяя потенциал $V_c(r) = -\text{cth}(\pi mr)/r$ на кулоновский (хромодинамический) потенциал (2), который в РКП-подходе в импульсном пространстве Лобачевского воспроизводит главное поведение потенциала в КХД [21].

Возможность применимости формулы (1) для описания лептонных ширин распадов векторных мезонов в рамках РКП-подхода [2, 9] обусловлена тем, что функция Бете—Солпитера при $x = 0$ для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс m будет, в отличие от нерелятивистского случая и релятивистского подхода, предложенного в работе [17], связана с волновыми РКП-функциями в импульсном пространстве Лобачевского, $\Psi_{M_Q}(\mathbf{k})$, и в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении, $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$, не в нуле, как это делалось в работах [19, 20], а в соответствии с преобразованиями Шапиро [22]

$$\psi_{M_Q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Psi_{M_Q}(\mathbf{k}),$$

$$\Psi_{M_Q}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} \xi^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \psi_{M_Q}(\mathbf{r})$$

при $r = i\lambda$ соотношением

$$\chi_{\text{BS}}(x = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \Psi_{M_Q}(\mathbf{k}) = \lim_{r \rightarrow i\lambda} \psi_{M_Q}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Здесь $\lambda = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны релятивистской частицы массы m , функции

$$\xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \left(\frac{k_0 - c\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}{mc^2} \right)^{-1 - ir/\lambda}$$

образуют полную и ортогональную систему функций, соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца и выполняют роль “плоских” волн в пространстве Лобачевского, а $d\Omega_{\mathbf{k}} = mc^2 d\mathbf{k}/E_k$ — релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве

Лобачевского, которое реализуется на верхней полё массового гиперболоида

$$E_q^2 - c^2 \mathbf{q}^2 = m^2 c^4,$$

где $E_q = q_0 = c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{q}^2}$ — энергия релятивистской частицы с массой m и 3-импульсом $\mathbf{q}$ и связана с полной энергией $M_Q = \sqrt{(q_1 + q_2)^2}$ в с.ц.и. соотношением [9]

$$\sqrt{s} = M_Q = 2c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{q}^2} = 2E_q.$$

Таким образом, соотношение (3) обеспечивает правильную связь между функцией Бете–Солпитера и волновыми РКП-функциями в импульсном пространстве Лобачевского и в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении.

Выражение для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в состоянии с энергией $M_Q = M_n$ для данного уровня n и с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$ на лептон-антилептонную пару было получено в работе [23]. Разработанный в [23] подход базируется на РКП-подходе [2], обобщенном в работах [24, 25] для случая составных систем двух релятивистских частиц произвольных масс m_1 и m_2 . С этой целью РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении для волновой РКП-функции $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$ двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2 , взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала вида

$$V(r) = V_{\text{conf}}(r) - \frac{\alpha_s}{r}, \alpha_s > 0, \quad (4)$$

было решено релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода [18, 19]. Это решение приводит, с учетом модификации формулы (1) соотношением (3), к следующему выражению для лептонной ширины распада векторного мезона:

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell}(V \rightarrow e^+ e^-) &= \\ &= \frac{2\alpha^2 Q_V^2 (\hbar c)^3 \Gamma^2(\ell + 1)}{\pi \lambda'^3 g' m' c^2 \Gamma^2(2\ell + 2) M_n^2} \left(\frac{u'_{\text{rel},n}}{g'} \right)^{2\ell+1} \times \\ &\times L_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel},n}) \frac{dM_n}{dn}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь для бесспиновых кварков $Q_V = e_q$, где e_q — заряд кварка в единицах электрического заряда e , $\lambda' = \hbar/m'c$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$, выступающей в качестве двухчастичной связанной системы, фактор g' определяется выражением

$$g' = \frac{m'}{2\mu} = \frac{m_1 + m_2}{2\sqrt{m_1 m_2}}, \quad (6)$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса двух частиц произвольных масс,

$$u'_{\text{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (7)$$

— относительная скорость эффективной релятивистской частицы массы m' , где скорость u дается выражением

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m'^2 c^4}{M^2 - (m_1 - m_2)^2 c^4}}, \quad (8)$$

а релятивистские бесспиновые кулоноподобные ресуммирующие пороговые L - и S -факторы как функции быстроты χ' , которые появляются в рассматриваемом РКП-подходе, даются выражениями [26–29]⁴⁾

$$\begin{aligned} L_{\text{RQP}}(\chi') &= \\ &= \prod_{n=1}^{\ell} \left[1 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_s}{2n \text{sh } \chi'} \right)^2 \right] S_{\text{RQP}}(\chi'), \\ S_{\text{RQP}}(\chi') &= \frac{X_{\text{RQP}}(\chi')}{1 - \exp[-X_{\text{RQP}}(\chi')]}, \\ X_{\text{RQP}}(\chi') &= \frac{\pi \tilde{\alpha}_s}{\text{sh } \chi'}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s / g' \hbar c$, величина $\text{sh } \chi'$ выражается через относительную скорость в (7) как

$$\text{sh } \chi' = u'_{\text{rel}} / 2g', \quad (11)$$

а быстрота χ' связана с относительным 3-импульсом $\mathbf{q}'$, энергией $E_{q'}$ эффективной релятивистской частицы массы m' и полной энергией взаимодействующих частиц M_Q соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= m' c \text{sh } \chi' \mathbf{n}_{q'}, \quad |\mathbf{n}_{q'}| = 1, \\ E_{q'} &= m' c^2 \text{ch } \chi', \quad M_Q = \frac{m'^2 c^2}{\mu} \text{ch } \chi'. \end{aligned}$$

Выражение (5) можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (4), т.е. при $\alpha_s = 0$. В частности, при $\ell = 0$ выражение (5) переходит в соотношение [33]

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+ e^-) &= \\ &= \frac{2\alpha^2 Q_V^2 (\hbar c)^3 u'_{\text{rel},n}}{\pi \lambda'^3 g'^2 m' c^2 M_n^2} S_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel},n}) \frac{dM_n}{dn}. \end{aligned} \quad (12)$$

⁴⁾Напомним, что пороговые L - и S -факторы в (9) и (10) имеют правильные релятивистские ($u \rightarrow 1$) и ультрарелятивистские ($m' \rightarrow 0$) пределы, равные единице, в отличие от релятивистских пороговых S -факторов, представленных в работах [30–32] (подробности см. в работах [26–29]).

План дальнейшего изложения следующий. В разд. 2 полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r, \chi')$ двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2 , полученное в [34] в рамках РКП-подхода [2, 24, 25], будет решено релятивистским ВКБ-методом. Условие применимости ВКБ-приближения будет установлено. В разд. 3 в рамках применимости ВКБ-приближения будет получено выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов в s -состоянии на лептон-антилептонную пару. Векторные мезоны рассматриваются как составная система двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс m_1 и m_2 , взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала, включающего в себя несингулярную чисто запирающую часть и сингулярную часть в виде кулоновского (хромодинамического) потенциала. В разд. 4 будет выполнено исследование влияния спина и масс кварков (фактор g') на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Для этого будет проведено сравнение поведения нового спинового выражения для лептонных ширин распадов векторных мезонов с их релятивистским бесспиновым аналогом. В этом же разделе будут вычислены значения лептонных ширин распадов основного уровня s -состояния векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов. В Заключение будет подведен итог проведенному исследованию.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РКП-УРАВНЕНИЯ

Основой нашего рассмотрения является полностью ковариантное РКП-уравнение в $\mathbf{r}$ -представлении в конечно-разностной форме для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r, \chi')$ составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1, m_2 с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$, взаимодействующих посредством сферически симметричных квазипотенциалов, которое имеет вид [34]

$$\begin{aligned} (\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} - \text{ch } \chi') \varphi_\ell(r, \chi') = \\ = -V(r) \hat{A} \left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right) \varphi_\ell(r, \chi'). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} = \text{ch} \left(i\lambda' \frac{d}{dr} \right) + \frac{\lambda'^2 \ell(\ell+1)}{2r(r+i\lambda')} \exp \left(i\lambda' \frac{d}{dr} \right)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана

$$\hat{H}_0 = 2m'c^2 \left[\text{ch} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{i\lambda'}{r} \text{sh} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2} \Delta_{\theta,\varphi} \exp \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) \right],$$

являющегося конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp(\pm i\lambda' \partial/\partial r)$, в то время как $\Delta_{\theta,\varphi}$ — его угловая часть, оператор $\hat{A}$ определяется выражением

$$\hat{A} \left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right) = \frac{1}{4} \left[a' \left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right)^2 + b' \right],$$

в котором спиновые параметры a' и b' для векторных мезонов выражаются через фактор (6) формулой

$$a' = \frac{1}{2}g'^2, \quad b' = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}g'^2 \quad (14)$$

при $\hat{O} = \gamma_\mu$ (вектор),

причем значение спиновых параметров a' и b' в (14) при $m_1 = m_2 = m$ совпадает со значением их аналогов a и b , которые были получены в [35] для векторных мезонов; квазипотенциал $V(r)$ является локальным в смысле геометрии Лобачевского и для простоты считается не зависящим от энергии M_Q , а χ' — быстрота, которая параметризует импульс и энергию⁵⁾:

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q} = m'c \text{sh } \chi' \mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}, \quad (15)$$

$$|\mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}| = 1, \quad M_Q = \frac{m'}{\mu} \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0,$$

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0 = m'c^2 \text{ch } \chi'.$$

Отметим, что для простоты рассмотрения в работе [34], как и в работах [36, 35], считалось, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида $\hat{O} \otimes \hat{O}$, а вершинная функция также имеет спинорную структуру, пропорциональную матрице $\hat{O}$, не зависящую от импульсных переменных, а шпур $\text{Sp}[\hat{O}^+ \hat{O}] \neq 0$, где в качестве $\hat{O}$ выбирались матрицы Дирака $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Разложение же вершинной функции по полной системе $I, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} P^\nu$ -матриц приводит к системе зацепляющихся уравнений. Такое представление квазипотенциала и вершинной функции позволило, используя условия ортонормированности и полноты для дираковских спиноров, провести свертку спиновых частей этих величин, а затем, применяя

⁵⁾Напомним, что здесь $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = Q/\sqrt{Q^2}$ — 4-вектор скорости составной частицы с 4-импульсом $Q = q_1 + q_2$, причем все 4-импульсы принадлежат верхним полам массовых гиперболоидов $\Delta_{q',m'\lambda_Q}^2 = \Delta_{q',m'\lambda_Q}^{02} - c^2 \Delta_{q',m'\lambda_Q}^2 = m'^2 c^4$, где $\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0, \Delta_{q',m'\lambda_Q}$ — временная и пространственная компоненты 4-вектора $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q' = \Delta_{q',m'\lambda_Q}$ из пространства Лобачевского (подробности см. в работе [34]).

преобразование Лоренца, разделить временные и пространственные переменные в аргументах четырехмерных δ -функций и выполнить интегрирование по этим переменным, что в конечном итоге и приводит к уравнению (13) (подробности см. в работе [35]). Этот подход позволил найти точные решения РКП-уравнения (13) с кулоноподобным (хромодинамическим) потенциалом (2), который в случае взаимодействия $\gamma_\mu \otimes \gamma^\mu$ является определяющим [36, 37], а возможность его использования как образа кулоновской части фейнмановского матричного элемента (квазипотенциала), содержащего все спиновые эффекты, была детально рассмотрена в работах [1, 20].

Решение уравнения (13) в ВКБ-приближении ищется в виде [1, 18–20, 23]

$$\varphi_\ell(r, \chi') = \exp \left[\frac{i}{\hbar} g(r) \right], \quad (16)$$

$$g(r) = g_0(r) + \frac{\hbar}{i} g_1(r) + \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 g_2(r) + \dots$$

Для первых двух членов представления (16) находим

$$g_0(r) = m'c \int dr \chi_\pm(r) + \frac{\hbar}{i} \phi, \quad (17)$$

$$g_1(r) = -\frac{1}{4} \ln([\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)] \times$$

$$\times [1 + a'V(r)X(r)]) + c_\pm,$$

где

$$\chi_\pm(r) = \ln \left[\mathcal{X}(r) \pm \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)} \right], \quad (18)$$

$$\mathcal{X}(r) = \frac{2X(r)}{1 + \sqrt{1 + a'V(r)X(r)}},$$

$$X(r) = \text{ch } \chi' - \frac{b'}{4} V(r),$$

$$R(r) = \sqrt{1 + \frac{\lambda'^2 \Lambda^2}{r^2}}, \quad \Lambda = \ell + 1/2.$$

Учет выражений в (17) для первых двух членов представления (16) позволяет получить ВКБ-решения с левой r_L и правой r_R точками поворота в области $r_L \leq r \leq r_R$:

$$\varphi_\ell^{L,R}(r, \chi') = \quad (19)$$

$$= \frac{C_{L,R}}{2^4 \sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[i\alpha_+^{L,R}(r) \mp \frac{i\pi}{4} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[i\alpha_-^{L,R}(r) \pm \frac{i\pi}{4} \right] \right\},$$

где

$$\alpha_\pm^{L,R}(r) = \frac{1}{\lambda'} \int_{r_{L,R}}^r dr' \chi_\pm(r'), \quad (20)$$

$C_{L,R}$ — нормировочные константы, а левая r_L и правая r_R точки поворота определяются как точки ветвления корня в (20):

$$\mathcal{X}(r_{L,R}) = R(r_{L,R}). \quad (21)$$

Условие применимости релятивистского ВКБ-метода в спиновом случае, основанное на выражениях в (17) для первых двух членов представления (16), дается неравенством

$$\lambda' \left| \frac{\text{ch } \chi_{\text{eff}}(r)}{\chi_+(r) \text{sh } \chi_{\text{eff}}(r)} \frac{d\chi_+(r)}{dr} \right| \ll 1, \quad (22)$$

где

$$\chi_{\text{eff}}(r) = \text{arch } \mathcal{X}_{\text{eff}}(r) =$$

$$= \ln \left(\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) + \sqrt{\mathcal{X}_{\text{eff}}^2(r) - 1} \right),$$

$$\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) = \text{ch } \chi_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{X}(r)}{R(r)}.$$

В случае $\ell = 0$ условие (22) преобразуется в неравенство

$$\lambda' \left| \frac{\text{ch } \chi_S(r)}{\chi_S(r) \text{sh } \chi_S(r)} \frac{d\chi_S(r)}{dr} \right| \ll 1,$$

где величина

$$\chi_S(r) = \text{arch } \mathcal{X}(r) = \ln \left[\mathcal{X}(r) + \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - 1} \right]$$

имеет смысл быстроты эффективной релятивистской частицы массы m' , движущейся в поле потенциала $V(r)$, в терминах которой измеряется расстояние между двумя точками импульсного пространства Лобачевского.

В заключение этого раздела приведем условие квантования уровней энергий в ВКБ-приближении [38]

$$\int_{r_L}^{r_R} dr [\chi_+(r) - \ln R(r)] = \quad (23)$$

$$= \pi \lambda' \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

$$n = 0, 1, \dots, \ell \geq 0,$$

которое, как и в бесспиновом случае [23], находится из условия совпадения волновых функций в (19) в точке $r \in (r_L; r_R)$. Для этого необходимо положить

$$C_L = C_\ell \exp \left[-\frac{i}{\lambda'} \int_{r_L}^r dr' \ln R(r') \right],$$

$$C_R = C_\ell(-1)^n \exp \left[-\frac{i}{\chi'} \int_{r_R}^r dr' \ln R(r') \right],$$

где C_ℓ — произвольная постоянная. При $a' = 0$, $b' = 2/g'm'c^2$ ВКБ-условие квантования уровней энергий (23) совпадает с аналогичным выражением, которое было получено в работе [23] для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс. В случае равных масс $m_1 = m_2 = m$ ($g' = 1$) выражение (23) переходит в ВКБ-условие квантования уровней энергий, полученное в случае спиновых частиц равных масс в работе [39].

3. ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ МЕЗОНОВ В РКП-ПОДХОДЕ

Релятивистская модификация формулы (1) в РКП-подходе для лептонных ширин распадов векторных мезонов в s -состоянии и с энергией $M_Q = M_n$, ($\chi' = \chi_n$) как связанной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс m_1 и m_2 состоит, согласно соотношению (3) и обоснованию к нему, в замене $|\chi_{BS}(x=0)|^2|_{\ell=0} = |\psi_{M_Q}(r=i\lambda)|^2|_{\ell=0}$ и введения квадрата формфактора кварка $f_1(t)$, который в нерелятивистском случае в работе Ван Роена–Вайскопфа [11] принимался равным 1. Тогда лептонная ширина распада векторного мезона в s -состоянии и с энергией M_n определяется также, как и в случае связанной системы двух спиновых кварков равных масс m [1], через решение (19) равенством

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+e^-) &= \\ &= \frac{16\pi\alpha^2 Q_V^2 f_1^2(t)}{M_n^2} \times \\ &\times \lim_{r \rightarrow i\lambda'} \left| e^{-\pi\tilde{\rho}'/2} \Gamma(1+i\tilde{\rho}') \frac{\varphi_0^L(r, \chi_n)}{r} \right|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\tilde{\rho}' = \frac{\tilde{\alpha}'_s a' \operatorname{ch} \chi'}{4}, \quad \tilde{\alpha}'_s = \frac{\alpha_s}{\chi'},$$

формфактор кварка $f_1(t)$ в выражении оператора тока кварка как функция квадрата 4-вектора передачи импульса $t = (p' - p)^2 = 2M_Q^2 c^4 (1 - \operatorname{ch} \chi_\Delta)$, где p, p' — начальный и конечный импульсы, а χ_Δ — соответствующая быстрота, зависит от аномального магнитного момента кварка $\mu_{\text{аном}}$ в отличие от формфактора кварка $f_2(t)$, который не дает вклада в магнитный момент кварка. В случае нерелятивистских кварков аномальный магнитный момент $\mu_{\text{аном}}$ в работе Ван Роена–Вайскопфа [11] принимался равным нулю, а, следовательно, формфактор $f_1(t)$ выбирался равным 1 (подробности см.

в [11]). В случае релятивистских кварков формфактор $f_1(t)$ выберем в виде

$$f_1(t) = \frac{\operatorname{sh} \chi_\Delta}{\chi_\Delta}, \quad (25)$$

где $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$ — релятивистский геометрический фактор в РКП-подходе [2], который впервые обоснованно появился в работе [40] для инвариантного описания пространственной структуры частиц в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении [9]. Такой выбор формфактора $f_1(t)$ имеет ясный физический смысл, поскольку, как было показано в работе [40], фактор $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$ описывает величину вклада в формфактор нуклона от его центральной сферы, внутри которой движутся кварки с радиусом, равным его комптоновской длине волны ($r_0 = \hbar/Mc$). В нерелятивистском пределе ($\chi_\Delta \rightarrow 0$) фактор $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta \rightarrow 1$, что отвечает точечной частице. Следовательно, в нерелятивистском пределе формфактор $f_1(t)$ не дает вклада в (24). Таким образом, фактор $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$ служит мерой вклада релятивистских эффектов, обусловленных динамикой кварков.

Отметим, что дополнительный фактор $\exp(-\pi\tilde{\rho}'/2)\Gamma(1+i\tilde{\rho}')$ в формуле (24) обеспечивает не только правильный релятивистский предел порогового редуцирующего S -фактора составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс при $\chi' \rightarrow +\infty$ ($u \rightarrow 1$), равный 1, но и переход к бесспиновому случаю при $a' = 0$ и $b' = 2/g'm'c^2$ (подробности см. в работе [34]). Таким образом, в рассматриваемом спиновом случае функция

$$\psi_0(r, \chi') = e^{-\pi\tilde{\rho}'/2} \Gamma(1+i\tilde{\rho}') \varphi_0^L(r, \chi')$$

представляет собой физическую волновую РКП-функцию s -состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала вида (4).

Подчеркнем также, что формула (24) справедлива (как это имело место и в работах [1, 17, 20, 23]) в приближении одновременного взаимодействия, ограничиваясь в дальнейшем учетом лишь образа кулоновской части однобозонного обменного квазипотенциала, $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi mr)/r$ ($\hbar = c = 1$), опуская функцию $\operatorname{cth}(\pi mr)$, т.е. заменой потенциала $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi mr)/r$ на кулоновский (хромодинамический) потенциал (2). В РКП-подходе в импульсном пространстве Лобачевского потенциал (2) отвечает пропагатору, обладающему КХД-подобным (хромодинамическим) поведением [21]. Таким образом, внутри адрона взаимодействие двух релятивистских спиновых

кварков произвольных масс осуществляется в $\mathbf{r}$ -представлении посредством сингулярного воронкообразного потенциала запираия (4), в котором $V_{\text{conf}}(0) = 0$. В поле такого потенциала уровни энергии $M_n = (m'^2 c^2 / \mu) \text{ch } \chi_n$ для данного уровня n могут быть определены из ВКБ-условия квантования (23).

В области $r \in (r_L; r_R)$ ВКБ-решение (19) с левой точкой поворота r_L и с данным фиксированным значением энергии M_n , отвечающее потенциалу (4), запишем в виде

$$\varphi_\ell^L(r, \chi_n) = \frac{C_\ell(\chi_n)}{\sqrt[4]{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} \times \sin \left\{ \frac{1}{\lambda'} \int_{r_L}^r dr' [\chi_+(r') - \ln R(r')] + \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (26)$$

где нормировочный множитель $C_\ell(\chi_n)$ находится из условия нормировки

$$4\pi \int_0^\infty dr |\varphi_\ell^L(r, \chi_n)|^2 = 1, \quad \ell \geq 0. \quad (27)$$

Заметим, что в области применимости ВКБ-приближения (22) аргумент синуса в решении (26) является быстро осциллирующей функцией. Поэтому после подстановки решения (26) в условие нормировки (27) квадрат синуса, как обычно, можно заменить его средним значением, равным $1/2$ [1, 23]. Тогда вместо (27) имеем условие

$$2\pi |C_\ell(\chi_n)|^2 \times \int_{r_L}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} = 1. \quad (28)$$

Дифференцируя по полной энергии $M_n = (m'^2 c^2 / \mu) \text{ch } \chi_n$ условие квантования (23) при $\ell \geq 0$, где потенциал $V_{\text{conf}}(r)$ не зависит от энергии M_n , и принимая во внимание определения (18) и условие (21) для точек поворота $r_{L,R}$, получим

$$\int_{r_L}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} = \frac{\pi \lambda' m'^2 c^2}{\mu} \frac{dn}{dM_n}. \quad (29)$$

Из выражений (28) и (29) находим

$$|C_\ell(\chi_n)|^2 = \frac{\mu}{2\pi^2 \lambda' m'^2 c^2} \frac{dM_n}{dn}. \quad (30)$$

Далее, поступая как, например, в работах [1, 15, 23], волновую РКП-функцию (26) полного потенциала (4) при $\ell = 0$ в области достаточно больших $\rho = r/\lambda', r \in (r_L; r_R)$, но таких, где все же в потенциале (4) доминирует кулоновское (хромодинамическое) взаимодействие (2), аппроксимируем радиальной s -волновой РКП-функцией $\varphi_0^{\text{Coul}}(r, \chi')$, отвечающей потенциалу (2), точный вид которой можно представить через гипергеометрическую функцию в виде [34]

$$\varphi_0^{\text{Coul}}(\rho, \chi') = 2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi') e^{iB'\chi' - \chi' + i(\rho - \tilde{\rho}')\chi'} (\rho - \tilde{\rho}') \times F(1 - iB', 1 - i(\rho - \tilde{\rho}'); 2; 1 - e^{-2\chi'}), \quad \rho = r/\lambda'. \quad (31)$$

Здесь $C_0(\chi')$ — произвольная функция от χ' , параметр B' определяется как

$$B' = \frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \text{ch}^2 \chi' + b')}{4 \text{sh } \chi'}, \quad (32)$$

причем параметр B' при $\chi' = i\kappa_n$ связан с условием квантования энергетических уровней в спиновом случае для потенциала (2) выражением [34]

$$\frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \cos^2 \kappa_n + b')}{4 \sin \kappa_n} = n, \quad \ell = 0, \\ n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \kappa_n < \pi/2.$$

Сравнивая асимптотическое выражение для кулоновской функции в (31)

$$\varphi_0^{\text{Coul}}(\rho, \chi_n)|_{\rho \gg 1} \sim \frac{2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi_n) e^{-\pi B'/2}}{\text{sh } \chi_n |\Gamma(1 - iB')|} \times \sin [\rho \chi_n + \delta_0^{\text{Coul}, S}(\chi_n)],$$

с асимптотикой ВКБ-решения в (26), взятого при $\ell = 0$,

$$\varphi_0^L(\rho, \chi_n)|_{\rho \gg 1} \sim \frac{C_0(\chi_n)}{\sqrt{\text{sh } \chi_n}} \sin [\rho \chi_n + \delta_0^{\text{Coul}, \text{WKB}, S}(\chi_n)],$$

находим связь между нормировочными множителями

$$\left| 2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi_n) \right|^2 = \text{sh } \chi_n e^{\pi B'} |\Gamma(1 - iB')|^2 |C_0(\chi_n)|^2, \quad (33)$$

где

$$\delta_0^{\text{Coul}, S}(\chi') = B' \ln(2\rho \text{sh } \chi') - \tilde{\rho}' \chi' + \arg \Gamma(1 - iB')$$

— точная фаза волновой РКП-функции для кулоновского потенциала (2), а

$$\delta_0^{\text{Coul}, \text{WKB}, S}(\chi') = B' \ln(2\rho \text{sh } \chi') - \tilde{\rho}' \chi' - B' \ln B'$$

— ее выражение в ВКБ-приближении [38].

Наконец, принимая во внимание определение (24) и соотношения (30), (31) и (33), получим ВКБ-выражение для лептонной ширины распада векторного мезона в s -состоянии и с энергией M_n как составной системы двух спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала (4) с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием (2):

$$\Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+e^-) = \quad (34)$$

$$= \frac{4\alpha^2 Q_V^2 f_1^2(t) (\hbar c)^3 \operatorname{sh} \chi_n}{\pi \lambda'^3 g' m' c^2 M_n^2} S_{\text{RQP},S}(\chi_n) \frac{dM_n}{dn}.$$

Здесь

$$S_{\text{RQP},S}(\chi') = \frac{X_{\text{RQP},S}(\chi')}{1 - \exp[-X_{\text{RQP},S}(\chi')]} \times \quad (35)$$

$$\times e^{-\pi \tilde{\rho}'} |\Gamma(2 + i\tilde{\rho}') F(1 + iB', -i\tilde{\rho}'; 2; 1 - e^{-2\chi'})|^2$$

— релятивистский кулоноподобный ресуммирующий пороговый S -фактор для случая составной системы, состоящей из двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2 [34]. В рассматриваемом РКП-подходе S -фактор (35) воспроизводит как известный нерелятивистский результат в нерелятивистском пределе ($v \ll 1$) в бесспиновом случае, когда $m_1 = m_2 = m$, $a' = a = 0$ и $b' = b = 2/mc^2$, так и ожидаемые релятивистский ($u \rightarrow 1$) и ультрарелятивистский ($m' \rightarrow 0$) пределы для значения параметров a' и b' в (14) (подробности см. в работах [34, 41, 42]). Величина $X_{\text{RQP},S}(\chi')$ связана с параметром B' в (32) выражением

$$X_{\text{RQP},S}(\chi') = 2\pi B' = \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s (a' \operatorname{ch}^2 \chi' + b')}{2 \operatorname{sh} \chi'},$$

которое может быть представлено с помощью (11) в терминах скоростей (7) и (8) в виде

$$X_{\text{RQP},S}(u) = \quad (36)$$

$$= \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s \sqrt{1-u^2}}{2g'u} \left[g'^2(a' + b') + \frac{a'u^2}{1-u^2} \right] =$$

$$= \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s}{g'u'_{\text{rel}}} \left[g'^2(a' + b') + \frac{a'}{4} u'^2_{\text{rel}} \right].$$

Подчеркнем, что выражение (34) для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в s -состоянии включает в себя спиновый S -фактор (35), а его бесспиновый аналог (12) содержит бесспиновый S -фактор (10), поведение которых было детально исследовано в работах [34, 41–43] и [26–29] соответственно. При этом выражение (34) можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (4), т.е.

при $\alpha_s = 0$, а при $a' = 0, b' = 2/g'm'c^2$ и $f_1(t) = 1$ оно переходит в выражение (12) для бесспинового случая. Соответствующие нерелятивистские или релятивистские пороговые L - и S -факторы появляются и в других выражениях для лептонных ширин распадов векторных мезонов как составных систем двух спиновых (или бесспиновых) частиц равных масс m . Однако не все пороговые L - и S -факторы, появляющиеся в лептонных ширинах распадов векторных мезонов, имеют правильные релятивистские пределы [26–29], что существенно влияет на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов в этой области. Этот вопрос для случая двух частиц равных масс был подробно исследован в работе [1].

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СПИНОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ НА ПОВЕДЕНИЕ ИХ ЛЕПТОННЫХ ШИРИН РАСПАДОВ

Для исследования влияния спина и масс кварков на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов в s -состоянии были построены графики функции $R = R(u)$ (рис. 1) как функции скорости u , определенной как отношение релятивистской спиновой лептонной ширины распада векторного мезона в s -состоянии, представленной выражениями (34), (35) и (36), к ее релятивистскому бесспиновому аналогу, представленному выражениями (10) и (12), которые берутся при $f_1(t) = 1$, $Q_V = e_q$, $\hbar = c = 1$, $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}'_s = \alpha_s = 0.2$ и отвечают различным значениям фактора g' : $g' = 1$ — сплошная кривая, $g' = 1.5$ — штриховая кривая и $g' = 2.5$ — штрихпунктирная кривая; точечная кривая соответствует значению $\alpha_s = 0$. При построении графиков функции R были также использованы соотношения (7) и (11) как функции скорости u и учтены выражения для спиновых параметров a' и b' для векторных мезонов в (14) как функции фактора g' .

Из рис. 1 видно, что в нерелятивистской области значений скорости u ($u \ll 1$) значение функции $R < 0.4$. Следовательно, в этой области значений скорости u учет спина и масс кварков, формирующих спиновые параметры a' и b' векторных мезонов, существенно влияет на поведение функции R , а значит, и на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Этот эффект связан с влиянием значений спиновых параметров a' и b' как функций фактора g' на поведение порогового S -фактора (35) в области малых значений скорости u по сравнению с его релятивистским (10) бесспиновым аналогом. Это влияние спиновых параметров на поведение порогового S -фактора в области малых значений скорости u было детально исследовано в работах [34, 41–43]. Это так называемый

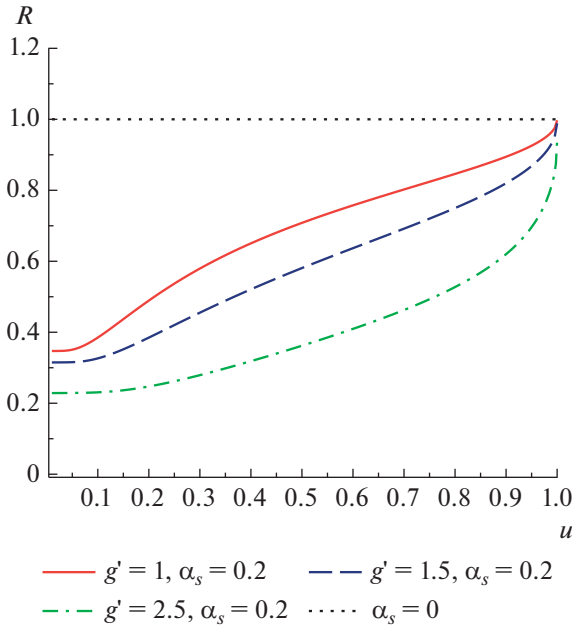


Рис. 1. Поведение функции R как функции скорости u , равной отношению релятивистского выражения (34) для лептонных ширин распадов векторных мезонов к его релятивистскому бесспиновому аналогу (12), взятых при $f_1(t) = 1$, $Q_V = e_q$, $\hbar = c = 1$, $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}'_s = \alpha_s = 0.2$ и отвечающих различным значениям фактора g' . Кривые: сплошная — $g' = 1$, штриховая — $g' = 1.5$, штрихпунктирная — $g' = 2.5$, точечная — $\alpha_s = 0$.

эффект Зоммерфельда [44, 45]. Однако с ростом скорости u влияние значений спиновых параметров a' и b' на поведение функции R уменьшается, но продолжает зависеть, и достаточно существенно, от значений фактора $g' \geq 1$. В релятивистском пределе ($u \rightarrow 1$), как видно из рис. 1, функция $R \rightarrow 1$ для всех трех значений фактора g' , т.е. это влияние становится исчезающе малым. Такое поведение функции R в релятивистском пределе ($u \rightarrow 1$) обусловлено тем, что релятивистские пороговые S -факторы (10) и (35) имеют правильный релятивистский предел, равный 1 (см. соответственно работы [26–29] и [34, 41–43]). В заключение данного абзаца подчеркнем, что различие масс кварков (фактор g'), образующих составную систему, существенно влияет на поведение функции R , а значит, и на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов.

В качестве примера применения выражения (34), где $\hbar = c = 1$, проведем вычисление лептонных ширин распадов основного уровня ($n = 1$) s -состояния ($\ell = 0$) векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов, образованных соответствующими парами релятивистских u -, d - и s -кварков, взаимодействующих посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов.

Массы векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов были выбраны равными [46]: $M_{\rho_0} = 775.26$ МэВ, $M_\omega = 782.65$ МэВ и $M_\phi = 1019.461$ МэВ. Значения фактора g' , который определяется формулой (6) через отношения масс m_u, m_d, m_s кварков, образующих векторные ρ_0 -, ω - и ϕ -мезоны, принимаются равными: $g'_{\rho_0} = g'_\omega = 1.0012$ (как и в работе [38] для $\pi^\pm$ -мезона), а $g'_\phi = 1$ (из-за равных масс). Значения масс m_u, m_d, m_s для u -, d -, s -кварков были найдены в работе [38] при исследовании спектра масс псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов: $m_u = 62.57$ МэВ, $m_d = 69.00$ МэВ, $m_s = 262.29$ МэВ. Тогда, принимая во внимание определение массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ эффективной релятивистской частицы, были вычислены массы $m'_{\rho_0} = m'_\omega = 65.71$ МэВ (как и в работе [38] для $\pi^\pm$ -мезона) и $m'_\phi = m_s = 262.29$ МэВ для векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов. Значения быстроты $\chi' = \chi$, соответствующие выбранным значениям масс M , m' и фактора g' для ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов, находятся согласно формулам (6) и (15) из выражений

$$M_{\rho_0} = 2m'_{\rho_0}g'_{\rho_0} \operatorname{ch} \chi_{\rho_0}, \quad (37)$$

$$M_\omega = 2m'_\omega g'_\omega \operatorname{ch} \chi_\omega, \quad M_\phi = 2m'_\phi g'_\phi \operatorname{ch} \chi_\phi.$$

Значения множителя Q_V , обусловленные изотопической структурой векторных мезонов V и зарядами кварков, образующих их и выраженных в единицах электрического заряда e , для векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов были взяты из работ [10, 11]: $Q_{\rho_0} = 1/\sqrt{2}$, $Q_\omega = 1/3\sqrt{2}$, $Q_\phi = -1/3$. Значения линейной ($\tilde{\sigma}' = \sigma$) и кулоновской ($\tilde{\alpha}'_s = \alpha_s$) констант взаимодействия для основного уровня ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов в s -состоянии, а также значения спектральной плотности $dM_n/dn = 2m'g' \operatorname{sh} \chi'_n d\chi'_n/dn$ для них были вычислены с помощью условия квантования уровней энергии для векторных мезонов ($a' = g'^2/2$, $b' = 3/4 - a'$) [38]

$$\begin{aligned} & \frac{4}{a'\tilde{\sigma}'} \left[\frac{\operatorname{ch} \chi'}{\sqrt{b'/a'}\sqrt{1+b'/a'}} \times \right. \\ & \quad \times \operatorname{arth} \left(\frac{\operatorname{th} \chi' \sqrt{b'/a'}}{\sqrt{1+b'/a'}} \right) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1+b'/a'}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sh} \chi'}{\sqrt{1+b'/a'}} \right) \right] = \\ & = \pi \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} \right) - \delta_\ell^{\operatorname{Coul}, \operatorname{WKB}, S}(\chi'), \\ & \quad n = 0, 1, \dots, \quad \ell \geq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

используя выбранные значения фактора g' и найденные значения быстроты χ' посредством соотно-

Таблица 1. Значения лептонных ширин распадов и параметров ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов

Мезоны	M , МэВ	m_u , МэВ	m_d , МэВ	m_s , МэВ	m' , МэВ	g'	χ'	Q_V	σ	α_s
ρ_0	775.26	62.57	69.00		65.71	1.0012	2.4595	$1/\sqrt{2}$	5.3135	0.3290
ω	782.65	62.57	69.00		65.71	1.0012	2.4691	$1/3\sqrt{2}$	5.3806	0.3261
ϕ	1019.461			262.29	262.29	1	1.2836	$-1/3$	0.7517	0.7793

Мезоны	χ_Δ	$-t$, ГэВ ²	u	$\Gamma_{\text{теор}}$, кэВ	$\Gamma_{\text{эксп}}$, кэВ
ρ_0	3.2042	13.63	0.9855	7.04	7.04 ± 0.06
ω	3.0081	11.21	0.9858	0.60	0.60 ± 0.02
ϕ	2.4054	9.53	0.8574	1.251	1.251 ± 0.021

шений (37), где

$$\delta_{\ell}^{\text{Coul, WKB}, S}(\chi') = B' \ln \left(\frac{2\rho_+ \text{sh } \chi'}{\sqrt{\Lambda^2 + B'^2}} \right) - \chi' \tilde{\rho}'$$

— фаза релятивистской кулоновской волновой РКП-функции в ВКБ-приближении, взятой в точке поворота $\rho_+ = 4(\text{ch } \chi' - 1)/\tilde{\sigma}'(a' + b')$.

Значения быстроты χ_Δ , параметризующей формфактор $f_1(t)$ в (25), были выбраны равными: $\chi_{\Delta\rho_0} = 3.2042$, $\chi_{\Delta\omega} = 3.0081$ и $\chi_{\Delta\phi} = 2.4054$. Они соответствуют теоретическим значениям лептонных ширин распадов основного уровня s -состояния векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов, которые принадлежат доверительным интервалам их экспериментальных значений [46].

Значения всех величин для основного уровня s -состояния векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов, включая значения линейной и кулоновской констант взаимодействия кварков, скорости u , быстроты χ_Δ и квадрата 4-вектора передачи импульса t , а также теоретические и экспериментальные значения лептонных ширин распадов для них, приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что кварки, образующие основной уровень s -состояния векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов, являются релятивистскими (для них скорость $u > 0.85$).

Подчеркнем, что результаты вычислений учитывают релятивистский характер связанной системы, поскольку как лептонные ширины распадов векторных мезонов (34), так и условие квантования уровней энергий (38) были получены в рамках полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля. При этом остается неоднозначность определения параметров взаимодействия. Для устранения этой неоднозначности необходимо использовать другие физические характеристики для рассматриваемых связанных систем, либо зафиксировать некоторые параметры взаимодействия, например, мы фиксировали значения фактора g' (см. табл. 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках РКП-подхода в релятивистском квазиклассическом приближении получено новое релятивистское выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов в s -состоянии на лептон-антилептонную пару. Рассмотрение проводится для случая, когда релятивистские спинорные кварки произвольных масс m_1, m_2 , составляющие векторные мезоны, взаимодействуют посредством воронкообразного потенциала, включающего в себя несингулярную чисто запирающую часть и сингулярную часть в виде кулоновского (хромодинамического) потенциала. Для этой цели было использовано полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении, полученное в [34] в рамках РКП-подхода [2, 24, 25] для случая взаимодействия двух релятивистских спинорных частиц произвольных масс. РКП-уравнение решено релятивистским ВКБ-методом. Установлено условие применимости ВКБ-приближения. Проведено сравнение нового выражения с его релятивистским бесспиновым аналогом. Исследовано влияние спина и масс кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в s -состоянии. Выполнено вычисление лептонных ширин распадов основного уровня s -состояния векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов.

Показано, что новое выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов (34) при $a' = 0, b' = 2/g'm'c^2$ и $f_1(t) = 1$ переходит в его релятивистский бесспиновый аналог. Для исследования влияния спина и масс кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в s -состоянии были построены графики функции R как функции скорости u , определенной как отношение нового выражения для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в s -состоянии, к ее релятивистскому бесспиновому аналогу (рис. 1). Поведение функции R на рис. 1 показывает, что

учет спина и масс кварков влияет на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Это влияние особенно существенно в нерелятивистской области значений скорости u ($u \ll 1$), где значение функции $R < 0.4$, и обусловлено различным поведением в области малых значений скорости u релятивистских бесспиновых и спиновых пороговых S -факторов, параметризующих лептонные ширины распадов векторных мезонов.

Поведение функции R , а значит, и лептонных ширин распадов векторных мезонов также существенно зависит от поведения пороговых S -факторов в релятивистской области значений скорости u ($u \rightarrow 1$). Установлено, что с ростом скорости u влияние спина и масс кварков, формирующих спиновые параметры a' и b' векторных мезонов, на поведение функции R (рис. 1) уменьшается и в релятивистском пределе ($u \rightarrow 1$) это влияние становится исчезающе малым ($R \rightarrow 1$), поскольку релятивистские бесспиновые и спиновые пороговые S -факторы (10) и (35) в R имеют правильный релятивистский предел, равный 1.

Полученная в настоящей работе формула (34) может быть использована для описания лептонных ширин распадов векторных мезонов в s -состоянии, в частности, она была применена к вычислению лептонных ширин распадов основного уровня s -состояния векторных ρ_0 -, ω - и ϕ -мезонов, значения которых находятся в доверительном интервале их экспериментальных значений.

Выражение для релятивистских квазиклассических лептонных ширин распадов векторных мезонов было получено в рамках полностью ковариантного метода и имеет правильную связь с функцией Бете—Солпитера, а следовательно, можно ожидать, что оно более полно учитывает как релятивистский характер частиц, образующих векторные мезоны, так и их массы и спины.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой за обсуждение полученных результатов, ценные замечания и техническую поддержку, Ю.А. Курочкину и В.В. Андрееву за обсуждение полученных результатов, их комментарии и стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2021–2025 гг. “Конвергенция-2025”, подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **85**, 159 (2022) [Phys. At. Nucl. **85**, 205 (2022)].
2. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).

3. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [Sov. Phys. Dokl. **10**, 46 (1965)].
4. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
5. R. N. Faustov, Ann. Phys. (N.Y.) **78**, 176 (1973).
6. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979) [Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 562 (1979)].
7. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [Theor. Math. Phys. **41**, 977 (1979)].
8. А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, ТМФ **53**, 20 (1982) [Theor. Math. Phys. **53**, 955 (1982)].
9. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, Nuovo Cimento A **55**, 233 (1968).
10. В. А. Матвеев, Б. В. Струминский, А. Н. Тавхелидзе, Препринт Р-2524, ОИЯИ (Дубна, 1965).
11. R. Van Royen and W. F. Weisskopf, Nuovo Cimento A **50**, 617 (1967).
12. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kögerler, and Z. Kunszt, Phys. Lett. B **57**, 455 (1975).
13. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kögerler, and Z. Kunszt, Nucl. Phys. B **105**, 125 (1976).
14. E. Etim and L. Schülke, Nuovo Cimento A **77**, 347 (1983).
15. J. S. Bell and J. Pasupathy, Z. Phys. C **2**, 183 (1979).
16. N. Fröman and P. O. Fröman, J. Phys. France **42**, 1491 (1981).
17. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **30**, 1904 (1984).
18. А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, в сб.: *Труды IV международного симпозиума по нелокальным теориям поля, Алушта, 20–28 апреля 1976*, Д2-9788, ОИЯИ (Дубна, 1976), с. 36.
19. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **31**, 1332 (1980) [Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 686 (1980)].
20. А. В. Сидоров, Н. Б. Скачков, ТМФ **46**, 213 (1981) [Theor. Math. Phys. **46**, 141 (1981)]; Препринт Р2-80-45, ОИЯИ (Дубна, 1980); V. I. Savrin, A. V. Sidorov, and N. B. Skachkov, Hadronic J. **4**, 1642 (1981).
21. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
22. И. С. Шапиро, Докл. АН СССР **106**, 647 (1956) [Sov. Phys. Dokl. **1**, 91 (1956)]; ЖЭТФ **43**, 1727 (1963) [Sov. Phys. JETP **16**, 1219 (1963)].
23. В. В. Кондратюк, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **81**, 40 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 51 (2018)].
24. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 388 (1970)].
25. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [Sov. J. Part. Nucl. **2**, 69 (1972)].
26. Ю. Д. Черниченко, Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук **4**, 81 (2009).

27. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **73**, 1658 (2010) [Phys. At. Nucl. **73**, 1612 (2010)].
28. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ТМФ **166**, 225 (2011) [Theor. Math. Phys. **166**, 194 (2011)].
29. Ю. Д. Черниченко, *Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния*, (Изд. центр УО ГГТУ им. П. О. Сухого, Гомель, 2011).
30. A. H. Hoang, Phys. Rev. D **56**, 7276 (1997).
31. J.-H. Yoon and Ch.-Y. Wong, Phys. Rev. C **61**, 044905 (2000); J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **31**, 149 (2005).
32. A. B. Arbuzov, Nuovo Cimento A **107**, 1263 (1994).
33. Yu. D. Chernichenko and O. P. Solovtsova, in *Proceedings of the XI International School-Seminar on the Actual Problems of Microworld Physics, August 1–12, 2011, Gomel, Belarus*, Preprint No. E1,2-2013-23, JINR (Dubna, 2013), p. 61.
34. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **84**, 262 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 339 (2021)].
35. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **80**, 396 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 707 (2017)].
36. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **54**, 183 (1983) [Theor. Math. Phys. **54**, 116 (1983)].
37. Н. Б. Скачков, ТМФ **22**, 213 (1975) [Theor. Math. Phys. **22**, 149 (1975)]; Preprint No. P2-12152, ОИЯИ (Дубна, 1979).
38. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **85**, 353 (2022) [Phys. At. Nucl. **85**, 488 (2022)].
39. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **83**, 270 (2020) [Phys. At. Nucl. **83**, 488 (2020)].
40. Н. Б. Скачков, ТМФ **25**, 313 (1975) [Theor. Math. Phys. **25**, 1154 (1975)].
41. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, and L. P. Kaptari, Nonlin. Phen. Compl. Syst. **23**, 449 (2020).
42. Yu. D. Chernichenko, L. P. Kaptari, and O. P. Solovtsova, Eur. Phys. J. Plus. **136**, Art. 132 (2021) [arXiv: 2012.13128v1 (hep-ph)].
43. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, and L. P. Kaptari, in *Proceedings of the XXVIII Anniversary Seminar “Nonlinear Phenomena in Complex Systems”, NPCS’2021, May 18–21, 2021, Minsk, Belarus* (Nonlinear Dynamics and Applications, Minsk, 2021), Vol. 27, p. 101.
44. A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* (Vieweg, Braunschweig, 1939), Vol. 2.
45. G. Gamov, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
46. K. A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).

LEPTONIC DECAY WIDTHS FOR THE COMPOSITE SYSTEM OF TWO RELATIVISTIC FERMIONS

Yu. D. Chernichenko^{1),2)}

¹⁾ Sukhoi State Technical University of Gomel, Belarus

²⁾ International Center for Advanced Studies, Gomel, Belarus

The new relativistic semiclassical leptonic decay widths of vector mesons as the relativistic systems of two quarks with arbitrary masses interacting by means of the funnel-type potentials with Coulomb interaction are obtained. The behavior of the relativistic leptonic decay widths of vector mesons was investigated. Comparison of the behavior for new expression with its relativistic spinless analog is given. Consideration is conducted within the framework of completely covariant quasipotential approach in the Hamiltonian formulation of quantum field theory via a transition to the relativistic configurational representation in the case of two relativistic spin particles of arbitrary masses.

ПОПРАВКА

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ УПРУГОГО ПРОТОН-ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ 84 (5), 382 (2021)

© 2023 г. А. А. Галюзов^{1)*}, М. В. Косов^{1)**}

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.; после доработки 20.03.2023 г.; принята к публикации 20.03.2023 г.

DOI: 10.31857/S0044002723040293, EDN: EHDQDT

Формулу (17) (с. 387, левая колонка — с. 387, правая колонка) и первый абзац на с. 387 (правая колонка) следует читать как

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_e}{dt} + A_d (B_d - 2C_d t) e^{B_d t - C_d t^2} + 3A_m B_m t^2 e^{B_m t^3} + A_h B_h e^{B_h t} + A_u B_u e^{B_u u},$$

где $\frac{d\sigma_e}{dt} = A_e B_e \frac{e^{-B_e \sqrt{-t}}}{2\sqrt{-t}}$, $-u = |t_{\max}| + t$ и зависимости используемых параметров от импульса p налетающего протона в лабораторной системе в МэВ/с и атомного веса ядра-мишени A в атомных единицах массы приведены в табл. 2.

В табл. 1 (с. 385, 1-я строка) следует читать

A_e	$1.71 + \frac{5.24}{p} + \frac{2.78}{p^3}$
-------	--

В табл. 2 (с. 388, 3, 16, 19-я строки) следует читать

A_d	$\frac{4000A}{1 + a_1 p^{A+4}} + \frac{a_2}{p^4 + a_3 p^{4-2A}} + \frac{0.28A (\ln p - 5)^2 + a_4}{1 + 3.8 p^{-2}/A}$
d	$\frac{8 \times 10^7 A^{-12}}{1 + 10^{-28} A^{44}}$
B_h	$\frac{A/2}{p^3 + 2 \times 10^{-7} A^4/p^6} + \frac{4}{1 + 64 A^{-3}/p^2}$

В табл. 3 (с. 394, 6-я строка) следует читать

a_3	$\frac{0.6A}{1 + 2 \times 10^{15}/A^{16}}$
-------	--

В табл. 3 (с. 395, 3-я строка) следует читать

h_3	$\frac{900 A^{1/2}}{1 + 500/A^3}$
-------	-----------------------------------

¹⁾ Всероссийский Научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, Москва, Россия.

*E-mail: AAGalyuzov@vniia.ru

**E-mail: Kosov@vniia.ru