

УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА, УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И КВАНТОВЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ОПИСАНИИ СТОЛКНОВЕНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР

© 2024 г. А. Т. Дьяченко^{1),2),*}

Поступила в редакцию 04.03.2024 г.; после доработки 06.04.2024 г.; принята к публикации 27.04.2024 г.

В настоящей работе получены уравнения квантовой релятивистской гидродинамики из эффективного уравнения Клейна–Фока–Гордона с учетом диссипации. Учет диссипации в уравнении Клейна–Гордона приводит к необходимости введения дополнительного теплового члена и уравнения для него. В результате получена замкнутая система уравнений с учетом неравновесных процессов, позволяющая описывать динамику процесса столкновений атомных ядер и вычислять выходы вторичных частиц. Решение полученных уравнений позволяет выделить квантовые ударные волны и временную эволюцию образующегося hot spot. Вычисленные спектры испускаемых протонов в столкновениях тяжелых ионов сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0044002724050094, EDN: JEUYFJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения квантовой релятивистской гидродинамики можно получить из уравнения Клейна–Фока–Гордона [1–3] по аналогии с представлением Маделунга [4] для временного уравнения Шредингера. В работах [5, 6] были получены уравнения квантовой гидродинамики путем использования записи уравнения Клейна–Гордона с помощью уравнения Шредингера. В [5] это получено путем расщепления уравнения Клейна–Гордона для пар частиц–античастиц, а в [6] за счет формальной записи уравнения Клейна–Гордона как уравнения Шредингера. Получение уравнений гидродинамики было проведено нами в работе [7] в релятивистски инвариантной форме прямо из уравнения Клейна–Гордона. В квазиклассическом приближении получаются традиционные уравнение непрерывности и уравнение Эйлера.

Не останавливаясь подробно на работах [5, 6], о которых нам стало известно уже после выхода работы [7], укажем только, что в работе [5], на наш взгляд, в нерелятивистском пределе не получается уравнение Маделунга (уравнение (33) в работе [5]) из-за введения скалярного потенциала S в уравнение Клейна–Гордона. Он должен вводиться иначе. А в работе [6] получены уравнения нерелятивистской гидродинамики, где релятивистские и квантовые члены выделены отдельно. Это может быть удобно для выработки алгоритма решения уравнений, но трудно ожидать

простых уравнений, в частности, для релятивистских ударных волн (адиабата Тауба) [8–12].

Однако в уравнениях работ [5–7] отсутствует диссипация. Введение дополнительного теплового члена к потенциалу в уравнении Клейна–Гордона, необходимого для вычисления температуры, требует добавления дополнительных уравнений для определения теплового члена. В равновесном случае это закон сохранения энтропии, как в уравнениях гидродинамики [12, 13]. В неравновесном случае можно воспользоваться нашим подходом учета отклонения от состояния локального термодинамического равновесия путем введения анизотропного уравнения состояния с деформированной ферми-поверхностью [14] и последующим рассмотрением решения кинетического уравнения для функции распределения совместно с уравнениями гидродинамики [15–21]. Отметим, что диссипация для временного уравнения Шредингера вводилась ранее эмпирически в равновесном случае в работе [22].

В настоящей работе получена замкнутая система квантовых уравнений с учетом диссипации и неравновесных процессов. В работе проанализировано решение полученного таким образом эффективного уравнения Клейна–Гордона с учетом диссипации в одномерном и двумерном случаях путем выделения квантовых ударных волн и временной эволюции hot spot. В таком приближении вычислены двойные дифференциальные сечения испускания протонов в столкновениях ядер одинакового размера при энергиях 400 и 800 МэВ на нуклон. Проведенные расчеты находятся в согласии с имеющимися экспери-

¹⁾ НИЦ “Курчатовский институт” — ПИЯФ, Гатчина, Россия.

²⁾ Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург, Россия.

* E-mail: dyachenko_a@mail.ru

ментальными данными [23] и расчетами по двухжидкостной гидродинамической модели [24].

Заметим, что концепция образования ударных волн в столкновениях тяжелых ионов имеет долгую историю. Еще в первых работах по множественному рождению вторичных частиц в столкновениях протонов и ядер Л.Д. Ландау [9–11] обратил внимание на образование ударной волны как на единственную возможность реализации первой стадии процесса центрального столкновения частиц при высоких энергиях. В работах [10, 11] прямо указано, что было бы неправильно рассматривать столкновение нуклонов с ядрами и ядер с ядрами как ряд соударений ядерных протонов и нейтронов. Нуклон будет взаимодействовать не со всем ядром, а лишь с частью ядра, т.е. им будет вырезаться из ядра “трубка”. А затем идет стадия изоэнтропического гидродинамического расширения ядерной среды, которую тогда удалось рассмотреть аналитически в одномерном [9–11] и трехмерном случаях [25, 26]. В работе [27] этот подход в одномерном случае был рассмотрен для столкновения ядер промежуточных энергий введением классического ядерного уравнения состояния. В работе [28] были обнаружены ударные волны в численных одномерных расчетах по времени-зависящему методу Хартри–Фока (TDHF) с взаимодействием Скирма. В нашей работе [29] в гидродинамическом подходе получено близкое согласие с расчетами по методу TDHF, а в работах [30, 31] получено приближенное аналитическое решение гидродинамической эволюции образующегося hot spot при переходе от одномерной стадии ударно-волнового сжатия к сферически-симметричной стадии расширения. В 1970-х гг. была предложена модель ударной волны с изменяющимся фронтом для описания симметричных столкновений тяжелых ионов промежуточных энергий [32]. Она теоретически была доработана и для ассиметричных столкновений ядер с предсказанием образования “конуса Маха” и получила экспериментальное подтверждение еще в те [33, 34] и в последующие [35, 36] годы.

В последующие годы с развитием вычислительной и ускорительной техники интерес к ударным волнам вновь возродился. Образование ударных волн для ассиметричных систем было обнаружено в теоретических работах [37, 38] в столкновениях тяжелых ионов промежуточных и высоких энергий и экспериментально было подтверждено на коллайдере RHIC (США) (см., например, [39–42]). В работах [37, 38] отмечается, что ударные волны являются решением уравнений для среды, рассматриваемой как жидкость. В [37] замечено, что этот эффект ослабевает в случае использования кода UrQMD, в котором преобладают каскадные бинарные соударения нуклонов. В работе [43] были исследованы ударные волны для ультрарелятивистской гидродинамики партонов в случае ассиметричных систем, а в работе [44] для анизотропной гидродинамики в случае симметричных систем.

К настоящему времени техника расчетов достигла весьма высокого уровня и имеется очень большое число релятивистских гидродинамических моделей (см., например, [24, 45, 46]), посвященных одножидкостной [45], двухжидкостной [24] и трехжидкостной [46] гидродинамике, а также разработаны гибридные модели, монте-карловские коды [47, 48], включающие гидродинамику как промежуточную стадию. Выделение ударной волны в расчете представляет интерес, например, для более непосредственного анализа уравнения состояния, реализующегося в процессе столкновений тяжелых ионов.

В настоящей работе мы рассматриваем ударные волны только в ограниченном смысле для приближенного описания временной эволюции образующегося “файерболла” — hot spot. У нас нет “конуса Маха” и эффекта “бокового выдавливания”. В наших работах [14–20] для описания столкновений тяжелых ионов при образовании hot spot предложено выделять стадию сжатия, стадию расширения и стадию разлета с использованием неравновесного уравнения состояния. При этом стадия сжатия областей перекрытия рассматривается с помощью ударной волны с изменяющимся фронтом [14]. Неравновесный характер процесса столкновения учитывается в релаксационном приближении для нахождения решения кинетического уравнения [18]. В таком подходе [15–17], например, удалось в широком диапазоне энергий превзойти результаты расчетов по стандартным монте-карловским транспортным кодам [49–52], встроенным в пакет GEANT4, при описании эмиссии высокоэнергичных частиц, включая кумулятивную область спектра вторичных частиц [53, 54].

Далее в разд. 2 устанавливается связь эффективно-го уравнения Клейна–Гордона с учетом диссипации с уравнениями квантовой релятивистской гидродинамики, затем в разд. 3 анализируются решения полученных уравнений в одномерном и двумерном случаях с образованием ударных волн, в разд. 4 проведено сравнение с экспериментальными данными и в Заключение (разд. 5) приведены основные выводы работы.

2. СВЯЗЬ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ЭФФЕКТИВНЫМ УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА–ФОКА–ГОРДОНА

Уравнения квантовой релятивистской гидродинамики могут быть связаны с уравнением Клейна–Фока–Гордона. Для представления энергии E через импульс p и потенциальную энергию U частицы массы m имеем

$$(E - (U/mc^2)E)^2 = (p - (U/mc^2)p)^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1)$$

поскольку согласно известной формуле $\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\mathbf{p}$ — ее импульс, E — энергия. Здесь в (1) для формулы $E_0^2 = p_0^2 c^2 + m^2 c^4$ из энер-

гии $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ свободной частицы мы вычитаем потенциальную энергию U :

$$E_0 = \frac{mc^2 - U}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = E - U/(mc^2)E$$

с учетом движения со скоростью v и аналогично отсчитываем импульс $\mathbf{p}$ от импульса поля U . Выражение (1) для небольших U по сравнению с mc^2 переходит в выражение $E^2 = p^2c^2 + 2mUc^2 + m^2c^4$, использованное нами в предыдущей работе [7].

Соответствующее (1) уравнение Клейна–Гордона при переходе к операторам имеет вид

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^l \partial x_l} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \frac{1}{(1 - U/mc^2)^2} \Psi, \quad (2)$$

где $\Psi = \Phi \exp\left(\frac{iQ}{\hbar}\right)$ — волновая функция с амплитудой Φ и фазой Q , одинаковой для всех частиц как в приближении Томаса–Ферми, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света. Здесь фаза $Q = (Et - \mathbf{p}\mathbf{r})$, x_0 и x_l — временная и пространственная координаты с предполагаемым суммированием по повторяющимся значкам. Уравнение (2) — это эффективное одночастичное уравнение Клейна–Гордона для приближения Томаса–Ферми с эффективным потенциалом U . Эффективный потенциал U , который для простоты можно выбрать в виде $U = 2K(\rho - \rho_0)$, K — модуль сжатия, включает в себя среднее поле и томасфермиевскую кинетическую энергию. Потенциал U выбран, как в работе [13] для жидкой капли и как было использовано в нашей работе [7]. Можно использовать для среднего поля традиционные потенциалы типа взаимодействия Скимра [15–21, 24]. Это не очень принципиально и будет использовано ниже.

Для описания процессов взаимодействия частиц в уравнение (2) будет необходимо ввести дополнительно диссипативный тепловой член J , который проявится в уравнениях диссипативной гидродинамики. Это означает переход от рассмотрения “чистых состояний” к рассмотрению “смешанных состояний”. Соответствующее уравнение Клейна–Гордона имеет в этом случае вид

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^l \partial x_l} = \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \frac{1}{(1 - U/mc^2)^2} + \frac{2m}{\hbar^2} J \right) \Psi. \quad (3)$$

Для теплового члена J должно быть получено дополнительное уравнение. Далее, следуя работе [7], используем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^k \partial x_k} = \Psi \left[\frac{\partial^2 \ln \Psi}{\partial x^k \partial x_k} + \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x^k} \frac{\partial \ln \Psi}{\partial x_k} \right]. \quad (4)$$

где $k = 0, 1, 2, 3$, и после подстановки (4) в (3) и последующего дифференцирования (3) с оператором

$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ имеем аналогично [7]

$$-\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^l \partial x_l} \right) + c \left(w^0 \frac{\partial w_k}{\partial x^0} + w^l \frac{\partial w_k}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial(U_f + J)}{mc \partial x^k}. \quad (5)$$

Здесь $U_f = mc^2/(1 - U/mc^2)^2/2 - mc^2/2$, где $U_f \rightarrow U$ при $U \ll mc^2$, и обозначено дифференцирование Ψ в терминах локальной плотности $\rho = \Phi^2$ и фазы Q :

$$w_k c = -\frac{i\hbar}{m} \nabla_k \ln \Psi = -\frac{i\hbar}{m} \left(\frac{\partial \ln \rho^{1/2}}{\partial x_k} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial Q}{\partial x_k} \right). \quad (6)$$

Заметим, что потенциал U_f , входящий в правую часть уравнения (5), в наше уравнение Клейна–Гордона (3) и в выражение для связи энергии–импульса частицы массы m (1), свободен от противоречия со скалярным потенциалом S , введенным в работе [5]. Там для малых масс при $m \rightarrow 0$ левая часть уравнения стремится к нулю, а правая часть нулю не равна. В нашем уравнении (1) для энергии–импульса такого противоречия не возникает. Потенциал U_f , энергия и импульс стремятся к нулю при $m \rightarrow 0$. В работе [6] потенциал в уравнении Клейна–Гордона не конкретизируется в начале работы, а потом указывается на необходимость условия $\frac{dU_f}{d\rho} > 0$ для гиперболичности уравнений и предлагается политропное уравнение состояния с $U_f = k\rho^n$. Для нашего потенциала U_f с U , выбранным в форме капельного потенциала [13], это условие выполняется при модуле сжатия $K > 0$ всегда.

Обозначим далее

$$u_k c = \nabla_k Q/m. \quad (7)$$

Здесь u_k — четырехмерная скорость, которая для $l = 1, 2, 3$ равна $u^l = v_l/c/\sqrt{1-(v/c)^2}$, $u_l = -u^l$, а $u_0 = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, где v — обычная трехмерная скорость. Разделяя действительную и мнимую части уравнения (5), получаем для действительной части

$$\frac{\hbar^2}{2m} \rho \nabla_k \left(\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} \partial x^0 \partial x_0} + \frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} \partial x^l \partial x_l} \right) - c^2 \left(\frac{\partial(m\rho u_0 u_k)}{\partial x_0} + \frac{\partial(m\rho u_l u_k)}{\partial x_l} \right) = -\rho \frac{\partial(U_f + J)}{\partial x_k}. \quad (8)$$

Здесь мы использовали уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_l} = 0 \quad (9)$$

следующее из мнимой части для уравнения Клейна–Гордона (3) с учетом (4) и (7).

Члены, содержащие производные от $\ln \rho^{1/2}$ в (5), (6), собираются в (8) в потенциал Маделунга после взаимных сокращений произведений

производных от $\rho^{1/2}$. Таким образом, мы получили для пространственных компонент $k = 1, 2, 3$ ($u_k = -v_k/c/\sqrt{1-(v/c)^2}$) релятивистский аналог уравнения Эйлера, которое содержит квантовый потенциал Маделунга

$$\frac{\partial(m\rho v_k(1-(v/c)^2))}{\partial t} + \frac{\partial(m\rho v_k v_l/(1-(v/c)^2))}{\partial x_l} = -\rho \frac{\partial(U_f + J)}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} c^2 \partial t^2} - \frac{\Delta \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right). \quad (10)$$

Уравнение для временной компоненты четырехмерной скорости является следствием этих уравнений. При малых скоростях $v \ll c$, а также при $U \ll mc^2$ и $J = 0$ уравнение (10) переходит в нерелятивистское уравнение Маделунга [4] с квантовым потенциалом $\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho}$, где Δ — оператор Лапласа. В работе [5] при предельном переходе к уравнению Маделунга не получится потенциал Маделунга из-за неправильно введенного скалярного потенциала S (уравнение (33) работы [5]).

Здесь, в отличие от работы [7], мы ввели дополнительно тепловой член $J = \kappa \frac{I}{\rho}$, где I — плотность тепловой энергии, κ — показатель адиабаты. Для него нужно выписать дополнительное уравнение, чтобы получить замкнутую систему уравнений. Для адиабатического движения можно написать уравнение постоянства энтропии [12]

$$u^k \frac{\partial(\sigma/\rho)}{\partial x^k} = 0, \quad (11)$$

где σ — удельная энтропия. Отсюда приходим [12] с использованием известного из термодинамики соотношения $d\left(\frac{e+P}{\rho}\right) = T d\frac{\sigma}{\rho} + \frac{1}{\rho} dP$ и уравнения непрерывности κ

$$\frac{\partial(e+P)u^k}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial P}{\partial x^k} = 0, \quad (12)$$

где $e = I$ — плотность тепловой энергии, $P = 2I$ — продольная компонента давления в неравновесном случае и $P = \frac{2}{3}I$ — давление в случае локального равновесия [13, 14], T — температура. Уравнение (12) можно переписать как

$$\frac{\partial I}{\partial t} + v_l \frac{\partial I}{\partial x_l} + \kappa I \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (13)$$

которое с учетом уравнения непрерывности ($k = 0, 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_l \frac{\partial \rho}{\partial x_l} + \rho \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (14)$$

приводит к соотношению $I = I_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^\kappa$, где κ — показатель адиабаты, равный 3 в неравновесном случае

и $\frac{5}{3}$ в равновесном случае, I_1 — не зависящий от ρ коэффициент, находящийся из совместного решения трех уравнений гидродинамики и позволяющий найти температуру ударной волны, ρ_1 — максимальная плотность нуклонов на ударной волне.

Таким образом, дополнительно к уравнению Клейна–Гордона (3) с диссипативным членом, или уравнениям гидродинамики (уравнению непрерывности (9) и уравнению Эйлера (10)) должно быть добавлено уравнение (13) для теплового члена, чтобы система уравнений была замкнутой. Неоднозначность в выборе показателя адиабаты в нашем подходе [15–20] снимается тем, что мы предложили совместно с уравнениями гидродинамики решать кинетическое уравнение для релаксационного фактора q . При этом в процессе релаксации сохраняется плотность ρ и плотность полной энергии. Это уравнение для функции распределения f и, тем самым, для фактора q имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{f_0 - f}{\tau}, \quad (15)$$

где f_0 — локально равновесная функция распределения, τ — время релаксации. Решение уравнения (15) ищется для функции распределения в виде $f = f_1 q + f_0(1 - q)$, где f_1 — неравновесная функция распределения, отвечающая равновесию только в продольном направлении для процесса столкновения [14, 29]. В крайних пределах: при $q = 0$ мы имеем полностью равновесный случай, при $q = 1$ имеем предельный полностью неравновесный случай. Для показателя адиабаты κ в уравнениях (3) и (13) надо подставить $\kappa = 3q + \frac{5}{3}(1 - q)$. Он может быть найден для ударной волны при фиксированной плотности ρ_1 и сохраняться на стадии расширения. В общем случае можно не фиксировать q , а решать систему уравнений (3), (13), (15) для нахождения полей ρ , v , I и q . Это уже использовалось нами в нерелятивистской анизотропной гидродинамике [18].

Заметим, что введение диссипативных членов не для уравнения Клейна–Гордона, а для уравнения Шредингера рассматривалось ранее в работе [22] по-другому (эмпирически), не вводя плотность тепловой энергии. Добавление еще одного уравнения возникает естественно для уравнений гидродинамики [12], за счет закона сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E v_l}{\partial x_l} = -\nabla^l (v_l P), \quad (16)$$

где $E = \frac{\rho m c^2 + e + P}{1 - (v/c)^2} - P$. Это уравнение (16) можно получить из уравнений (9) и (10) после простых преобразований, умножив уравнение Эйлера на 4-скорость с учетом уравнения (13) для теплового члена, входящего в плотность энергии и давление. Здесь уже плотность внутренней энергии $e = e_{\text{kin}} + e_{\text{int}}$, где e_{kin} включает квантовые члены и плотность тепловой энергии I , плотность энергии взаимодействия

$e_{\text{int}} = \int_0^p U_f dp$. При этом давление $P = -\frac{d(e/\rho)}{d(1/\rho)}$. Уравнение (16) имеет дивергентный вид, обеспечивающий сохранение полной энергии, включая диссипацию. Это позволяет из трех уравнений гидродинамики получить, например, уравнение ударной адиабаты (одномерная адиабата Тауба) [8]. Этого не получить из уравнений в работах [5, 6] и из нашей предыдущей работы [7], поскольку в них отсутствует тепловой член, входящий в давление и в плотность тепловой энергии.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА ДЛЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Таким образом, можно вместо уравнений квантовой релятивистской гидродинамики решать уравнение Клейна–Гордона с диссипацией согласно уравнениям (3), (13), (15). Рассмотрим вначале одномерный случай, когда действительную часть уравнения (3) можно привести к виду волнового уравнения с нелинейностью в правой части

$$\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\partial x^2} = - \left(1 + 2J/mc^2 + \frac{1}{(1 - U/mc^2)^2} \right) \frac{(mc)^2}{\hbar^2} \rho^{1/2}. \quad (17)$$

Рассматривая решение в виде ударной волны, распространяющейся со скоростью D , после замены $\frac{\partial}{\partial t} = -D \frac{\partial}{\partial x}$ уравнение становится обыкновенным, и мы получаем для $U = 2K(\rho - \rho_0)$ первый интеграл

$$\left(\frac{d\rho^{1/2}}{dx} \right)^2 = \frac{1}{1 - (D/c)^2} \left(\rho - \rho_1 + I_1/mc^2 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^k - 1 \right) + \left(\frac{1}{1 - U/mc^2} - \frac{1}{1 - U_1/mc^2} \right) \frac{mc^2}{2K} \right) \frac{(mc)^2}{\hbar^2}, \quad (18)$$

где ρ_1 — плотность, соответствующая максимуму на ударной волне, $U_1 = 2K(\rho_1 - \rho_0)$, $K \times 18\rho_0$ — модуль сжатия полагаем равным 200 МэВ, нормальная плотность $\rho_0 = 0.15 \text{ Фм}^{-3}$, I_1 — плотность тепловой энергии ударной волны. Максимальную плотность сжатия ρ_1 и тепловой член I_1 находим, зная скорость ударной волны $D = -\frac{\rho_0 v_0}{\rho_1 \sqrt{1 - (v_0/c)^2} - \rho_0}$, из равенства потоков плотности импульса и потоков плотности энергии до и после разрыва (адиабата Тауба). Показатель адиабаты k , связанный с релаксационным фактором q , находится в результате совместного решения уравнений непрерывности потоков плотности энергии-импульса и уравнения (15), спроектированного на направление $p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2$, где $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$ — продольная и поперечная компоненты импульса нуклонов соответственно. Это сделано здесь для релятивистских уравнений также, как для нерелятивистского случая анизотропного уравнения состояния с неравновесной ударной волной в работе [18]. Соответствующие уравнения для нахождения ρ_1 , I_1 и q после преобразования

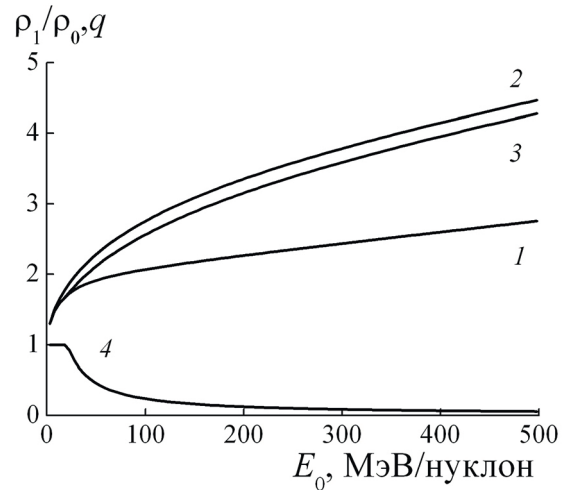


Рис. 1. Зависимости от энергии столкновения в системе центра масс E_0 максимальной степени сжатия ρ_1/ρ_0 для полностью неравновесного случая с $q = 1$ (кривая 1), равновесного случая с $q = 0$ (кривая 2) и случая с найденным из расчета промежуточным значением q (кривая 3), кривая 4 соответствует изменению с энергией столкновения найденного нами релаксационного фактора q .

и замены U_f на U ($U \ll mc^2$) имеют вид

$$K(\rho_1^2 - \rho_0^2) + (\kappa - 1)I_1 = \frac{m\rho_1\rho_0 v_0^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2} \left(\rho_1 \sqrt{1 - (v_0/c)^2} - \rho_0 \right)}, \quad (19)$$

$$m\rho_1 c^2 + K(\rho_1 - \rho_0)^2 + I_1 = \frac{m\rho_1 c^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad (20)$$

$$I_1 q = \frac{2}{3} E_F \frac{\left(\rho_1 \sqrt{1 - (v_0/c)^2} - \rho_0 \right)}{1 - (v_0/c)^2}, \quad (21)$$

где $\kappa = 3q + \frac{5}{3}(1 - q)$, E_F — энергия Ферми для нуклонов.

На рис. 1 представлены зависимости от энергии столкновения в системе центра масс E_0 максимальной степени сжатия ρ_1/ρ_0 для трех случаев: полностью неравновесный случай с $q = 1$ (кривая 1), равновесный случай с $q = 0$ (кривая 2) и случай с найденным из расчета промежуточным значением q (кривая 3). Кривая 4 соответствует изменению с энергией столкновения найденного нами релаксационного фактора q .

Выделяя далее главные члены в правой части уравнения (18), избегая громоздких выкладок, найдем изменение плотности на фронте ударной волны (кинк)

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{mc}{\hbar \sqrt{1 - (D/c)^2}} (x - x_0) \right) \right), \quad (22)$$

соответствующее ширине фронта $\frac{\hbar}{mc} \sqrt{1 - (D/c)^2} \sim \Phi_m$. Решение (22) можно аппроксимировать солитонным выражением

$$\rho' = \rho_0 + 4 \frac{\rho_1 - \rho_0}{(\exp(\alpha x) + \exp(-\alpha x))^2}, \quad (23)$$

где $\alpha = \frac{mc}{\hbar \sqrt{1 - (D/c)^2}}$, и найти интеграл $\rho = \frac{1}{L} \int_{l_1}^{l_2} \rho' dx_1$ (L — длина слоя, $L = l_2 - l_1$, $x \rightarrow x - x_1 \pm Dt$) от выражения (23) для распространяющейся ударной волны вправо и влево. Здесь нам нужно иметь сохраняющееся солитоноподобное решение, допускающее для максимума плотности в волновом уравнении решение Даламбера, как мы делали ранее в предыдущих работах [7, 21].

Нами проведен учет возможного отклонения такого решения от решения уравнения (17). С этой целью рассмотрено решение линеаризованного уравнения (17), которое получается, если в правой части уравнения в качестве коэффициента перед $\rho^{1/2}$ подставлять для ρ наше решение для ударной волны. Используя формулу Пуассона для такого обобщенного волнового уравнения, можно, проведя итерации, найти решение и сравнить его с исходным “затравочным” ударно-волновым решением. При этом для перемещения координат частиц — движения сетки — использовалось уравнение для фазы уравнения Клейна–Гордона для мнимой части уравнения (3). Фаза Q определяет положение координаты частиц и движение границ. Однако полученное таким образом численное решение полностью совпало с нашим аналитическим решением.

На рис. 2 приведены мгновенные профили плотности столкновения одинаковых ядерных слоев-слэбов при энергии 100 МэВ/нуклон в системе центра масс в различные моменты времени. Можно видеть первоначальное сжатие с образованием hot spot и последующее разрежение в центре. Различия между аналитическим решением и численным решением невозможно заметить. Они практически совпадают.

В двумерном случае можно воспользоваться приближениями работ [7, 14], проинтегрировав дивергентные уравнения по поперечной координате y для центрального столкновения ядер. В таком приближении в уравнениях (9), (10) заменяем $\frac{\partial}{\partial x^m} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^m} S$, где $m = 0, 1$ с площадью поперечного сечения S , зависящего только от координаты x , и задача становится одномерной при задании $S(x, t)$. В случае свободного движения S — просто площадь поперечного сечения данной невозмущенной области ядра. В случае возмущенной области из уравнения непрерывности (9) для ударной волны со скоростью D получаем после замены $\frac{\partial}{\partial t} = -D \frac{\partial}{\partial x}$ и интегрирования по скачку плотности

$$-D(\rho \sqrt{1 - (v_0/c)^2} S - \rho_0 S_0) + (0 - \rho_0 v_0 S_0) = 0, \quad (24)$$

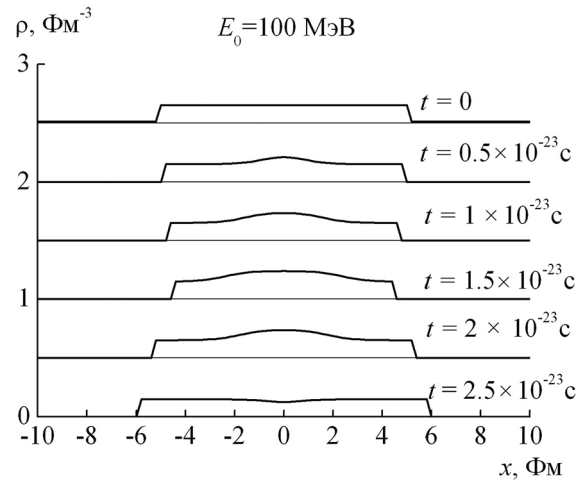


Рис. 2. Профили столкновения ядерных слоев-слэбов при энергии $E_0 = 100$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5$ в единицах времени 10^{-23} с.

где $S_0 = \Omega_0 R_0^2$, $S = \Omega R^2$, телесные углы $\Omega = 2\pi$, $\Omega_0 = \pi$. Здесь для сферической ударной волны, исходящей в полусферу, $\Omega = 2\pi$, а для набегающего с одной стороны со скоростью v_0 потока вещества $\Omega_0 = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi$. Кроме того, из сохранения количества вещества радиусы полусфер относятся как $R/R_0 = (\rho_0/\rho\lambda)^{1/3}$ с $\lambda = 2\sqrt{1 - (v_0/c)^2}$. Отсюда для скорости сферической ударной волны получаем

$$D = -\frac{v_0}{2(\rho/\rho_0/\lambda^2)^{1/3} \sqrt{1 - (v_0/c)^2} - 1}. \quad (25)$$

Исходя из этого, также как в одномерном случае, записывая равенство потоков плотности энергии-импульса и уравнения для релаксационного фактора q аналогично нерелятивистскому случаю в работе [18], находим максимальную степень сжатия ρ_1 , плотность тепловой энергии I_1 и фактор q . В результате получаются аналогичные рис. 1 соответствующие зависимости этих параметров от энергии.

Так, с помощью ударных волн можно проследить динамику столкновения ядер и в двумерном случае. Такое рассмотрение улучшает подход, проведенный в работе [7] и в работе [14], для ударной волны с изменяющимся фронтом. Поле скоростей можно определить из уравнения непрерывности, зная распределение плотности. Для нахождения поля температур T и химического потенциала μ используем выражения

$$\rho = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\exp \left[\left(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \mu \right) / T \right] + 1}, \quad (26)$$

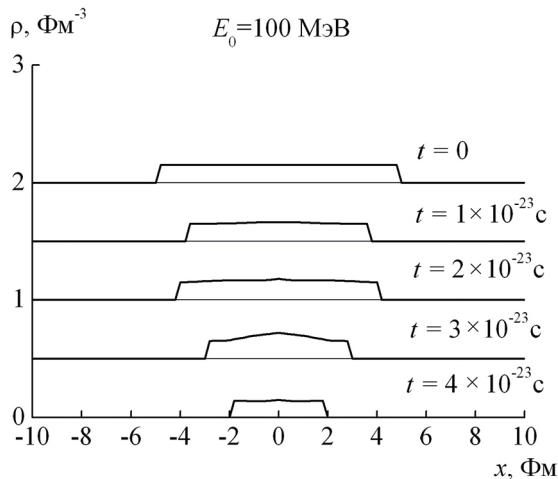


Рис. 3. Профили столкновения одинаковых ядер (сплошные кривые) при энергии $E_0 = 100$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 0; 1; 2; 3; 4$ в единицах времени 10^{-23} с для двумерного случая.

$$m\rho c^2 + e_{\text{kin}} = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}p^2 dp}{\exp\left[\left(\frac{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - \mu}{T}\right) + 1\right]}, \quad (27)$$

где плотность e_{kin} включает томас-фермиевские члены кинетической энергии и тепловой член I . Для неравновесной компоненты со своими температурой T_1 и химическим потенциалом μ_1 можно получить аналогичные выражения с измененной плотностью кинетической энергии e_{kin}^1 при “замороженных” поперечных степенях свободы [18].

В качестве иллюстрации полученного решения в двумерном случае на рис. 3 приведены профили плотности по оси x в различные моменты времени для центрального столкновения одинаковых ядер среднего размера при энергии 100 МэВ на нуклон в системе центра масс. Можно видеть различие динамики в двумерном случае на этом рисунке и в одномерном случае на рис. 2. На рис. 4 приведены в различные моменты времени по оси y границы сталкивающихся ядер для того же случая, что и на рис. 3. Изменение плотности по поперечной координате y также может быть учтено [7]. В результате такого рассмотрения можно видеть первоначальное сжатие и последующее разрежение в центре, т.е. образование источника вторичных частиц-нуклонов. Мы сопоставили эти результаты с экспериментальными данными.

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

При сравнении с экспериментальными данными для столкновения реальных ядер ограничимся здесь столкновением одинаковых ядер, когда взаимодей-

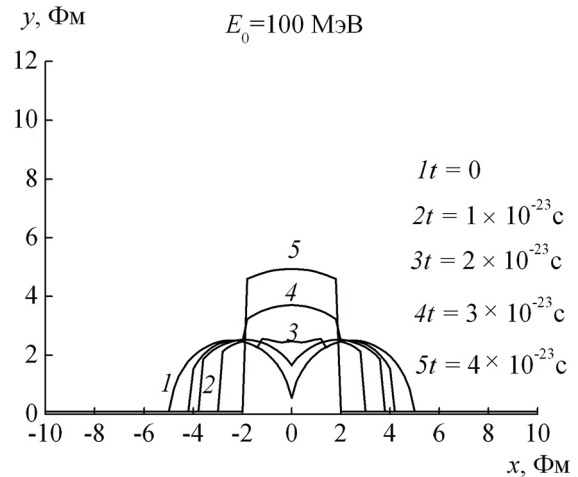


Рис. 4. Профили максимального поперечного размера ядер при энергии $E_0 = 100$ МэВ на нуклон в различные моменты времени при $t = 0; 1; 2; 3; 4$ в единицах времени 10^{-23} с.

ствие областей перекрытия при отличном от нуля параметре удара можно аппроксимировать столкновением двух одинаковых ядер, рассмотренного в предыдущем разделе. Взаимодействующие области перекрытия и представляют наш hot spot таким, как мы делали раньше в работах [15–20]. В результате рассмотрения такого аналитического решения задачи центрального столкновения двух одинаковых ядер можно выделить первоначальное сжатие и затем последующее разрежение в центре взаимодействующей системы по достижении плотности замораживания. Эту область на стадии разрежения можно аппроксимировать шаром радиуса R_h , вдвое меньшего размера системы областей перекрытия. Это можно сделать из анализа полученного решения для упрощения задачи. Из этой области происходит испускание нуклонов, поскольку среднее поле их уже не держит. Начинается процесс замораживания распределений нуклонов со своими температурой и полем скоростей, и, следовательно, можно вычислить дифференциальное сечение испускания протонов, как в работах [15–20], алгоритм которых был нами здесь использован. При этом взаимодействие hot spot со “спектаторами” мы опускаем.

Такой подход упрощает рассмотрение полной задачи взаимодействия ядер целиком, но он превосходит по смыслу подгонку параметров распределения вторичных частиц с помощью известного приближения blast wave (взрывные волны) [55], широко используемого при фитировании различных экспериментальных данных. В работе [56], например, анализируются ударные волны с помощью приближения blast wave. В нашем подходе все параметры распределений вторичных частиц находятся из расчета. При сопоставлении с экспериментальными данными заменим во всех расчетах потенциал U_f взаимодействием типа Скирма

$W = \alpha\rho + \beta\rho^2$ с учетом кинетических членов, как мы делали в наших работах [15–20], где параметры α , β , χ определяются заданием значений нормальной плотности, энергии связи и модуля сжатия и не являются подгоночными параметрами. Плотность замораживания определяется из условия $\frac{\partial W}{\partial \rho} = 0$, как в предыдущих работах.

Двойное дифференциальное сечение испускания протонов имеет вид [15–17]:

$$E \frac{d^2\sigma}{p^2 dp d\Omega} = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int G(b) b db d\mathbf{r} \gamma(E - \mathbf{p}\mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (28)$$

для функции распределения протонов в пренебрежении неравновесной компонентой

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = g \left[\exp \left(\frac{\gamma(E - \mathbf{p}\mathbf{v} - \mu) + T\delta}{T} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (29)$$

где $g = 2$, $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ — энергия испускаемых протонов, $\mathbf{p}$ — импульс, γ — Лоренц-фактор, T — температура и $\mu \rightarrow (m + \mu)$ — химический потенциал, найденные на стадии замораживания, b — параметр удара, $G(b) = \sigma_t/\sigma_g$ — фактор, учитывающий, что полное сечение областей перекрытия σ_t больше геометрического σ_g , δ — поправка на микроканоническое распределение.

В качестве иллюстрации на рис. 5 приведены двойные дифференциальные сечения испускания протонов под углами 30° , 60° и 140° для реакции $\text{Ne} + \text{NaF} \rightarrow p + X$ при энергии 400 МэВ на нуклон для налетающих ядер Ne. Можно видеть согласие с экспериментальными данными [23] и расчетами [24], проведенными по двухжидкостной гидродинамической модели. Средняя температура в наших расчетах $\langle T \rangle \approx 50$ МэВ, средний химический потенциал $\langle \mu \rangle \approx -36$ МэВ, средний радиус области излучения внутри hot spot $\langle R_h \rangle \approx 2.5$ Фм.

На рис. 6 приведены двойные дифференциальные сечения испускания протонов под углами 10° , 40° , 80° и 145° для реакции $\text{Ar} + \text{KCl} \rightarrow p + X$ при энергии 800 МэВ на нуклон для налетающих ядер Ar. Также как и для предыдущей реакции имеется согласие с экспериментальными данными [23] и расчетами [24]. Средняя температура в наших расчетах $\langle T \rangle \approx 67$ МэВ, средний химический потенциал $\langle \mu \rangle \approx -85$ МэВ, средний радиус области излучения внутри hot spot $\langle R_h \rangle \approx 3$ Фм.

Здесь температура и химический потенциал находились, как обычно, по найденному значению плотности тепловой энергии и плотности на стадии “замораживания”. Поле скоростей также определялось в этот момент времени. В работах [15–17] нами вводилась вязкость в релаксационном τ -приближении согласно кинетическому уравнению (15). Это важно для успешного описания выходов кумулятивных частиц [53, 54] и, вообще, высокоэнергетических вторичных

частиц [13, 20]. Но при сравнении с этими экспериментальными данными рассматриваемый энергетический спектр протонов оказался коротким, и влияние вязкости мало и не проявляется здесь. Поправка на микроканоническое распределение здесь также не существенна. Поскольку область испускания протонов имеет форму шара с радиусом R_h , то здесь у нас не возникнет особенностей в угловых распределениях (эффекта “выдавливания”, эффекта “отскока спектров”).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе были получены уравнения квантовой релятивистской гидродинамики из уравнения Клейна–Фока–Гордона с учетом диссипации и неравновесных процессов для описания столкновения атомных ядер. Неравновесный подход к гидродинамическим уравнениям позволяет описывать экспериментальные данные лучше, чем уравнение состояния, соответствующее традиционной гидродинамике, предполагающей установление локального термодинамического равновесия. При этом описании существенным было выделение горячего пятна hot spot. В настоящей работе показано, что введение квантовых членов не нарушает это представление и приводит к образованию квантовых ударных волн. Показана возможность распространения ударной волны с изменяющимся фронтом. Это рассмотрение позволило описать имеющиеся экспериментальные данные по спектрам протонов, испускаемым в столкновениях тяжелых ионов промежуточных энергий. Это может быть важно для дальнейшего развития нашего подхода [15–17, 57] и метода расчета кумулятивных процессов в столкновениях тяжелых ионов, рассмотренных в работах [53, 54, 58]. В работе [59] для описания кумулятивного эффекта производилось введение резонансного источника в дополнение к расчету по коду UrQMD, а здесь hot spot является следствием взаимодействия областей перекрытия ядер. Но здесь пока мы “не обнаружили” “конуса Маха” и эффекта “бокового выдавливания”. Реальная геометрия сложнее.

Поскольку при малых скоростях уравнение Клейна–Фока–Гордона переходит в нерелятивистское временное уравнение Шредингера, то учет диссипации для уравнения Шредингера можно провести аналогичным образом. В работах [60, 61] для ферми-газов были исследованы образующиеся нерелятивистские квантовые ударные волны для двух уравнений: уравнения непрерывности и уравнения Эйлера, но без учета диссипации и без введения температуры. Как уже отмечалось во Введении, одномерные бесстолкновительные ударные волны получались в численных расчетах по методу TDHF [28].

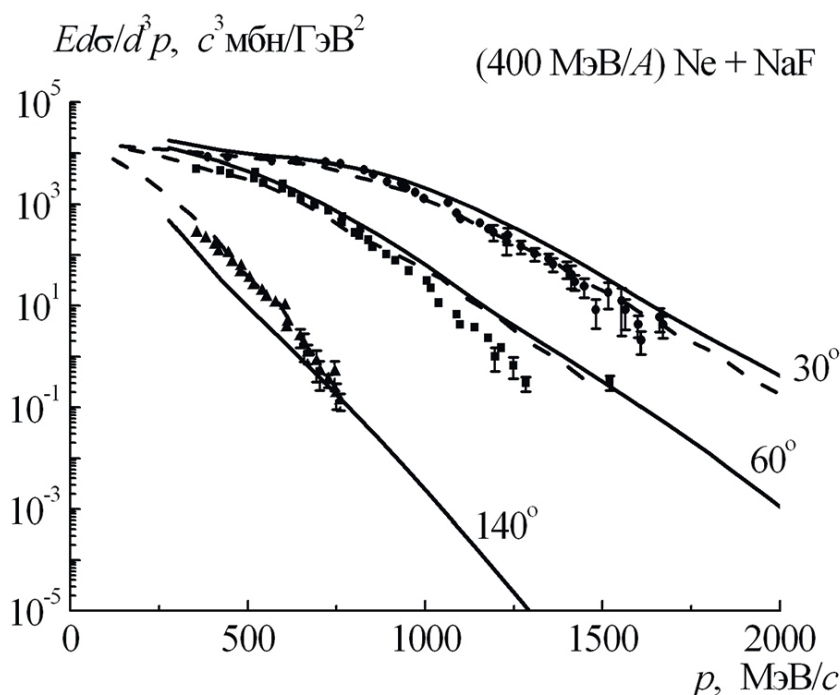


Рис. 5. Двойные дифференциальные сечения испускания протонов под углами 30° , 60° и 140° в реакции $\text{Ne} + \text{NaF} \rightarrow p + X$ при энергии 400 МэВ на нуклон для налетающих ядер Ne. Сплошные кривые — результаты нашего расчета по формулам (28), (29), штриховые кривые — результаты расчетов из работы [24], точки (кружки — 30° , квадраты — 60° , треугольники — 140°) — экспериментальные данные [23].

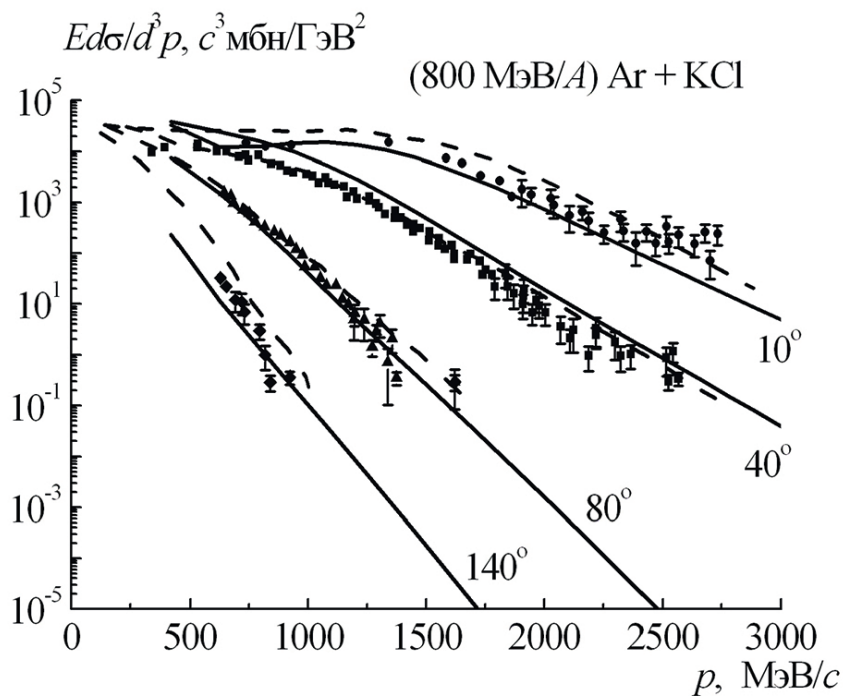


Рис. 6. Двойные дифференциальные сечения испускания протонов под углами 10° , 40° , 80° и 140° в реакции $\text{Ar} + \text{KCl} \rightarrow p + X$ при энергии 800 МэВ на нуклон для налетающих ядер Ar. Сплошные кривые — результаты нашего расчета по формулам (28), (29), штриховые кривые — результаты расчетов из работы [24], точки (кружки — 30° , квадраты — 40° , треугольники — 80° , ромбы — 140°) — экспериментальные данные [23].

Автор выражает благодарность М.Б. Жалову, И.А. Митропольскому и В.Д. Тонееву за полезные обсуждения отдельных частей работы, а также рецензенту за оказанное внимание, ряд критических замечаний, способствовавших, на наш взгляд, усилению значения данной работы, и указание на работы [5, 6], в которых из уравнения Клейна–Гордона получались уравнения квантовой релятивистской гидродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926).
2. V. Fock, *Z. Phys.* **38**, 242 (1926).
3. W. Gordon, *Z. Phys.* **40**, 117 (1926).
4. E. Madelung, *Z. Phys.* **40**, 332 (1926).
5. C.-Y. Wong, *J. Math. Phys.* **51**, 122304 (2010); arXiv: 1011.5510 [hep-ph].
6. C.-K. Lin and K.-C. Wu, *J. Math. Pures. Appl.* **98**, 328 (2012).
7. А. Т. Дьяченко, *ЯФ* **86**, 428 (2023) [*Phys. At. Nucl.* **86**, 289 (2023)].
8. A. H. Taub, *Phys. Rev.* **74**, 328 (1948).
9. L. D. Landau, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Fiz.* **17**, 51 (1953) [Collected papers of L. D. Landau, Ed. by D. Ter-Haar (Pergamon Press, Oxford, 1965), Paper no. 74].
10. С. З. Беленький, Л. Д. Ландау, *УФН* **56**, 309 (1955).
11. S. Z. Belenkiy and L. D. Landau, *Nuovo Cimento Suppl.* **3**, 15 (1956).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва, 1986 [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987)].
13. H. Stocker and W. Greiner, *Phys. Rept.* **137**, 277 (1986).
14. A. T. D'yachenko, K. A. Gridnev, and W. Greiner, *J. Phys. G* **40**, 085101 (2013).
15. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, *ЯФ* **83**, 317 (2020) [A. T. D'yachenko and I. A. Mitropolsky, *Phys. At. Nucl.* **83**, 558 (2020)].
16. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, *ЯФ* **86**, 285 (2023) [A. T. D'yachenko and I. A. Mitropolsky, *Phys. At. Nucl.* **85**, 1053 (2023)].
17. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, *ЭЧАЯ* **53**, 464 (2022) [A. T. D'yachenko and I. A. Mitropolsky, *Phys. Part. Nucl.* **53**, 505 (2022)].
18. А. Т. Дьяченко, К. А. Гриднев, И. А. Митропольский, *Изв. РАН. Сер. физ.* **79**, 952 (2015) [A. T. D'yachenko, K. A. Gridnev, and I. A. Mitropolsky, *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **79**, 858 (2015)].
19. А. Т. Дьяченко and I. A. Mitropolsky, *EPJ Web Conf.* **204**, 03018 (2019).
20. А. Т. Дьяченко and I. A. Mitropolsky, *Phys. At. Nucl.* **82**, 1641 (2019).
21. А. Т. Дьяченко, И. А. Митропольский, *Изв. РАН. Сер. физ.* **86**, 1162 (2022) [A. T. D'yachenko, and I. A. Mitropolsky, *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **86**, 962 (2022)].
22. J. Nemeth, M. Barranco, C. Ngo, and E. Tomasi, *Z. Phys. A* **323**, 419 (1986).
23. S. Nagamiya, M.-C. Lemaire, E. Moeller, S. Schnetzer, G. Shapiro, H. Steiner, and I. Tanihata, *Phys. Rev. C* **24**, 971 (1981).
24. И. Н. Мишустин, В. Н. Русских, Л. М. Сатаров, *ЯФ* **54**, 429 (1991) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **54**, 260 (1991)].
25. Г. А. Милехин, *ЖЭТФ* **35**, 1185 (1958) [*Sov. Phys. JETP* **35**, 829 (1959)].
26. Э. В. Шурык, *ЯФ* **16**, 395 (1972) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **16**, 220 (1972)].
27. М. Ю. Иванов, Ю. А. Кудеяров, К. П. Станюкович, Г. Д. Ширков, *ЯФ* **25**, 1293 (1977) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **25**, 685 (1977)].
28. P. Bonche, S. Koonin, and J. W. Negele, *Phys. Rev. C* **13**, 1226 (1976).
29. А. Т. Дьяченко, В. А. Рубченя, В. П. Эйсмонт, *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **45**, 764 (1981) [*Bull. Acad. Sci. USSR: Phys.* **45**, 81 (1981)].
30. А. Т. Дьяченко, *ЯФ* **57**, 2006 (1994) [*Phys. At. Nucl.* **57**, 1930 (1994)].
31. A. T. D'yachenko, *J. Phys. G* **26**, 861 (2000).
32. W. Scheid, H. Muller, and W. Greiner, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 741 (1974).
33. J. Hofmann, H. Stoecker, U. W. Heinz, W. Scheid, and W. Greiner, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 88 (1976).
34. H. G. Baumgardt, J. U. Schott, Y. Sakamoto, E. Schopper, H. Stoecker, J. Hofmann, W. Scheid, and W. Greiner, *Z. Phys. A* **273**, 359 (1975).
35. H. H. Gutbrod, A. M. Poskanzer, and H. G. Ritter, *Rept. Prog. Phys.* **52**, 1267 (1989).
36. H. H. Gutbrod, K. H. Kampert, B. Kolb, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter, R. Schicker, and H. R. Schmidt, *Phys. Rev. C* **42**, 640 (1990).
37. P. Rau, J. Steinheimer, B. Betz, H. Petersen, M. Bleicher, and H. Stoecker, arXiv: 1003.1232 [nucl-th].
38. I. Bouras, E. Molnar, H. Niemi, Z. Xu, A. El, O. Fochler, C. Greiner, and D. H. Rischke, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 032301 (2009).
39. J. Adams et al. (STAR Collab.), *Phys. Rev. Lett.* **95**, 152301 (2005).
40. S. S. Adler et al. (PHENIX Collab.), *Phys. Rev. Lett.* **97**, 052301 (2006).
41. J. G. Ulery et al. (STAR Collab.), *Nucl. Phys. A* **774**, 581 (2006).
42. A. Adare et al. (PHENIX Collab.), *Phys. Rev. C* **78**, 014901 (2008).
43. L. M. Satarov, H. Stoecker, and I. N. Mishustin, *Phys. Lett. B* **627**, 64 (2005).
44. A. Kovalenko and A. Leonidov, *Eur. Phys. J. C* **82**, 378 (2022).
45. A. V. Merdeev, L. M. Satarov, and I. N. Mishustin, *Phys. Rev. C* **84**, 014907 (2011).

46. Yu. B. Ivanov, V. N. Russkikh, and V. D. Toneev, *Phys. Rev. C* **73**, 044904 (2006).
47. H. Petersen, J. Steinheimer, G. Burau, M. Bleicher, and H. Stocker, *Phys. Rev. C* **78**, 044901 (2008).
48. A. S. Khvorostukhin, E. E. Kolomeitsev, and V. D. Toneev, *Eur. Phys. J. A* **57**, 294 (2021).
49. A. V. Dementev and N. M. Sobolevsky, *Nucl. Tracks Radiat. Meas.* **30**, 553 (1999).
50. S. G. Mashnik, K. K. Gudima, R. E. Prael, A. J. Sierk, M. I. Baznat, and N. V. Mokhov, LAUR-08-2931 (Los Alamos, 2008), arXiv: 0805.0751 [nucl-th].
51. S. G. Mashnik, J. S. Bull, H. G. Hughes, R. E. Prael, and A. J. Sierk, *Eur. Phys. J. Plus* **126**, 49 (2011).
52. T. Koi, D. H. Wright, G. Folger, V. Ivanchenko, M. Kossov, N. Starlov, A. Heikkinen, P. Truscott, F. Lei, and H. P. Wellisch, *AIP Conf. Proc.* **896**, 21 (2007).
53. Б. М. Абрамов, М. Базнат, Ю. А. Бородин, С. А. Булычев, И. А. Духовской, А. П. Крутенкова, В. В. Куликов, М. А. Мартемьянов, М. А. Мацук, Е. Н. Турдакина, *ЯФ* **84**, 331 (2021) [B. M. Abramov, M. Baznat, Yu. A. Borodin, S. A. Bulychjov, I. A. Dukhovskoy, A. P. Krutenkova, V. V. Kulikov, M. A. Martemianov, M. A. Matsyuk, and E. N. Turdakina, *Phys. At. Nucl.* **84**, 467 (2021)].
54. Б. М. Абрамов, П. Н. Алексеев, Ю. А. Бородин, С. А. Булычев, И. А. Духовской, А. П. Крутенкова, В. В. Куликов, М. А. Мартемьянов, М. А. Мацук, С. Г. Машник, Е. Н. Турдакина, А. И. Ханов, *ЯФ* **78**, 403 (2015) [B. M. Abramov, P. N. Alekseev, Yu. A. Borodin, S. A. Bulychjov, I. A. Dukhovskoy, A. P. Krutenkova, V. V. Kulikov, M. A. Martemianov, M. A. Matsyuk, S. G. Mashnik, E. N. Turdakina, and A. I. Khanov, *Phys. At. Nucl.* **78**, 373 (2015)].
55. P. J. Siemens and J. O. Rasmussen, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 880 (1979).
56. J. S. Diaz and S. E. Rigby, arXiv: 2110.09488v1 [physics.flu-dyn].
57. A. T. D'yachenko, *Phys. At. Nucl.* **87**, 125 (2024).
58. А. Г. Афонин, М. Ю. Боголюбский, А. А. Волков, Д. К. Елумахов, В. Н. Запольский, А. А. Иванюлов, А. Ю. Калинин, А. Н. Криницын, Н. В. Кулагин, В. И. Крышкин, Д. И. Паталаха, К. А. Романюшин, В. В. Скворцов, В. В. Талов, Л. К. Турчанович, Ю. А. Чесноков, *ЯФ* **83**, 140 (2020) [A. G. Afonin, M. Yu. Bogolyubsky, A. A. Volkov, D. K. Elumakhov, V. N. Zapolsky, A. A. Ivanilov, A. Yu. Kalinin, A. N. Krinitsyn, N. V. Kulagin, V. I. Kryshkin, D. I. Patalakha, K. A. Romanishin, V. V. Skvortsov, V. V. Talov, L. K. Turchanovich, and Yu. A. Chesnokov, *Phys. At. Nucl.* **83**, 228 (2020)].
59. O. Panova, A. Motornenko, M. I. Gorenstein, J. Steinheimer, and H. Stoecker, *Phys. Rev. C* **100**, 054617 (2019).
60. A. Bulgac, Y.-L. Luo, and K. J. Roche, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 150401 (2012).
61. L. Salasnich, *Eur. Phys. Lett.* **96**, 40007 (2011).

KLEIN–GORDON EQUATION, QUNTUM RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS AND QUANTUM SHOCK WAVES IN DESCRIBING COLLISIONS OF ATOMIC NUCLEI

A. T. D'yachenko^{1),2)}

¹⁾*NRC "Kurchatov Institute" — PNPI, Gatchina, Russia*

²⁾*Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russia*

In this work, the equations of quantum relativistic hydrodynamics are obtained from the effective Klein–Fock–Gordon equation taking into account dissipation. Taking into account dissipation in the Klein–Gordon equation leads to the need to introduce an additional thermal term and an equation for it. As a result, a closed system of equations was obtained taking into account non-equilibrium processes, which makes it possible to describe the dynamics of the process of collisions of atomic nuclei and calculate the yield of secondary particles. Solving the resulting equations makes it possible to identify quantum shock waves and the time evolution of the resulting hot spot. The calculated spectra of emitted protons in heavy ion collisions are compared with available experimental data.