

Памяти Учителя Адеева Геннадия Дмитриевича

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАДИАЛЬНОГО И ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ТРЕНИЯ: ВЫВОД ФОРМУЛ, РАСЧЕТ И ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА СТОЛКНОВЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ

© 2024 г. В. Л. Литневский^{1),*}, А. Л. Литневский^{2),3),**}, Г. И. Косенко^{4),***}

Поступила в редакцию 17.09.2023 г.; после доработки 09.11.2023 г.; принята к публикации 19.11.2023 г.

Рассмотрен метод расчета сил и моментов сил трения, возникающих между двумя сталкивающимися с ненулевым прицельным параметром ядрами. На данном этапе работы предполагалось, что взаимодействующие ядра остаются сферическими на протяжении всего процесса столкновения. Проведено моделирование процесса столкновения сферических атомных ядер с учетом их постепенного включения во вращение вокруг собственных осей. Показано, что от момента перехода системы через кулоновский барьер до остановки относительного вращения сталкивающихся ядер требуется время порядка 10^{-21} с. Предлагается считать остановку радиального движения и относительного вращения сталкивающихся ядер условиями захвата ядра-снаряда ядром-мишенью, т.е. в момент захвата система должна вести себя как жесткая вращающаяся гантелька. Сравнение результатов расчета сечений захвата с экспериментальными данными показывает хорошую предсказательную силу рассмотренной приближенной модели в случае сильно асимметричной реакции $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ (для всех энергий реакции) и в случае высоких энергий столкновения в более симметричных реакциях $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$.

DOI: 10.31857/S0044002724030151, EDN: IVXNQJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений исследований в ядерной физике является моделирование реакций слияния-деления тяжелых ионов. Современные модели позволяют с хорошей точностью объяснить или даже предсказать [1] результаты экспериментов по синтезу сверхтяжелых ядер.

Описание процесса слияния–деления разумно разделить на две стадии [2, 3]. На первой стадии процесса происходит сближение сталкивающихся ядер [4–8] и перекрытие плотностей распределения ядерного вещества. На второй стадии происходит эволюция системы, образовавшейся после захвата ядра-снаряда ядром-мишенью [1, 9, 10].

При описании столкновения атомных ядер очень важно корректно учесть их взаимодействие друг с другом. На большом, по сравнению с размерами ядер, расстоянии имеет место только кулоновское отталкивание. По мере сокращения дистанции между поверхностями атомных ядер начинает проявляться еще и ядерное взаимодействие. Кроме того, в момент, когда плотности распределения вещества сталкивающихся

ядер начнут перекрываться, в системе появляются силы радиального и тангенциального трения.

В работе [11] было показано, что для повышения точности динамических расчетов кроме радиального трения необходимо учитывать также и тангенциальное. Это приводит к необходимости выработки единого подхода к расчету коэффициентов радиального и тангенциального трения.

Таким образом, целью настоящей работы является расчет коэффициентов трения в рамках единого физически обоснованного подхода и их применение при проведении динамических расчетов процесса столкновения сферических атомных ядер.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ СТОЛКИВАЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

Вслед за работой [7], ограничимся описанием взаимодействия двух сферических ядер, т.е. в ходе столкновения атомные ядра не деформируются. Возможность заморозки деформационных степеней свободы сталкивающихся ядер обсуждалась в работе [12], где было показано, что для сильно асимметричных реак-

¹⁾ Омский государственный университет путей сообщения, Россия.

²⁾ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия.

³⁾ Национальный медицинский исследовательский центр им. В. А. Алмазова, Санкт-Петербург, Россия.

⁴⁾ Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулева, Омск, Россия.

* E-mail: vlad.lit@bk.ru

** E-mail: a_lit@list.ru

*** E-mail: kosenkophys@gmail.com

ций и при не слишком низких энергиях налетающих ядер данное приближение способно показать хорошее согласие с полноценными расчетами.

Плотность сферического ядра $\rho = \rho(r)$ (в дальнейшем, после подобных определений функций, если это не будет приводить к неправильной интерпретации формул, аргументы функций указываться не будут, т.е. обозначения ρ и $\rho(r)$ эквивалентны) убывает по мере увеличения расстояния r от его центра в соответствии с соотношением [7]:

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \exp \left(\frac{r - R_d}{a_d} \right) \right]^{-1}, \quad (1)$$

где параметр диффузности ядерной поверхности $a_d = 0.54$ Фм, расстояние от центра ядра, на котором плотность ядерного вещества уменьшается в 2 раза относительно плотности в центральной области ядра $R_d = \left(1.12A^{\frac{1}{3}} - 0.86^{-\frac{1}{3}} \right)$ (Фм), A — массовое число, а значение нормировочного множителя ρ_0 , вообще говоря, определяется из условия $\int_V \rho dV = A$. Однако, с хорошей точностью можно считать, что $\rho_0 = 0.17$ нуклон/Фм³.

Кулоновское взаимодействие $V_{\text{coul}} = V_{\text{coul}}(r_{\text{c.m.}})$ между сталкивающимися сферическими ядрами до тех пор, пока нет существенного перекрытия ядерных плотностей, можно описать простым соотношением

$$V_{\text{coul}}(r_{\text{c.m.}}) = k_e \frac{Z_t Z_p e^2}{r_{\text{c.m.}}}, \quad (2)$$

где $r_{\text{c.m.}}$ — расстояние между центрами масс ядер, Z_t и Z_p — зарядовые числа ядра-мишени и ядра-снаряда соответственно, e — заряд одного протона, k_e — электрическая постоянная. При существенном перекрытии плотностей ядерного вещества можно воспользоваться соотношением, приведенным в работе [13].

При расчете ядерного взаимодействия предполагается, что одно из ядер создает центральное поле $V_i(r)$, имеющее форму потенциала Вудса—Саксона

$$V_i(r) = V_0 \left[1 + \exp \left(\frac{r - R_i}{a_0} \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

где индекс i принимает значения t , если потенциал создается ядром-мишенью, или p , если речь идет о ядре-снаряде. Параметрами потенциала являются его глубина $V_0 = -65$ МэВ и диффузность $a_0 = 0.55$ Фм. Расстояние от центра масс ядра, на котором потенциал становится в 2 раза меньше, чем в центре ядра, определяется соотношением $R_i = r_0 A_i^{1/3}$, $r_0 = 1.25$ Фм.

Используя соотношения (1) и (3), можно получить энергию ядерного взаимодействия ядра-снаряда с полем ядра-мишени $V_{tp} = V_{tp}(r_{\text{c.m.}})$ и энергию взаимодействия ядра-мишени с полем ядра-снаряда $V_{pt} = V_{pt}(r_{\text{c.m.}})$:

$$V_{ij}(r_{\text{c.m.}}) = \int V_i(|\mathbf{r}_{\text{c.m.}} - \mathbf{r}'|) \rho_j(r') d\mathbf{r}' \quad (4)$$

Конечное выражение для расчета потенциальной энергии ядерного взаимодействия $V_{\text{nuc}} = V_{\text{nuc}}(r_{\text{c.m.}})$ получается усреднением значений величин V_{tp} и V_{pt} [7]:

$$V_{\text{nuc}} = \frac{1}{2}(V_{tp} + V_{pt}). \quad (5)$$

Потенциальная энергия системы $V_{\text{pot}} = V_{\text{pot}}(r_{\text{c.m.}})$ сталкивающихся ядер определяется суммированием энергий ядерного (5) и кулоновского (2) взаимодействий:

$$V_{\text{pot}} = V_{\text{coul}} + V_{\text{nuc}}. \quad (6)$$

На рис. 1а показана зависимость потенциальной энергии системы от расстояния между центрами масс взаимодействующих ядер в реакции $^{208}\text{Pb} + ^{40}\text{Ca}$. Данная зависимость имеет точку максимума, соответствующую кулоновскому барьеру в ядерной реакции. Степень перекрытия плотностей сталкивающихся атомных ядер на кулоновском барьере можно оценить с помощью рис. 1б, на котором показаны результаты расчетов плотностей ядерного вещества (1).

При численном моделировании процесса столкновения атомных ядер система с некоторой вероятностью может преодолеть кулоновский барьер. Далее, как говорится в работе [4], после остановки радиального сближения ядер происходит событие захвата. В настоящей работе предлагается добавить также условие прекращения относительного вращения сталкивающихся ядер (это условие будет обсуждаться ниже). Сечения событий захвата являются предметом экспериментальных исследований [14–16].

Следует заметить, что большую роль в описании динамики столкновения атомных ядер играют силы радиального и тангенциального трения. Они возникают в момент перекрытия плотностей рассматриваемых ядер, и могут оказать влияние как на вероятность перехода системы через кулоновский барьер, так и на скорость остановки относительного движения ядер.

3. РАДИАЛЬНОЕ ТРЕНИЕ

Сила трения $d\mathbf{F}_{tp} = d\mathbf{F}_{tp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t, \mathbf{r}_p, \dot{\mathbf{r}}_{\text{c.m.}}, \Omega_t, \Omega_p, \omega)$, действующая на бесконечно малый элемент объема (точку) одного из сталкивающихся ядер со стороны второго ядра, пропорциональна произведению плотностей ядерного вещества ($\rho_t(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_t|)$ и ($\rho_p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|)$) в данной точке (1) и скорости относительного движения ядерного вещества в данной точке $\mathbf{v}_{tp} = \mathbf{v}_{tp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_t, \mathbf{r}_p, \dot{\mathbf{r}}_{\text{c.m.}}, \Omega_t, \Omega_p, \omega)$ [17]:

$$d\mathbf{F}_{tp} = -k_0 \rho_t \rho_p \mathbf{v}_{tp} dV, \quad (7)$$

где $\mathbf{v}_{tp}$ в общем случае зависит от положений рассматриваемой точки $\mathbf{r}$, центра масс ядра-мишени $\mathbf{r}_t$ и центров масс ядра-снаряда $\mathbf{r}_p$, заданных в некоторой системе координат, от вектора скорости радиального сближения ядер $\dot{\mathbf{r}}_{\text{c.m.}}$, от скорости собственных вращений ядра-мишени Ω_t и ядра-снаряда Ω_p , а также

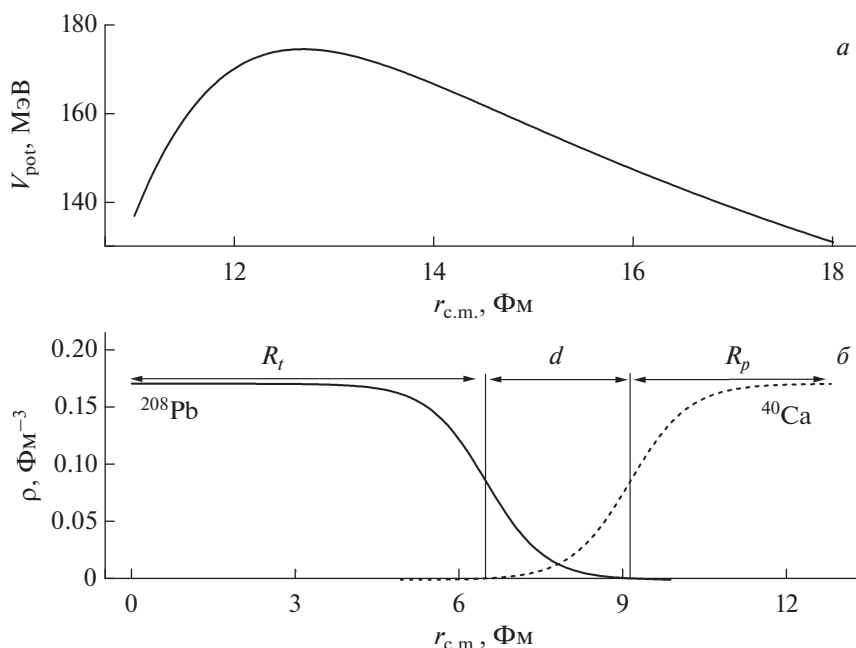


Рис. 1. *а* — Зависимость потенциальной энергии системы $^{208}\text{Pb} + ^{40}\text{Ca}$ от расстояния между центрами масс сталкивающихся ядер. *б* — Распределение плотностей ядерного вещества в момент перехода системы $^{208}\text{Pb} + ^{40}\text{Ca}$ через кулоновский барьер.

от скорости вращения системы в целом относительно оси вращения, проходящей через ее центр масс. Коэффициент пропорциональности k_0 — некоторая постоянная, значение которой должно быть одинаковым для любых рассматриваемых реакций. Ниже будет показано, что расчет с использованием значения $k_0 = 4.5 \times 10^{-23}$ МэВ ФМ с с хорошей точностью воспроизводит экспериментальные данные в сильно асимметричной реакции $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ и при высоких энергиях в реакциях $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$, $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$, т.е. в области применения рассматриваемой модели.

Следует заметить, что при рассмотрении поступательного (радиального) движения сталкивающихся сферических ядер интегрирование выражения (7) по области перекрытия ядерных плотностей приводит к пропорциональности силы радиального трения и скорости радиального движения $\dot{r}_{\text{c.m.}}$ сталкивающихся ядер:

$$F_{\text{rad}}(r_{\text{c.m.}}, \dot{r}_{\text{c.m.}}) = -\dot{r}_{\text{c.m.}} k_0 \int \rho_t(r') \rho_p(|\mathbf{r}_{\text{c.m.}} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' = -\dot{r}_{\text{c.m.}} k_r, \quad (8)$$

где величина $k_r = k_r(r_{\text{c.m.}})$ представляет собой коэффициент радиального трения:

$$k_r = k_0 \int \rho_t(r') \rho_p(|\mathbf{r}_{\text{c.m.}} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \quad (9)$$

В работе [7] предлагается использовать приближенное выражение для вычисления коэффициента радиального трения $k_r^{\text{GK}} = k_r^{\text{GK}}(r_{\text{c.m.}})$:

$$k_r^{\text{GK}} = k_{r0} \left(\frac{dV_{\text{nucl}}}{dr_{\text{c.m.}}} \right)^2, \quad (10)$$

где $k_{r0} = 4 \times 10^{-23}$ с/МэВ — коэффициент радиального трения (эмпирическая постоянная), V_{nucl} — потенциал ядерного взаимодействия (6), который в конечном итоге зависит от величины области перекрытия плотностей вещества сталкивающихся ядер.

Сравнение значений коэффициентов трения k_r и k_r^{GK} для различных расстояний между центрами масс сталкивающихся ядер для реакции $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ приведено на рис. 2.

4. ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ ТРЕНИЕ

В общем случае все точки сталкивающихся ядер участвуют не только в радиальном поступательном, но и во вращательном движении. Поэтому кроме силы радиального трения (8) нужно учитывать еще и вращательный момент $\mathbf{M}_{tp} = \mathbf{M}_{tp}(r_{\text{c.m.}}, r_{\text{c.m.}}^t, r_{\text{c.m.}}^p, \dot{r}_{\text{c.m.}}, \Omega_t, \Omega_p, \omega)$ создаваемый силами трения, действующими между отдельными элементами объема вращающихся ядер:

$$\mathbf{M}_{tp} = k_0 \int \rho_t \rho_p \mathbf{r} \times \mathbf{v}_{tp} d\mathbf{r}, \quad (11)$$

где интегрирование производится по области перекрытия ядерных плотностей, вектор $\mathbf{r}$ указывает положение элемента объема одного из ядер, на который действует сила трения относительно оси вращения того же ядра, величины $r_{\text{c.m.}}^t$ и $r_{\text{c.m.}}^p$ — расстояния от центров масс соответствующих ядер до центра масс системы. На рис. 3 приведен схематический чертеж системы сталкивающихся ядер, заданы две системы координат, связанные с центром масс системы (система

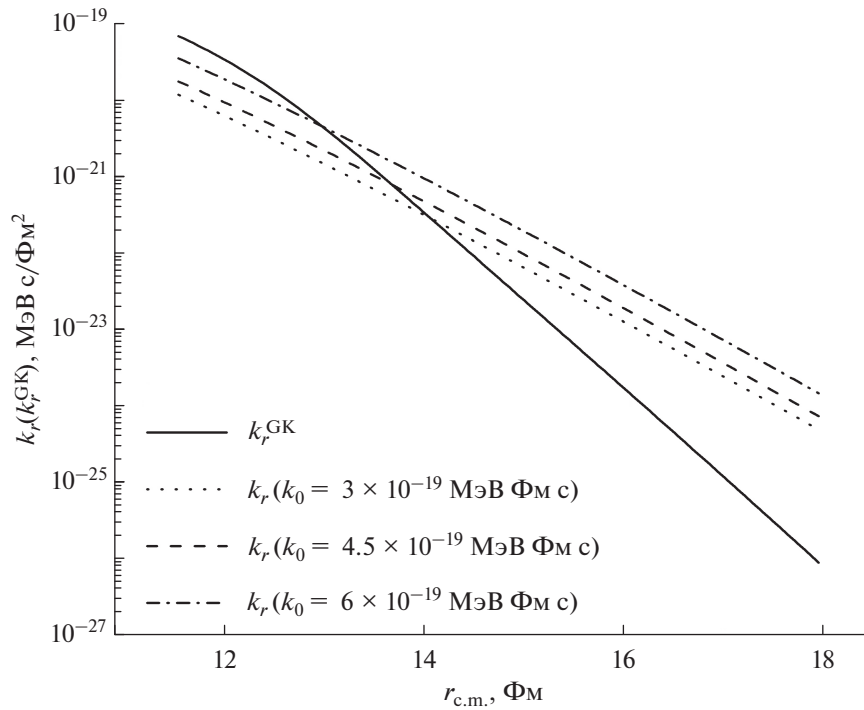


Рис. 2. Сравнение коэффициентов радиального трения k_r (9) при различных значениях k_0 с коэффициентом k_r^{GK} (10) [7].

$x'y'z'$ вращается относительно оси x' с угловой скоростью ω , система xyz не вращается), и указаны точки B и D , в которых мы для примера будем рассматривать скорости относительного движения ядерного вещества.

Векторы скоростей точек B и D , принадлежащих ядру-мишени, обозначены сплошными стрелками, а векторы скоростей тех же точек, принадлежащих ядру-снаряду, обозначены точечными стрелками. Нетрудно заметить, что оба вектора имеют проекции как на ось y' , так и на ось z' .

Для каждой точки в отдельности проекции векторов скорости на ось z' ($v_{tz'}(\mathbf{r}', \Omega_t) = -y'\Omega_t$ и $v_{pz'}(\mathbf{r}', \Omega_p) = -y'\Omega_p$) имеют одинаковые знаки, т.к. знак проекции относительной скорости на ось z' будет зависеть от разности величин проекций и, следовательно, от разности угловых скоростей собственного вращения ядра-мишени Ω_t и ядра-снаряда Ω_p . Хорошо видно, что проекции относительных скоростей в точках B и D на ось z' имеют разные знаки. Тогда составляющие сил трения вдоль оси z' в точках B и D будут направлены в разные стороны. В результате медленно вращающееся ядро (тяжелое ядро-мишень) будет стремиться вращаться быстрее, а быстро вращающееся легкое ядро-снаряд будет замедлять свое вращение. Плечом соответствующей силы трения будет являться координата y' точки, к которой она приложена. Обозначим интеграл по всей области перекрытия плотностей сталкивающихся ядер как $y_2 = y_2(r_{\text{c.m.}})$:

$$y_2 = k_0 \int y'^2 \rho_t(|\mathbf{r}_{\text{c.m.}} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \quad (12)$$

Тогда для моментов силы трения, действующих на ядро-мишень $M_{tz'} = M_{tz'}(r_{\text{c.m.}}, \Omega_t, \Omega_p)$ и ядро-снаряд $M_{pz'} = M_{pz'}(r_{\text{c.m.}}, \Omega_t, \Omega_p)$, обусловленных проекцией скорости относительного движения их “касающихся” точек на ось z' , можно записать:

$$M_{tz'} = (\Omega_p - \Omega_t)y_2 \text{ и } M_{pz'} = -(\Omega_p - \Omega_t)y_2. \quad (13)$$

Проекции векторов скорости точек B и D , обозначенных на рис. 3, на ось y' обусловлены только собственным вращением каждого из ядер в отдельности. Однако нетрудно заметить, что даже если собственное вращение ядер отсутствует, то каждая точка соответствующего ядра будет повторять движение его центра масс (на рис. 3 векторы скоростей центров масс сталкивающихся ядер обозначены штрихпунктирными стрелками), обусловленное поворотом системы координат $x'y'z'$ относительно системы xyz . Т.е. проекции скоростей каждой точки ядер на ось y' будут определяться не только угловыми скоростями их собственных вращений, но и угловой скоростью их коллективного вращения ω ($v_{ty'} = v_{ty'}(\mathbf{r}', r_{\text{c.m.}}^t, \Omega_t, \omega)$ и $v_{py'} = v_{py'}(\mathbf{r}', r_{\text{c.m.}}^p, \Omega_p, \omega)$):

$$\begin{aligned} v_{ty'} &= (r_{\text{c.m.}}^t + z')\Omega_t - r_{\text{c.m.}}^t \omega \quad \text{и} \\ v_{py'} &= (r_{\text{c.m.}}^p + z')\Omega_p - r_{\text{c.m.}}^p \omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Интеграл по всей области перекрытия для расчета момента сил трения, действующего на ядро-мишень $M_{ty'} = M_{ty'}(r_{\text{c.m.}}, r_{\text{c.m.}}^t, r_{\text{c.m.}}^p, \Omega_t, \Omega_p, \omega)$, обусловленной проекцией относительной скорости на ось y' , можно

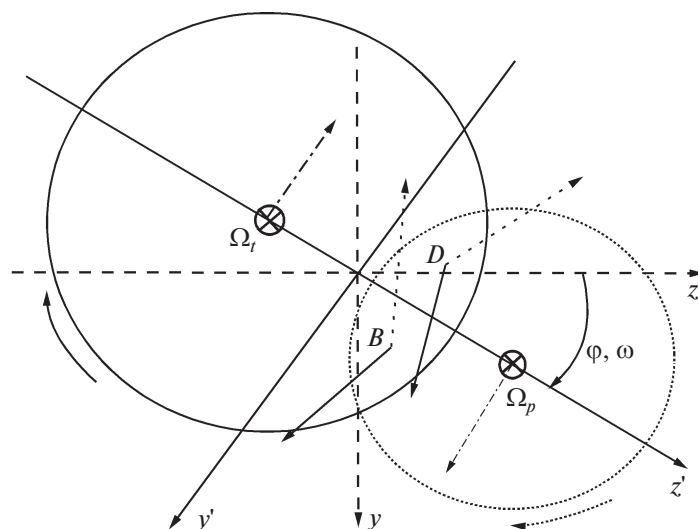


Рис. 3. Схематический вид системы сталкивающихся ядер.

записать в виде

$$M_{ty'} = k_0 \int (r_{c.m.}^t + z') [\omega r_{c.m.} - (r_{c.m.}^t + z') - (r_{c.m.}^p - z') \Omega_p] \rho_t \rho_p d\mathbf{r}'. \quad (15)$$

Аналогичный интеграл для ядра-снаряда $M_{py'} = M_{py'}(r_{c.m.}, r_{c.m.}^t, r_{c.m.}^p, \Omega_t, \Omega_p, \omega)$ имеет вид:

$$M_{py'} = k_0 \int (r_{c.m.}^p + z') [\omega r_{c.m.} - (r_{c.m.}^t + z') - (r_{c.m.}^p - z') \Omega_p] \rho_t \rho_p d\mathbf{r}'. \quad (16)$$

Полученная проекция момента сил трения приводит к переходу энергии и момента импульса коллективного вращения системы в энергию и момент импульса собственного вращения каждого из ядер.

Таким образом, в результате столкновения атомных ядер под действием моментов сил трения $M_{ty'}$ и $M_{py'}$ они начинают вращаться с разными угловыми скоростями. Действие моментов $M_{tz'}$ и $M_{pz'}$ приводит к выравниванию угловых скоростей собственного вращения ядер. В конечном итоге система стремится к состоянию равенства всех угловых скоростей. В момент, когда достигается равенство $\omega = \Omega_t = \Omega_p$, система начинает вращаться как одно целое (как жесткая гантелька), все моменты сил трения ((13), (15) и (16)) в этот момент становятся равными нулю.

Подынтегральные выражения в (15) и (16) зависят от угловых скоростей ω , Ω_t , Ω_p а также от расстояния между центрами масс сталкивающихся ядер (от формы системы). Такая сложная зависимость (большое количество переменных) затрудняет использование данных соотношений в динамических расчетах. Для того чтобы их упростить, кроме уже введенного обозначения k_r (9), можно использовать обозначения

$$z_1 = z_1(r_{c.m.}) \text{ и } z_2 = z_2(r_{c.m.}):$$

$$\begin{aligned} z_1 &= k_0 \int z' \rho_t(r') \rho_p(|\mathbf{r}_{c.m.} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad \text{и} \\ z_2 &= k_0 \int z'^2 \rho_t(r') \rho_p(|\mathbf{r}_{c.m.} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда после несложных математических преобразований выражений (15) и (16) можно получить

$$M_{ty'} = (r_{c.m.}^t k_r + z_1)(\omega r_{c.m.} - r_{c.m.}^t \Omega_t - r_{c.m.}^p \Omega_p) + (r_{c.m.}^t + z_2)(\Omega_p - \Omega_t), \quad (18)$$

$$M_{py'} = (r_{c.m.}^p k_r - z_1)(\omega r_{c.m.} - r_{c.m.}^t \Omega_t - r_{c.m.}^p \Omega_p) + (r_{c.m.}^p - z_2)(\Omega_p - \Omega_t). \quad (19)$$

Таким образом, для полноценного учета трения между сталкивающимися ядрами для каждой формы системы (для каждого значения $r_{c.m.}$) необходимо знать значения интегралов (9), (12) и (17). Кроме того, результаты интегрирования не зависят от угла поворота системы $x'y'z'$ относительно x, y, z , соответственно, можно считать, что $\varphi = 0$, и что оси обеих систем совпадают в момент интегрирования. Величины коэффициентов k_r , z_1 , z_2 и y_2 как функции расстояний между центрами масс сталкивающихся ядер в реакции $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ приведены на рис. 4.

Следует заметить, что в работе [8] были приведены приближенные выражения для расчета моментов $M_{ty'}$ и $M_{py'}$:

$$M_{ty'} = -k_r v_{\text{отн}}(R_t + d/2) \text{ и } M_{py'} = -k_r v_{\text{отн}}(R_p + d/2), \quad (20)$$

где смысл величин R_t , R_p и d обсуждался выше (см. рис. 1б), а скорость относительного движения $v_{\text{отн}} = v_{\text{отн}}(r_{c.m.}, R_t, R_p, \Omega_t, \Omega_p, \omega)$ рассчитывается для

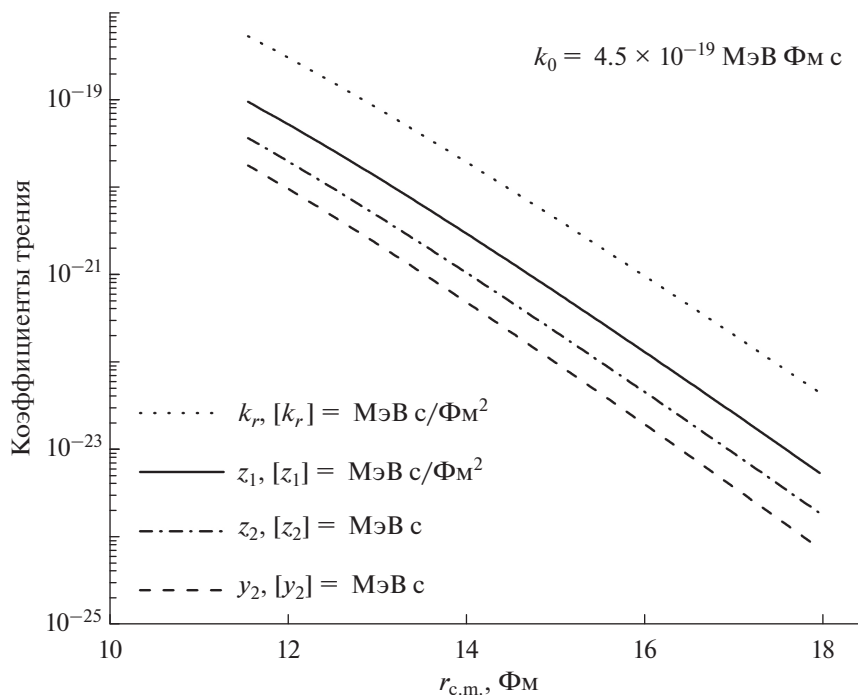


Рис. 4. Зависимость коэффициентов k_r , z_1 , z_2 и y_2 от расстояния между центрами масс сталкивающихся ядер, рассчитанная для реакции $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ при $k_0 = 4.5 \times 10^{-19} \text{ МэВ Фм с}$.

точки, лежащей на линии, соединяющей центры масс сталкивающихся ядер, посередине между их поверхностями:

$$v_{\text{отн}} = \Omega_t(R_t + d/2) + \Omega_p(R_p + d/2) - \omega r_{\text{с.м.}} \quad (21)$$

Выражения (20) позволяют избежать интегрирования и при описании взаимодействия сферических ядер дают хорошее согласие с точными выражениями (18) и (19) (для сферических ядер отклонение не превышает двух процентов).

Для полноты описания следует заметить, что в случае рассмотрения столкновения деформированных (несферических) ядер силы трения, возникающие при радиальном движении, могут приводить к возникновению вращательного момента $M_x = M_x(r_{\text{с.м.}}, r_{\text{с.м.}})$, аналогично, при наличии относительного вращения сталкивающихся деформированных ядер возникают силы $F'_z = F'_z(r_{\text{с.м.}}, \Omega_t, \Omega_p)$, способные замедлить их радиальное движение. Используя величину $y_1 = y_1(r_{\text{с.м.}})$:

$$y_1 = k_0 \int y'_t \rho_t(r') \rho_p(|\mathbf{r}_{\text{с.м.}} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (22)$$

можно записать

$$M_x = -y_1 \dot{r}_{\text{с.м.}} \quad \text{и} \quad F'_{z'} = -y_1 (\Omega_p - \Omega_t). \quad (23)$$

Вопрос о моделировании столкновения деформированных ядер будет рассмотрен в предстоящих работах.

5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЯДЕР

При проведении моделирования процесса столкновения двух сферических атомных ядер предполагается, что центры масс каждого из ядер и начальная скорость ядра-снаряда лежат в плоскости yz .

Если столкновение атомных ядер происходит при неравном нулю прицельном параметре b , то в процессе эволюции системы будут меняться не только расстояние между центрами масс сталкивающихся ядер $r_{\text{с.м.}}$ и соответствующий импульс p_r , но и угловые скорости вращения каждого из ядер в отдельности (Ω_t и Ω_p) и всей системы в целом (ω). Угловые координаты θ_t , θ_p и φ не представляют интереса ввиду рассматриваемого приближения сферической формы сталкивающихся ядер. Соответственно, необходимо задать четыре пары уравнений движения. Для описания радиального движения ядер в настоящей работе используются уравнения Ланжевена:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{\text{с.м.}} &= \frac{p_r}{M}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial V_{\text{пот}}}{\partial r_{\text{с.м.}}} - \frac{\partial V_{\text{рот}}}{\partial r_{\text{с.м.}}} - k_r \frac{p_r}{M} + \xi_r \sqrt{TK_r}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь величина $V_{\text{рот}}(r_{\text{с.м.}}, \Omega_t, \Omega_p, \omega) = \frac{I_t \Omega_t^2}{2} + \frac{I_p \Omega_p^2}{2} + \frac{Mr_{\text{с.м.}}^2 \omega^2}{2}$ — вращательная энергия системы, I_t , I_p , $Mr_{\text{с.м.}}^2$ — моменты инерции соответственно ядра-мишени, ядра-снаряда и системы в целом. Слагаемое $\xi_r \sqrt{TK_r}$ выполняет роль случайной силы, которая обеспечивает переход энергии от одночастичных

степеней свободы системы к коллективным. Обратный переход энергии обеспечивается наличием в уравнениях фрикционного параметра k_r . Величина $\sqrt{T k_r}$ — амплитуда случайной силы, ξ_r — случайное число, обладающее свойствами

$$\langle \xi_v \rangle = 0, \quad \langle \xi_\beta(t_1) \xi_v(t_2) \rangle = 2\delta_{\beta v} \delta(t_1 - t_2). \quad (25)$$

Температура системы определяется, исходя из модели ферми-газа, соотношением $T = \sqrt{E^*/a}$, где a — параметр плотности уровней [18], а E^* — энергия возбуждения каждого из сталкивающихся ядер.

При проведении расчетов предполагается, что энергия возбуждения E^* системы делится между ядрами пропорционально числу содержащихся в них нуклонов, т.е. температура обоих ядер одинакова. Суммарная энергия возбуждения определяется на каждом шаге интегрирования уравнений Ланжевена (24), исходя из требования выполнения закона сохранения энергии:

$$E^* = E_{c.m.} - \frac{p_r^2}{2M} - V_{pot}, \quad (26)$$

где $E_{c.m.}$ — энергия, при которой происходит столкновение атомных ядер, указанная в системе центра масс.

Для описания тангенциального движения используются уравнения моментов для вращения каждого из сталкивающихся ядер в отдельности и системы в целом:

$$I_t \dot{\Omega}_t = M_{ty'} + M_{tz'} \quad \text{и} \quad \dot{\theta}_t = \Omega_t; \quad (27)$$

$$I_p \dot{\Omega}_p = M_{py'} + M_{pz'} \quad \text{и} \quad \dot{\theta}_p = \Omega_p; \quad (28)$$

$$Mr_{c.m.}^2 \dot{\Omega} = -M_{ty'} - M_{py'} - 2\omega r_{c.m.} p_r \quad \text{и} \quad \dot{\phi} = \omega. \quad (29)$$

Следует заметить, что выражение (29) не является самостоятельным и может быть получено из уравнений (27), (28) и закона сохранения момента импульса системы:

$$I_{c.m.} \omega + I_t \Omega_t + I_p \Omega_p = L_0 \hbar = \text{const}. \quad (30)$$

Полный угловой момент системы $L_0 \hbar$ сохраняется и определяется прицельным параметром b : $L_0 \hbar = b\sqrt{2ME_{c.m.}}$. Следует заметить, что в работе [7] предусматривается возможность малого изменения коллективного момента импульса системы за счет действия случайных сил по отношению к тангенциальному движению сталкивающихся ядер, однако авторам настоящей работы не известно об экспериментальных подтверждениях данного эффекта.

Для интегрирования уравнений (24), (27)–(29) необходимо задать начальные значения параметров системы и скорости их изменения.

Начальное значение параметра $r_{c.m.}$ должно быть намного больше значения прицельного параметра b

и не должно влиять на результаты расчетов. В настоящей работе будет использовано значение $r_{c.m.0} = 50 \text{ Фм}$.

Начальное значение параметра

$$\varphi_0 = \varphi_0(E_{c.m.}, L_0, r_{c.m.0})$$

можно выразить через полный угловой момент системы, энергию реакции и начальное значение параметра $r_{c.m.}$:

$$\varphi_0 = \arcsin \left(\frac{L_0 \hbar}{r_{c.m.0} \sqrt{2ME_{c.m.}}} \right). \quad (31)$$

В начальный момент времени собственного вращения сталкивающихся ядер нет, соответственно, параметры $\dot{\theta}_t = 0$ и $\dot{\theta}_p = 0$. Следует заметить, что в рассматриваемом случае при описании реакций со сферическими ядрами начальные значения углов θ_t и θ_p не имеют значения.

Начальное значение скорости изменения параметра φ определяется выражением

$$\omega_0 = \frac{L_0 \hbar}{Mr_{c.m.}^2}. \quad (32)$$

Начальное значение импульса радиального движения системы

$$p_{r0} = -\sqrt{2M(E_{c.m.} - V_{pot}(r_{c.m.0}) - V_{rot}(r_{c.m.0}))}. \quad (33)$$

Важным этапом интегрирования уравнений движения (24), (27)–(29) является преодоление кулоновского барьера. Если радиальное сближение ядер прекращается до того, как система преодолет кулоновский барьер, то включается механизм туннелирования. Вероятность туннелирования рассчитывается по методу Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна [19]:

$$T_L(E) = \left(1 + \exp \left[\frac{3}{\hbar} \int_{r_{c.m.1}}^{r_{c.m.2}} \sqrt{2m(V_{pot}(r_{c.m.}) - E)} dr \right] \right)^{-1}, \quad (34)$$

где интегрирование производится между точками поворота $r_{c.m.1}$ (точка, в которой система прекратила радиальное сближение) и $r_{c.m.2}$ (точка, в которой потенциальная энергия системы становится равной энергии системы в точке $r_{c.m.1}$) в подбарьерной области потенциала, т.е. $V_{pot}(r_{c.m.1}) = V_{pot}(r_{c.m.2}) = E$. Отметим, что при вычислении потенциальной энергии в подбарьерной области значения всех остальных параметров остаются постоянными.

Данный механизм позволяет системе с некоторой вероятностью пройти под кулоновским барьером и реализовать захват ядра-снаряда ядром-мишенью. Расчет процесса столкновения исходных ядер оканчивается при условии перехода системы через кулоновский барьер и при остановке относительного (радиального и тангенциального) движения ядер.

Основным результатом моделирования является зависимость значения вероятности $P_{\text{cap}}(L)$ захвата ядра-снаряда ядром-мишенью от углового момента. Величина суммарного сечения σ_{cap} захвата определяется соотношением

$$\sigma_{\text{cap}} = \sum_L \sigma_{\text{cap}}^L(L), \quad (35)$$

где парциальное сечение $\sigma_{\text{cap}}^L(L)$ зависит от длины волны де Бройля, соответствующей налетающему ядру ($\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2ME_{\text{c.m.}}}$):

$$\sigma_{\text{cap}}^L(L) = \pi\lambda^2(2L+1)P_{\text{cap}}(L). \quad (36)$$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Интегрируя уравнения движения (24) и (27)–(29), можно получить зависимость параметров системы от времени. На рис. 5а приведен пример траектории для реакции $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ с энергией $E_{\text{c.m.}} = 200$ МэВ и угловым моментом $L = 20\hbar$. При моделировании использовалось значение параметра $k_0 = 4.5 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с. Видно, что расстояние между центрами масс сталкивающихся ядер монотонно уменьшается до значения 12.7 Фм, которое соответствует положению кулоновского барьера, после чего наблюдается случайное блуждание системы вблизи барьера. На рис. 5б приведена зависимость скорости относительного движения точек поверхностей сталкивающихся ядер, рассчитанная по формуле (21). Видно, что сначала скорость v по модулю увеличивается, что связано с уменьшением момента инерции системы (уменьшается $r_{\text{c.m.}}$) и сохранением момента ее импульса. Далее после сближения ядер до расстояния $r_{\text{c.m.}} = 15\text{--}16$ Фм скорость v по модулю начинает уменьшаться и к моменту перехода системы через барьер достигает практически нулевого значения. Это связано с вовлечением каждого из сталкивающихся ядер во вращательное движение под действием моментов $M_{ty'}$ и $M_{py'}$ (18) и (19).

Как видно из рис. 5в, на котором приведены угловые скорости коллективного (ω) и собственных (Ω_t и Ω_p) вращений сталкивающихся ядер, к моменту перехода системы через кулоновский барьер легкое ядро-снаряд вращается намного быстрее тяжелого ядра-мишени. Для того чтобы за счет действия моментов $M_{tz'}$ и $M_{pz'}$ все угловые скорости стали одинаковыми и система начала вращаться как единое целое (как жесткая гантелька), в соответствии с расчетом требуется время, равное примерно 10^{-21} с.

Для проверки адекватности выбранного значения постоянной k_0 ($k_0 = 4.5 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с) в настоящей работе было проведено моделирование реакций $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$, $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ при различных энергиях столкновения. Полученные сечения событий перехода системы через кулоновский барьер сопоставлены с экспериментальными данными

ми по сечениям захвата в соответствующих реакциях (см. рис. 6). Очевидно, что в используемой модели не следует ожидать хорошего совпадения рассчитанных значений сечений с экспериментальными данными при низких энергиях. Во-первых, в модели не учтена возможность деформации сталкивающихся ядер, во-вторых, не учтена их микроскопическая структура. Однако в случае реакции $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ благодаря сильной асимметрии реакции согласие с экспериментом [16] очень хорошее (рис. 6а).

Значимость недостатков (используемых приближений) модели снижается при увеличении энергии реакций, поэтому при высоких энергиях даже в более симметричных реакциях $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ результаты расчетов приближаются к экспериментальным значениям сечений [14, 15] (см. рис. 6б).

На рис. 6а приведены также результаты расчетов сечений захвата, выполненные в работе [20] (открытые кружки), в которой предполагалось, что, даже находясь на большом расстоянии друг от друга, ядра вращаются вокруг общего центра масс как одно целое (как жесткая гантелька). Кроме того, в работе [20] для расчета коэффициента радиального трения использовалось соотношение (10). Видно, что полноценный учет сил радиального и тангенциального трения положительно сказывается на предсказательной силе модели.

Из рис. 6 видно, что при изменении значения постоянной k_0 полученные сечения захвата немного меняются. Для реакции $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ лучше подходит значение $k_0 = 3 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с, однако при моделировании реакций $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ с этим значением получается переоценка сечений при высоких энергиях. Расчеты с $k_0 = 6 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с показывают недооценку сечений захвата во всех трех реакциях при высоких энергиях. Из анализа результатов расчетов и из требования одинаковости выбранного значения k_0 для всех реакций можно сделать вывод о том, что значение постоянной $k_0 = 4.5 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с наилучшим образом описывает рассмотренные реакции. Данное значение может быть скорректировано в будущем после учета оболочечной структуры и возможности деформаций сталкивающихся ядер.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе было проведено моделирование процесса столкновения сферических атомных ядер с учетом их постепенного вовлечения во вращательное движение вокруг собственных осей вращения за счет действия сил радиального и тангенциального трения. Силы трения и вращательные моменты, которые они создают, в общем случае зависят как от параметра формы системы $r_{\text{c.m.}}$, так и от скорости радиального движения ядер $\dot{r}_{\text{c.m.}}$, скоростей вращения системы в целом (ω) и скорости вращения каждого ядра в отдельности (Ω_t и Ω_p). Во избежание необходимости

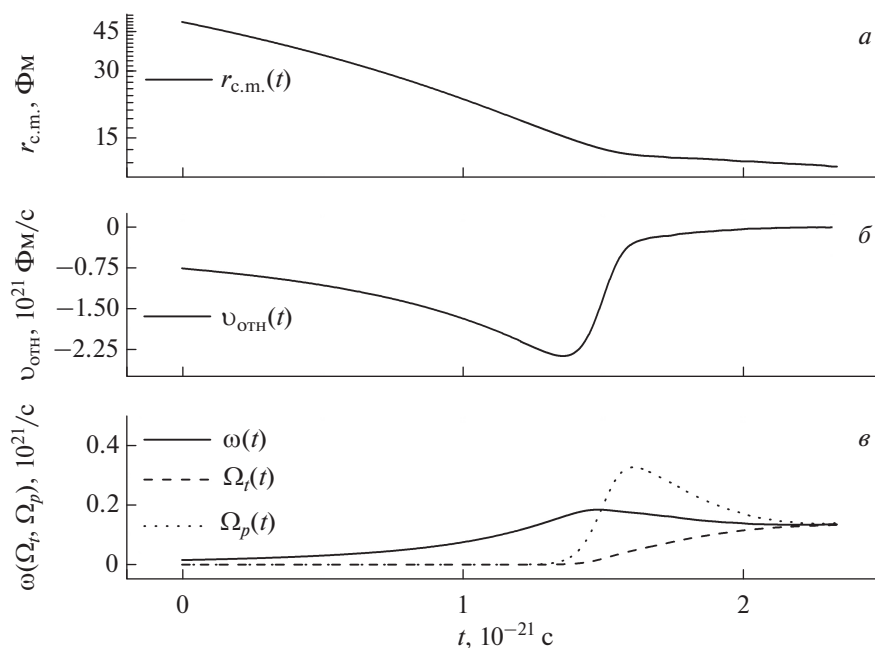


Рис. 5. *а* — Зависимость расстояния между центрами масс сталкивающихся ядер от времени (траектория движения системы). *б* — Зависимость величины относительной скорости ядерного вещества от времени (см. выражение (18)). *в* — Зависимость угловых скоростей коллективного и собственного (Ω_t и Ω_p) вращений ядер от времени.

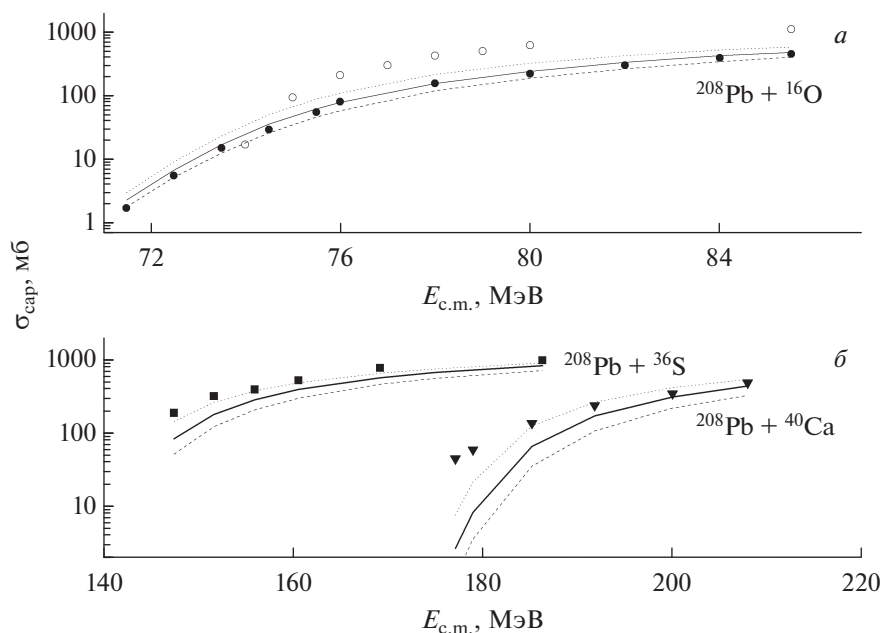


Рис. 6. *а* — Сравнение экспериментальных сечений захвата в реакциях $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ (закрытые кружки [16]) с рассчитанными в настоящей работе сечениями событий перехода системы через кулоновский барьер с последующей остановкой радиального и тангенциального движений. Точечная линия соответствует расчетам с $k_0 = 3 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с, сплошная линия — $k_0 = 4.5 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с и штриховая линия $k_0 = 6 \times 10^{-19}$ МэВ Фм с. Открытые кружки представляют результат расчета в модели [20]. *б* — То же, что и для рис. 6*а*, но для реакций $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ (закрытые квадраты [14]) и $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ (закрытые треугольники [15]).

построения многомерных зависимостей сил трения с последующей интерполяцией на каждом шаге интегрирования уравнений движения в настоящей работе были получены формулы (13), (18), (19) и (23), сводящие задачу к расчету зависимости всего пяти величин k_r (9), y_1 (22), y_2 (12), z_1 и z_2 (17) от параметра формы системы $r_{c.m.}$.

Проведенные в настоящей работе расчеты показали, что величины моментов сил трения $M_{ty'}$ и $M_{py'}$ примерно на порядок превышают значения моментов $M_{tz'}$ и $M_{pz'}$, видимо из-за этого последние в работе [8] не рассматривались. С другой стороны, только вращательные моменты $M_{tz'}$ и $M_{pz'}$ способны привести к остановке относительного вращения сталкивающихся ядер. В ходе моделирования процесса столкновения атомных ядер было показано, что от момента остановки их радиального сближения до момента остановки относительного вращения ядер проходит время порядка 10^{-21} с, что в несколько раз больше времени, проходящего от начала действия ощутимых сил трения до остановки радиального движения системы.

Результаты моделирования процесса столкновения сферических ядер в реакциях $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$, $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ и $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ показали неплохое согласие с экспериментальными данными по сечениям захвата. Однако согласия удалось достичь только с применением предположения о том, что захват ядра-снаряда ядром-мишенью происходит после полной остановки относительного радиального и тангенциального движений ядер.

Во время работы над этой статьей мы с прискорбием узнали, что после тяжелой болезни от нас ушел наш учитель Адеев Геннадий Дмитриевич. Он вырастил не одно поколение физиков. И все мы сохраним о нем светлую память.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Shen, Y. Abe, D. Boiley, G. Kosenko, and E. Zhao, *Int. J. Mod. Phys. E* **17**, 66 (2008).
2. G. I. Kosenko, F. A. Ivanyuk, V. V. Pashkevich, and D. V. Dinner, *Phys. At. Nucl.* **71**, 2052 (2008).
3. V. L. Litnevsky, V. V. Pashkevich, G. I. Kosenko, and F. A. Ivanyuk, *Phys. Rev. C* **89**, 034626 (2014).
4. V. V. Volkov, *Phys. Part. Nucl.* **35**, 425 (2004).
5. P. Frobrich, *Phys. Rept.* **116**, 337 (1984).
6. J. Marten and P. Frobrich, *Nucl. Phys. A* **545**, 854 (1992).
7. G. H. E. Gross and H. Kalinowski, *Phys. Rept.* **45**, 175 (1978).
8. A. V. Karpov and V. V. Saiko, *Phys. Rev. C* **96**, 024618 (2018).
9. Г. Д. Адеев, А. В. Карпов, П. Н. Надточий, Д. В. Ванин, *ЭЧАЯ* **36**, 732 (2005).
10. E. G. Ryabov, A. V. Karpov, P. N. Nadtochy, and G. D. Adeev, *Phys. Rev. C* **78**, 044614 (2008).
11. В. Л. Литневский, А. Л. Литневский, Г. И. Косенко, Ф. А. Иванюк, *ЯФ* **85**, 296 (2022).
12. V. L. Litnevsky, F. A. Ivanyuk, and G. I. Kosenko, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Phys.* **20**, 233 (2020).
13. R. S. Kurmanov and G. I. Kosenko, *Phys. At. Nucl.* **77**, 1442 (2014).
14. R. Yanez, W. Loveland, A. M. Vinodkumar, P. H. Sprunger, L. Pristrey, D. Peterson, S. Zhu, J. J. Kolata, A. Villano, and J. F. Liang, *Phys. Rev. C* **82**, 054615 (2010).
15. A. J. Pacheco, J. O. Fernandez Niello, D. E. DiGregorio, M. di Tada, J. E. Testoni, Y. Chan, E. Chavez, S. Gazes, E. Plagnol, and R. G. Stokstad, *Phys. Rev. C* **45**, 2861 (1992).
16. E. Vulgaris, L. Grodzins, S. G. Steadman, and R. Ledoux, *Phys. Rev. C* **33**, 2017 (1986).
17. C. F. Tsang, *Phys. Scripta* **10A**, 90 (1974).
18. A. S. Iljinov, M. V. Mebel, N. Bianchi, E. De Sanctis, C. Guaraldo, V. Lucherini, V. Muccifora, E. Polli, A. R. Reolon, and P. Rossi, *Nucl. Phys. A* **543**, 517 (1992).
19. T. I. Nevzorova and G. I. Kosenko, *Phys. At. Nucl.* **71**, 1373 (2008).
20. V. L. Litnevsky, V. V. Pashkevich, G. I. Kosenko, and F. A. Ivanyuk, *Phys. Rev. C* **85**, 034602 (2012).

RADIAL AND TANGENTIAL FRICTION COEFFICIENTS: DERIVATION OF FORMULAS, CALCULATION AND APPLICATION IN MODELLING OF THE HEAVY ION COLLISION PROCESS

V. L. Litnevsky¹⁾, A. L. Litnevsky^{2),3)}, G. I. Kosenko⁴⁾

¹⁾Omsk State Transport University, Omsk, Russia

²⁾Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

³⁾Almazov National Medical Research Centre, St. Petersburg, Russia

⁴⁾Omsk Tank Automotive Engineering Institute, Omsk, Russia

A method for calculating the forces and moments of friction forces arising between two colliding nuclei with a non-zero impact parameter is considered. At this stage of the work, it was assumed that colliding nuclei remain spherical throughout the entire collision process. A simulation of the collision process of spherical atomic nuclei is carried out, taking into account their gradual inclusion in rotation around their own axes. It is shown that from the moment of the transition of the system through the Coulomb barrier to the stop of the relative rotation of colliding nuclei, it takes time about 10^{-21} s. It is proposed to consider the stopping of radial motion and relative rotation of colliding nuclei as conditions for capturing the projectile nucleus by the target nucleus. I.e., at the moment of capture, the system should behave like a rigid rotating dumbbell. Comparison of the results of the calculation of the capture cross sections with experimental data shows a good predictive power of the considered approximate model in the case of a strongly asymmetric reaction of $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ (for all reaction energies) and in the case of high-energy reactions of $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ and $^{40}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$.