

О КРИЗИСАХ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ СВЕРХКРИТИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ

© 2024 г. М. М. Вотякова^{1, 2, *}, В. Г. Данилов^{3, 4},
А. А. Ковалишин⁵, Д. С. Миненков^{1, 2, **}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт, Россия

³Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

⁴Московский технический университет связи и информатики, Россия

⁵Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

*E-mail: votiakova.mm@phystech.edu

**E-mail: minenkov.ds@gmail.com

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 03.12.2024 г.

Решена задача о кризисе тепловыделения в потоке жидкости в цилиндре, и обнаружен сглаженный эффект типа запираания тепловой конвекции в пористой среде. Рассмотрен ламинарный поток жидкости в цилиндре круглого сечения с учетом нагрева жидкости через стенки. На основе уравнений Эйлера для некоторых режимов теплообмена получена осредненная по сечению одномерная математическая модель, включающая плотность, давление, температуру и продольную скорость. Для жидкости сверхкритического давления модель замкнута при помощи уравнения состояния Ван-дер-Ваальса. Если задать все граничные условия в начале цилиндра (для давления, температуры и скорости), то уравнения модели имеют решение при любых значениях тепловыделения, но при достаточно интенсивном тепловыделении температура начинает быстро возрастать, что сглаженным образом отражает эффект «запираания потока». Исследованная в работе математическая модель приближенно описывает поведение потока сжимаемой жидкости в цилиндре при нагреве в сверхкритическом режиме и может быть использована для моделирования процессов теплообмена в различных трубопроводах.

DOI: 10.31857/S0040364424060091

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов теплообмена в течении воды при сверхкритических параметрах имеет большое значение для разработки современных реакторных установок [1, 2]. В основном эффекты и зависимости для подобных течений исследуются экспериментально (см., например, [3–8]) и в меньшей степени при помощи численного счета (см. [9, 10]). По итогам экспериментов предлагаются эмпирические модели (см. обзор [11], а также сравнение результатов для разных моделей с экспериментом на рис. 4 в [4]). Подробный обзор исследований свойств теплопроводности и тепловой конвекции для сверхкритических жидкостей можно найти в [12].

Несмотря на большое количество работ, посвященных данной тематике, следует заметить, что аналитических результатов, описывающих течение нагреваемой сверхкритической жидко-

сти, недостаточно из-за сложности этой задачи. В настоящей работе рассматривается упрощенная одномерная модель течения, которая была использована для описания тепловой конвекции через завал [13], но которую можно также применять для расчета осредненных по сечению трубы величин. Такой подход позволяет исследовать некоторые закономерности теплообмена в течениях сверхкритических жидкостей с помощью аналитических (асимптотических) формул.

Целью данной работы является аналитическое исследование движения жидкости в нагреваемом цилиндре (трубе) при сверхкритическом давлении.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математической моделью для этого исследования выбрано осредненное уравнение движения. Предположим, что в трубе ламинарный по-

ток и сформировано течение Пуазейля (см., например, [14]), тогда известно, что средняя скорость по сечению (расход) удовлетворяет закону движения типа закона Дарси, т.е. расход жидкости в трубе подчиняется тем же уравнениям, что и скорость фильтрации жидкости (газа) в пористой среде. Фильтрация нагреваемого газа (тепловая конвекция в пористой среде) была исследована в [13]. Было показано, что, когда интенсивность тепловыделения превышает критическое значение, происходит «запирание» потока: газ через среду не течет и температура его бесконечно возрастает. Этот эффект описан в [13] для идеального газа и в данной работе обобщен на случай уравнения состояния Ван-дер-Ваальса. Если заданы граничные условия для давления в начале и в конце цилиндра, а также значение температуры в начале, то уравнения модели разрешимы лишь при значениях тепловыделения ниже критического. При приближении к критическому значению тепловыделения температура в конце цилиндра стремится к бесконечности, а скорость в начале — к нулю, в таком случае говорится о «кризисе тепловыделения» или о «запирании потока». В [13] пренебрегалось теплопроводностью газа и рассматривалось течение в вертикальном цилиндре, верхнее основание которого открыто в атмосферу. Главное отличие рассматриваемой в данной работе задачи состоит в исследовании другого уравнения состояния среды (в [13] исследовалось уравнение состояния идеального газа). Отметим также, что задача с давлением, заданным на входе и на выходе из трубы, может моделировать истечение жидкости в большой объем (резервуар и т.д.). В то же время задача с условиями, заданными на входе в трубу, моделирует собственное течение в трубе, рассматриваемой как часть трубопровода.

Обозначим координату $x \in [0, L]$, направленную вдоль оси цилиндра (трубы), и рассмотрим стационарную одномерную систему уравнений неразрывности, движения (записанного в форме закона Дарси) и энергии для определения давления P , плотности ρ , температуры T и скорости вдоль трубы U , осредненных по сечению трубы и безразмерных, так что можно считать $L = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P = -\varepsilon U, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} ((E + P)U) = M^2 q(x). \quad (3)$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, возникающий в результате обезразмеривания (как будет показано ниже, в представляющих интерес слу-

чаях $\varepsilon \sim 10^{-6}$) и отвечающий за падение давления вдоль трубы; параметр M^2 — линейная плотность мощности тепловыделения ($M \geq 0$); профиль тепловыделения $q = q(x)$ нормирован как

$$\int_0^L q(x) dx = 1,$$

и, вообще говоря, переменный. В случае нагрева уравнение энергии в таком виде рассматривается, например, в [15].

Для замыкания системы нужно добавить уравнение состояния вещества для сжимаемой жидкости (жидкости при сверхкритическом давлении) — уравнение Ван-дер-Ваальса

$$R\rho T = (P + a\rho^2)(1 - b\rho). \quad (4)$$

В безразмерном уравнении (4), где P , ρ , T нормированы на критические значения, коэффициенты a , b , R равны $a = 0$, $b = 0$, $R = \frac{8}{3}$ — для идеального газа и $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$, $R = \frac{8}{3}$ — для газа Ван-дер-Ваальса.

Следуя [16], плотность энергии запишем в виде суммы $E = E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}$. Кинетическая часть $E_{\text{ext}} = \kappa \rho U^2/2$ (где κ — параметр обезразмеривания) и безразмерная плотность внутренней энергии для газа Ван-дер-Ваальса $E_{\text{int}} = \beta R\rho T - a\rho^2$. Здесь $\beta = n/2$, $n = 3, 5$ или 6 — число степеней свободы для одно-, двух- или многоатомного вещества, для воды $\beta = 3$. В результате уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} ((\beta R\rho T - a\rho^2 + \frac{1}{2}\kappa\rho U^2 + P)U) = M^2 q(x). \quad (5)$$

В дальнейшем рассматривается система уравнений (1), (2), (4), (5).

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В [13] для конвекции нагреваемого газа при его прохождении через завал рассматривалась система (1), (2), (5) для идеального газа, когда $P = R\rho T$. При этом ставилась краевая задача с условиями (давление на выходе при $x = L = 1$ равно атмосферному)

$$P|_{x=0} = P_0, \quad T|_{x=0} = T_0, \quad P|_{x=1} = P_1, \quad (6)$$

где T_0 , P_0 — температура и давление набегающего потока, давление в конце трубы P_1 предполагается известным, причем без ограничения общности можно положить $P_1 = P_0 - \varepsilon$. (В [13] уравнение энергии выписывалось в терминах энтропии, а не температуры, но это ни на что не влияет.) Решение данной краевой задачи в случае идеального газа [13] существует лишь при огра-

ниченном значении тепловыделения $M^2 < M_{cr}^2$, причем в пределе $M^2 \rightarrow M_{cr}^2$ поток останавливается ($U|_{x=0} \rightarrow 0$), плотность убывает скачкообразно ($\rho_x|_{x=0} \rightarrow -\infty$, $\rho = 0$, $x > 0$) и наступает перегрев в конце трубы: $T|_{x=1} \rightarrow \infty$, $\rho|_{x=1} \rightarrow 0$. Плотность падает в точке, где начинается нагрев.

Если рассмотреть эту же задачу для жидкости при сверхкритическом давлении (для сжимаемой жидкости) и использовать модель Ван-дер-Ваальса, то получится тот же эффект. Рассмотрим для наглядности ситуацию с постоянным тепловыделением $q(x) = 1$ при $M^2 < M_{cr}^2$, тогда главный член асимптотического решения системы (1), (2), (4), (5) с граничными условиями (6) выписывается в параметрическом виде. (Под асимптотическим решением здесь понимаются функции, которые при подстановке в систему дают малую невязку порядка $\varepsilon \ll 1$; в условиях [3, 4] после обезразмеривания с помощью критических параметров и с учетом геометрии трубы и динамического потока $\varepsilon \approx 10^{-6}$.)

Приведем формулы решения, выбрав в качестве параметра удельный объем $V \in [V_0, V_1]$, $V_0 = 1/\rho_0 > 0$, $V_1 > V_0$, ρ_0 – единственное при $P > P_{cr} = 1$ действительное решение уравнения $R\rho_0 T_0 = (P_0 + a\rho_0^2)(1 - b\rho_0)$. Введем также новые обозначения для констант: $B = \beta + 1$, $h = a\beta - a$, $f = 2ab\beta$, $g = b\beta$. При $M^2 > 0$ решение записывается в параметрическом виде

$$P(V) = P_0 - \frac{\varepsilon c^2}{M^2} \left(-f \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right) + \frac{\kappa c^2}{3} (V^3 - V_0^3) + \frac{h}{2} \ln \left(\frac{V_0^2}{V^2} \right) + \frac{BP_0}{2} (V^2 - V_0^2) \right) + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

$$\rho(V) = 1/V, \quad (8)$$

$$T(V) = \frac{(P(V) + a\rho(V)^2)(1 - b\rho(V))}{R\rho(V)}, \quad (9)$$

$$U(V) = cV. \quad (10)$$

Окончательные формулы получаются в результате подстановки $V = V(x)$, где функция $V(x)$ определяется неявно из уравнения

$$F(c, V, M^2) \equiv c \left(\frac{\kappa c^2}{2} (V^2 - V_0^2) + BP_0(V - V_0) + h \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right) - \frac{f}{2} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_0^2} \right) \right) - M^2 x + O(\varepsilon) = 0, \quad (11)$$

причем константа интегрирования c рассчитывается вместе с V_1 из системы уравнения (11) при $x = 1$ и граничного условия на давление при $x = 1$:

$$c^4 \frac{\kappa}{3} (V_1^3 - V_0^3) + c^2 \left(\frac{h}{2} \ln \left(\frac{V_0^2}{V_1^2} \right) + \frac{BP_0}{2} (V_1^2 - V_0^2) - f \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0} \right) \right) - \frac{\delta M^2}{\varepsilon} + O(\varepsilon) = 0. \quad (12)$$

При отсутствии тепловыделения ($M = 0$) плотность, температура и скорость не меняются: $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$, $T(x) = T_0 = \text{const}$, $U(x) = \delta / \varepsilon = \text{const}$, а давление меняется линейно (аналогично закону Дарси) $P(x) = P_0 - \delta x$.

На рис. 1–5 проиллюстрировано решение задачи с граничными условиями (6) при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$.

Для системы (1), (2), (4)–(6) алгебраические уравнения (11), (12) для определения c и V_1 можно решить численно следующим образом. Уравнение (12) является биквадратным по c и имеет единственный положительный корень $c = c(V_1, M^2) > 0$. После подстановки этого корня в (11) при $x = 1$ находим V_1 из уравнения (11), что завершает определение решения. При этом F монотонно возрастает по V_1 к горизонтальной асимптоте и убывает по M^2 , поэтому решение существует лишь при $M^2 < M_{cr}^2$. Это критическое значение легко рассчитать, устремив в (11) или (12) $V_1 \rightarrow \infty$ и $c \rightarrow 0$ (так, что $cV_1 = O(1)$):

$$M_{cr}^2 = \frac{2P_0 B \delta}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (13)$$

Из формулы (13) видно, что критическое значение тепловыделения в главном члене (с точностью до $O(\varepsilon)$) не зависит от параметров a, b в уравнении Ван-дер-Ваальса. При неравномерном энерговыделении $q(x) \neq \text{const}$ краевая задача легко решается численно (графики решений представлены на рис. 2, 3): уравнения интегрируются по x при заданной константе, отвечающей начальной скорости c , а c определяется методом стрельбы. Графики зависимости константы c от параметра тепловыделения для разных профилей представлены на рис. 5. Значение критического тепловыделения при кусочно-постоянном профиле нагрева (здесь и далее r – координата начала участка нагрева, $l_q = (L - r)/L$ – относительная длина участка нагрева)

$$q(x) = \begin{cases} l_q^{-1}, & r \leq x \leq L, \\ 0, & 0 \leq x < r \end{cases}$$

определяется аналитически

$$M_{cr}^2 \approx \frac{2(\beta + 1)P_0 \delta}{l_q^2 \varepsilon}. \quad (14)$$

На рис. 1–3 изображены зависимости давления P , плотности ρ , скорости U и температуры T от координаты x для разных значений тепловы-

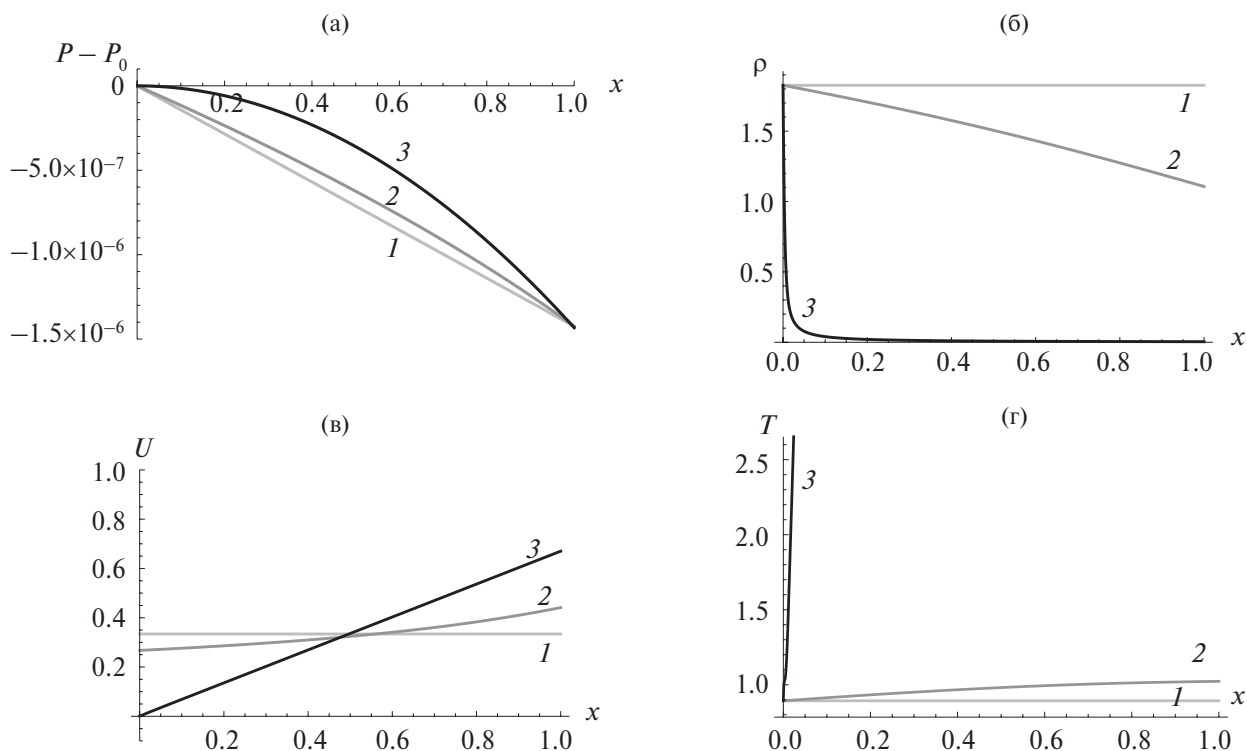


Рис. 1. Зависимости разницы давлений (а), плотности (б), скорости (в), температуры (г) от координаты для задачи с граничными условиями (б) и постоянным профилем тепловыделения $q = 1$ для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при $\epsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$ и различных значениях величины тепловыделения: 1 – $M = 0$, 2 – 1.32, 3 – 1.72.

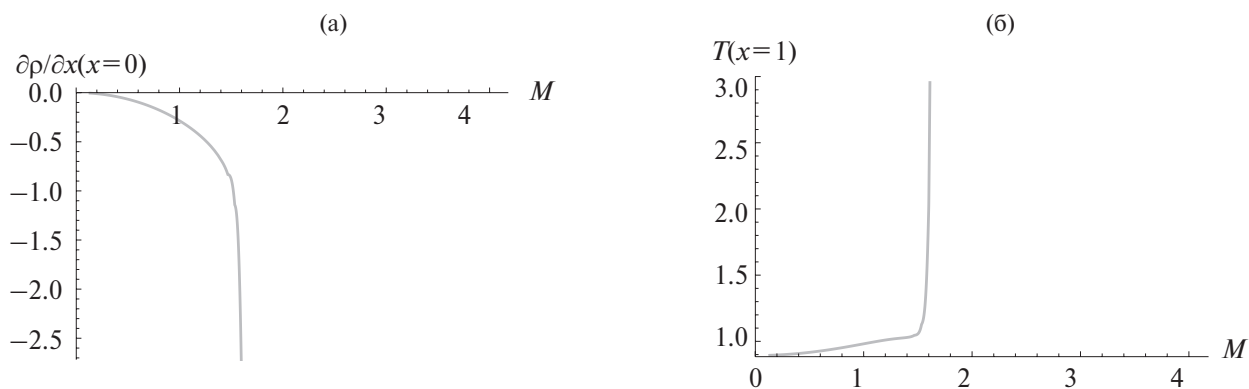


Рис. 2. Зависимости градиента плотности $\partial\rho/\partial x$ на левом конце трубы $x = 0$ (а) и температуры T на правом конце трубы $x = 1$ (б) от M для задачи с граничными условиями (б) для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при $q = 1$ и $\epsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$.

деления M и разных профилей тепловыделения. На рисунках хорошо видны полученные закономерности: при приближении значения тепловыделения к критическому характер убывания давления переходит от линейного к параболическому, плотность в начале области нагрева стремительно убывает, а скорость стремится к нулю, температура на конце трубы бесконечно возрастает. При $M^2 \rightarrow M_{cr}^2 \approx 2P_0 B \delta / \epsilon$, $B = (1 + \beta)$ на правом конце трубы ($x = 1$) наблюдается эффект перегрева и «запирания потока» (рис. 4):

$$T|_{x=1} \rightarrow \infty, \quad \rho|_{x=1} \rightarrow 0, \quad U|_{x=1} \rightarrow 2\delta/\epsilon, \quad U|_{x=0} \rightarrow 0.$$

Таким образом, система (1), (2), (4), (5), в которой в качестве уравнения состояния для жидкости при сверхкритическом давлении (4) используется уравнение Ван-дер-Ваальса, также обладает свойством «запирания потока» при превышении критического тепловыделения, как и в случае идеального газа.

В случае, если нагрев производится не на всем участке, а начиная с $x = r = 0.25$ или $x = r = 0.5$

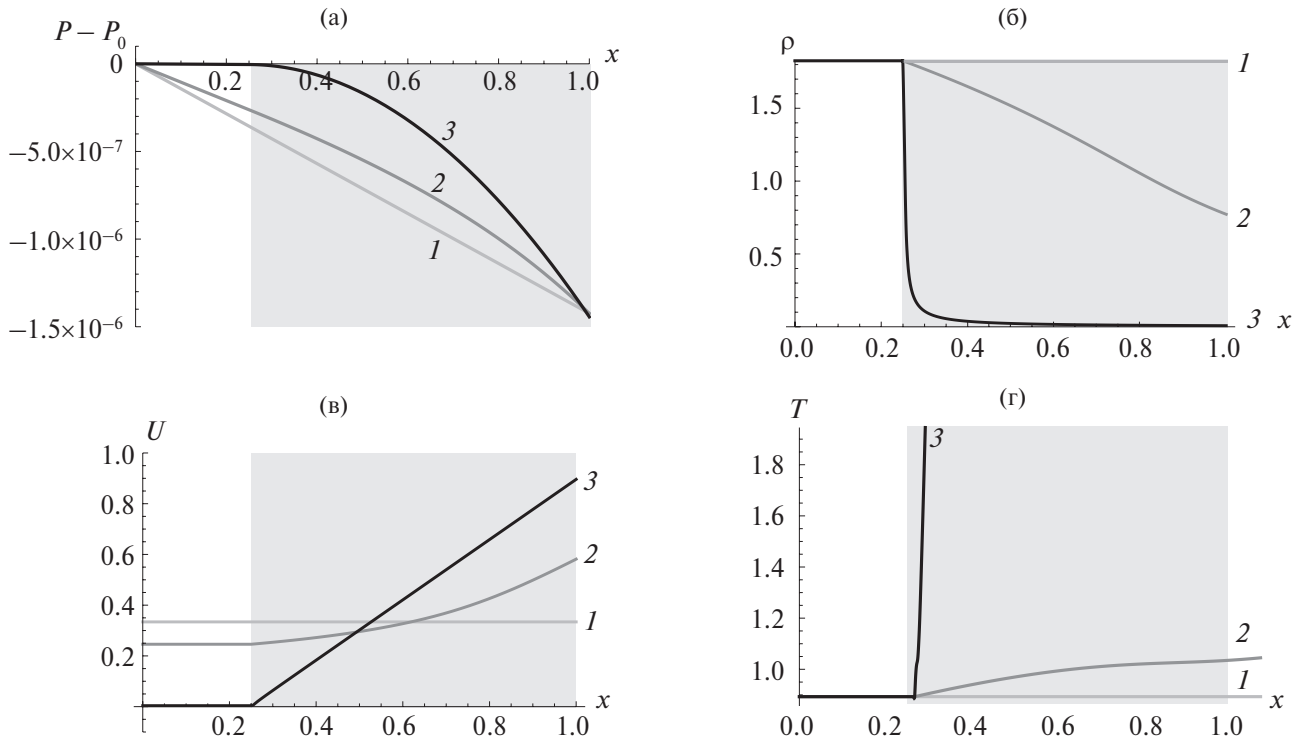


Рис. 3. Зависимости разницы давлений (а), плотности (б), скорости (в), температуры (г) от координаты для задачи с граничными условиями (6) и кусочно-постоянным профилем тепловыделения ($q = 0$ при $0 < x < 0.25$, $q = 4/3$ при $0.25 < x < 1$) для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$ и различных значениях M : 1 – 0, 2 – 1.52, 3 – 1.98; сплошной фон – область тепловыделения.

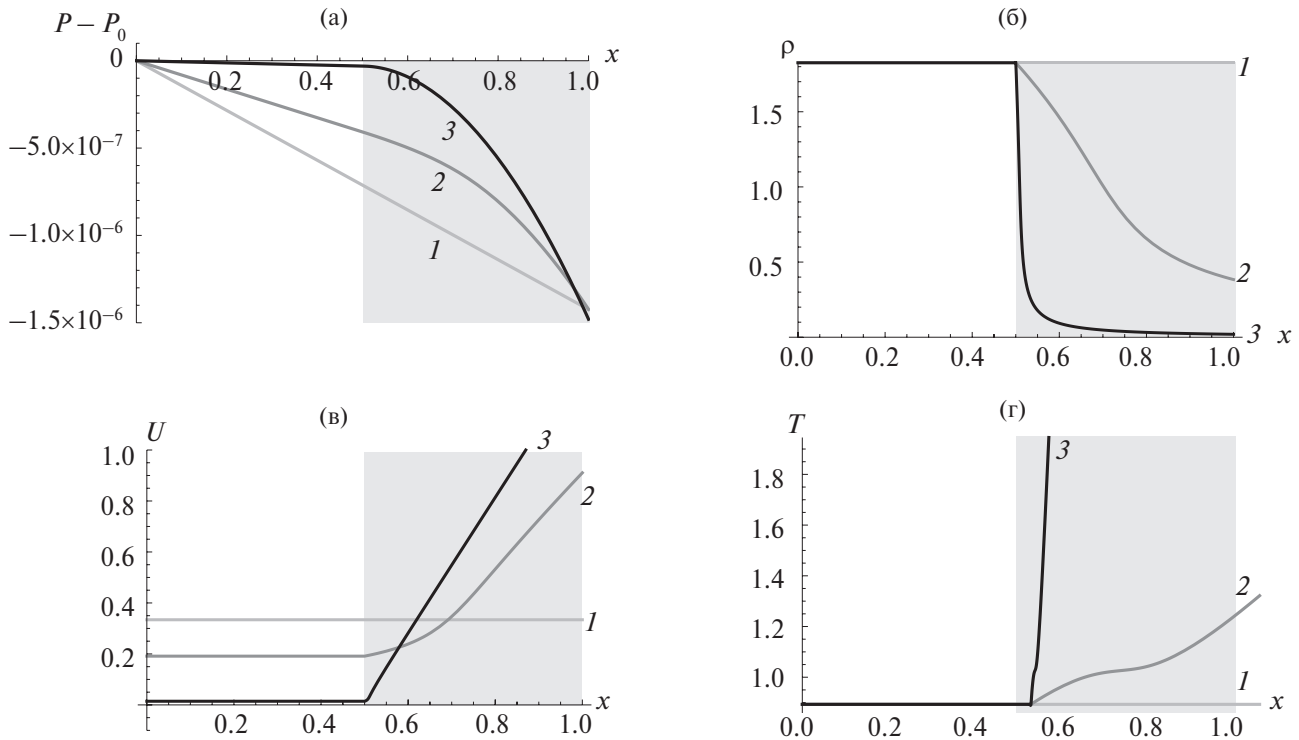


Рис. 4. Зависимости разницы давлений (а), плотности (б), скорости (в), температуры (г) от координаты для задачи с граничными условиями (6) и кусочно-постоянным профилем тепловыделения ($q = 0$ при $0 < x < 0.5$, $q = 2$ при $0.5 < x < 1$) для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$ и различных значениях M : 1 – 0, 2 – 1.87, 3 – 2.43; сплошной фон – область тепловыделения.

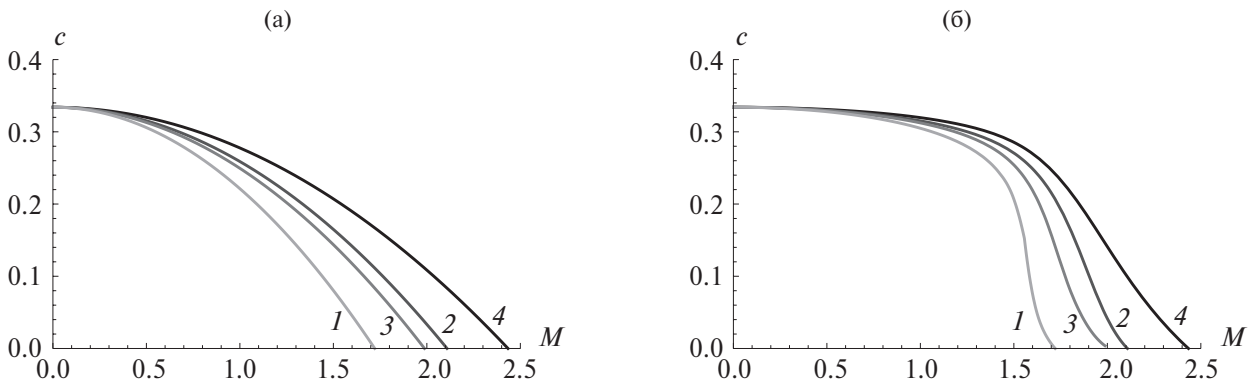


Рис. 5. Зависимости среднего расхода (константы интегрирования) $c = \rho U = \text{const}$ от M при $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$ и различных профилях тепловыделения $q(x)$ для задачи с граничными условиями (6): (а) — для случая идеального газа, (б) — для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса; 1 — $q(x) = 1$; 2 — $q(x) = 2x$; 3 — $q = 0$ при $0 < x < 0.25$, $q = 4/3$ при $0.25 < x < 1$; 4 — $q = 0$ при $0 < x < 0.5$, $q = 2$ при $0.5 < x < 1$.

(рис. 2, 3), выявленные закономерности имеют место в области нагрева.

Графики на рис. 4 иллюстрируют поведение решений при стремлении параметра тепловыделения к критическому. Абсолютная величина градиента плотности на левом конце трубы и температура на правом конце трубы неограниченно возрастают.

ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ

Для жидкости в трубе, являющейся частью трубопровода, вместо условий (6) естественно ставить условия в начале трубы:

$$P|_{x=0} = P_0, \quad T|_{x=0} = T_0, \quad U|_{x=0} = U_0, \quad (15)$$

Система (1), (2), (4), (5) с заданными значениями в начале трубы (15) имеет решение при любых значениях тепловыделения. При постоянном тепловыделении $q(x) = 1$ решение записывается в параметрическом виде (с удельным объемом V в качестве параметра) с помощью формул (7)–(10), где константа $c = \rho_0 U_0$ и $V = V(x)$ определяется из (11) — уравнения четвертой степени по V , имеющего единственный положительный корень.

Графики на рис. 6 иллюстрируют эффект, заключающийся в существовании некоторого критического диапазона значений тепловыделения $M \approx 4$, при котором давление и плотность на конце трубы начинают быстро уменьшаться, а температура — возрастать. Таким образом, эффект запираания тепловой конвекции в пористой среде [13] воспроизводится в задаче о нагреве потока жидкости в сглаженном виде. Здесь проблемы неразрешимости нет (решение существует при любых значениях тепловыделения), но величины меняются сильно: температура возрастает, а плотность убывает (рис. 7).

Графики на рис. 7 приведены для сравнения поведения решений в случае трубы, являющейся частью трубопровода, и для открытой в резервуар трубы (рис. 4).

На рис. 8 приведена зависимость решения от начальной температуры и скорости для задачи с условием (15). При уменьшении начальной температуры (а также при увеличении начальной скорости) участок постоянной температуры, который, по всей видимости, связан с кризисом тепловыделения, сдвигается дальше по трубе, т.е. кризис наступает при большей мощности. При докритическом нагреве температура растет как монотонная функция без точек перегиба.

Если учитывать силу тяжести (обозначим проекцию ускорения свободного падения на ось трубы через g_x), то уравнение (2) нужно заменить на

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\varepsilon U + \lambda \rho g_x.$$

Система (1), (2), (4), (5) при этом также интегрируется в параметрическом виде при постоянной плотности тепловыделения, хотя формулы становятся более громоздкими. Качественное поведение решения при этом не меняется, так как поправки, отвечающие силе тяжести, малы по сравнению с уже приведенными членами. В частности, величина критического тепловыделения для задачи с краевыми условиями (6) не меняется.

СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ КРИТИЧЕСКОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Рассмотрим результаты экспериментального исследования температурных режимов стенки трубы при теплосъеме водой сверхкритическо-

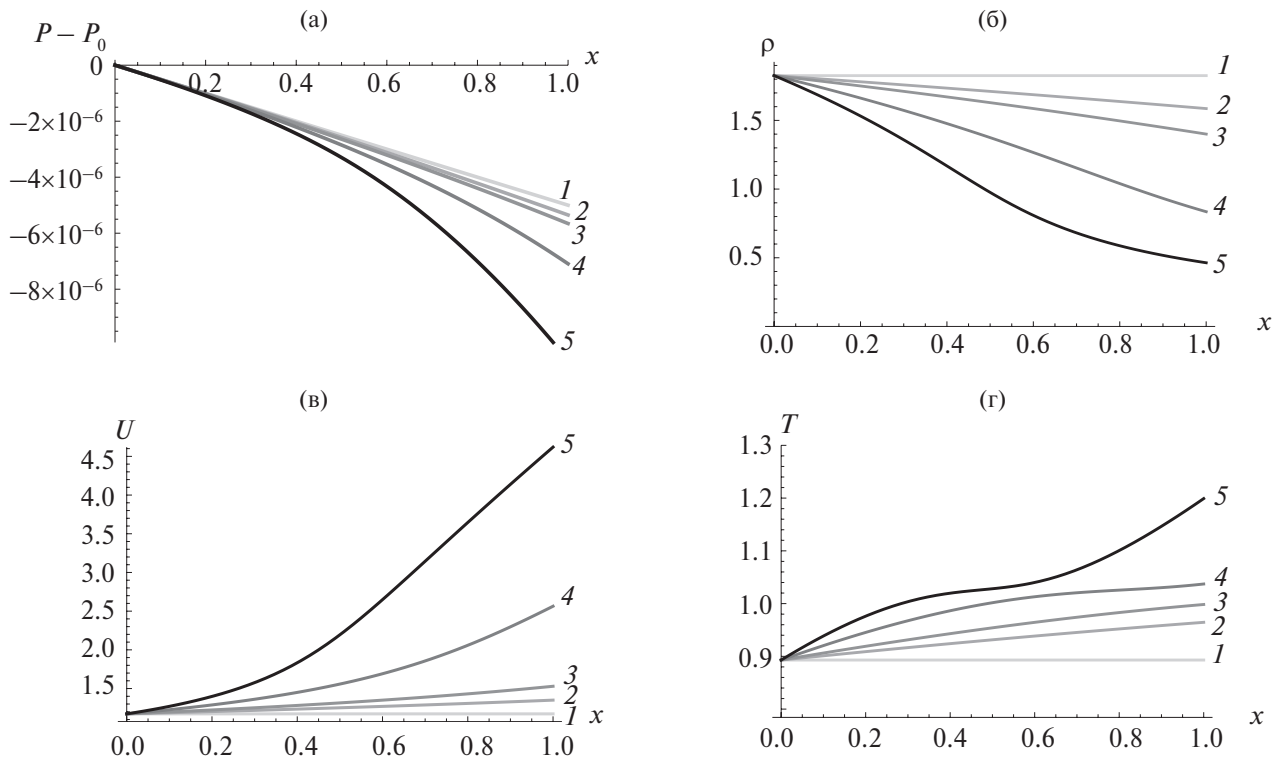


Рис. 6. Зависимости разницы давлений (а), плотности (б), скорости (в), температуры (г) от координаты для задачи с условиями в начале трубы (15) при $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$, $U_0 = 1.17$ и постоянном профиле тепловыделения $q = 1$ для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при различных значениях M : 1 – 0, 2 – 1.72, 3 – 2.22, 4 – 3.22, 5 – 4.22.

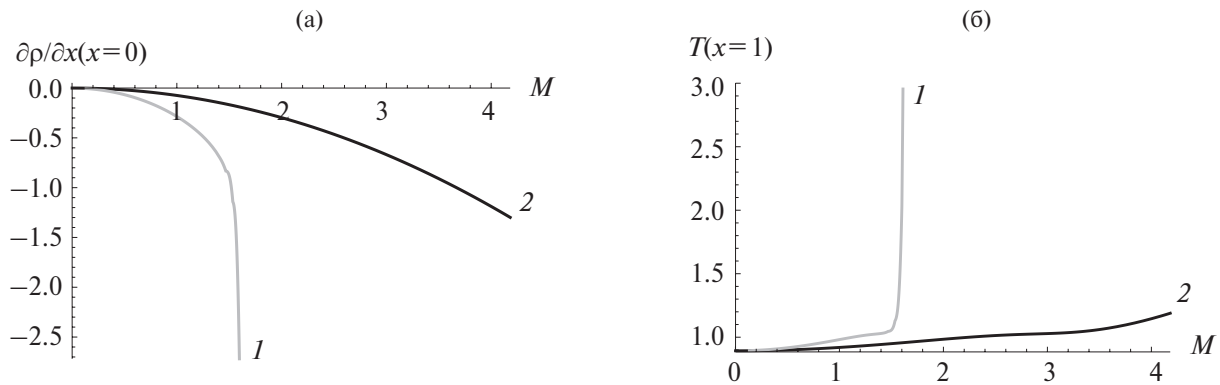


Рис. 7. Зависимости градиента начальной плотности $\partial\rho/\partial x$ при $x = 0$ (а) и конечной температуры T при $x = 1$ (б) от M для задачи с различными условиями для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\delta = 1.42 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $T_0 = 0.88$, $q = 1$ и следующих условиях: 1 – краевые (6), 2 – в начале трубы (15).

го давления (рис. 2 в [3], а также рис. 1, 3 в [4]). Здесь давление в начале потока $P_0 = 245$ бар, что больше критического $P_{\text{crit}} = 221$ бар (свойства воды можно найти в справочниках, например в [17]), диаметр трубы $d = 0.01$ м, длина трубы $L = 1$ м, массовая скорость принимает значение $\bar{\rho}w = 380$ кг/(м² с) [3], а температура жидкости T равна 100 и 375 °С. При сравнении предполагается, что тепловыделение про-

исходит на участке 0.5 м и кризис тепловыделения наступает при плотности теплового потока $q_{\text{exp}} = 0.35 \pm 0.05$ МВт/м² ([3], рис. 2а, $T = 100$ °С и рис. 2б, $T = 300$ °С).

Для обезразмеривания используются следующие характерные масштабы: L – длина трубы; $P_{\text{crit}} = 221$ бар, $\rho_{\text{crit}} = 324$ кг/м³ – критические давление и плотность жидкости (воды) соответственно; $U_{\text{typ}} = \bar{\rho}w / \rho_{\text{crit}}$ – характерная ско-

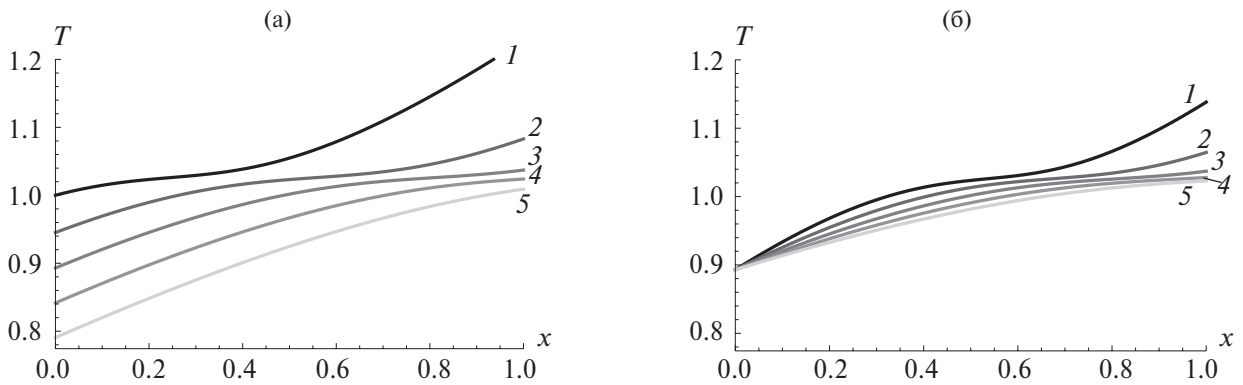


Рис. 8. Зависимости температуры T от координаты для задачи с условиями в начале трубы (15) и $q = 1$ для модели с уравнением Ван-дер-Ваальса при $M = 3.22$, $\varepsilon = 4.26 \times 10^{-6}$, $\kappa = 2 \times 10^{-5}$, $P_0 = 1.11$, $U_0 = 1.17$ и различных значениях начальной температуры (а): 1 – $T_0 = 0.98$, 2 – 0.93, 3 – 0.88, 4 – 0.83, 5 – 0.78; и различных значениях начальной скорости при $T_0 = 0.88$ (б): 1 – $U_0 = 0.97$, 2 – 0.97, 3 – 1.17, 4 – 1.37, 5 – 1.57.

рость, где $\overline{\rho w} = 380 \text{ кг/(м}^2 \text{ с)}$. Безразмерные величины выражаются как

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{U_{\text{typ}}}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{P_{\text{crit}}}.$$

Для безразмерных (и осредненных по сечению трубы) величин \tilde{U} , \tilde{P} уравнение (2) имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} = -\varepsilon \tilde{U}, \quad \varepsilon = \frac{32\eta U_{\text{typ}} L}{d^2 P_{\text{crit}}},$$

где η – динамическая вязкость (подробнее см. Приложение).

Подстановка численных значений для горячей воды при сверхкритическом давлении ($T = 100^\circ\text{C}$, $p = 245 \text{ бар}$, $\eta = 0.27 \times 10^{-3} \text{ Па с}$) дает значение параметра $\varepsilon \approx 4.26 \times 10^{-6}$, т.е. этот параметр достаточно мал, что позволяет строить разложения по методу регулярной теории возмущений.

Расчетная плотность теплового потока, при которой происходит кризис тепловыделения в задаче с условием (6), вычисляется по формуле $q_{\text{theor}} = M_{\text{typ}}^2 M_{\text{cr}}^2 d / 4$, где $M_{\text{typ}}^2 = P_{\text{crit}} \overline{\rho w} / (\rho_{\text{crit}} L)$, а критическая безразмерная величина M_{cr}^2 определяется по формуле (14). Тогда

$$q_{\text{theor}} = \frac{d}{4L} \frac{2(\beta+1)}{l_q^2} \frac{P_0 \overline{\rho w}}{\rho_{\text{crit}}} \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Потери давления δ вдоль трубы заданы такие же, как были бы в невозмущенном потоке без тепловыделения:

$$\Delta P = 32\eta LU / d^2, \quad \delta = \frac{\Delta P}{P_{\text{crit}}} = \varepsilon \frac{U}{U_{\text{typ}}},$$

так что окончательно для размерной формулы критической плотности тепловыделения получаем (для давления P_0 и скорости U_0 на входе, ди-

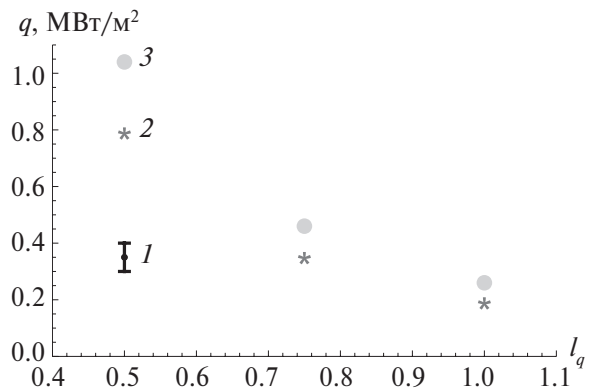


Рис. 9. Зависимость критической плотности тепловыделения от длины участка нагрева: 1 – в эксперименте (рис. 2 в [3]), 2 – рассчитанное по формуле (16) при $T = 100^\circ\text{C}$, 3 – рассчитанное по (16) при $T = 300^\circ\text{C}$.

аметра сечения d и длины трубы L , а также относительной длины участка тепловыделения l_q :

$$q_{\text{theor}} = \frac{(\beta+1)d}{2l_q^2 L} U_0 P_0, \quad (16)$$

Значения критической плотности тепловыделения, предсказанные моделью, приведены в таблице, сравнение с экспериментальными значениями представлено на рис. 9: расчетные критические значения параметра тепловыделения по порядку близки к экспериментальным.

Здесь рассчитаны критические значения тепловыделения для краевой задачи. Для задачи Коши критерий кризиса тепловыделения не такой однозначный, но, по всей видимости, критическое значение M_{cr}^2 можно соотнести с обращением в ноль второй производной температуры в конце участка тепловыделения: $\partial^2 T / \partial x^2|_{x=1} = 0$.

Критическая плотность тепловыделения $q_{\text{теор}}$ (в МВт/м²), рассчитанная по (16)

$T, ^\circ\text{C}$	$l_q = 0.5 \text{ м}$	$l_q = 0.75 \text{ м}$	$l_q = 1.0 \text{ м}$
100	0.8	0.36	0.2
300	1.04	0.46	0.26

Вырождение второй производной температуры соответствует середине участка, на котором температура $T(x)$ почти постоянна (см. рис. 8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для ламинарного течения жидкости в цилиндре получен сглаженный эффект типа запирания потока при сильном энерговыделении. Исследованы величина критического тепловыделения и его зависимость от параметров потока. Сравнение полученных теоретических значений с экспериментальными показывает хорошее согласие.

Авторы благодарны С.Ю. Доброхотову за ценные дискуссии.

Исследование осуществлено частично по теме госзадания (номер госрегистрации 124012500442-3), частично в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и частично в рамках выполнения госзадания НИЦ «Курчатовский институт».

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД АНАЛОГА ЗАКОНА ДАРСИ ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

Рассмотрим уравнение Навье–Стокса, описывающее поведение жидкости в цилиндре длины L с круглым сечением диаметра d , где x — координата вдоль оси, а плоскость Oyz параллельна сечению трубы [14]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\text{grad } p - \eta \Delta \mathbf{v} - \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v} \right) = 0. \quad (17)$$

Здесь неизвестные величины давление p , вектор скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ и плотность ρ являются функциями координат (x, y, z) ; динамическая и кинематическая вязкости η и ζ заданы и постоянны; на границе ставится условие прилипания $\mathbf{v}|_{y^2+z^2=d^2/4} = 0$.

Рассмотрим стационарный поток ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$) в режиме ламинарного течения, так что формируется течение Пуазейля [14]. Учтено также, что длина цилиндра много больше диаметра ($x \in [0, L]$, $\epsilon = d/L \ll 1$). В этом случае попе-

речные компоненты скорости вместе с их производными малы, так что вектор скоростей приближенно (с точностью до малых поправок порядка $O(\epsilon)$ в уравнении) можно считать равным $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$. Более того, в силу условий прилипания на стенках ($u|_{y^2+z^2=d^2/4} = 0$) продольная производная скорости много меньше поперечных: $\partial u / \partial x \ll \partial u / \partial y = \partial u / \partial z$. В результате (17) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = O(\epsilon), \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = O(\epsilon), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = O(\epsilon).$$

Из (18) получаем, что p в основном не зависит от y, z , так что уравнение движения можно проинтегрировать по сечению:

$$p = p_0(x) + O(\epsilon), \quad u = u_0(x, y, z) + O(\epsilon),$$

$$u_0(x, y, z) = \frac{k(x)}{4\eta} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 - z^2 \right), \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = -k(x).$$

Перейдем к величинам, осредненным по сечению трубы $S = \{y^2 + z^2 \leq d^2/4\}$, и получим с точностью до $O(\epsilon)$

$$U(x) = \frac{4}{\pi d^2} \iint_S u_0(x, y, z) dS =$$

$$= 2\pi \frac{4}{\pi d^2} \frac{k(x)}{4\eta} \int_0^{d/2} \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right) r dr = \frac{k(x)d^2}{32\eta},$$

$$P(x) = \frac{4}{\pi d^2} \iint_S p_0(x) dS = p_0(x).$$

Окончательно для осредненных величин получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{32\eta}{d^2} U + O(\epsilon). \quad (19)$$

Наконец, заметим, что параметр ϵ , используемый при выводе уравнения (19), отличается от ϵ , по которому построено асимптотическое решение системы (1), (2), (4), (5). Поправки $O(\epsilon)$ можно также учесть по регулярной теории возмущения.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (1), (2), (4), (5)

Интегрируя второе уравнение (1) в системе, получаем (10), где константа интегрирования c определяется из граничных условий: для условий в начале трубы (15) $c = U_0/V_0$, а при постановке краевых условий (6) для ее определения нужно сначала проинтегрировать все уравнения системы.

Теперь подставим $U = cV$ в уравнение (2), что дает

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\varepsilon cV, \quad (20)$$

и перепишем уравнение (5) следующим образом (с учетом переобозначений $B = \beta + 1$, $h = a\beta - a$, $f = 2a\beta$, $g = b\beta$):

$$c \frac{\partial V}{\partial x} \left(BP - \frac{h}{V^2} + \frac{f}{V^3} + \kappa c^2 V \right) - \varepsilon c^2 V (BV - g) = M^2. \quad (21)$$

Рассмотрим случай $M^2 > 0$. Тогда решение системы выписывается в параметрическом виде, например, с параметром V . Для этого из (20) и (21) получим

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\varepsilon c^2 \frac{BPV + \kappa c^2 V^2 - \frac{h}{V} + \frac{f}{V^2}}{M^2 + \varepsilon c^2 V (BV - g)}. \quad (22)$$

После интегрирования этого уравнения из (21) получаем $V(x)$, что завершит решение системы.

Теперь выпишем асимптотические формулы решения. Будем искать асимптотики методом регулярной теории возмущений – в виде рядов по малому параметру $0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\begin{aligned} P(x, \varepsilon) &= P_0 - \varepsilon \Pi(x) + \varepsilon^2 \Pi_1(x) + \dots, \\ V(x, \varepsilon) &= V(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots, \\ U(x, \varepsilon) &= U(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots, \\ T(x, \varepsilon) &= T(x) + \varepsilon t_1(x) + \dots \end{aligned}$$

(поскольку давление вдоль потока падает, то перед слагаемым $\Pi(x) > 0$ ставится знак «минус»). Подставляя эти ряды в уравнения (20), (21) и приравнявая нулю слагаемые при одинаковых степенях ε , получаем цепочку уравнений для последовательного определения функций $\Pi(x)$, $V(x)$, ..., $\pi_1(x)$, Как будет видно из дальнейшего, скорость ограничена $U(x, \varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ даже при критических значениях энерговыделения, поэтому $P = P_0 + O(\varepsilon)$, $P_x = O(\varepsilon)$.

Старшие члены (по параметру ε) в системе (21), (22) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial V} &= \frac{c^2}{M^2} \left(BP_0 V + \kappa c^2 V^2 - \frac{h}{V} + \frac{f}{V^2} \right), \\ c \frac{\partial V}{\partial x} \left(BP_0 - \frac{h}{V^2} + \frac{f}{V^3} + \kappa c^2 V \right) &= M^2, \end{aligned}$$

что с учетом начальных условий

$$P|_{x=0} = P_0, \quad \Pi|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=0} = V_0 = RT_0 / P_0$$

интегрируется следующим образом (верхний и нижний индексы за квадратными скобками означают подстановку для V):

$$\begin{aligned} \Pi(V) &= \frac{c^2}{M^2} \left[\frac{BP_0}{2} V^2 + \kappa \frac{c^2}{3} V^3 - h \ln V - \frac{f}{V} \right]_{V_0}^V, \\ c \left[BP_0 V + \frac{h}{V} - \frac{f}{2V^2} + \kappa c^2 \frac{V^2}{2} \right]_{V_0}^{V(x)} &= M^2 x. \end{aligned}$$

После этого можно определить константу интегрирования c из условия

$$P|_{x=1} = P_1 = e^{-\delta} = P_0 - \delta + O(\varepsilon^2),$$

$$\Pi|_{x=1} = \delta / \varepsilon = O(1),$$

т.е. из системы для c и V_1 :

$$\begin{aligned} M^2 \Pi(V_1) &= \\ &= c^2 \left[\frac{BP_0}{2} V^2 + \kappa \frac{c^2}{3} V^3 - h \ln V - \frac{f}{V} \right]_{V_0}^{V_1} = \frac{M^2 \delta}{\varepsilon}, \\ c \left[BP_0 V + \frac{h}{V} - \frac{f}{2V^2} + \kappa c^2 \frac{V^2}{2} \right]_{V_0}^{V_1} &= M^2. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силин В.А., Семченков Ю.М., Алексеев П.Н., Митькин В.В., Зорин В.М., Хлопов Р.А. Проблемы перехода на сверхкритические параметры теплоносителя в ядерной энергетике // Атомная энергия. 2014. Т. 117. № 5. С. 254.
2. Авраменко А.А., Ковецкая М.М., Кравчук А.В., Ковецкая Ю.Ю. Перспективные исследования инновационных технологий ядерных энергетических установок // Пром. теплотехника. 2016. Т. 38. № 4. С. 47.
3. Алексеев Г.В., Силин В.А., Смирнов А.М., Субботин В.И. Исследование температурных режимов стенки трубы при теплосъеме водой сверхкритического давления // ТВТ. 1976. Т. 14. № 4. С. 769.
4. Силин В.А., Семченков Ю.М., Алексеев П.Н., Митькин В.В. Исследование теплообмена и гидравлического сопротивления при течении воды сверхкритических параметров применительно к реакторным установкам // Атомная энергия. 2010. Т. 108. № 6. С. 340.
5. Рютин С.Б., Ямпольский А.Д., Скрипов П.В. Теплоперенос в сверхкритической воде при импульсном изобарном нагреве // ТВТ. 2014. Т. 52. № 3. С. 481.
6. Rutin S.B., Igolnikov A.A., Skripov P.V. High-Power Heat Release in Supercritical Water: Insight into the Heat Transfer Deterioration Problem // J. Eng. Thermophys. 2020. V. 29. № 1. P. 67.
7. Рютин С.Б., Скрипов П.В. Теплоперенос в сверхкритических флюидах: согласование результатов импульсных и стационарных опытов // ТВТ. 2021. Т. 59. № 2. С. 203.

8. *Skrpov P., Rutin S., Lin Chen.* Short-term Supercritical Heat Transfer: In Memory of Anneke Levelt Sengers // *J. Supercrit. Fluids.* 2025. V. 218. 106516.
9. *Авраменко А.А., Ковецкая М.М., Кондратьева Е.А., Тыринов А.И.* Исследование режимов ухудшенного теплообмена при течении воды сверхкритических параметров в вертикальной трубе // *Пром. теплотехника.* 2015. Т. 37. № 1. С. 25.
10. *Авраменко А.А., Ковецкая М.М., Кондратьева Е.А., Тыринов А.И.* Теплообмен при течении воды сверхкритического давления в трубе в режимах с изменением тепловой нагрузки // *Пром. теплотехника.* 2016. Т. 38. № 1. С. 15.
11. *Грабежная В.А., Кириллов П.Л.* Граница ухудшения теплообмена при течении сред сверхкритического давления // *Атомная энергия.* 2006. Т. 101. № 4. С. 262.
12. *Абдулагатов И.М., Скрипов П.В.* Термодинамические и транспортные свойства сверхкритических флюидов. Ч. 2. Транспортные свойства // *Сверхкритические флюиды: теория и практика.* 2020. Т. 15. № 4. С. 3.
13. *Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г.* Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1988. 144 с.
14. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 235 с.
15. *Баженова Т.В., Знаменская И.А., Луцкий А.Е., Мурсенкова И.В.* Исследование поверхностного энерговклада в газ при инициировании наносекундного распределенного скользящего разряда // *ТВТ.* 2007. Т. 45. № 4. С. 580.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ. для вузов. Т. 10. Ч. I. М.: Физматлит, 2002. 616 с.
17. *Wagner W., Pruß A.* The IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* 2002. V. 31. P. 387.