

УДК 537.2, 532.6

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ

© 2024 г. А. Б. Петрин

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

E-mail: a_petrin@mail.ru

Поступила в редакцию 01.02.2024 г.

После доработки 19.04.2024 г.

Принята к публикации 23.04.2024 г.

Рассмотрена трехмерная задача определения электрического поля заряженной проводящей осесимметричной капли, смачивающей диэлектрическую пленку, нанесенную на заземленную проводящую подложку. Обсуждается метод нахождения сингулярности электрического поля на линии смачивания и ее учет при вычислении электрического поля в трехмерной задаче. Предложен метод нахождения электрической емкости капли.

DOI: 10.31857/S0040364424050104

ВВЕДЕНИЕ

На проводящую жидкость во внешнем электрическом поле дополнительно действуют электрические силы, которые позволяют управлять смачиванием. С явлением электросмачивания связаны важные приложения, среди которых, например, интенсификация теплообмена электрическими полями в двухфазных системах [1, 2], управление каплями жидкостей в микроэлектронных устройствах [3–6], создание линз с электрически изменяемым фокусным расстоянием [7, 8], разработка управляемых напряжением переключателей [9], устройств для электрокапиллярного удаления тонких пленок [10]. Однако увеличение управляющего электрического поля до некоторого уровня приводит к развитию различного рода неустойчивостей вблизи мениска. В частности, экспериментальные исследования смачивания проводящей каплей диэлектрической пленки показывают, что с увеличением заряда капли угол смачивания уменьшается и смачивание капель поверхности улучшается. Однако при достижении некоторого заряда капли линия смачивания дестабилизируется и возникают различные нестационарные процессы — отрыв от линии смачивания мелких капель и электрические разряды на возмущениях мениска [11]. Такие явления связаны с большими электрическими полями вблизи линии смачивания. Поэтому исследование электрического поля на линии смачивания является центральным для понимания указанных явлений.

Большие электрические поля вблизи линии смачивания связаны с тем, что локально геометрически линия смачивания является местом стыка трех диэлектрических клиньев и, вообще говоря, местом сингулярности электрического поля. Сингулярности электрического поля такого рода исследовались в связи с расчетом электромагнитных полей в антенных устройствах [12–14].

В работе [15] рассматривалась задача асимптотики электрического поля вблизи линии смачивания диэлектрика проводящей жидкостью в области, где жидкость можно считать проводящим клином с углом, равным углу смачивания. Было показано, что асимптотически, несмотря на сингулярность электрического поля на линии смачивания, искажением большей части свободной поверхности жидкости под действием электрического поля можно пренебречь. На асимптотический угол смачивания сингулярность электрического поля влияния не оказывает.

Целью настоящей работы является решение практически важной задачи — нахождения электрического поля вокруг проводящей капли, расположенной на диэлектрической подложке, с учетом сингулярности электрического поля на линии смачивания. В частности, будет показано, что на свободной поверхности капли поверхностная плотность электрического заряда не является постоянной величиной и, следовательно, представления о постоянном коэффициенте поверхностного натяжения жидкости в электрическом поле являются, вообще говоря, приближением.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе сначала исследуется характер сингулярности электрического поля в малой окрестности линии смачивания, а затем находится трехмерное распределение электрического поля вблизи симметричной проводящей капли, смачивающей поверхность диэлектрической пленки, расположенной на проводящей заземленной подложке (геометрия задачи показана на рис. 1 сечением, проходящим через ось симметрии). Капля находится под постоянным напряжением U относительно заземленной подложки. Капля проводящая, поэтому электрическое поле внутри капли равно нулю, а свободные электрические заряды находятся только на ее поверхности ([16], гл. 5, § 9). При этом в данной работе не учитывается искажение формы поверхности капли из-за электрических сил, считая напряжение и эти силы достаточно малыми. Также считается, что электрическое поле никак не искажает плоские границы диэлектрической пленки и подложки. Кроме того, для определенности пренебрегаем влиянием силы тяжести на сферическую форму свободной поверхности капли, хотя предлагаемый общий метод применим также и для симметричной капли сложной формы.

Введем следующие обозначения: ψ — угол смачивания; h — толщина пленки; ϵ_f , ϵ_p — диэлектрические проницаемости свободного пространства и пленки соответственно. Диэлектрическая проницаемость ϵ_d проводящей подложки считается бесконечной величиной. Выбор системы координат показан на рис. 1.

СИНГУЛЯРНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЛИНИИ СМАЧИВАНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТИ ДИЭЛЕКТРИКА

Прежде чем рассматривать задачу на рис. 1, рассмотрим малую окрестность линии смачивания трехмерной капли. В этой малой окрестности линии смачивания задачу можно считать двумерной и представить эту окрестность клином мениска проводящей жидкости с углом смачивания ψ , который расположен на поверхности полупространства, заполненного диэлектриком с проницаемостью ϵ_p . При этом свободное пространство заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ_f . Найдем характер сингулярности электрического поля на линии смачивания, рассматривая соответствующую двумерную задачу, геометрия которой показана на рис. 2.

Известно, что потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа и не зависящий от координаты вдоль образующей клина, может быть

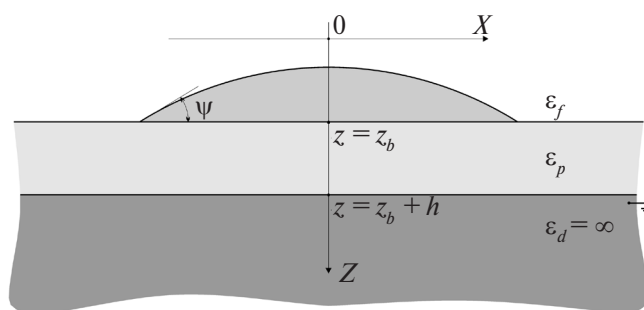


Рис. 1. Проводящая капля на диэлектрической пленке, расположенной на проводящей подложке.

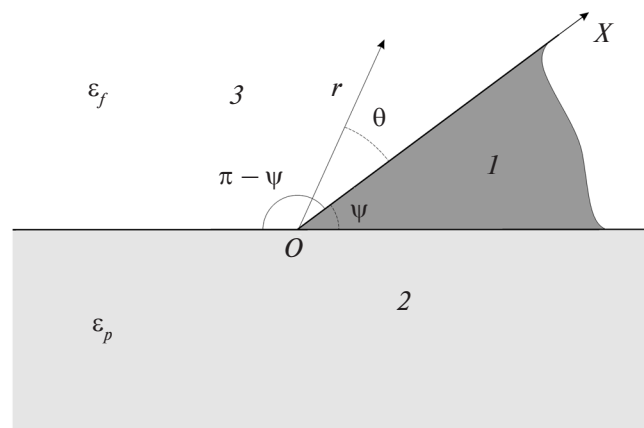


Рис. 2. Мениск проводящей жидкости (I) на плоской поверхности диэлектрика (2) с диэлектрической проницаемостью ϵ_p в окрестности линии смачивания; свободное пространство (3) имеет диэлектрическую проницаемость ϵ_f .

представлен [17] комбинацией линейно независимых решений $r^\beta \sin(\beta\theta)$ и $r^\beta \cos(\beta\theta)$, где β — константа; θ — полярный угол, отсчитываемый от оси OX (рис. 2); r — радиальная координата, отсчитываемая от начала координат O (от образующей клина). Общие решения потенциала с одинаковой асимптотикой поля в окрестности линии смачивания в свободном пространстве и диэлектрике можно представить (опуская постоянные части потенциала) в виде выражений

$$\phi_f = A_f r^\beta \sin(\beta\theta) + B_f r^\beta \cos(\beta\theta),$$

$$\phi_p = A_p r^\beta \sin(\beta\theta) + B_p r^\beta \cos(\beta\theta),$$

где A_f, B_f, A_p, B_p — константы.

Тогда на границе со стороны свободного пространства и диэлектрической полуплоскости тангенциальные и нормальные компоненты электрического поля можно записать соответственно в виде

$$E_{f,\tau} = -\frac{\partial \phi_f}{\partial r} = -\beta r^{\beta-1} (\sin(\beta\theta) A_f + \cos(\beta\theta) B_f),$$

$$E_{p,\tau} = -\frac{\partial \varphi_p}{\partial r} = -\beta r^\beta (\sin(\beta\theta)A_p + \cos(\beta\theta)B_p),$$

$$E_{f,\theta} = -\frac{\partial \varphi_f}{r\partial\theta} = -\beta r^{\beta-1} (\cos(\beta\theta)A_f - \sin(\beta\theta)B_f),$$

$$E_{p,\theta} = -\frac{\partial \varphi_p}{r\partial\theta} = -\beta r^{\beta-1} (\cos(\beta\theta)A_p - \sin(\beta\theta)B_p).$$

На этой границе (при $\theta = \theta_b = \pi - \psi$) должны быть непрерывны тангенциальные компоненты поля и нормальные компоненты электрической индукции. Тогда получаем

$$\begin{cases} \sin[\beta(\pi - \psi)]A_f + \cos[\beta(\pi - \psi)]B_f - \\ -\sin[\beta(\pi - \psi)]A_p - \cos[\beta(\pi - \psi)]B_p = 0, \\ -\varepsilon_f \cos[\beta(\pi - \psi)]A_f + \varepsilon_f \sin[\beta(\pi - \psi)]B_f + \\ +\varepsilon_p \cos[\beta(\pi - \psi)]A_p - \varepsilon_p \sin[\beta(\pi - \psi)]B_p = 0. \end{cases} \quad (1)$$

На границах проводящей жидкости, при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi - \psi$, тангенциальные компоненты электрического поля равны нулю, следовательно:

$$B_f = 0, \quad \sin[\beta(2\pi - \psi)]A_p + \cos[\beta(2\pi - \psi)]B_p = 0. \quad (2)$$

Используя уравнения (2), из (1) получаем

$$\begin{cases} \sin[\beta(\pi - \psi)]A_f - \{\sin[\beta(\pi - \psi)] - \\ -\cos[\beta(\pi - \psi)]\operatorname{tg}[\beta(2\pi - \psi)]\}A_p = 0, \\ -\varepsilon_f \cos[\beta(\pi - \psi)]A_f + \varepsilon_p \{\cos[\beta(\pi - \psi)] + \\ + \sin[\beta(\pi - \psi)]\operatorname{tg}[\beta(2\pi - \psi)]\}A_p = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Приравнявая детерминант системы уравнений (3) к нулю, после несложных преобразований находим условие существования нетривиального решения данной задачи

$$\varepsilon_p \sin[\beta(\pi - \psi)]\cos(\beta\pi) + \varepsilon_f \cos[\beta(\pi - \psi)]\sin(\beta\pi) = 0. \quad (4)$$

Из (4) видно, что показатель степени β есть функция угла при вершине проводящего клина ψ и отношения диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_p/\varepsilon_f$.

Трансцендентное уравнение (4) решалось численно. Интерес представляют решения в интервале $0 < \beta < 1$. При этом электрическое поле имеет сингулярность $E \sim r^{\beta-1}$ с интегрируемой плотностью электрической энергии. В этом интервале решение (4) единственно. Это легко проверяется, например, графически.

Отметим, что (4) имеет счетное число решений. Решения $\beta < 0$ имеют асимптотику вблизи

образующей клина $E \sim r^{\beta-1}$. Полная энергия такого электрического поля равна бесконечности (интеграл от плотности электрической энергии, которая пропорциональна E^2 , расходится). Поэтому решения (4) при $\beta < 0$ отбрасываются как нефизичные. Решения $\beta > 1$ дают электрическое поле, которое стремится к нулю на образующей клина и стремится к бесконечности при удалении от образующей. Эти решения не описывают сингулярное асимптотическое поле и тоже отбрасываются.

Зависимость единственного решения $\beta = \beta(\psi, \varepsilon_p/\varepsilon_f)$ в интервале $0 < \beta < 1$ как функции угла смачивания ψ и отношения $\varepsilon_p/\varepsilon_f$ анализировалась в работе [18]. Было показано, что при любых углах смачивания ψ , кроме случая вырождения $\psi = \pi$, и любых отношениях $\varepsilon_p/\varepsilon_f$ электростатическое поле имеет в окрестности линии смачивания интегрируемое сингулярное решение, причем это решение единственное. В частном случае при $\psi \rightarrow 0$ показатель β при любых $\varepsilon_p/\varepsilon_f$ уменьшается и стремится к $1/2$.

Итак, для общего случая при фиксированных ψ и $\varepsilon_p/\varepsilon_f$ значение $\beta = \beta(\psi, \varepsilon_p/\varepsilon_f)$ в интервале $0 < \beta < 1$ находится однозначно. Найдем зависимость поверхностной плотности заряда σ от r на двух поверхностях проводящего клина. Учитывая, что из теоремы Гаусса на поверхности проводника нормальная составляющая поля равна $E_n = \sigma/\varepsilon_0$, получаем выражение для поверхностной плотности на грани клина при $\theta = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \varepsilon_f \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_f \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=0} = \\ &= \varepsilon_f \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{r} (A_f r^\beta \beta \cos(\beta\theta) - B_f r^\beta \beta \sin(\beta\theta)) \right) \Big|_{\theta=0} = \\ &= -\varepsilon_f \varepsilon_0 \beta A_f r^{\beta-1}. \end{aligned}$$

На второй грани клина в диэлектрике (учитывая направление нормали на этой поверхности) при $\theta = 2\pi - \psi$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \varepsilon_p \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_p \varepsilon_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=2\pi-\psi} = \varepsilon_p \varepsilon_0 E_n = \\ &= \varepsilon_p \varepsilon_0 \beta r^{\beta-1} (A_p \cos(\beta(2\pi - \psi)) - B_p \sin(\beta(2\pi - \psi))) \end{aligned}$$

и, учитывая, что из (2) имеем

$$\sin[\beta(2\pi - \psi)]A_p + \cos[\beta(2\pi - \psi)]B_p = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \varepsilon_p \varepsilon_0 \beta r^{\beta-1} A_p (\cos(\beta(2\pi - \psi)) + \\ &+ \operatorname{tg}(\beta(2\pi - \psi)) \sin(\beta(2\pi - \psi))) = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_0 \beta r^{\beta-1} A_p}{\cos(\beta(2\pi - \psi))}. \end{aligned}$$

Выражая A_p через A_f из первого уравнения системы (3), находим

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_0 \beta r^{\beta-1} A_p}{\cos(\beta(2\pi - \psi))} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_0 \beta r^{\beta-1} A_f \sin[\beta(\pi - \psi)]}{\sin[\beta(\pi - \psi)] \cos(\beta(2\pi - \psi)) - \cos[\beta(\pi - \psi)] \sin(\beta(2\pi - \psi))}.$$

Таким образом, если ввести константу $C_f = -\varepsilon_f \varepsilon_0 \beta A_f$, плотности заряда на двух гранях клина представляются формулами

$$\sigma_f = r^{\beta-1} C_f, \quad \sigma_p = g r^{\beta-1} C_f,$$

где константа g определяется выражением

$$g = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_f} \frac{\sin[\beta(\pi - \psi)]}{\cos[\beta(\pi - \psi)] \sin(\beta(2\pi - \psi)) - \sin[\beta(\pi - \psi)] \cos(\beta(2\pi - \psi))}. \quad (5)$$

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

Перейдем к трехмерной осесимметричной задаче о нахождении электрического поля проводящей капли, находящейся на диэлектрической пленке, которая лежит на проводящей подложке (см. рис. 1). Обобщенный метод зеркальных отражений для задачи нахождения электрического поля от заряженного тела, расположенного рядом с плоскостной структурой, состоящей из одной пленки, был развит в работе [19]. Применим этот метод отражений к рассматриваемой задаче.

Пусть распределение зарядов на проводящей капле известно и потенциал этих зарядов в свободном пространстве перед пленкой можно представить функцией $\Phi_s(x, y, z)$. Тогда полный потенциал $\Phi_t(x, y, z)$ зарядов капли и индуцированных зарядов в свободном пространстве выражается формулой [19]

$$\begin{aligned} \Phi_t(x, y, z) = & \Phi_s(x, y, z) + \\ & + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \Phi_s(x, y, 2z_b + 2mh - z), \end{aligned} \quad (6)$$

где z_b — координата передней границы пленки (см. рис. 1),

$$a = -4\varepsilon_p \varepsilon_f / (\varepsilon_p + \varepsilon_f)^2, \quad b = (\varepsilon_p - \varepsilon_f) / (\varepsilon_p + \varepsilon_f).$$

Потенциал внутри пленки $\Phi_p(x, y, z)$ при $z_b \leq z \leq (z_b + h)$ можно представить формулой [19]

$$\Phi_p(x, y, z) = \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} (\Phi_s(x, y, z) -$$

$$\begin{aligned} & -\Phi_s(x, y, 2(z_b + h) - z)) + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} [\Phi_s(x, y, 2(z_b + (m+1)h) - z) - \\ & - \Phi_s(x, y, z + 2mh)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Итак, если заряженная проводящая капля расположена рядом с пленкой (см. рис. 1), то полный потенциал Φ_t в свободном пространстве должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta \Phi_t = 0$. Кроме того, на плоской границе пленки должны быть непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля и нормальные составляющие электрической индукции. Как было строго показано в [19], потенциал Φ_p , удовлетворяющий таким граничным условиям, в пространстве между пленкой и каплей выражается через Φ_s формулой (6), а потенциал внутри пленки Φ_p — формулой (7). При этом граничные условия на двух поверхностях пленки выполняются автоматически.

Потенциал поверхности проводящей капли должен быть постоянной величиной (обозначим его U). Тогда задача определения потенциала во всем пространстве состоит в том, чтобы найти такой потенциал $\Phi_s(x, y, z)$, при котором полный потенциал $\Phi_t(x, y, z)$, выражаемый формулой (6), удовлетворял на проводящей поверхности капли условию $\Phi_t = U$. Это можно сделать, разложив потенциал $\Phi_s(x, y, z)$ в ряд по подходящим гармоническим функциям, удовлетворяющим уравнению Лапласа, а коэффициенты разложения определить из условия $\Phi_t = U$ на эквивалентной границе проводящей капли.

Найдем указанные гармонические функции. Сначала определим поверхность проводящей капли параметрическими функциями $r = r(s)$ и

$z = z(s)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки на поверхности капли с координатами (x, y, z) до оси Z ; s – длина дуги образующей, отсчитываемой от точки капли на оси Z , ближайшей к пленке. Полную длину дуги образующей обозначим $S_{\max}$ (рис. 3).

Поле снаружи проводящей капли определяется зарядом, распределенным по поверхности. Пусть поверхностная плотность заряда определяется функцией $\sigma = \sigma(s)$. Найдем потенциал капли (по заданному распределению $\sigma = \sigma(s)$) в предположении, что капля расположена в безграничном свободном пространстве, а пленки с подложкой рядом нет. Рассмотрим кольцо толщиной ds и радиусом $r_s(s)$ на поверхности капли. Кольцо в силу осевой симметрии задачи равномерно заряжено, причем полный заряд кольца равен $dq = 2\pi r_s(s)\sigma(s)ds$. Электростатическое поле равномерно заряженного кольца определяется с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции. Результат вычисления потенциала кольца в точке с координатами (r, z) можно выразить в системе СИ через полный эллиптический интеграл первого рода [20]:

$$d\varphi = \frac{dq}{2\pi^2 \epsilon_f \epsilon_0} \frac{K(\tau)}{\sqrt{(r+r_s(s))^2 + (z-z_s(s))^2}},$$

$$\tau = 2\sqrt{rr_s(s)} / \sqrt{(r+r_s(s))^2 + (z-z_s(s))^2},$$

где ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; $K(\tau) = \int_0^{\pi/2} (1 - \tau^2 \sin^2 \zeta)^{-1/2} d\zeta$ – полный эллиптический интеграл первого рода, который можно выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса по формуле $K(\tau) = (\pi/2)F(1/2, 1/2, 1, \tau^2)$ [21].

Тогда полный трехмерный потенциал в точке (x, y, z) снаружи капли, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma(s)$, определяется интегралом

$$\Phi_s(x, y, z) = \frac{1}{\pi \epsilon_f \epsilon_0} \int_0^{S_{\max}} \frac{\sigma(s)r_s(s)ds}{\sqrt{(r+r_s(s))^2 + (z-z_s(s))^2}} \times$$

$$\times K\left(\frac{2\sqrt{rr_s(s)}}{\sqrt{(r+r_s(s))^2 + (z-z_s(s))^2}}\right). \quad (8)$$

Далее определяются гармонические функции для представления искомого потенциала $\Phi_s(x, y, z)$. Плотность заряда $\sigma(s)$ раскладывается по подходящим функциям, которые для разложения искомого потенциала определяют гармонические функции интегралами типа (8).

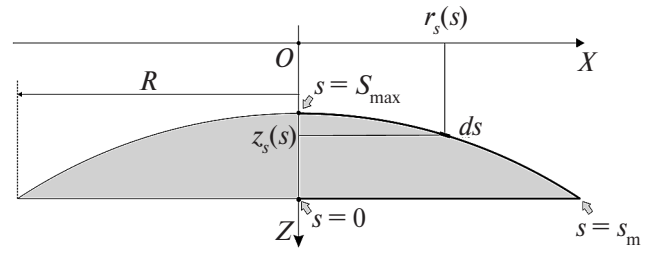


Рис. 3. Параметризация поверхности симметричной капли.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным величинам. Введем безразмерные координаты $\tilde{x} = x/R$, $\tilde{y} = y/R$, $\tilde{z} = z/R$, где R – радиус капли (радиус линии смачивания). Аналогично, введем безразмерную длину дуги $\tilde{s} = s/R$ и безразмерный потенциал $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi/U$, а также безразмерную плотность заряда $\tilde{\sigma} = (R/\epsilon_0 U)\sigma$. Тогда граничное условие на поверхности проводящей капли записывается в виде $\tilde{\Phi}_t = 1$, а безразмерный потенциал $\tilde{\Phi}_s$ выражается формулой

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{\pi \epsilon_f} \int_0^{\tilde{S}_{\max}} \frac{\tilde{\sigma}(\tilde{s})\tilde{r}_s(\tilde{s})d\tilde{s}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_s(\tilde{s}))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_s(\tilde{s}))^2}} \times$$

$$\times K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{r}\tilde{r}_s(\tilde{s})}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_s(\tilde{s}))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_s(\tilde{s}))^2}}\right),$$

причем формулы (6) и (7) переходят в аналогичные для безразмерных потенциалов с заменой размерных величин на безразмерные.

В рассматриваемом осесимметричном случае (см. рис. 1) для выполнения граничного условия $\tilde{\Phi}_t = 1$ на поверхности проводящей капли достаточно удовлетворить его на линии пересечения поверхности капли с любой плоскостью симметрии (см. рис. 3), проходящей через ось Z (удовлетворить условию $\tilde{\Phi}_t = 1$ на образующей поверхности вращения). В качестве такой плоскости выберем плоскость $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при $\tilde{y} = 0$. Более того, достаточно удовлетворить граничному условию $\tilde{\Phi}_t(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$ только на границе пересечения полуплоскости $\tilde{y} = 0$ при $\tilde{x} \geq 0$ и поверхности капли.

Разложим плотность заряда $\tilde{\sigma}(\tilde{s})$ следующим образом:

$$\tilde{\sigma}(\tilde{s}) = \sum_{k=1}^N A_k \cos((k-1)\pi\tilde{s}/\tilde{S}_{\max}) + A_{N+1}\chi(\tilde{s}), \quad (9)$$

где A_k , A_{N+1} – постоянные коэффициенты разложения, а функция $\chi(\tilde{s})$ при заданном на рис. 3 направлении отсчета $\tilde{s}$ определяется следующим выражением:

$$\chi(\tilde{s}) = \begin{cases} (\tilde{s} - \tilde{s}_m)^{\beta(\psi, \varepsilon_p/\varepsilon_f)-1}, & \tilde{s} > \tilde{s}_m, \\ g(\tilde{s}_m - \tilde{s})^{\beta(\psi, \varepsilon_p/\varepsilon_f)-1}, & \tilde{s} < \tilde{s}_m. \end{cases}$$

Здесь $\beta(\psi, \varepsilon_p/\varepsilon_f)$ – корень уравнения (4) из интервала $0 < \beta < 1$ при заданном угле смачивания ψ и отношении $\varepsilon_p/\varepsilon_f$; $\tilde{s}_m = 1$ – длина дуги образующей в безразмерных единицах, соответствующей точке пересечения образующей с линией смачивания. Константа g в выражении для $\chi(\tilde{s})$ определяется формулой (5) для заданных ψ и $\varepsilon_p/\varepsilon_f$. Таким образом, последний член разложения (9) позволяет правильно учесть сингулярность электрического поля (и по теореме Гаусса – поверхностной плотности заряда) на линии смачивания.

Тогда потенциал снаружи тела $\tilde{\Phi}_s$ можно представить следующим разложением по $(N+1)$ -й гармонической функции:

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{k=1}^N A_k \tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) + A_{N+1} \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}),$$

где при $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}}_k(\tilde{r}, \tilde{z}) &= \frac{1}{\pi \varepsilon_f} \int_0^{\tilde{s}_{\max}} \cos\left(\frac{(k-1)\pi \tilde{s}}{\tilde{s}_{\max}}\right) \times \\ &\times \frac{\tilde{r}_s(\tilde{s}) d\tilde{s}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_s(\tilde{s}))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_s(\tilde{s}))^2}} \times \\ &\times K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{r}\tilde{r}_s(\tilde{s})}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_s(\tilde{s}))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_s(\tilde{s}))^2}}\right), \\ \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\tilde{r}, \tilde{z}) &= \frac{1}{\pi \varepsilon_f} \int_0^{\tilde{s}_{\max}} \frac{\chi(\tilde{s}) \tilde{r}_s(\tilde{s}) d\tilde{s}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_s(\tilde{s}))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_s(\tilde{s}))^2}} \times \\ &\times K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{r}\tilde{r}_s(\tilde{s})}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_s(\tilde{s}))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_s(\tilde{s}))^2}}\right). \end{aligned}$$

Тогда полный потенциал $\tilde{\Phi}_i$ в среде с ε_f (в свободном пространстве вне капли и пленки) можно представить, учитывая (6), в виде разложения

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \sum_{k=1}^N A_k \left\{ \tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) + \right. \\ &+ \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b + 2m\tilde{h} - \tilde{z}) \Big\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ A_{N+1} \left\{ \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) + \right. \\ &+ \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b + 2m\tilde{h} - \tilde{z}) \Big\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Полный потенциал в пленке, учитывая (7), запишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_p(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \left\{ \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \left[\tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) - \right. \right. \\ &- \tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z}) \Big] + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \left[\tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \right. \\ &2(\tilde{z}_b + (m+1)\tilde{h}) - \tilde{z}) - \tilde{\mathfrak{F}}_k(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z} + 2m\tilde{h}) \Big] \Big\} + \\ &+ A_{N+1} \left\{ \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \left[\tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) - \right. \right. \\ &- \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z}) \Big] + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \left[\tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \right. \\ &2(\tilde{z}_b + (m+1)\tilde{h}) - \tilde{z}) - \tilde{\mathfrak{F}}_{N+1}(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z} + 2m\tilde{h}) \Big] \Big\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы решить задачу нахождения электрического поля от рассматриваемой проводящей капли с заданным потенциалом, необходимо определить $N+1$ коэффициентов A_i из граничного условия для полного потенциала $\tilde{\Phi}_i = 1$ на поверхности капли.

Это условие можно удовлетворить приближенно методом коллокаций [22]. Например, можно записать это уравнение для равномерно распределенных $N+1$ точек дуги образующей капли при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} > 0$. Решая полученную систему из $N+1$ линейных алгебраических уравнений с $N+1$ неизвестными, можно найти коэффициенты разложения A_i . Тогда по формулам (10), (11) получим распределения полного потенциала в свободном пространстве и пленке соответственно. Однако при таком подходе возникают трудности с интегрированием при на-

хождении гармоник разложения $\mathfrak{F}_k(\tilde{r}, \tilde{z})$ в точках коллокации. Это связано с тем, что при $(r, z) \rightarrow (r_s(s), z_s(s))$ у подынтегральных выражений в формулах для $\mathfrak{F}_k(\tilde{r}, \tilde{z})$ возникает особенность.

Чтобы преодолеть эти трудности, в данной работе используется метод, аналогичный методу из [23, 24]. Суть этого метода заключается в смещении точек коллокации с поверхности капли на малое расстояние по нормали в сторону свободного пространства (рис. 4).

Рассмотрим на образующей капли $N+1$ равномерно расположенные точки, соответствующие $\tilde{s}_i = (i-1)\tilde{S}_{\max}/N$, где $i = 1, 2, \dots, N+1$. В i -й точке безразмерная плотность заряда равна значению $\tilde{\sigma}(\tilde{s}_i)$, вычисляемому по формуле (9). В этой точке нормальная компонента электрического поля равна $\tilde{E}_n = \tilde{\sigma}(\tilde{s}_i)/\varepsilon_f$, что следует из граничных условий на поверхности проводника. Тогда потенциал в точке P_i , смещенной на малое расстояние δ по нормали к поверхности, приближенно равен потенциалу поверхности без $\delta(\tilde{\sigma}(\tilde{s}_i)/\varepsilon_f)$, т.е. $\tilde{\Phi}_i(P_i) \approx 1 - \delta(\tilde{\sigma}(\tilde{s}_i)/\varepsilon_f)$. С другой стороны, потенциал $\tilde{\Phi}_i(P_i)$ можно вычислить по формуле (10), учитывая, что

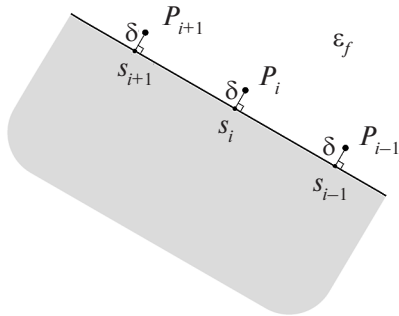


Рис. 4. Расположение точек коллокации P_i относительно поверхности капли.

$\tilde{\Phi}_i(P_i) = \tilde{\Phi}_i(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i})$. В итоге получаем следующие $N+1$ уравнений в $N+1$ точках коллокации P_i :

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_k \mathfrak{P}_k(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) \approx 1 - \delta(\tilde{\sigma}(\tilde{s}_i)/\varepsilon_f), \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \dots, N+1$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_k(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \mathfrak{F}_k\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}\right) + \\ &+ \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \mathfrak{F}_k\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \mathfrak{F}_k\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b + 2m\tilde{h} - \tilde{z}\right). \end{aligned}$$

Подставляя (9) в (12), получаем окончательно систему $N+1$ уравнений относительно коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N A_k \left\{ \mathfrak{P}_k(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) + \frac{\delta}{\varepsilon_f} \cos\left(\frac{(k-1)\pi\tilde{s}_i}{\tilde{S}_{\max}}\right) \right\} + \\ + A_{N+1} \left\{ \mathfrak{P}_{N+1}(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) + \frac{\delta}{\varepsilon_f} \chi(\tilde{s}_i) \right\} \approx 1, \end{aligned} \quad (13)$$

где $i = 1, 2, \dots, N+1$.

Решая систему уравнений (13), можно найти распределение безразмерного потенциала в нормированных координатах снаружи капли и в диэлектрической пленке по известным значениям A_k и формулам (10), (11).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В качестве примера применения предложенного метода рассмотрена задача вычисления электрического поля от заряженной капли с единичным безразмерным радиусом ли-

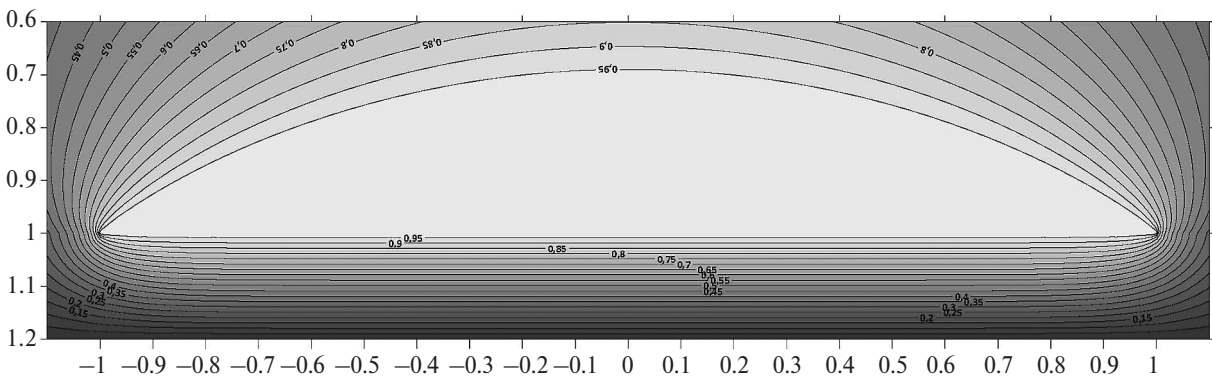


Рис. 5. Распределение нормированного потенциала $\tilde{\Phi}_i$ вокруг капли в плоскости $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при $\tilde{y} = 0$ (см. рис. 1) и $\tilde{h} = 0.2$, $\varepsilon_p = 4$, $\varepsilon_f = 1$.

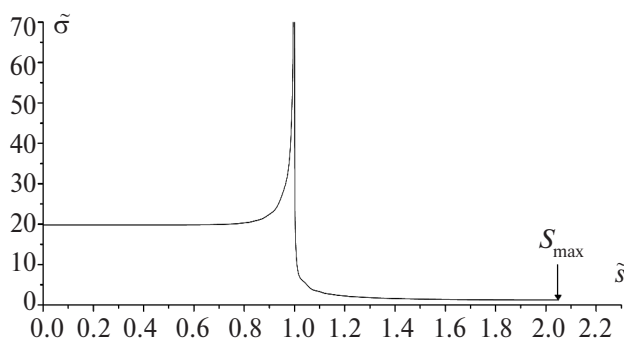


Рис. 6. Безразмерная поверхностная плотность заряда $\tilde{\sigma}$ как функция $\tilde{s}$ (распределение вдоль образующей).

нии смачивания. Капля находится в свободном пространстве с относительной проницаемостью $\varepsilon_f = 1$ и смачивает диэлектрическую пленку с проницаемостью $\varepsilon_p = 4$ и толщиной $\tilde{h} = 0.2$. Угол смачивания $\psi = 30^\circ$. Показатель сингулярности β на линии смачивания найден из уравнения (4) и составляет $\beta(\psi, \varepsilon_p/\varepsilon_f) = 0.5174527$. Общее количество гармонических функций, по которым производилось разложение потенциалов, равно $N+1 = 60$. Смещение точек коллокации выбрано равным $\tilde{\delta} = 0.0001$. Между каплей и пленкой оставался зазор с $\varepsilon_f = 1$, равный $\tilde{\delta}$, чтобы точки коллокации не попадали внутрь пленки. Результат расчета полного безразмерного потенциала представлен на рис. 5.

На рис. 6 показана найденная зависимость безразмерной плотности заряда $\tilde{\sigma}$ от $\tilde{s}$. Видна сингулярность плотности заряда на линии смачивания при $\tilde{s} = 1$. Полный размерный заряд капли может быть найден интегрированием σ по поверхности капли

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{S_{\max}} 2\pi r_s(s) \sigma(s) ds = \\ &= \int_0^{\tilde{s}_{\max}} 2\pi R \tilde{r}_s(\tilde{s}) \frac{\varepsilon_0 U}{R} \tilde{\sigma}(\tilde{s}) R d\tilde{s} = \\ &= \varepsilon_0 U R \int_0^{\tilde{s}_{\max}} 2\pi \tilde{r}_s(\tilde{s}) \tilde{\sigma}(\tilde{s}) d\tilde{s} = \varepsilon_0 U R \tilde{Q}. \end{aligned}$$

Здесь введен безразмерный заряд

$$\tilde{Q} = \int_0^{\tilde{s}_{\max}} 2\pi \tilde{r}_s(\tilde{s}) \tilde{\sigma}(\tilde{s}) d\tilde{s},$$

который для рассматриваемой конкретной задачи получился равным 82.0. Тогда размерная емкость рассматриваемой (в Φ) капли с линией смачивания радиусом R соответствует

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 R \tilde{Q} \approx 82.0 \varepsilon_0 R \approx 725 \times 10^{-12} R.$$

Из вывода полученных уравнений видно, что распределение полного безразмерного потенциала $\tilde{\Phi}$, показанное на рис.5, не меняется, если диэлектрические проницаемости ε_f и ε_p изменяются в k раз (при этом $\varepsilon_p/\varepsilon_f = \text{const}$). Также ясно, что распределение $\tilde{\Phi}$ одинаково для подобных геометрий. Размерная емкость пропорциональна характерному размеру задачи R и коэффициенту k .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача нахождения электрического поля в пространстве вокруг трехмерной заряженной проводящей капли при условии, что поле мало и электрические силы не изменяют формы капли, пленки и проводящей подложки. Однако полученные результаты позволяют сделать вывод о том, как распределены электрические силы, действующие на каплю, и как качественно изменится свободная поверхность капли в сильных полях.

Важно, что электрические силы не изменяют угол смачивания в бесконечно малой окрестности угла смачивания, несмотря на стремление поверхностной плотности заряда к бесконечности. Это связано с тем, что электрические силы действуют по нормали к проводящей поверхности и не влияют на баланс сил поверхностного натяжения на линии смачивания. Этот вопрос также обсуждался в [15].

Большие значения поверхностной плотности заряда на свободной поверхности капли наблюдаются на расстоянии менее приблизительно $0.02R$ от линии смачивания, поэтому и кривизна поверхности капли изменяется существенным образом только в этом тонком слое вблизи этой линии. Вне этого слоя во многих случаях можно считать, что поверхностная плотность заряда на свободной поверхности практически постоянная или настолько мала, что ею можно пренебречь. Это значит, что при данных условиях на большей части поверхности капли можно считать кривизну постоянной величиной и определять экспериментально «угол смачивания» именно в этой области поверхности, достаточно далеко от линии смачивания, и утверждать, что «электрическое поле уменьшает угол смачивания» [11, 25, 26].

Подход настоящей работы без труда можно применить к задаче нахождения поля вокруг проводящей нанокapли, которая возникает при исследовании рассеяния полей в нанооптике в квазистатическом приближении.

Развитые методы являются важным шагом в задачах исследования изменения формы капли в сильном электрическом поле и анализе неустой-

чивостей поверхности капли в электрическом поле. Эти вопросы будут рассмотрены в следующих работах.

Наконец, хотелось бы напомнить об аналогии между задачами электростатики и стационарной [19] и нестационарной [27] теплопроводности, которая позволяет применять методы данной работы к таким задачам.

Автор благодарит за поддержку Министерство науки и высшего образования РФ (госзадание № 075-00270-24-00).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jones T.B. Electrohydrodynamically Enhanced Heat Transfer in Liquids—A Review // *Adv. Heat Transfer*. 1978. V. 14. P. 107.
2. Allen P.H.G., Karayiannis T.G. Electrohydrodynamic Enhancement of Heat Transfer and Fluid Flow // *Hear Recovery Systems & CHP*. 1995. V. 15. № 5. P. 389.
3. Hoshino K., Tritayprasert S., Matsumoto K., Shimoyama I. Electrowetting Based Picoliter Liquid Actuation in a Glass Tube Microinjector // *Sens. Actuators, A*. 2004. V. 114. P. 473.
4. Belaubre P., Guirardel M., Leberre V. et al. Cantilever-Based Microsystem for Contact and Non-Contact Deposition of Picoliter Biological Samples // *Sens. Actuators, A*. 2004. V. 110. P. 130.
5. Paratore F., Bacheva V., Bercovici M. et al. Reconfigurable Microfluidics // *Nat. Rev. Chem*. 2022. V. 6. P. 70.
6. Zeng Y., Li S., Chong Z. et al. Reconfigurable Liquid Devices from Liquid Building Blocks // *Nat. Chem. Eng*. 2024. V. 1. P. 149.
7. Berge B., Peseux J. Variable Focal Lens Controlled by an External Voltage: an Application of Electrowetting // *Eur. Phys. J. E*. 2000. V. 3. P. 159.
8. Mishra K., Narayanan A., Mugele F. Design and Wavefront Characterization of an Electrically Tunable Aspherical Optofluidic Lens // *Opt. Express*. 2019. V. 27. P. 17601.
9. Huh D., Tkaczyk A.H., Bahng J.H. et al. Reversible Switching of High-Speed Air—Liquid Two-phase Flows Using Electrowetting-Assisted Flow-pattern Change // *J. Am. Chem. Soc*. 2003. V. 125. P. 14678.
10. Li P., Huang X., Zhao Y.P. Electro-capillary Peeling of Thin Films // *Nat. Commun*. 2023. V. 14. P. 6150.
11. Vallet M., Vallade M., Berge B. Limiting Phenomena for the Spreading of Water on Polymer Films by Electrowetting // *Eur. Phys. J. B*. 1999. V. 11. P. 583.
12. Hurd R.A. The Edge Condition in Electromagnetics // *IEEE Trans. Antennas Propag*. 1976. V. 24. № 1. P. 70.
13. Van Bladen J. Field Singularities at Metal-Dielectric Wedges // *IEEE Trans. Antennas Propag*. 1985. V. 33. № 4. P. 450.
14. Brooke G.H., Kharadly M.M.Z. Field Behavior near Anisotropic and Multidielectric Edges // *IEEE Trans. Antennas Propag*. 1977. V. 25. № 7. P. 571.
15. Петрин А.Б. Об особенности электрического поля на линии смачивания диэлектрической поверхности // *ТВТ*. 2008. Т. 46. №1. С. 23.
16. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1965.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
18. Петрин А.Б. Особенность электрического поля на линии смачивания диэлектрической поверхности // *ТВТ*. 2011. Т. 49. №1. С. 23.
19. Петрин А.Б. Развитие и обобщение метода отражений в задачах электростатики и теплопроводности плоскостных сред // *ЖТФ*. 2023. Т. 93. № 3. С. 318.
20. Силады М. Электронная и ионная оптика. М.: Мир, 1990.
21. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
22. Миллер Е., Поджо А., Беннетт К.и др. Численные методы теории дифракции. Сб. ст. Математика. Вып.29. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
23. Петрин А.Б. Термополевая эмиссия электронов из металлических острий конической формы // *ТВТ*. 2010. Т. 48. № 3. С. 323.
24. Петрин А.Б. О термополевой эмиссии электронов из металлических острий // *Физика плазмы*. 2010. Т. 36. № 7. С. 671.
25. Mugele F. Droplet Motion Electrically Controlled // *Nature*. 2019. V. 572. P. 445.
26. Li J., Ha N.S., Liu T. et al. Ionic-surfactant-mediated Electro-dewetting for Digital Microfluidics // *Nature*. 2019. V. 572. P. 507.
27. Петрин А.Б. Развитие методов решения задач нестационарной теплопроводности плоскостных сред // *Успехи прикладной физики*. 2023. Т. 11. № 2. С. 93.