

УДК 539.621+536.21

## ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ В СИСТЕМЕ ДВУХ ФРИКЦИОННО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЦИЛИНДРОВ

© 2024 г. В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина”, Воронеж, Россия*

*E-mail: kvn117@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.07.2023 г.

После доработки 22.09.2023 г.

Принята к публикации 03.10.2023 г.

Рассмотрена задача нестационарного теплопереноса в системе двух коаксиальных цилиндров, которые равномерно движутся друг относительно друга в направлении их общей оси симметрии. Предполагается, что на поверхности их взаимодействия работа сил трения преобразуется в тепловую энергию. При этом соотношение тепловых потоков, отводимых в каждый из цилиндров, не известно заранее. С использованием метода разделения переменных получено приближенное решение такой задачи для распределения температуры в поперечном сечении цилиндров и проведен анализ влияния на него основных параметров системы. Полученное решение позволяет проводить расчет температуры разогрева в зоне контакта взаимодействующих тел.

DOI: 10.31857/S0040364424020155

### ВВЕДЕНИЕ

Контактирование отдельных звеньев механизмов при наличии их относительного движения с эффектом проскальзывания всегда сопровождается трением. Данное обстоятельство приводит к нагреву взаимодействующих изделий. Это обусловлено тем, что работа сил трения трансформируется в тепловую энергию, которая в итоге рассеивается в окружающее пространство.

В технике хорошо известно повышение (в некоторых случаях на один–два порядка) температуры поверхностей деталей в результате их фрикционного взаимодействия. Это явление постоянно реализуется в самых различных технологиях: обработка металлов резанием и шлифование [1, 2], волочение проволоки [3, 4], функционирование элементов тормозных систем [5–7], сварка трением [8, 9] и целый ряд других процессов [10]. В некоторых технических приложениях выделение тепла при фрикционном взаимодействии представляет собой составную часть более интенсивного процесса разогрева, который возникает в том числе за счет и других факторов. Например, подобное явление наблюдается в артиллерии. По некоторым оценкам вклад трения в тепловыделение и, соответственно, разогрев стволов некоторых видов вооружения находится на уровне 20–25% [11, 12].

В связи с распространенностью тепловых процессов такого рода возникают задачи их математического моделирования, в основе кото-

рого лежит классическая теория теплопереноса [13, 14].

В [15] рассмотрена задача о расчете распределения температуры в системе двух цилиндров с различными теплофизическими характеристиками. Применительно к моделированию охлаждения емкостей с остеклованными радиоактивными отходами предполагалось, что внутри имеют место распределенные по объему источники тепла и происходит тепловыделение, обусловленное протекающими физико-химическими процессами. В этой же работе рассмотрена задача о влиянии температуры на деформирование цилиндра.

В приложении к задачам фрикционного разогрева тепловыделение происходит не по объему рассматриваемых тел, а на поверхности их контактного взаимодействия. Обзор некоторых наиболее распространенных моделей тепловыделения при таком взаимодействии тел представлен в [16].

Поскольку источник тепла в задачах такого рода не распределен по объему взаимодействующих тел, включать его в качестве соответствующего члена в уравнение теплопереноса представляется не совсем рациональным. Поэтому более логичным является учет этого эффекта на поверхности фрикционного взаимодействия через постановку соответствующего граничного условия, задавая здесь поверхностную плотность общей мощности тепловыделения.

Целью данной работы является разработка математической модели теплопереноса при фрикционном взаимодействии двух коаксиальных цилиндров, совершающих относительное движение вдоль их продольной оси, и определение на ее основе температурных полей и тепловых потоков.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему двух тел в форме цилиндров неограниченной длины, схема которой представлена на рис. 1. Внутренний цилиндр радиусом  $R_1$  “обжимается” внешним цилиндром так, что нормальные напряжения на их общей границе принимают постоянное значение  $\tau_{rr} = P$ . При этом внешний цилиндр остается неподвижным, а внутренний поступательно движется относительно него с постоянной скоростью  $V$  вдоль общей оси симметрии  $Oz$ . Коэффициент трения на поверхности контакта цилиндров принимается равным  $f$ . В рамках рассматриваемой модели предполагается, что поверхность фрикционного взаимодействия цилиндров выступает в качестве источника тепла. Поверхностная плотность мощности тепловыделения такого источника принимается равной [16]

$$q = fPV.$$

Выделяемое тепло отводится с поверхности взаимодействия в каждый из цилиндров. При этом выполняется следующее условие баланса:

$$q = q_1 + q_2,$$

где  $q_1, q_2$  – неизвестные заранее модули плотностей тепловых потоков, отводимых с поверхности фрикционного взаимодействия во внутренний и внешний цилиндры соответственно.

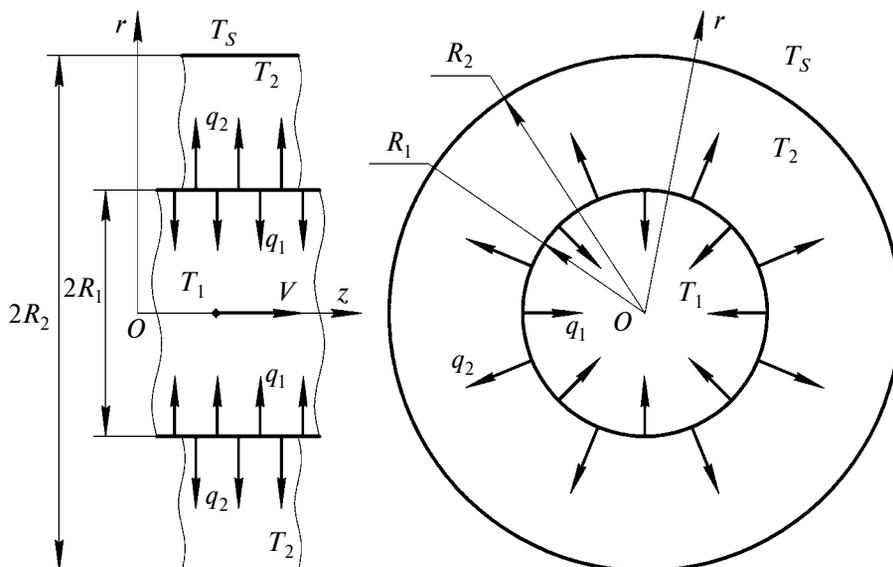


Рис. 1. Структурная схема задачи.

На свободной поверхности радиусом  $R_2$  внешнего цилиндра происходит отвод тепла в окружающую среду при заданном значении коэффициента теплообмена  $\alpha$ .

Также предполагается, что в некоторый, условно принимаемый в качестве начального, момент времени  $t = 0$  температура цилиндров принимает значение температуры окружающего пространства  $T_S$ .

Пренебрегая влиянием эффектов термоупругости на изменение нормального напряжения  $P$  и принимая во внимание осевую симметрию, распределения температур в поперечном сечении тел в цилиндрической системе отсчета можно описать следующей системой уравнений [13, 14]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{a_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{a_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad t > 0,$$

где  $T_1(r, t), T_2(r, t), a_1, a_2$  – распределения температур и принимаемые постоянными коэффициенты температуропроводности для внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Начальные и граничные условия задачи записываются в виде

$$T_1(r, 0) = T_S; \quad 0 \leq r \leq R_1;$$

$$T_2(r, 0) = T_S; \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$\left. \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad t > 0;$$

$$T_1(R_1, t) = T_2(R_1, t); \quad t > 0;$$

$$\left( \lambda_1 \frac{\partial T_1(r,t)}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_1} = q; \quad t > 0;$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \alpha (T_2(R_2,t) - T_S); \quad t > 0,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – принимаемые постоянными коэффициенты теплопроводности материалов, из которых выполнены внутренний и внешний цилиндры.

Физическая постановка рассматриваемой задачи предполагает, что плотность тепловыделения на поверхности фрикционного взаимодействия цилиндров остается всюду постоянной и не зависит от продольной координаты  $z$ . В этой связи, принимая во внимание неограниченность цилиндров, можно предположить, что распределение температуры при переходе от одного поперечного сечения коаксиальных цилиндров к другому не изменяется. Допущение такого рода используется в постановках целого ряда других, хорошо известных краевых задач теплопереноса для случая неограниченных цилиндров [13–15].

В безразмерной форме записи исходные уравнения теплопереноса для распределения температур  $T'_1(r', Fo)$  и  $T'_2(r', Fo)$  во внутреннем и внешнем цилиндрах, а также начальные и граничные условия могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\partial T'_1}{\partial Fo} = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T'_1}{\partial r'} \right), \quad 0 \leq r' \leq 1, \quad Fo > 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T'_2}{\partial Fo} = \frac{a'_2}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T'_2}{\partial r'} \right), \quad 1 \leq r' \leq R'_2, \quad Fo > 0; \quad (2)$$

$$T'_1(r', 0) = 0, \quad 0 \leq r' \leq 1; \quad (3)$$

$$T'_2(r', 0) = 0, \quad 1 \leq r' \leq R'_2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T'_1(r', Fo)}{\partial r'} \Big|_{r'=0} = 0, \quad Fo > 0; \quad (5)$$

$$T'_1(1, Fo) = T'_2(1, Fo), \quad Fo > 0; \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial T'_1(r', Fo)}{\partial r'} - \lambda'_2 \frac{\partial T'_2(r', Fo)}{\partial r'} \right) \Big|_{r'=1} = Ki, \quad Fo > 0; \quad (7)$$

$$-\frac{\partial T'_2(r', Fo)}{\partial r'} \Big|_{r'=R'_2} = Bi \, T'_2(R'_2, Fo), \quad Fo > 0. \quad (8)$$

В (1)–(8) приняты следующие обозначения:

$$r' = \frac{r}{R_1}, \quad R'_2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad Fo = \frac{a_1 t}{R_1^2}, \quad T'_1 = \frac{T_1 - T_S}{T_C - T_S},$$

$$T'_2 = \frac{T_2 - T_S}{T_C - T_S}, \quad a'_2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad \lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad Bi = \frac{\alpha R_1}{\lambda_2},$$

$$Ki = \frac{q R_1}{\lambda_1 (T_C - T_S)} = \frac{f P V R_1}{\lambda_1 (T_C - T_S)},$$

где  $T_C$  – некоторая характерная температура нагрева поверхности фрикционного взаимодействия цилиндров (например, температура фазового перехода для материала одного из цилиндров);  $Fo, Bi, Ki$  – числа Фурье, Био и Кирпичева соответственно.

Здесь и далее верхним штрихом отмечены безразмерные величины.

Структурно решение задачи о распределении температуры в системе двух фрикционно взаимодействующих цилиндров может быть представлено следующим образом:

$$T'(r', Fo) = \begin{cases} T'_1(r', Fo); & 0 \leq r' \leq 1; \\ T'_2(r', Fo); & 1 \leq r' \leq R'_2. \end{cases} \quad (9)$$

Особенностью постановки такой задачи является то, что внутренний источник тепловыделения распределен не по объему тела (это обстоятельство обычно учитывается в уравнении теплопереноса), а по некоторой поверхности, разделяющей отдельные части общей системы двух тел. При этом перераспределение выделяемого тепла между этими отдельными частями не известно заранее. Последнее обстоятельство учитывается в виде менее традиционного граничного условия (7) в форме баланса выделяемого и результирующего отводимого (в оба тела от границы их фрикционного взаимодействия) потоков тепла.

## ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В случае установившегося режима теплопереноса ( $Fo \rightarrow \infty$  и  $\partial/\partial Fo \equiv 0$ ) рассмотренная в предыдущем разделе задача имеет достаточно простое, точное решение, в соответствии с которым распределения температуры в системе двух тел описываются следующим образом:

$$T'_\infty(r') = \begin{cases} T'_{1,\infty}; & 0 \leq r' \leq 1; \\ T'_{2,\infty}(r'); & 1 \leq r' \leq R'_2; \end{cases} \quad (10)$$

$$T'_{1,\infty} = \frac{Ki}{\lambda'_2} \left( \ln(R'_2) + \frac{1}{Bi R'_2} \right) = \text{const},$$

$$T'_{2,\infty}(r') = \frac{Ki}{\lambda'_2} \left( \ln\left(\frac{R'_2}{r'}\right) + \frac{1}{Bi R'_2} \right).$$

При этом температура для внутреннего цилиндра, как и следовало ожидать, принимает постоянное значение.

Общее решение системы уравнений (1), (2) для распределения температур внутри взаимодействующих цилиндров в случае нестационарного теплопереноса с учетом (10) может быть с привлечением метода разделения переменных представлено в следующей форме:

$$T_1'(r', Fo) = T_{1,\infty}' + C_1 J_0(\epsilon r) e^{-\epsilon^2 Fo}, \quad (11)$$

$$T_2'(r', Fo) = T_{2,\infty}'(r') + \left( C_3 J_0\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} r\right) + C_4 Y_0\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} r\right) \right) e^{-\epsilon^2 Fo}, \quad (12)$$

где  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно;  $C_1, C_3, C_4$  – неизвестные константы интегрирования;  $\epsilon$  – также неизвестный параметр, определяющий разделение переменных.

Здесь же заметим, что соотношение (11) записано уже с учетом удовлетворения граничному условию (5).

Подставляя (12) в граничное условие (8), приходим к выражению для связи между константами интегрирования  $C_3$  и  $C_4$

$$C_4 = C_3 F_1(\epsilon). \quad (13)$$

Привлекая теперь граничное условие (7) для тепловых потоков, приходим с учетом (13) еще к одному к выражению для связи между константами интегрирования  $C_1$  и  $C_3$

$$C_3 = C_1 F_2(\epsilon). \quad (14)$$

В соотношениях (13), (14) для краткости приняты обозначения

$$F_1(\epsilon) = \frac{\text{Bi} J_0\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} R_2'\right) - \frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} J_1\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} R_2'\right)}{\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} Y_1\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} R_2'\right) - \text{Bi} Y_0\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}} R_2'\right)},$$

$$F_2(\epsilon) = \frac{\sqrt{a_2'} J_1(\epsilon)}{\lambda_2' \left[ J_1\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}}\right) + F_1(\epsilon) Y_1\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}}\right) \right]},$$

где  $J_1, Y_1$  – функции Бесселя первого порядка и соответственно первого и второго рода.

Принимая во внимание (13), (14), приходим с учетом (11), (12) из граничного условия (6) “сшивания” температур к следующему характеристическому уравнению для определения набора  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  его корней:

$$F(\epsilon) = F_2(\epsilon) \left[ J_0\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}}\right) + F_1(\epsilon) Y_0\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{a_2'}}\right) \right] - J_0(\epsilon) = 0. \quad (15)$$

Решение характеристического уравнения проводилось численно с точностью до восьми значащих цифр после запятой. Представление о характере распределения корней уравнения (15) дает график функции  $F(\epsilon)$ , приведенный на рис. 2.

Учитывая линейный характер уравнений (1), (2), а также уравнения (11)–(14), приходим к следующему виду выражений, представляющих собой решение этих уравнений и в точности удовлетворяющих всем граничным условиям (5)–(8):

$$T_1'(r', Fo) = T_{1,\infty}' + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1,n} J_0(\epsilon_n r) e^{-\epsilon_n^2 Fo}, \quad (16)$$

$$T_2'(r', Fo) = T_{2,\infty}'(r') + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1,n} F_2(\epsilon_n) \times \left[ J_0\left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{a_2'}} r'\right) + F_1(\epsilon_n) Y_0\left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{a_2'}} r'\right) \right] e^{-\epsilon_n^2 Fo}. \quad (17)$$

Окончательное построение приближенного решения задачи сводится к нахождению неизвестного набора коэффициентов  $C_{1,n}, n = 1, 2, \dots$  разложений в выражениях (16), (17).

Принимая во внимание начальные условия (3), (4), введем в рассмотрение следующую функцию невязки для характеристики степени его выполнения:

$$f(C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{1,N}) = \int_0^{R_2'} \left\{ W_0(r') + \sum_{n=1}^N C_{1,n} W_n(r') \right\}^2 dr'; \quad (18)$$

$$W_0(r') = \begin{cases} W_{1,0}(r'); & 0 \leq r' \leq 1; \\ W_{2,0}(r'); & 1 \leq r' \leq R_2'; \end{cases}$$

$$W_n(r') = \begin{cases} W_{1,n}(r'); & 0 \leq r' \leq 1; \\ W_{2,n}(r'); & 1 \leq r' \leq R_2'; \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  – количество первых членов в соответствующих рядах, которыми допустимо ограничиться при описании распределения температуры

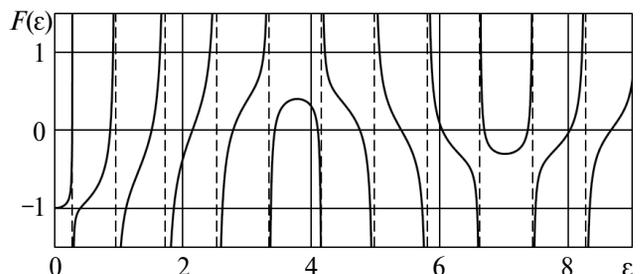


Рис. 2. Характер поведения функции  $F(\epsilon)$ , определяющей вид характеристического уравнения, при  $a_2' = 1.1, \lambda_2' = 1.2, R_2' = 5, \text{Bi} = 1$ ; штриховые линии – вертикальные асимптоты.

в рассматриваемой системе с помощью полученных выражений (16), (17).

В (18) для краткости записи приняты обозначения

$$W_{1,0}(r') = T'_{1,\infty}, \quad W_{2,0}(r') = T'_{2,\infty}(r'),$$

$$W_{1,n}(r') = J_0(\varepsilon_n r'),$$

$$W_{2,n}(r') = F_2(\varepsilon_n) \left[ J_0\left(\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{a_2}} r'\right) + F_1(\varepsilon_n) Y_0\left(\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{a_2}} r'\right) \right].$$

Тогда определение набора коэффициентов  $C_{1,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  разложений предлагается проводить из условия минимума функции невязки (18), что приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов

$$\sum_{k=1}^N C_{1,k} A_{m,k} = B_m, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_{m,k} &= \int_0^{R'_2} W_m(r') W_k(r') dr' = \\ &= \int_0^1 W_{1,m}(r') W_{1,k}(r') dr' + \int_1^{R'_2} W_{2,m}(r') W_{2,k}(r') dr', \\ B_m &= - \int_0^{R'_2} W_0(r') W_m(r') dr' = \\ &= - \int_0^1 W_{1,0}(r') W_{1,m}(r') dr' - \int_1^{R'_2} W_{2,0}(r') W_{2,m}(r') dr'. \end{aligned}$$

Решение системы линейных уравнений (16) проводилось численно.

Изложенный подход к определению коэффициентов разложений в (16), (17) из условия минимума функции невязки (18), характеризующей выполнение начальных условий (3), (4), обусловлен следующим обстоятельством.

Как показывают прямые численные эксперименты, вытекающая из метода разделения переменных система функций  $W_m(r')$  не является ортогональной на отрезке  $[0; R'_2]$ .

Этот результат связан с предполагаемым разрывом для коэффициентов теплопроводности ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) и температуропроводности ( $a_1 \neq a_2$ ) в точке  $r' = 1$ . Кроме того, тепловой поток как функция радиальной координаты на рассматриваемом отрезке  $[0; R'_2]$  также имеет разрыв в этой же точке.

В этой связи традиционно вводимое для таких задач скалярное произведение функций, вообще говоря, отлично от нуля

$$\begin{aligned} G_{m,k} &= \int_0^{R'_2} r W_m(r') W_k(r') dr' = \\ &= \int_0^1 r W_{1,m}(r') W_{1,k}(r') dr' + \\ &+ \int_1^{R'_2} r W_{2,m}(r') W_{2,k}(r') dr' \neq 0; \quad m \neq n, \end{aligned}$$

что не позволяет напрямую использовать его для точного определения всех коэффициентов  $C_{1,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Заметим, что, если бы условия ортогональности выполнялись, лишь диагональные элементы матрицы  $G_{m,k}$  должны были оказаться отличными от нуля. В рассматриваемом случае опять же на основе предварительных численных экспериментов имеем, что диагональные элементы этой симметричной матрицы в каждой ее строке (как и в каждом ее столбце) принимают максимальные по модулю значения по отношению ко всем остальным, но также отличным от нуля элементам строки этой матрицы. При этом значения модулей этих элементов убывают по мере удаления от диагонального элемента.

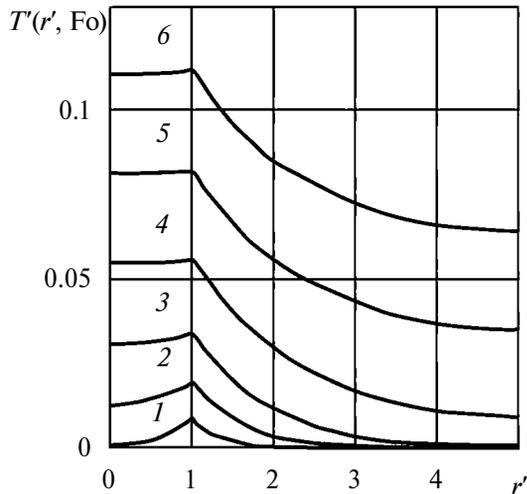
#### АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НА ПРОЦЕСС ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Характер изменения с течением времени распределения температуры в системе двух коаксиальных фрикционно взаимодействующих между собой цилиндров иллюстрируют графики на рис. 3. Кривые распределения температуры построены на основе соотношения (9) с учетом (16), (17) после определения набора корней  $\varepsilon_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  уравнения (15) и последующего решения системы уравнений (19) относительно коэффициентов  $C_{1,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  разложений при  $N = 30$ .

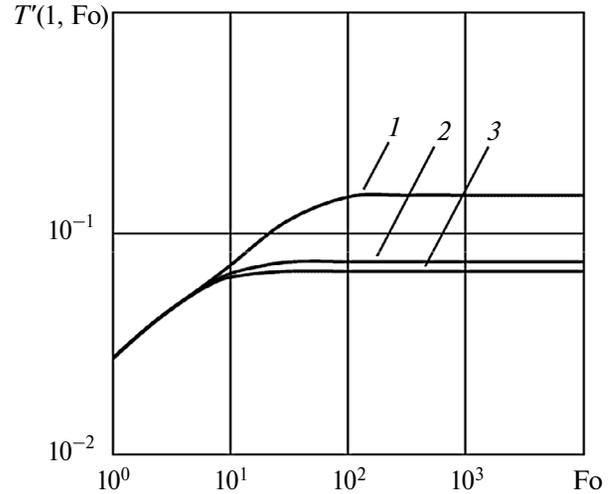
Из анализа рис. 3 следует, что в окрестности поверхности взаимодействия ( $r' = 1$ ) в каждый момент времени, как и следовало ожидать, имеет место максимальное значение температуры.

Здесь же укажем, что для набора использованных в этом примере исходных параметров системы предельно достижимое значение безразмерной температуры на поверхности фрикционного взаимодействия при  $Fo \rightarrow \infty$  принимает значение  $T'_{1,\infty} = T'_{2,\infty}(1) = 0.9$ .

Сравнивая это значение с данными, приведенными на рис. 3, можно видеть, что изначально монотонно возрастающая в зависимости от радиальной координаты температура во внутреннем цилиндре достаточно быстро выравнивается и стремится к температуре поверхности контакта.



**Рис. 3.** Распределение безразмерной температуры в системе двух фрикционно взаимодействующих цилиндров при  $a'_2 = 1.1$ ,  $\lambda'_2 = 1.2$ ,  $R'_2 = 5$ ,  $Ki = 0.05$ ,  $Bi = 0.01$  для  $Fo = 0.1$  (1), 0.5 (2), 1.5 (3), 5 (4), 12 (5), 20 (6).



**Рис. 4.** Изменение с течением времени безразмерной температуры поверхности фрикционного взаимодействия цилиндров при  $a'_2 = 1.1$ ,  $\lambda'_2 = 1.2$ ,  $R'_2 = 5$ ,  $Ki = 0.05$  и  $Bi = 0.1$  (1), 1 (2), 10 (3).

Влияние интенсивности теплообмена с окружающей средой на свободной поверхности внешнего цилиндра на зависимость от времени температуры  $T'(1, Fo)$  поверхности фрикционного взаимодействия представлено на рис. 4 для того же набора основных исходных параметров системы.

Анализ поведения кривых показывает, что в моменты времени, близкие к начальному ( $Fo < 10$ ), интенсивность теплообмена на периферии внешнего цилиндра при варьировании  $Bi$  на три порядка практически не влияет на вид зависимости  $T'(1, Fo)$ . Однако в дальнейшем с течением времени влияние степени интенсивности теплообмена с окружающей средой начинает проявлять себя. При этом для  $Fo \rightarrow \infty$  температура на поверхности фрикционного взаимодействия асим-

птотически приближается к постоянному значению  $T'_{1,\infty}$ , которое определяется величиной  $Bi$ .

Проведем теперь оценку соотношения между модулями плотностей  $q'_1$  и  $q'_2$  тепловых потоков

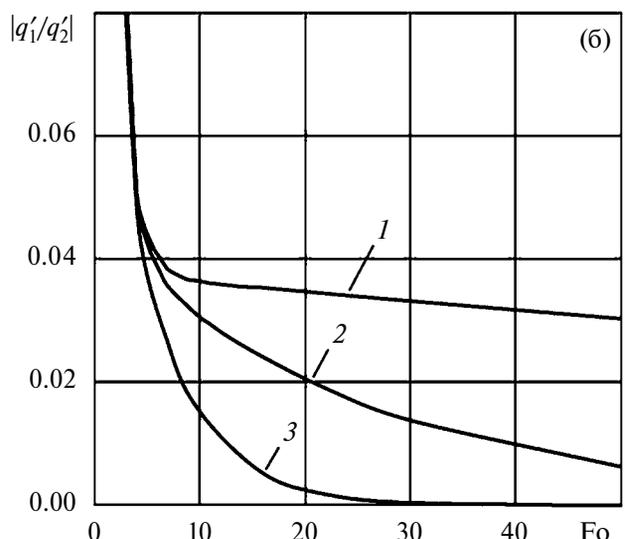
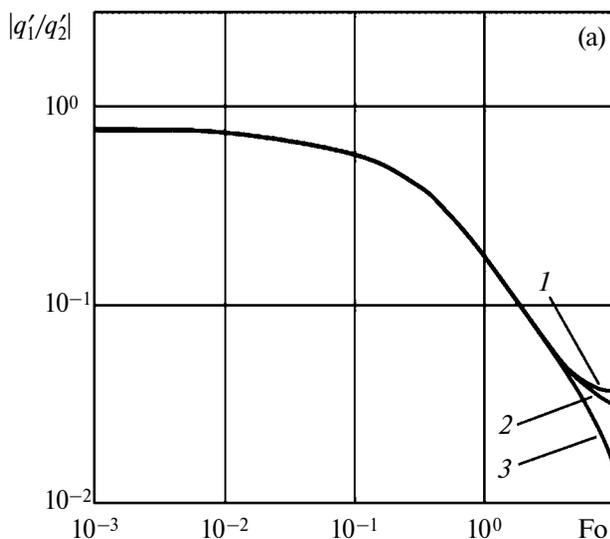
$$\left. \frac{q'_1}{q'_2} \right| = \frac{q'_1}{Ki - q'_1}, \quad (20)$$

отводимых с поверхности фрикционного контакта во внутренний и внешний цилиндры.

Здесь с учетом (16) имеем

$$q'_1 = \left. \frac{\partial T'_1}{\partial r'} \right|_{r'=1}.$$

Представление о характере изменения с течением времени соотношения тепловых потоков (20) дают зависимости, представленные на рис. 5.



**Рис. 5.** Изменение с течением времени соотношения между модулями плотностей тепловых потоков, отводимых с поверхности фрикционного взаимодействия в каждый из цилиндров, на начальной стадии процесса (а) и для достаточно больших моментов времени (б) при  $a'_2 = 1.1$ ,  $\lambda'_2 = 1.2$ ,  $R'_2 = 5$ ,  $Ki = 0.05$  и  $Bi = 0.01$  (1), 0.1 (2), 1 (3).

Анализ этих зависимостей позволяет сделать вывод о том, что для рассмотренного набора исходных параметров системы разогрев внутреннего цилиндра завершается достаточно быстро. В дальнейшем же (для рассматриваемого примера ориентировочно при  $Fo > 10$ ) имеем  $q'_1 \rightarrow 0$  и основная часть выделяемого тепла отводится с поверхности фрикционного взаимодействия во внешний цилиндр, а затем рассеивается в пространство на его свободной границе.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное приближенное решение задачи о нестационарном теплопереносе в системе двух коаксиальных фрикционно взаимодействующих цилиндров, которые равномерно движутся относительно друг друга в направлении их общей оси симметрии, позволяет рассчитывать температуру разогрева в наиболее нагруженной (с точки зрения разогрева) зоне, а именно на поверхности их контактирования.

На начальной стадии процесса тепловые потоки, отводимые с поверхности фрикционного взаимодействия в каждый из цилиндров, принимают значения одного порядка. При этом тепловой поток во внешний цилиндр, вполне ожидаемо, несколько превышает поток, отводимый во внутренний цилиндр. Однако достаточно быстро с течением времени монотонно возрастающее в зависимости от радиальной координаты распределение температуры во внутреннем цилиндре выравнивается и асимптотически приближается к предельно достижимой (для данных условий теплообмена на свободной границе внешнего цилиндра) температуре поверхности фрикционного взаимодействия. При этом  $q'_1/q'_2 \rightarrow 0$  и генерируемое на поверхности фрикционного взаимодействия тепло отводится в основном во внешний цилиндр с последующим рассеиванием на его внешней границе.

Рассмотренная схема теплопереноса имеет место при реализации процесса типа волочения проволоки. Кроме того, она может представлять интерес для оценки в первом приближении температуры разогрева в случае движения объектов и конечной длины внутри цилиндрических каналов. В последнем случае априори можно предположить, что длина тела должна ориентировочно на порядок превышать его диаметр.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Резников А.Н. Теплофизика резания. М.: Машиностроение, 1969. 288 с.
2. Попок Н.Н. Теория резания: Конспект лекций для студ. машиностроительных спец. В 2 ч. Ч. 2. Те-

пловые явления, изнашивание режущего инструмента, качество обрабатываемой поверхности, комбинированные виды обработки, оптимизация функционирования системы резания. Новополюцк: ПГУ, 2005. 166 с.

3. Рудской А.И., Лунев В.А., Шаболдо О.П. Волочение. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 126 с.
4. Верещагин М.Н., Бобарикин Ю.Л., Савенок А.Н., Веденеев А.В., Целуев М.Ю., Игнатенко О.И. Влияние скорости волочения на температуру и напряженно-деформированное состояние в проволоке из высокоуглеродистой стали // Литье и металлургия. 2008. № 1(45). С. 40.
5. Иноземцев В.Г. Тепловые расчеты при проектировании и эксплуатации тормозов. М.: Транспорт, 1966. 40 с.
6. Галай Э.И., Рудов П.К., Галай Е.Э. Тепловой расчет фрикционных узлов тормоза грузовых вагонов // Механика. Исследования и инновации. 2018. Вып. 11. С. 31.
7. Хольшев Н.В., Лавренченко А.А., Прохоров А.В., Коновалов Д.Н. Методика теплового расчета автомобильных дисковых тормозных механизмов // Транспорт. Вестник гражданских инженеров. 2020. № 4(81). С. 203.
8. Масленников А.В., Ерофеев В.А. Физико-математическая модель сварки трением с перемешиванием // Изв. Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2013. № 10. С. 64.
9. Рзаев Р.А., Джалмухамбетов А.У., Смирнов В.В., Атуев Ш.М. Динамика температурного поля и оценка технологических параметров при сварке трением с перемешиванием биметаллических пластин // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18. № 1(2). С. 274.
10. Амосов А.П. Разогрев и воспламенение твердых ВВ при сухом трении с износом // Физика горения и взрыва. 1980. № 3. С. 12.
11. Вершинин А.А. Алгоритм оценки живучести стволов артиллерийских систем // Изв. Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. № 11. С. 291.
12. Баранов В.Л., Белов А.В., Бирюков М.М. и др. Физические основы устройства и функционирования стрелково-пушечного, артиллерийского и ракетного оружия. Ч. 1. Физические основы устройства и функционирования стрелково-пушечного и артиллерийского оружия: Учебник для вузов / Под ред. Королева А.А., Кучерова В.Г. Волгоград: ВолгГТУ, 2002. 560 с.
13. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
14. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
15. Токарев Ю.Н., Моисеенко Е.В., Дробышевский Н.И., Бутов Р.А. Точное аналитическое решение нестационарной задачи расчета полей температур и механических напряжений в двухслойном цилиндре и его применение для верификации численных моделей // ТВТ. 2022. Т. 60. № 2. С. 249.
16. Амосов А.П. Элементарные теплофизические модели трения // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. 2011. Т. 13. № 4(3). С. 656.