

УДК 535.015

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НАНОСЛОЕ ФОТОРЕЗИСТА ПРИ ФОКУСИРОВКЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛАЗМОННОЙ ВОЛНЫ НА НАНОВЕРШИНЕ СКАНИРУЮЩЕГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО МИКРООСТРИЯ

© 2023 г. А. Б. Петрин*

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

*E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a_petrin@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.

После доработки 26.04.2022 г.

Принята к публикации 07.06.2022 г.

Сформулирован и доказан обобщенный метод зеркальных отражений электростатики для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостной структурой, причем подробно рассмотрен случай точечного заряда, находящегося рядом с одной пленкой. Затем этот метод обобщается на случай произвольной системы зарядов. Подробно показывается, как применить полученный метод для нахождения фокального распределения электрического поля в окрестности нановершины металлического микроострия рядом с плоскостной структурой, которое получается при схождении (фокусировке) поверхностной плазмонной волны к нановершине. Обсуждается проникновение сфокусированного поля в пленку фоторезиста, находящуюся на поверхности диэлектрического или металлического полупространства. Демонстрируется общность предложенного теоретического метода на примере решения задачи нахождения температурного поля в окрестности нагретого параболоидального острия, расположенного вблизи теплопроводящей пленки и полупространства.

DOI: 10.31857/S0040364423040129

ВВЕДЕНИЕ

Нанофокусировка световой энергии на вершинах микроострий — важное явление, лежащее в основе перспективных нанотехнологических приложений. Оно состоит в резком возрастании интенсивности поверхностной плазмонно-поляритонной ТМ (transverse magnetic) волны, симметрично возбуждаемой в основании металлического микроострия, при ее схождении к нановершине [1–3]. Это явление объясняется тем, что на геометрически идеальном металлическом острие может существовать осесимметричная электромагнитная стоячая волна с сингулярностью электрического поля на вершине [4]. Как показывают эксперименты [5, 6], эта стоячая волна может эффективно возбуждаться сходящейся к вершине поверхностной плазмонно-поляритонной ТМ-волной. Наличие сингулярности электрического поля объясняется в квазистатическом приближении, выполняющемся в окрестности вершины.

Реальная вершина микроострия не идеальна и закруглена. В работах [7, 8] для нахождения распределения электрического поля вблизи закругленной вершины одиночного микроострия его поверхность была аппроксимирована параболоидом вращения. Задача решалась в параболической системе координат. Было доказано, что размер фокально-

го распределения вблизи вершины убывает пропорционально радиусу закругления вершины, что принципиально и объясняет нанофокусировку (при уменьшении радиуса острия до нанометровых размеров размер фокальной области уменьшается в той же пропорции). Оказалось, что симметричное решение квазистатической задачи с максимумом в окрестности вершины острия имеет вид стоячей волны с узлами поля, причем длина стоячей волны уменьшается при приближении рабочей частоты к предельной частоте поверхностных плазмонов. Длина стоячей волны у вершины может быть значительно меньше длины волны в вакууме и длины волны поверхностных плазмонов на плоской поверхности. Применимость квазиэлектростатики в окрестности нановершины объясняется уменьшением фазовой скорости поверхностных плазмонов с уменьшением длины волны, т.е. вблизи нановершины эта сходящаяся поверхностная волна очень медленная по сравнению со скоростью света, а образующаяся стоячая волна представляет собой стационарные в пространстве колебания. Кроме того, применимость квазистатического приближения была строго подтверждена оценками, введенными на основе уравнений Максвелла [9].

Если нановершина микроострия находится вблизи плоскостной структуры, то возника-

ет необходимость детального описания распределения сфокусированного на вершине поля как вблизи вершины острия, так и в плоскостойкой структуре. В задачах излучения и распространения электромагнитных полей в плоскостойких средах широко используются матричные методы, такие как в [10]. В работах [11–13] предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя на границе или внутри плоскостойкой структуры, являющийся развитием работ [14, 15]. В частности, в [11–13] был продемонстрирован метод аналитического упрощения решения, имеющий общетеоретическое значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостойкой структуре [16] позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты. В данном исследовании методы работ [11–13] и [16] применяются сначала к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики (квазиэлектростатики) в плоскостойких средах, т.е. к нахождению поля точечного заряда в таких средах. На основе полученных результатов дается обобщение метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой структурой, а затем этот результат обобщается на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостойкой структуры. Обсуждается применение обобщенного метода зеркальных отражений для формулировки задач нанофокусировки поверхностной плазмонной волны на вершине микроострия, расположенного вблизи нанослоя фоторезиста.

В последнем разделе показывается общность предложенного теоретического метода на примере решения задачи нахождения температурного поля в окрестности нагретого параболоидального острия, расположенного вблизи теплопроводящей пленки и полупространства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим задачу нахождения электростатического поля точечного заряда, расположенного внутри плоскостойкой структуры. Пусть, для общности, этот заряд расположен внутри плоской слоистой структуры, состоящей из нескольких пленок и окружающих слоистую структуру двух полупространств. Для определенности сначала будем считать, что заряд расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда заряд расположен на их границе или в одном из полупространств.

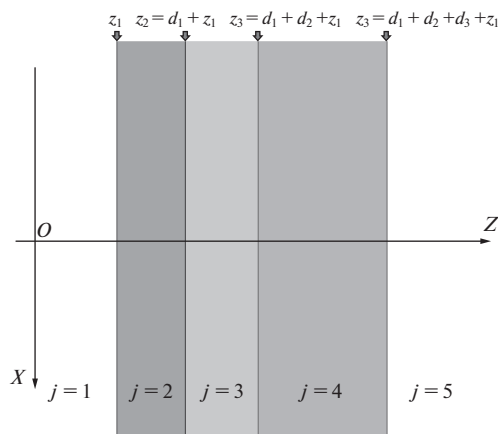


Рис. 1. Геометрия плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок.

Пусть общее число пленок равно N_f , толщина m -й пленки d_m и полная толщина слоистой структуры $d_{\text{tot}} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$. Общее число границ пленок $N = N_f + 1$. Пронумеруем области пространства $j = 1, \dots, (N + 1)$ (на рис. 1 показана задача с $N = 4$ и $N_f = 3$). Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости ϵ_j , а вне слоистой структуры находятся однородные полупространства с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_{N+1} . Обозначим также z_j координаты N границ пленок по оси Z : $z_j = z_1 + \sum_{m=1}^{j-1} d_m$ при $j = 2, \dots, N$.

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) в области с номером j можно записать с помощью электрического потенциала ϕ_j в виде $\Delta \phi_j = -q/\epsilon_j$, где Δ — оператор Лапласа, ϵ_j — абсолютная диэлектрическая проницаемость j -й области. Решая уравнения Лапласа в каждой области с учетом граничных условий, найдем электрическое поле во всех областях. Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ, СВОБОДНОМ ОТ ЗАРЯДОВ

Пусть в области с номером j нет сторонних зарядов между границами z_{j-1} и z_j (рис. 2). Диэлектрическая проницаемость среды в этой пленке равна ϵ_j . Электрический потенциал можно представить в виде фурье-разложения

$$\phi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j(\xi, \eta, z) e^{i\xi x + i\eta y} d\xi d\eta. \quad (1)$$

Подставим в уравнение $\Delta \phi_j = -q/\epsilon_j$ потенциал (1), тогда в рассматриваемой области

$$d^2 \hat{\phi}_j / dz^2 - \gamma^2 \hat{\phi}_j = 0, \quad (2)$$

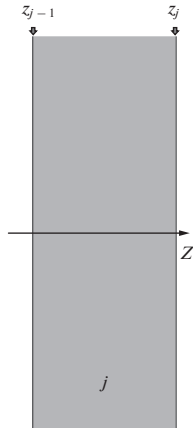


Рис. 2. Пленка с номером j , расположенная между границами z_{j-1} и z_j .

где $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Уравнения (2) при фиксированных значениях ξ и η есть обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной z . Задача состоит в нахождении функции $\hat{\phi}_j$ в рассматриваемой области. Линейно независимые решения уравнений (2) можно записать в виде

$$\phi_j^{\pm}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^{\pm} e^{\mp \gamma z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Общее решение уравнений (2) в области $[z_{j-1}, z_j]$

$$\begin{aligned} \phi_j(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\hat{\phi}_j^+$ и $\hat{\phi}_j^-$ — функции только от ξ и η . Из (3) найдем фурье-образ электрического потенциала и нормальную компоненту индукции поля на границах области j :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_j \\ \hat{D}_{j,z} \end{pmatrix} \bigg|_{z=z_{j-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \epsilon_j \gamma & -\epsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_j^+ \\ \hat{\phi}_j^- \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \hat{\phi}_j \\ \hat{D}_{j,z} \end{pmatrix} \bigg|_{z=z_j} &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_j} & 1 \\ \epsilon_j \gamma e^{-\gamma d_j} & -\epsilon_j \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_j^+ \\ \hat{\phi}_j^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$. Вводя вектор-столбец $\hat{\mathcal{F}}_j = (\hat{\phi}_j^+; \hat{\phi}_j^-)^T$, запишем полученные выражения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_j \\ \hat{D}_{j,z} \end{pmatrix} \bigg|_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \quad \begin{pmatrix} \hat{\phi}_j \\ \hat{D}_{j,z} \end{pmatrix} \bigg|_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \epsilon_j \gamma & -\epsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_j} & 1 \\ \epsilon_j \gamma e^{-\gamma d_j} & -\epsilon_j \gamma \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ, СВОБОДНОЙ ОТ СТОРОННИХ ЗАРЯДОВ

Рассмотрим многослойную структуру, внутри которой нет сторонних зарядов, с границей $z = z_j$ между областями j и $j+1$. Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического поля ($E_{j,x}$, $E_{j+1,x}$ и $E_{j,y}$, $E_{j+1,y}$) и нормальных компонент электрической индукции ($D_{j,z} = -\epsilon_j \partial \phi_j / \partial z$ и $D_{j+1,z} = -\epsilon_{j+1} \partial \phi_{j+1} / \partial z$) на этой границе можно записать через соответствующие электрические потенциалы ϕ_j и ϕ_{j+1} в виде

$$\begin{aligned} \phi_j|_{(x,y,z_j)} - \phi_{j+1}|_{(x,y,z_j)} &= 0, \\ \epsilon_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \bigg|_{(x,y,z_j)} - \epsilon_{j+1} \frac{\partial \phi_{j+1}}{\partial z} \bigg|_{(x,y,z_j)} &= 0, \end{aligned}$$

где электрический потенциал ϕ_{j+1} в области $j+1$ выражается формулой (3), в которой произведена замена индексов $j \rightarrow j+1$. Так как уравнения электростатики (квазистатики) линейные, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, т.е. для фурье-образов соответствующих величин:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_j|_{(\xi,\eta,z_j)} - \hat{\phi}_{j+1}|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0, \\ \hat{D}_{j,z}|_{(\xi,\eta,z_j)} - \hat{D}_{j+1,z}|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Записывая (6) с помощью (4), получим матричное уравнение на границе $z = z_j$:

$$\mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{\mathcal{F}}_{j+1}, \quad (7)$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$, $d_j = z_{j+1} - z_j$, а матрицы $\mathbf{R}_j$ и $\mathbf{L}_{j+1}$ выражаются формулами (5).

Уравнение (7) можно записать для $j = 2, \dots, (N-1)$, т.е. для всех границ, исключая первую ($j = 1$) и последнюю ($j = N$). Таким образом, общая толщина слоистой структуры $d_{\text{tot}} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$ (сумма толщин пленок, составляющих структуру).

Общее решение для электрического потенциала в области $j = 1$, т.е. в интервале $(-\infty, z_1]$, запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражении (8) отлично от нуля только второе слагаемое, так как предполагается наличие источников только справа от границы $z = z_1$. Учитывая, что из (8) следует $\left(\begin{smallmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{D}_{1,z} \end{smallmatrix} \right) \Big|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix}$, где $\hat{\mathcal{F}}_1 = (0; \hat{\phi}_1^-)^T$, представим граничные условия при $z = z_1$ в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{L}_2 \times \hat{\mathcal{F}}_2. \quad (9)$$

Аналогично общее решение для потенциала в области $j = N + 1$, т.е. в интервале $[z_N, +\infty)$, записывается как

$$\begin{aligned} \varphi_{N+1}(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) отлично от нуля лишь одно слагаемое, которое предполагает наличие источников только слева от границы $z = z_N$. Тогда, учитывая, что из (10) следует $\left(\begin{smallmatrix} \hat{\phi}_{N+1} \\ \hat{D}_{N+1,z} \end{smallmatrix} \right) \Big|_{z=z_N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix}$, запишем граничные условия при $z = z_N$ в виде

$$\mathbf{R}_N \times \hat{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \quad (11)$$

где $\hat{\mathcal{F}}_{N+1} = (\hat{\phi}_{N+1}^+; 0)^T$. Уравнения (7), (9) и (11) позволяют связать вектор-столбцы электрического потенциала в первой и последней областях задачи (в полупространствах, вне плоскостной структуры): $\hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{M} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}$, где $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1 \times \left(\prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_{N+1}$, $\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1}$, $\mathbf{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}$, $\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix}$. Если известен, например, потенциал распределения зарядов в пленках структуры, то из уравнения $\hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{M} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}$, как системы двух уравнений, можно найти неизвестные — функцию $\hat{\phi}_1^-$ и потенциал в полупространстве $j = 1$ от за-

рядов в плоскостной структуре по формуле (8), а также функцию $\hat{\phi}_{N+1}^+$ вектор-столбца $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ и потенциал от зарядов в полупространстве $j = N + 1$ в плоскостной структуре по формуле (10).

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Пусть имеется точечный заряд q в точке $(0, 0, z_q)$ области с номером s (рис. 3), тогда распределение плотности заряда $\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а фурье-образ этого распределения

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\xi, \eta, z) = & q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = \\ & = q\delta(z - z_q). \end{aligned}$$

Пусть данный точечный заряд находится в бесконечно тонком слое $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$. Тогда уравнения электростатики $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ и $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ для фурье-образов полей можно записать (при $\Delta z \rightarrow 0$) в следующем виде:

$$\begin{aligned} i\eta \hat{E}_{s,z} - \frac{\Delta \hat{E}_{s,y}}{\Delta z} &= 0, \quad \frac{\Delta \hat{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \hat{E}_{s,z} = 0, \\ i\xi \hat{E}_{s,y} - i\eta \hat{E}_{s,x} &= 0; \\ i\xi \hat{D}_{s,x} + i\eta \hat{D}_{s,y} + \frac{\Delta \hat{D}_{s,z}}{\Delta z} &= q\delta(z - z_q). \end{aligned}$$

Отсюда получим $\Delta \hat{E}_{s,y} = i\eta \hat{E}_{s,z} \Delta z$, $\Delta \hat{E}_{s,x} = i\xi \hat{E}_{s,z} \Delta z$ и $\Delta \hat{D}_{s,z} = -(i\xi \hat{D}_{s,x} + i\eta \hat{D}_{s,y}) \Delta z + q\delta(z - z_q) \Delta z$.

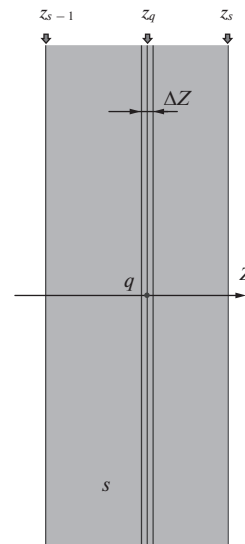


Рис. 3. Точечный заряд q , расположенный в точке $(0, 0, z_q)$ в области с номером s .

Тогда в пределе $\Delta z \rightarrow 0$ скачок тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и нормальной компоненты индукции электрического поля при переходе через бесконечно тонкий слой с зарядом $\Delta \hat{E}_{s,y} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$, $\Delta \hat{E}_{s,x} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$, $\Delta \hat{D}_{s,z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} q$. В матричном виде эти предельные соотношения можно записать в эквивалентном виде через потенциал следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_q+0} - \left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_q-0} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ q \end{array} \right). \quad (12)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (12) через вектор-столбцы $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ полупространств снаружи плоскостойкой структуры. Для этого разобьем область с номером s на две области и обозначим их индексами l и r (левая и правая на рис. 3). Введем вектор-столбцы $\hat{\mathcal{F}}_l$ и $\hat{\mathcal{F}}_r$ в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (12) можно выразить как

$$\left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_q-0} = \mathbf{R}_l \times \hat{\mathcal{F}}_l, \quad \left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_q+0} = \mathbf{L}_r \times \hat{\mathcal{F}}_r. \quad (13)$$

Кроме того, из (7) следует

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{Q}_L \times \hat{\mathcal{F}}_l, \quad (14)$$

причем матрица $\mathbf{Q}_L$ представляется формулой

$$\mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_l \gamma & -\varepsilon_l \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times [\mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1}] \times \dots \times [\mathbf{L}_{s-1} \times (\mathbf{R}_{s-1})^{-1}] \times \mathbf{L}_l,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_l &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \\ \varepsilon_s \gamma & -\varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathcal{F}}_r &= \mathbf{Q}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \\ \mathbf{Q}_R &= (\mathbf{R}_r)^{-1} \times [\mathbf{L}_{s+1} \times (\mathbf{R}_{s+1})^{-1}] \times \dots \times [\mathbf{L}_N \times (\mathbf{R}_N)^{-1}] \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_r &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_s - z_q)} & 1 \\ \varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_s - z_q)} & -\varepsilon_s \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), затем полученные выражения – в (12), находим

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (16)$$

где $\mathbf{V} = (0, q)^T$ – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостойкую систему точечного заряда, а матрицы $\mathbf{H}_R$ и $\mathbf{H}_L$ характеризуют отклик слоистой структуры на внешнее возбуждение соответственно справа и слева от заряда и выражаются следующим образом: $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^N \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_{N+1}$, $\mathbf{H}_L = \left(\mathbf{T}_1 \times \left(\prod_{m=2}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_L \right)^{-1}$, где $\mathbf{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}$ при $m \neq s$ и $\mathbf{T}_L = \mathbf{L}_l \times (\mathbf{R}_l)^{-1}$, $\mathbf{T}_R = \mathbf{L}_r \times (\mathbf{R}_r)^{-1}$.

В рассматриваемой задаче источник полей (точечный заряд) находится исключительно внутри плоскостойкой структуры. Поэтому в столбцах $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ есть только компоненты, определяющие волны, идущие от плоскостойкой структуры.

Чтобы получить оставшиеся, отличные от нуля, компоненты $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$, разобьем матрицы $\mathbf{H}_R$ и $\mathbf{H}_L$ соответственно на элементы H_{RA} , H_{RB} , H_{RC} , H_{RD} и H_{LA} , H_{LB} , H_{LC} , H_{LD} . Тогда уравнение (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix} + \mathbf{V}. \quad (17)$$

Уравнение (17) можно представить следующей системой из двух матричных уравнений $H_{RA} \hat{\phi}_{N+1}^+ = H_{LB} \hat{\phi}_1^-$, $H_{RC} \hat{\phi}_{N+1}^+ = H_{LD} \hat{\phi}_1^- + q$. Эти уравнения можно снова объединить в одно матричное 2×2 уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{F}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где введен вектор-столбец $\hat{\mathcal{F}}_{\text{out}} = (\hat{\phi}_1^-; \hat{\phi}_{N+1}^+)^T$. Решая это уравнение, найдем $\hat{\phi}_1^-$ и $\hat{\phi}_{N+1}^+$, а значит, убывающие при удалении от плоскостойкой структуры поля:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^- &= q H_{RA} / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}), \\ \hat{\phi}_{N+1}^+ &= H_{LB} q / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}). \end{aligned}$$

Убывающее влево поле в полупространстве $j = 1$ находим по формуле

$$\phi_1(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (19)$$

а убывающее вправо поле в полупространстве $j = N + 1$ — по формуле

$$\varphi_{N+1}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (20)$$

При необходимости, зная $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$, можно найти вектор-столбцы потенциалов в любой внутренней области $\hat{\mathcal{F}}_j$, так как они однозначно определяются граничными условиями. После этого электрический потенциал в любой из этих областей может быть найден по формуле (3). Таким образом, поля будут определены во всем пространстве.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО У ГРАНИЦЫ ПЛЕНКИ

Рассмотрим теперь задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда q , расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_f на некотором расстоянии от пленки с ϵ_p , нанесенной на полупространство с ϵ_d (рис. 4). В системе координат рис. 4 заряд находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$ на расстоянии $z_b - z_q$ вдоль оси Z от пленки толщиной h . Можно рассмотреть задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщи-

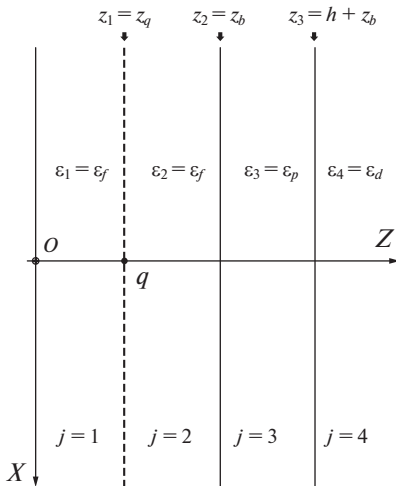


Рис. 4. Точечный заряд q в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f в точке с координатой z_q на расстоянии $z_b - z_q$ от пленки толщиной h и диэлектрической проницаемостью ϵ_p , расположенной на границе полупространства с диэлектрической проницаемостью ϵ_d .

ны $z_b - z_q$, причем диэлектрические постоянные этой пленки и полупространства слева равны ϵ_f .

Таким образом, имеется четыре области задачи. Индекс $j = 1$ соответствует полупространству с ϵ_f , $j = 2$ — вспомогательной пленке с $\epsilon_2 = \epsilon_f$ и толщиной, равной расстоянию от заряда до пленки, т.е. $z_b - z_q$, $j = 3$ — реальной пленке с $\epsilon_3 = \epsilon_p$ толщиной h , а $j = 4$ — полупространству с $\epsilon_4 = \epsilon_d$ (рис. 4).

Тогда $N = 3$, $z_1 = z_q$, $z_2 = z_b$, $z_3 = h + z_b$, $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4$, $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$ и уравнение (16) примет вид

$$(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4) \times \hat{\mathcal{F}}_4 = (\mathbf{T}_1)^{-1} \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V},$$

где матрицы выражаются следующими формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b - z_q)} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b - z_q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_b - z_q)} & 1 \\ \epsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b - z_q)} & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{L}_3 \times (\mathbf{R}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \epsilon_p \gamma & -\epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\epsilon_p \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а вектор-столбец точечного заряда равен $\mathbf{V} = (0; q)^T$. В результате

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L &= (\mathbf{T}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b - z_q)} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b - z_q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_b - z_q)} & 1 \\ \epsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b - z_q)} & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \epsilon_p \gamma & -\epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\epsilon_p \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вводя вектор-столбец $\hat{\mathcal{F}}_{\text{out}} = (\hat{\phi}_1^-; \hat{\phi}_4^+)^T$, уравнение (18) запишем как

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \epsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^- \\ \hat{\phi}_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Из (21) следует

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^- &= q H_{RA} / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}), \\ \hat{\phi}_4^+ &= q / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}). \end{aligned} \quad (22)$$

В явном виде можно выразить H_{RA} и H_{RC} через гиперболические синусы и косинусы, обозначая $z_{bq} = z_b - z_q$:

$$H_{RA} = \text{ch}(\gamma z_{bq}) \text{ch}(\gamma h) + \frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} \text{sh}(\gamma z_{bq}) \text{sh}(\gamma h) + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_p} \text{ch}(\gamma z_{bq}) \text{sh}(\gamma h) + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_f} \text{sh}(\gamma z_{bq}) \text{ch}(\gamma h), \quad (23)$$

$$H_{RC} = \gamma \left[\epsilon_f \text{sh}(\gamma z_{bq}) \text{ch}(\gamma h) + \epsilon_p \text{ch}(\gamma z_{bq}) \text{sh}(\gamma h) + \frac{\epsilon_d \epsilon_f}{\epsilon_p} \text{sh}(\gamma z_{bq}) \text{sh}(\gamma h) + \epsilon_d \text{ch}(\gamma z_{bq}) \text{ch}(\gamma h) \right]. \quad (24)$$

Найдем потенциал ϕ_1 в полупространстве $j = 1$ при $z \leq z_q$. Подставляя (23) и (24) в (22), получим

$$\hat{\phi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}) = \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} e^{-2\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{H}(\gamma, h),$$

где

$$\mathfrak{H}(\gamma, h) = \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} + \frac{4\epsilon_p \epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d) e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]}. \quad (25)$$

Из выражения (19) находим

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{q}{2\gamma \epsilon_f} e^{\gamma(z - z_q)} + \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))} \mathfrak{H}(\gamma, h) \right) \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Учитывая, что $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, воспользуемся тождеством

$$\frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma|z - a|}}{2\epsilon_f \gamma} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = q / 4\pi \epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}. \quad (26)$$

Тогда

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}} + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \times \frac{q}{4\pi \epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\epsilon_p}{\gamma(\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d) e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d) e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]} \right) \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (27)$$

Переходя в интеграле к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad \xi = \lambda \cos \vartheta, \quad \eta = \lambda \sin \vartheta, \quad (28)$$

получим

$$\phi_1(\rho, \psi, z) = q / 4\pi \epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_q)^2} + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \times \frac{q}{4\pi \epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \frac{q}{(2\pi)^2} \frac{2\epsilon_p (\epsilon_p - \epsilon_d)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta \right) \times \frac{e^{\lambda(z - (2z_b - z_q))}}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d) e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]} d\lambda.$$

Используя тождество $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0 \times (\rho\lambda)$, находим

$$\phi_1(\rho, \psi, z) = \frac{q}{4\pi \epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_q)^2}} + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \times \frac{q}{4\pi \epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \frac{q \epsilon_p (\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi (\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda) e^{\lambda(z - (2z_b - z_q))}}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d) e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]} d\lambda. \quad (29)$$

Найдем потенциал ϕ_4 в полупространстве $(j = 4)$ при $z \geq h + z_b$. Подставляя (23) и (24) для H_{RA} и H_{RC} в выражение (22) для $\hat{\phi}_4^+$, получаем

$$\hat{\phi}_4^+ = \frac{q}{H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}} = \frac{2q \epsilon_p e^{-\gamma(z_b - z_q)} e^{\gamma h}}{\gamma \left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d) e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]}. \quad (30)$$

Из (20) с учетом (30) находим

$$\varphi_4(x, y, z) = \frac{q}{(2\pi)^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varepsilon_p e^{2\gamma h}}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \times \\ \times \frac{e^{-\gamma(z-z_q)}}{\gamma} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Перейдем к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам (28). Тогда имеем

$$\varphi_4(\rho, \psi, z) = \\ = \frac{q}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon_p J_0(\rho \lambda)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \times \\ \times e^{-\lambda(z-(z_q+2h))} d\lambda.$$

Найдем теперь потенциал при $z_b \leq z \leq (h + z_b)$, т.е. в слое $j = 3$. Граничные условия (7) на плоскости $z = z_3 = h + z_b$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\varepsilon_p \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_3^+ \\ \hat{\phi}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_4^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, решая это уравнение и используя (30), получаем решение

$$\hat{\phi}_3^+ = \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} e^{\gamma h} \hat{\phi}_4^+ = \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} \times \\ \times \frac{2q\varepsilon_p e^{-\gamma(z_b-z_q-2h)}}{\gamma[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]}, \\ \hat{\phi}_3^- = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} \hat{\phi}_4^+ = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} \times \\ \times \frac{2q\varepsilon_p e^{-\gamma(z_b-z_q-h)}}{\gamma[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]}.$$

Полный потенциал поля внутри слоя $j = 3$ выражается формулой (3)

$$\varphi_3(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_3^+ e^{-\gamma(z-z_b)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_3^- e^{\gamma(z-(z_b+h))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда выражения для $\hat{\phi}_3^+$ и $\hat{\phi}_3^-$, получим

$$\varphi_3(x, y, z) = \frac{q(\varepsilon_p + \varepsilon_d)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma(z-(z_q+2h))}}{\gamma[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \times \\ \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{q(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{\gamma[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Перейдем к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам (28) и используем тождество $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0(\rho\lambda)$. Тогда

$$\varphi_3(\rho, \psi, z) = \frac{q}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \times \\ \times e^{-\lambda(z-(z_q+2h))} d\lambda + \frac{q}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d) e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \times \\ \times e^{\lambda(z-(2z_b-z_q))} d\lambda.$$

Найдем теперь потенциал при $z_q \leq z \leq z_b$, т.е. в слое $j = 2$. Граничные условия (7) на плоскости $z = z_2 = z_b$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_b-z_q)} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_2^+ \\ \hat{\phi}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \varepsilon_p \gamma & -\varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_3^+ \\ \hat{\phi}_3^- \end{pmatrix}.$$

После несложных вычислений получаем

$$\hat{\phi}_2^+ = \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{\gamma(z_b-z_q)} \hat{\phi}_3^+ + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{\gamma(z_b-z_q-h)} \hat{\phi}_3^- = \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f}, \\ \hat{\phi}_2^- = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} \hat{\phi}_3^+ + \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{-\gamma h} \hat{\phi}_3^- = \\ = \mathfrak{H}(\gamma, h) \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q)},$$

где $\mathfrak{H}(\gamma, h)$ выражается формулой (25). Тогда полный потенциал поля внутри слоя $j = 2$ (см. (3))

$$\varphi_2(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z-z_q)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}(\gamma, h) \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда $\Re(\gamma, h)$ и используя тождество (26), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}} + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \times \\ & \times \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \frac{q}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\epsilon_p}{\gamma(\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \right. \\ & \left. \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} \right) \times \\ & \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что это то же самое выражение (27), что и для $\varphi_1(x, y, z)$ в полупространстве $j = 1$. Первый член (31) представляет собой потенциал точечного заряда q , расположенного в точке $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$. Второй член — это потенциал точечного заряда $q(\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$ в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_f , расположенного зеркально относительно плоскости $z = z_b$ в точке

$\mathbf{r}_{\text{ref}} = (0, 0, 2z_b - z_q)$. Третий член — это потенциал заряда, распределенного по плоскости $z = z_b$ с некоторой поверхностной плотностью (ниже, она будет вычислена в явном виде).

Переходя к цилиндрическим координатам (28), так же как при рассмотрении решения в полупространстве $j = 1$, получим из (31) формулу для φ_2 , аналогичную (29) в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\rho, \psi, z) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_q)^2}} + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \times \\ & \times \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \frac{q\epsilon_p\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi\epsilon_f(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)e^{\lambda(z - (2z_b - z_q))}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

Для нахождения φ_{ind} — потенциала индуцированных в рассматриваемой плоскостистой структуре зарядов — надо в области $z < z_b$ вычесть из полного потенциала потенциал исходного заряда. Тогда, обозначая $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$, получим из (31) и (32) выражения в декартовой и цилиндрической системах координат

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ind}}(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{2\pi^2(\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z - z_{\text{ref}})} e^{i(\xi x + \eta y)}}{\gamma[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\xi d\eta, \\ \varphi_{\text{ind}}(\rho, \psi, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi(\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \\ & \times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)e^{\lambda(z - z_{\text{ref}})}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\lambda. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (32) сразу видно, что при $h \rightarrow +\infty$ интеграл исчезает, отсюда получаем известную формулу для заряда у границы двух полупространств при соответствующей замене символов диэлектрических проницаемостей [17].

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ НА СЛУЧАЙ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Продолжая рассмотрение задачи с одной пленкой, можно найти другую форму записи для потенциала $\varphi_{\text{ind}}(x, y, z)$, индуцированного точеч-

ным зарядом q в точке $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$. Воспользуемся тождеством (26) и введем функцию

$$U(x, y, z) = q / 4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (34)$$

которая определяет потенциал точечного заряда q , расположенного в начале координат в пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f . Запишем выражение (33) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ind}}(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \\ & + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma, h) e^{\gamma(z - z_{\text{ref}})} e^{i(\xi x + \eta y)}}{2\epsilon_f \gamma} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (35)$$

где функция $\chi(\gamma, h) = \Re(\gamma, h) - (\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$ определяется формулой

$$\chi(\gamma, h) = \frac{4\epsilon_p\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \times \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]}.$$

Введем также функцию

$$r(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, h) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta. \quad (36)$$

Применяя теорему о свертке ко второму слагаемому в (35), получим

$$r(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\sigma\lambda) \chi(\lambda, h) \lambda d\lambda = \frac{2\epsilon_p\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi(\epsilon_p + \epsilon_f)} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda J_0(\sigma\lambda)}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]} d\lambda,$$

$$r(u, v) = r(\sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{2\epsilon_p\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi(\epsilon_p + \epsilon_f)} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda J_0(\lambda\sqrt{u^2 + v^2})}{\left[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p) \right]} d\lambda. \quad (38)$$

Функция $r(\sigma)$ является плавной, ее можно аппроксимировать сплайнами при численном интегрировании в (37). Формула (37) дает потенциал, индуцированный в слоистой структуре под действием заряда q , расположенного в точке

$$\Phi_{\text{ind}}(x, y, z) = \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U(x - u, y - v, z - z_{\text{ref}}) dudv. \quad (37)$$

При вычислении Φ_{ind} по (37) можно устранить четырехкратное интегрирование, приводя двойное интегрирование в (36) к однократному с помощью перехода к полярным координатам в плоскостях (u, v) и (ξ, η) по формулам $u = \sigma \cos \psi$, $v = \sigma \sin \psi$ и $\xi = \lambda \cos \vartheta$, $\eta = \lambda \sin \vartheta$ и используя тождество $\int_0^{2\pi} e^{i\sigma\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0(\sigma\lambda)$. В результате получим

$\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$. Тогда, для точечного заряда q в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$ полный потенциал $\Phi_1 = \Phi_2$ в полупространстве $j = 1$ и $j = 2$, обозначая $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$, можно записать в виде

$$\Phi_1(x, y, z) = \Phi_2(x, y, z) = q/4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2} + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_{\text{ref}}) dudv. \quad (39)$$

Полученная формула дает обобщение метода зеркальных отражений в электростатике на случай, когда точечный заряд q расположен в некотором полупространстве рядом с пленкой толщиной h на границе другого полупространства. Выражение (39) имеет простой физический смысл. Первый член в (39) — это потенциал исходного точечного заряда q (источника поля); второй член — потенциал виртуального заряда $q(\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$, расположенного зеркально относительно ближайшей границы пленки $z = z_b$; третий член — потенциал виртуальных зарядов, распределенных по плоскости $z = z_{\text{ref}}$ с плотностью ρq и сосредоточенных в по-

верхностной области размером порядка толщины пленки h . Нетрудно видеть из выражения (38) для $r(u, v)$, что последний член в (39) весьма быстро убывает с ростом толщины пленки (при $h \rightarrow \infty$).

Из вывода формулы (39) видно, что для плоско-слоистой структуры, состоящей из произвольного числа пленок, можно получить подобную формулу, но с другим распределением поверхностного заряда qr , которое будет зависеть от толщин всех пленок и их диэлектрических проницаемостей, а также от параметров полупространства за плоско-слоистой структурой. Следуя предложенным выше рассуждениям, можно численно или аналитически

найти функцию $r(u, v)$ для многослойной структуры и использовать эту функцию в формуле (39).

Для дальнейших обобщений нетрудно получить формулы вида (39) для потенциала поля точечного заряда q , расположенного в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$ в области пленки ($j = 3$) и в полупространстве за пленкой ($j = 4$). Приведем результат вычислений, используя функции $r(u, v)$ и $U(x, y, z)$, определенные в (38) и (34):

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) = & \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \times \\ & \times U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_q) dudv + \\ & + \frac{2\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \times \\ & \times U(x - x_q, y - y_q, z - [2(z_b + h) - z_q]) - \\ & - \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U \times \\ & \times (x - x_q - u, y - y_q - v, z - [2(z_b + h) - z_q]) dudv, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (2z_b - z_{q,k}))^2} = \\ & = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + ((2z_b - z) - z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, 2z_b - z), \end{aligned}$$

получим обобщение метода зеркальных отражений в электростатике для произвольных распределений зарядов в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(x, y, z) = & \Phi_s(x, y, z) + \\ & + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b - z) dudv. \end{aligned} \quad (42)$$

Обобщение метода зеркальных отражений получено ранее в работах [18, 19] несколько другим способом и было успешно применено к задаче о нанофокусировке поверхностной плазмонной волны на вершине металлического острия. При этом поле параболоидального острия снаружи и внутри было разложено по полным системам гармонических функций. Обобщенный метод зеркальных отражений позволяет получить уравнение, определяющее указанные разложения. Решение данной задачи нанофокусировки дает возможность вычислить рас-

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y, z) = & \frac{4\varepsilon_f\varepsilon_p U(x - x_q, y - y_q, z - z_q)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_q) dudv. \end{aligned} \quad (41)$$

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ НА СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ-ИСТОЧНИКОВ

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного поля $\Phi_{\text{tot}}(x, y, z)$ в области $z < z_b$ перед пленкой (рис. 5) произвольной компактной системы N_q зарядов-источников q_k , расположенных в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}, y_{q,k}, z_{q,k})$, где $k = 1, 2, \dots, N_q$. Если бы не было прослоистой структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\begin{aligned} \Phi_s(x, y, z) = & \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - z_{q,k})^2}. \end{aligned}$$

Суммируя выражения (39) для каждого заряда q_k по всем N_q зарядам системы и замечая, что

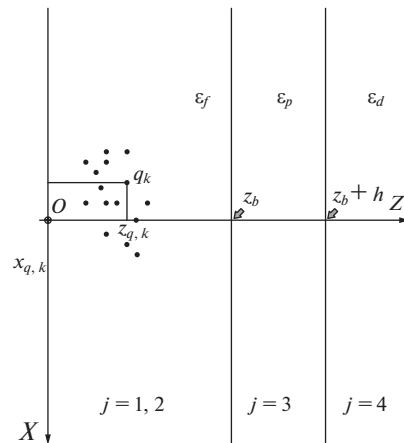


Рис. 5. Система точечных зарядов q_k у пленки, расположенной на границе полупространства.

пределение сфокусированного поля в пленке фоторезиста, что важно для задач нанолитографии.

Из вывода формулы (42) следует, что потенциал индуцированных зарядов Φ_{ind} , который порождается потенциалом Φ_s распределений зарядов-источников поля, может быть представлен как

$$\Phi_{\text{ind}}(x, y, z) = \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b - z) du dv. \quad (43)$$

Аналогично из (40) и (41) найдем потенциал Φ_3 поля в пленке при $z_b \leq z \leq (z_b + h)$ ($j = 3$) и потенциал Φ_4 полного поля в полупространстве при $z \geq (z_b + h)$ ($j = 4$):

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) &= \frac{2\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, z) - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z) du dv + \\ &+ \frac{2\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \Phi_s(x, y, 2(z_b + h) - z) - \\ &- \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p(\epsilon_p + \epsilon_d)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2(z_b + h) - z) du dv, \\ \Phi_4(x, y, z) &= \frac{4\epsilon_f\epsilon_p}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \Phi_s(x, y, z) - \\ &- \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z) du dv. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Phi_4(x, y, z) = \frac{4\epsilon_f\epsilon_p}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \Phi_s(x, y, z) - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z) du dv. \quad (45)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА НАНОВЕРШИНЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОСТРИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ ТОНКОПЛЕНОЧНОЙ СТРУКТУРЫ, В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим металлическое острие с наноразмерным радиусом закругления вершины R . Поверхность острия вблизи вершины представляет (осесимметричным относительно оси Z) параболоидом вращения $z = R/2 - (x^2 + y^2)/2R$ (рис. 6). Пусть вблизи острия находится пленка толщиной h с границами $z = z_b$ и $z = (z_b + h)$, предполагается $z_b \geq R/2$. Комплексные диэлектрические проницаемости металла острия, внешней одно-

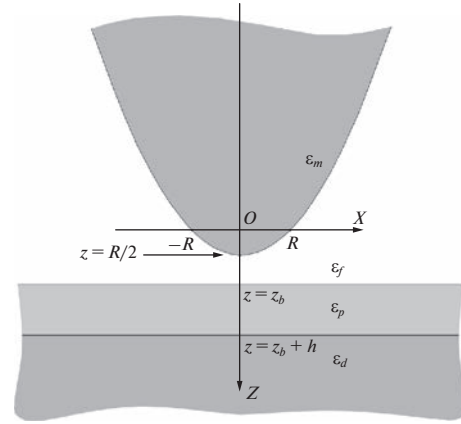


Рис. 6. Вершина металлического параболоидального острия у пленки, расположенной на границе полупространства.

родной среды, пленки и полубесконечной среды за пленкой обозначим ϵ_m , ϵ_f , ϵ_p и ϵ_d соответственно.

Рассмотрим распределение гармонического электрического поля, которое установится в окрестности нановершины микроострия при сжатии симметричной ТМ поверхностной плазмонной волны, которая используется для фокусировки светового поля на нановершине металлического микроострия в важных приложениях [1].

При решении данной задачи будем использовать комплексное представление полей с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — циклическая частота. Предположим, что характерные геометрические размеры задачи (порядка десяти нанометров) много меньше длины электромагнитной волны в вакууме, соответствующей частоте ω . Можно показать [7–9], что такую задачу вблизи нановершины можно решать в квазиэлектростатической формулировке, при которой комплексный потенциал электрического поля Φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$, а нормальные и тангенциальные составляющие электрического поля на поверхности острия и на двух плоских границах пленки должны соответствовать известным граничным условиям:

на поверхности острия:

$$\epsilon_f E_{f,n} = \epsilon_m E_{m,n} \text{ и } E_{f,\tau} = E_{m,\tau}, \quad (46)$$

на границе пленки $z = z_b$:

$$\epsilon_p E_{3,n} = \epsilon_f E_{f,n} \text{ и } E_{3,\tau} = E_{f,\tau}, \quad (47)$$

на границе пленки $z = z_b + h$:

$$\epsilon_d E_{4,n} = \epsilon_p E_{3,n} \text{ и } E_{4,\tau} = E_{3,\tau}. \quad (48)$$

Будем искать осесимметричное решение уравнения Лапласа с максимумом поля на вершине острия, соответствующее фокусировке на этой вершине поверхностной симметричной плазмонной ТМ-волны.

Кроме того, для автоматического удовлетворения граничных условий на плоских поверхностях

пленки (47) и (48) будем использовать специальный метод, который изложен ниже. Пусть потенциал зарядов, находящихся на параболоидальном металлическом острие, в пространстве с проницаемостью ϵ_f описывается функцией $\Phi_s(x, y, z)$, а потенциал индуцированных зарядов на границах пленки (заметим, что из уравнений Максвелла следует, что внутри однородного диэлектрика нет поляризованных зарядов, они могут быть только на границе) в пространстве с проницаемостью ϵ_f равен $\Phi_{\text{ind}}(x, y, z)$. Тогда полный потенциал Φ_{tot} в области, заполненной диэлектриком с ϵ_f , равен $\Phi_{\text{tot}}(x, y, z) = \Phi_s(x, y, z) + \Phi_{\text{ind}}(x, y, z)$.

Пусть потенциалы, возбуждаемые зарядами острия в областях с ϵ_p и ϵ_d , т.е. в пленке и в полупространстве за пленкой, равны $\Phi_3(x, y, z)$ и $\Phi_4(x, y, z)$ соответственно.

Найдем общий вид потенциала одиночного острия без плоскостистой структуры рядом, удовлетворяющий уравнению Лапласа в однородном диэлектрическом пространстве снаружи $\Phi_s(x, y, z)$ и внутри $\Phi_m(x, y, z)$ острия, причем на границе острия должны удовлетворяться граничные условия (46). Введем параболические координаты [20] (систему параболических координат вращения) (α, β, ψ) , которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами (x, y, z) формулами

$$x = c\alpha\beta\cos\psi, \quad y = c\alpha\beta\sin\psi, \quad z = c(\beta^2 - \alpha^2)/2, \quad (49)$$

где c — масштабный постоянный множитель. В рассматриваемой системе координат с началом в точке O и осью Z (см. рис. 6) уравнение Лапласа для электрического потенциала внутри Φ_m или снаружи Φ_s острия при аксиальной симметрии (Φ_m и Φ_s не зависят от ψ) можно записать следующим образом [20]:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2(\alpha^2 + \beta^2)} \times \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) = 0. \quad (50)$$

Общее осесимметричное решение (50) известно [20] и определяется выражением

$$\Phi = \sum (B_1 J_0(p\alpha) + B_2 Y_0(p\alpha)) \times (C_1 I_0(p\beta) + C_2 K_0(p\beta)), \quad (51)$$

где p, B_1, B_2, C_1, C_2 — константы; J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Суммирование производится по решениям с различными значениями констант.

Пусть граница параболоидального острия определяется уравнением $\beta = \beta_0$. Из (49) следует, что граница острия $\beta = \beta_0$ в декартовых координатах (x, y, z) определяется уравнением $z = c\beta_0^2/2 - (x^2 + y^2)/2c\beta_0^2$. Несложно показать, что радиус кривизны вершины острия равен $R = c\beta_0^2$.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным координатам: $\tilde{x} = x/R, \tilde{y} = y/R, \tilde{z} = z/R$ и $\tilde{\alpha} = \alpha/\beta_0, \tilde{\beta} = \beta/\beta_0$. Безразмерные параболоидальные $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и декартовы координаты на плоскости $(\tilde{x}, \tilde{z})$ связаны между собой формулами $\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}$ и $\tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}$. В этих координатах граница острия будет определяться функцией $\tilde{z} = 1/2 - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/2$, а уравнение Лапласа (50) в безразмерных координатах будет иметь такой же вид.

Решение уравнения Лапласа — осесимметричный потенциал, являющийся функцией только $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$. Нормируем потенциал на его значение U в максимуме поля на вершине острия, тогда можно перейти от размерного к безразмерному потенциалу $\tilde{\Phi} = \Phi/U$ и от размерных составляющих полей к их безразмерным величинам.

В осесимметричном случае для выполнения граничных условий на поверхности вращения острия достаточно удовлетворить их на линии пересечения ее с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось Z . В качестве такой плоскости выберем плоскость $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при $\tilde{y} = 0$. Более конкретно, достаточно удовлетворить граничным условиям только на границе пересечения полуплоскости $\tilde{y} = 0$ при $\tilde{x} \geq 0$ и поверхности рассматриваемого параболоидального острия. В безразмерных координатах это будет кривая $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$, при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} \geq 0$. Отметим, что в нормированных декартовых координатах в плоскости $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при $\tilde{y} = 0$ компоненты нормированного электрического поля будут иметь вид $\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{x}, \tilde{E}_{\tilde{z}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{z}$.

Исходя из общего решения (51), будем искать решение граничной задачи для электрического поля в окрестности острия, предполагая, что потенциал снаружи $\tilde{\Phi}_s$ при $\beta \geq \beta_0$ и потенциал внутри металлического острия $\tilde{\Phi}_m$ при $\beta \leq \beta_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_s &= \sum_{j=1}^N A_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) K_0(\lambda_j \tilde{\beta}), \\ \tilde{\Phi}_m &= \sum_{j=1}^N B_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) I_0(\lambda_j \tilde{\beta}), \end{aligned} \quad (52)$$

где A_j , B_j и λ_j — константы. Значения λ_j можно выбрать в виде $\lambda_j = \mu_j/L$, где μ_j , $j = 1, 2, \dots, N$ — первые N корней уравнения Бесселя $J_0(\mu_j) = 0$, а L — некоторое безразмерное расстояние от вершины, на котором удовлетворяются граничные условия на поверхности острия. В пределе $N \rightarrow \infty$ система функций $J_0(\lambda_j \tilde{\alpha})$ с вышеуказанным выбором λ_j на отрезке $0 \leq \tilde{\alpha} \leq L$ образует полную систему функций [21].

Отметим, что выбор функциональных зависимостей (52) из общего решения (51) обусловлен естественными требованиями к сконцентрированному у вершины полю (которые и выделяют указанные зависимости однозначным образом):

а) снаружи острия потенциал поля должен уменьшаться при удалении от его поверхности, быть конечным и максимальным на вершине острия;

б) внутри металла острия потенциал должен быть конечным в начале координат и, кроме того, непрерывным при переходе через границу.

Тогда потенциал зарядов острия $\tilde{\Phi}_s$ в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в среде с ϵ_f можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \sum_{j=1}^N A_j \mathfrak{S}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ \mathfrak{S}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= J_0(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z}}) \times \\ &\times K_0(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z}}). \end{aligned} \quad (53)$$

Аналогично потенциал индуцированных зарядов в плоскостистой структуре $\tilde{\Phi}_{\text{ind}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ можно представить, учитывая (43), в виде

$$\tilde{\Phi}_{\text{ind}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathfrak{B}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathfrak{B}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \mathfrak{S}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \mathfrak{S}_j(\tilde{x} - u, \tilde{y} - v, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) du dv. \end{aligned}$$

Тогда получим потенциал в среде с ϵ_f в виде

$$\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j (\mathfrak{S}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \mathfrak{B}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})). \quad (54)$$

Аналогично в металле острия в плоскости потенциал можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_m(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \sum_{j=1}^N B_j J_0(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z}}) \times \\ &\times I_0(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z}}). \end{aligned} \quad (55)$$

На границе острия (при $\tilde{y} = 0$, $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$) единичные векторы нормали и касательной представляются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{e}_{\tilde{x}} (\tilde{x} / \sqrt{1 + \tilde{x}^2}) + \mathbf{e}_{\tilde{z}} (1 / \sqrt{1 + \tilde{x}^2}); \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{e}_{\tilde{x}} (1 / \sqrt{1 + \tilde{x}^2}) + \mathbf{e}_{\tilde{z}} (-\tilde{x} / \sqrt{1 + \tilde{x}^2}). \end{aligned}$$

Тогда граничные условия для нормальных и тангенциальных полей на поверхности острия можно записать, используя $\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{x}$ и $\tilde{E}_{\tilde{z}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{z}$ соответственно:

$$\begin{aligned} -\epsilon_f \partial\tilde{\Phi}_{\text{tot}}/\partial\mathbf{n}|_{\tilde{y}=0, \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} + \epsilon_m \partial\tilde{\Phi}_m/\partial\mathbf{n}|_{\tilde{y}=0, \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} &= 0, \\ -\partial\tilde{\Phi}_{\text{tot}}/\partial\boldsymbol{\tau}|_{\tilde{y}=0, \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} + \partial\tilde{\Phi}_m/\partial\boldsymbol{\tau}|_{\tilde{y}=0, \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Если подставить (54) и (55) в (56), получим линейные уравнения относительно A_j и B_j , которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\epsilon_f \sum_{j=1}^N a_j(\tilde{x}) A_j + \epsilon_m \sum_{j=1}^N b_j(\tilde{x}) B_j &= 0, \\ -\sum_{j=1}^N c_j(\tilde{x}) A_j + \sum_{j=1}^N d_j(\tilde{x}) B_j &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Не будем здесь показывать функции $a_j(\tilde{x})$, $b_j(\tilde{x})$, $c_j(\tilde{x})$ и $d_j(\tilde{x})$ в явном виде, которые получаются при указанной тривиальной подстановке.

В данной работе уравнения (57) решались методом коллокаций [22]. Указанные уравнения записывались в $N - 1$ точках кривой $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$ при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} > 0$ на поверхности острия. В результате были получены $2N - 2$ линейных алгебраических уравнений с $2N$ неизвестными коэффициентами A_j и B_j . Для определения однозначного решения были добавлены еще два уравнения: приравнены единице потенциалы на вершине острия снаружи $\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(0, 0, 1/2) = 1$ и внутри $\tilde{\Phi}_m(0, 0, 1/2) = 1$. В результате решения полученной системы $2N$ уравнений находились A_j и B_j , затем по ним определялись распределения потенциала и электрического поля во всем пространстве. При этом получалось нормированное (на единицу на вершине острия) распределение потенциала $\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Зная все A_j , можно найти $\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Тогда по формулам (44) и (45) рассчитываются потенциалы как в пленке, так и в свободном полупространстве:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \sum_{j=1}^N A_j \left(\frac{2\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \tilde{\mathcal{S}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \right. \\ & \left. - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p} \mathcal{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \right. \\ & + \frac{2\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \tilde{\mathcal{S}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z}) - \\ & \left. - \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p(\epsilon_p + \epsilon_d)} \mathcal{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z}) \right), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \sum_{j=1}^N A_j \left(\frac{4\epsilon_f\epsilon_p}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \times \right. \\ & \times \tilde{\mathcal{S}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \left. \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_d)} \mathcal{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \right), \end{aligned} \quad (59)$$

где функция $\tilde{\mathcal{S}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ определена уравнением (53) и

$$\mathcal{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \tilde{\mathcal{S}}_j(\tilde{x} - u, \tilde{y} - v, \tilde{z}) du dv.$$

В итоге формулы (54), (58) и (59) решают задачу нахождения потенциала снаружи острия и во всей слоистой структуре по известным значениям A_j .

Полученные решения для нормированного потенциала обладают важным свойством: они зависят от отношений диэлектрических проницаемостей, т.е. если увеличить все диэлектрические проницаемости в k раз, то распределение потенциала в нормированных координатах не изменится.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ У ВЕРШИНЫ НАНООСТРИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Проведены численные расчеты распределения сфокусированного поля для золотого острия вблизи плоской слоистой структуры. Рассматривалось распределение модуля потенциала электрического поля в окрестности вершины, которое возникает при схождении (вдоль поверхности острия) к вершине плазмонно-поляритонной ТМ-волны. Частота сфокусированного поля соответствует длине волны в вакууме $\lambda_0 = 633$ нм. Диэлектрическая проницаемость золота на этой частоте полагалась $\epsilon_m = -11.6 + i1.2$ [23]. Параболоидальное острие находилось в вакууме с $\epsilon_f = 1$ рядом с плоскостойкой структурой, состоящей из пленки толщины $\tilde{h} = 1$ (в нормированных на радиус кривизны острия единицах) с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_p = 2$ и полупространства с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_d = 4$. Границы пленки определялись уравнениями $\tilde{z} = \tilde{z}_2 = \tilde{z}_b = 1$ и $\tilde{z} = \tilde{z}_3 = \tilde{z}_b + \tilde{h} = 2$ (см. рис. 4 и рис. 6). Вершина ме-

таллического острия располагалась на расстоянии $\Delta\tilde{z} = 0.5$ от поверхности пленки. Уравнения (57) решались методом коллокаций в отдельных точках границы вблизи вершины острия, как описано выше.

На рис. 7а показано нормированное (на единицу в максимуме на вершине) распределение максимального значения потенциала электрического поля за период колебаний (модуля комплексного потенциала) в плоскости $(\tilde{x}, \tilde{z})$ при указанных параметрах. Видно увеличение расстояния между

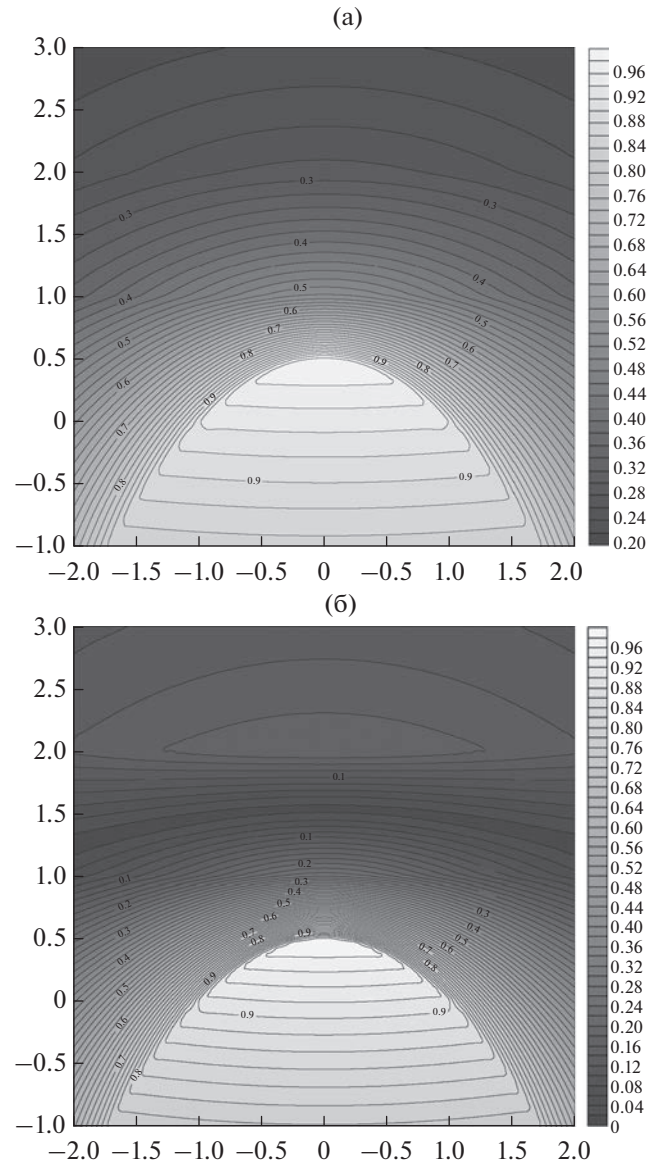


Рис. 7. Распределения модуля комплексного потенциала, сфокусированного на вершине острия и нормированного на его максимальное значение на вершине острия (в координатах, нормированных на радиус закругления вершины): (а) — $\epsilon_m = -11.6 + i1.2$, $\epsilon_f = 1$, $\epsilon_p = 2$, $\epsilon_d = 4$; (б) — $\epsilon_m = -11.6 + i1.2$, $\epsilon_f = 1$, $\epsilon_p = 2$, $\epsilon_d = \epsilon_m$.

эквипотенциалами при переходе из свободного пространства в диэлектрическую пленку и далее в диэлектрическое полупространство. Это связано с естественной экранировкой электрического поля в диэлектрике, возникающей за счет индуцированных зарядов. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. Важное свойство полученного распределения поля — его характерный размер приближенно равен размеру острия, т.е. при наноразмерах острия и фокальное пятно на пленке фоторезиста будет наноразмеров. Полученное решение строго доказывает возможность нанолитографии, основанной на полимеризации фоторезиста в фокусе описанного возбужденного металлического острия с наноразмерной точностью.

Возникает вопрос: а можно ли использовать рассмотренную схему для полимеризации фоторезиста, расположенного на поверхности металла? Чтобы ответить на этот вопрос, были проведены расчеты для полупространства за пленкой, заполненного металлом, конкретно золотом с $\epsilon_d = \epsilon_m = -11.6 + i1.2$ на рассматриваемой рабочей частоте. На рис. 7б показаны результаты расчетов распределения для такой задачи. Все остальные размеры и диэлектрические проницаемости были теми же (кроме $\epsilon_d = \epsilon_m$). Из рис. 7б видно, что сделанные для предыдущей задачи выводы качественно сохраняются. Кроме того, можно сказать, что электромагнитное поле более сконцентрировано в пленке в окрестности острия, чем в предыдущем случае диэлектрической подложки. Полученный результат можно применять в прикладных задачах нанолитографии и использовать технологические слои металла под пленкой фоторезиста для более острой фокусировки поля.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ К ЗАДАЧАМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД

Известно, что существует аналогия между задачами электростатики и стационарными задачами теплопроводности (см. [24], гл. 12). Аналогичны не только соответствующие уравнения, но и граничные условия [25–28]. Если в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах, заменить одновременно: 1) потенциал ϕ — на температуру $(T - T_0)$, где T_0 — температура на бесконечности; 2) диэлектрическую проницаемость ϵ — на коэффициент теплопроводности K ; 3) вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \phi$ — на плотность потока тепла $\mathbf{h} = -K \nabla T$; 4) точечный заряд q — на мощность тепловыделения точечного источника Q_h , то можно решить аналогичные задачи тем же методом.

Например, чтобы решить задачу распределения температуры в окрестности вершины параболического острия, нагретого до постоянной

температуры T_m , можно сначала решить электростатическую задачу распределения потенциала в окрестности острия, при постоянном потенциале U . Для этого надо перейти к нормированным координатам и потенциалам (нормировка потенциала на U), как в уже рассмотренной задаче. Решение в области между острием и пленкой найдем, как и выше, в виде $\tilde{\Phi}_s = \sum_{j=1}^N A_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) K_0(\lambda_j \tilde{\beta})$.

Условия на границе запишем в виде $\tilde{\Phi}_{\text{tot}}|_{\tilde{y}=0} = 1$

в N точках коллокации. Получится N линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, из которых находим константы разложения A_j и потенциалы во всем пространстве. Это будет также решением упомянутой аналогичной задачи теплопроводности в нормированных координатах (при указанной замене величин и обозначений). Результат расчетов распределения температуры (точнее превышения температуры над внешней температурой T_0 , выраженное в единицах $T_m - T_0$) в задаче о нагретом острии показан на рис. 8.

Полученное нормированное температурное распределение так же, как и в случае распределения нормированных потенциалов, обладает следующим свойством: оно зависит от отношений коэффициентов теплопроводности областей. То есть, если увеличить все коэффициенты в k раз, то нормированное распределение температуры не изменится в нормированных координатах. В частности, на рис. 8 показано температурное распределение при значениях коэффициентов теплопроводности $K_f = 1$, $K_p = 2$, $K_d = 4$.

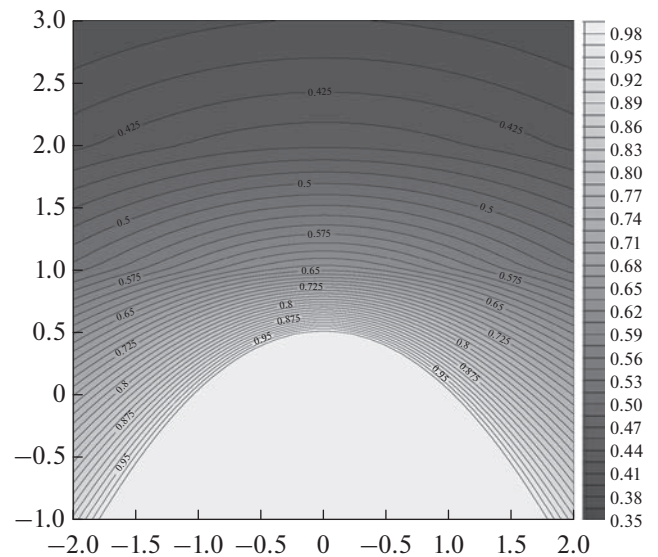


Рис. 8. Распределение превышения температуры над внешней температурой T_0 , нормированное на превышение температуры острия $T_m - T_0$ в координатах, нормированных на радиус закругления вершины: коэффициенты теплопроводности $K_f = 1$, $K_p = 2$, $K_d = 4$.

Особо отметим, что аналогия между электростатической и теплопроводной задачами не означает, что распределение электрического потенциала в вакууме аналогично распределению температуры в вакууме. В рассмотренном случае аналог вакуума — среда с конечным коэффициентом теплопроводности $K_f = 1$. Если взять этот коэффициент $K_f = k$ и, кроме того, $K_p = 2k$ и $K_d = 4k$, где k — произвольное число, то распределение нормированной температуры на рис. 8 останется прежним.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена оригинальная матричная техника нахождения фундаментального решения оператора Лапласа для плоскостойких сред на примере электростатической задачи. Обобщение метода зеркальных отражений для плоскостойких сред дано в формулировке, позволяющей использовать преимущество предложенной матричной техники. Главными преимуществами развитого метода являются его логическая простота и возможность обобщения решения на многослойные структуры и, в пределе, на градиентные пленки. Применение метода для нахождения фокального распределения электрического поля в окрестности нановершины металлического микроострия, расположенного рядом с пленкой фоторезиста, позволяет описывать проникновение поля в пленку и, таким образом, решать практические задачи нанолитографии. Показана общность предложенного теоретического метода на примере решения задачи нахождения температурного поля в окрестности равномерно нагретого острия, расположенного вблизи теплопроводящей пленки и полупространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Angelis F., Das G., Candeloro P. et al. Nanoscale Chemical Mapping Using Three-dimensional Adiabatic Compression of Surface Plasmon Polaritons // Nature Nanotech. 2010. V. 5. P. 67.
2. Frey H.G., Keilmann F., Kriele A., Guckenberger R. Enhancing the Resolution of Scanning near-field Optical Microscopy by a Metal Tip Grown on an Aperture Probe // Appl. Phys. Lett. 2002. V. 81. P. 5030.
3. Stockman M.I. Nanofocusing of Optical Energy in Tapered Plasmonic Waveguides // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 137404.
4. Петрин А.Б. О двух режимах нанофокусировки поверхностной плазмонно-поляритонной волны на вершине металлического микроострия // ТВТ. 2012. Т. 50. № 1. С. 18.
5. Giugni A., Allione M., Torre B. et al. Adiabatic Nanofocusing: Spectroscopy, Transport, and Imaging Investigation of the Nano World // J. Opt. 2014. V. 16. P. 114003.
6. Giugni A., Torre B., Toma A. et al. Hot-electron Nanoscopy Using Adiabatic Compression of Surface Plasmons // Nature Nanotech. 2013. V. 8. № 11. P. 845.
7. Петрин А.Б. Нанофокусировка света на вершине металлического острия // Успехи прикл. физики. 2015. Т. 3. № 3. С. 236.
8. Петрин А.Б. О фокусировке поверхностной плазмонной волны на вершине металлического микроострия // Квантовая электроника. 2015. Т. 45. № 7. С. 658.
9. Петрин А.Б. О нанофокусировке оптической ТЕМоды на нановершине металлического микроострия // Прикл. физика. 2016. № 1. С. 11.
10. Chew W.C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. N.Y.: IEEE Press, 1995.
11. Петрин А.Б. Элементарный излучатель, расположенный на границе или внутри слоистой структуры // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 11. С. 1676.
12. Петрин А.Б. Излучение в дальней зоне элементарного излучателя, расположенного на границе плоскостойкой структуры // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 12. С. 1874.
13. Петрин А.Б. Элементарный излучатель на границе плоскостойкой структуры // ЖЭТФ. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
14. King R.W.P., Smith G.S. Antennas in Matter. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1981.
15. King R.W.P. The Propagation of Signals Along a Three-layered Region // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1988. V. 36. № 6. P. 1080.
16. Петрин А.Б. О теории плоской линзы из материала с отрицательным преломлением // Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129. № 1. С. 55.
17. Сивухин Д.В. Общий курс физики. III. Электричество. М.: Наука, 1977.
18. Петрин А.Б. О нанофокусировке света на вершине металлического микроострия, расположенного над плоскостойкой структурой // Успехи прикл. физики. 2016. Т. 4. № 4. С. 326.
19. Петрин А.Б. Нанофокусировка света на вершине металлического микроострия, расположенного вблизи многослойной тонкопленочной структуры: теория и возможные приложения // ТВТ. 2019. Т. 57. № 1. С. 20.
20. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967.
21. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
22. Численные методы теории дифракции (Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29). Сб. ст. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
23. Новотный Л., Хехт Б. Основы нанооптики / Под ред. Самарцева В.В. М.: Физматлит, 2009.
24. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1965.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
26. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.
27. Петрин А.Б. О фундаментальном решении задач электростатики и теплопроводности для плоскостойких сред // ТВТ. 2022. Т. 60. № 5. С. 740.
28. Петрин А.Б. О задаче теплопроводности для нестационарного точечного источника тепла в плоскостойкой среде // ТВТ. 2023. Т. 61. № 1. С. 118.