

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ СО СЛОЕМ ПЕНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХЖИДКОСТНОГО ПОДХОДА

© 2023 г. П. А. Чупров^{1, 2, *}, П. С. Уткин¹, С. В. Фортова², А. Д. Киверин¹¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия²Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

*E-mail: petchu@mail.ru

Поступила в редакцию 23.09.2022 г.

После доработки 23.09.2022 г.

Принята к публикации 06.12.2022 г.

Работа посвящена изучению применимости двухжидкостной модели Баера–Нунциато к задаче взаимодействия ударной волны со слоем пены. Сформулирована определяющая система уравнений. Предложен и детально описан вычислительный алгоритм на основе схемы Хартена–Лакса–Ван Лира с разрешением контактного разрыва, включающий стадии релаксации скоростей и давлений фаз. С использованием предложенной вычислительной технологии рассмотрена задача распространения слабого возмущения в двухфазной среде. Получена скорость распространения, близкая к оценке по формуле Вуда. Также рассмотрена задача о взаимодействии ударной волны со слоем пены у непроницаемой стенки. Постановка соответствует натурным экспериментам. Описана нестационарная волновая динамика, реализующаяся в данной задаче в рамках предложенной модели. Получено хорошее качественное и количественное соответствие между результатами расчета и экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0040364423030067

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время пены получили широкое распространение в различных отраслях. В частности, пены рассматриваются как экраны для подавления взрывных нагрузок при развитии взрывов [1, 2]. Вместе с тем в недавних работах [3, 4] продемонстрировано, что пена сама может выступать в качестве горючего материала при содержании в ней химически активных компонент. Так, например, при приготовлении пены на основе эмульсии углеводорода в воде и кислорода, используемого в качестве вспенивающего газа, при локальном подводе энергии в пене формируется волна горения, распространяющаяся с относительно высокой скоростью по сравнению с нормальной скоростью горения в предварительно перемешанной смеси углеводорода с кислородом [3]. При замене кислорода горючей газовой смесью (например, водород-кислородной) волна горения в пене способна ускоряться и даже переходить в детонацию [4]. Таким образом, полученные в [3, 4] результаты указывают на возможные пути эффективного сжигания водонасыщенных углеводородов [5], что актуально, в частности, для устранения разливов нефти на поверхности водоемов или утилизации сырой нефти на объектах добычи. При этом развитие процессов горения в

горючих пенах имеет сугубо нестационарный характер, и распространение пламени сопровождается генерацией и распространением в пене акустических и ударных волн (УВ) [6]. Здесь важно отметить, что экспериментальная диагностика нестационарных динамических процессов в пенах затруднена ввиду непрозрачности двухфазной среды, и мощным инструментом анализа протекающих в пенах динамических процессов является математическое моделирование.

На основе газодинамики двухфазных течений разработано множество математических моделей для численного анализа динамических процессов в пенах [7–9]. При этом опыт использования таких моделей показывает, что, по крайней мере, на качественном уровне даже столь сложные процессы, как распространение пламени в пене, воспроизводятся в вычислительном эксперименте [10, 11]. Стоит, однако, отметить, что количественное согласие расчета с экспериментальными данными достигается не всегда [3] и требуются дополнительные доработки моделей с учетом физических факторов, определяющих динамику многофазной среды. В частности, одним из факторов, определяющих динамику пены, является уплотнение структуры пены, в ходе которого жидкость перемещается, а газ сжимается. В недавней работе [12] для слоя плотноупакованных частиц пред-

ложена модель типа Баера–Нунциато (БН) [13], учитывающая эффект уплотнения структуры. Предполагается, что использование такой модели должно повысить точность расчетов динамических процессов в пенах.

Целью настоящей работы являются создание вычислительной технологии на основе модели БН и численного метода Хартена–Лакса–Ван Лира с разрешением контактного разрыва (ХЛЛК) для моделирования ударно-волновых процессов в пенных средах с учетом эффекта уплотнения структуры пены и последующая ее верификация на основе сравнения с экспериментальными данными.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель основывается на системе уравнений [13, 14] для описания течений двухфазных сжимаемых сред

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u})\bar{\alpha}_x + \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E} \\ \alpha\rho \\ \alpha\rho v \\ \alpha\rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{v}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{v}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho v \\ \alpha(\rho v^2 + p) \\ \alpha v(\rho E + p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -\bar{v} \\ 0 \\ \bar{p} \\ \bar{p}\bar{v} \\ 0 \\ -\bar{p} \\ -\bar{p}\bar{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mu(\bar{p} - p) \\ 0 \\ -\lambda(\bar{v} - v) \\ \mu\bar{p}(p - \bar{p}) - \lambda\bar{v}(\bar{v} - v) \\ 0 \\ \lambda(\bar{v} - v) \\ -\mu\bar{p}(p - \bar{p}) + \lambda\bar{v}(\bar{v} - v) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\bar{\alpha} + \alpha = 1,$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{v}^2}{2} + \bar{e}(\bar{\rho}, \bar{p}) = \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{p} + \bar{\gamma}\bar{P}_0}{\bar{\rho}(\bar{\gamma} - 1)},$$

$$E = \frac{v^2}{2} + e(\rho, p) = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор консервативных переменных; $\mathbf{f}$ – вектор дифференциального потока; $\mathbf{h}(\mathbf{u})\bar{\alpha}_x$ – дифференциальный источниковый член; $\mathbf{p}$ – алгебраический источниковый член, связанный с релаксацией давлений и скоростей фаз. При записи системы уравнений использованы стандартные обозначения: t – время, x – пространственная координата, α – объемная доля, ρ – истинная плотность, v – скорость, p – давление, E – удельная полная энергия, e – удельная внутренняя энергия. Таким образом, пена считается гетерогенной

средой, состоящей из двух несмешивающихся фаз: газовой и жидкой. Параметры с верхней чертой относятся к жидкой фазе, без черты – к газовой. Скорость и давление с верхней тильдой соответствуют параметрам на межфазной границе и предполагаются равными

$$\tilde{p} = \alpha p + \bar{\alpha}\bar{p}, \quad \tilde{v} = \frac{\alpha\rho v + \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v}}{\alpha\rho + \bar{\alpha}\bar{\rho}}. \quad (4)$$

Отметим, что выбор соотношений для $\tilde{p}$ и $\tilde{v}$ является не единственным возможным. Это связано с необходимостью осреднения характеристик, вообще говоря, многомерного движения границ раздела фаз в объеме двухфазной среды. В качестве уравнения состояния (УРС) для газовой фазы используется УРС идеального газа с показателем адиабаты γ . Для воды применяется двучленное УРС с параметрами $\bar{\gamma}$ и $\bar{P}_0$.

Параметры μ и λ отвечают за релаксацию давлений и скоростей фаз соответственно. В рамках данной работы предполагается так называемая жесткая, или мгновенная, релаксация давлений и скоростей фаз на межфазных границах при условиях

$$p = \bar{p}, \quad (5)$$

$$v = \bar{v}. \quad (6)$$

Конкретный вид компонентов вектора $\mathbf{p}$ имеет смысл для конечных значений коэффициентов μ и λ , а условия (5), (6) как предельный переход при $\mu \rightarrow +\infty$ и $\lambda \rightarrow +\infty$ обосновываются в работах [13, 14]. С вычислительной точки зрения условия (5), (6) реализуются в рамках процедур релаксации скоростей и давлений (см. следующий раздел).

Описанная модель (1)–(6) использовалась ранее в [15, 16] для численного исследования процесса высокоскоростного соударения металлических пластин. По-видимому, впервые модель БН, сходная с описанной выше, была применена для описания ударно-волновых процессов в пенных средах в [17]. Одно из основных отличий модели [17] от описанной модели заключается в виде релаксационных членов. В частности, в правой части первого уравнения системы (1) в [17] используется член вида

$$\mathbf{p}_1 = \mu(\bar{p} - p - \beta), \quad (7)$$

где β – напряжения, связанные с контактными силами, которые возникают в двухфазной среде при силовом воздействии на нее. Конкретный вид члена β должен определяться реологией двухфазной среды. Так, в [12] при рассмотрении задачи падения УВ на плотный слой частиц член β соответствовал так называемым межгранулярным напряжениям, которые возникают, когда гранулы порошковой среды уплотняются до объемной доли, близкой к плотной упаковке. При этом дальнейшее увеличение объемной доли частиц в соответствии с физикой процесса не должно происходить за

счет резкого увеличения межгранулярных напряжений из-за того, что частицы двухфазной среды должны находиться в плотном контакте друг с другом. Этот эффект достигается за счет выбора β как пороговой функции от объемной доли частиц $\bar{\alpha}$: ноль до определенной величины объемной доли частиц и некоторая функция $\bar{\alpha}$ после. В [17] для исследования полиуретановых пен в качестве β использовалось значение, которое рассчитывалось на основе работы [18], в которой проводилось теоретическое рассмотрение одиночной ячейки пены.

Таким образом, принципиально в модель вида (1) возможно включить механизм учета отклика “каркаса” двухфазной среды при ее уплотнении, т.е. β . В зависимости от рассматриваемой среды β может быть сложно устроенной функцией локальных объемных долей и плотностей фаз, а также определяться набором калибровочных параметров. В настоящей работе подобная возможность не реализована, поскольку рассматривались случаи с не очень высоким объемным содержанием жидкости.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Вычислительный алгоритм основан на методе расщепления по физическим процессам:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = L_{rp} L_{rv} L_h \mathbf{U}_j^n.$$

Здесь $\mathbf{U}$ — рассчитываемая сеточная функция, j — пространственный индекс, n — временной индекс, L_h — аппроксимация гиперболического

оператора, L_{rv} — оператор релаксации скоростей фаз, L_{rp} — оператор релаксации давлений фаз.

Гиперболический шаг. Действие гиперболического оператора L_h основано на варианте схемы ХЛЛК [19], которая ранее применялась для моделирования распространения УВ над плотным слоем частиц [20]. Построим отдельно аппроксимацию первого уравнения системы (1)

$$\bar{\alpha}_t + \tilde{v} \bar{\alpha}_x = 0 \quad (8)$$

и аппроксимацию оставшейся части системы:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u}) \bar{\alpha}_x,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \bar{p} \\ \bar{\alpha} \bar{p} \bar{v} \\ \bar{\alpha} \bar{p} \bar{E} \\ \alpha \rho \\ \alpha \rho v \\ \alpha \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \bar{p} \bar{v} \\ \bar{\alpha} (\bar{p} \bar{v}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha} \bar{v} (\bar{p} \bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha \rho v \\ \alpha (\rho v^2 + p) \\ \alpha v (\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{p} \\ \tilde{p} \tilde{v} \\ 0 \\ -\tilde{p} \\ -\tilde{p} \tilde{v} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Конечно-объемная аппроксимация (9) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{U}_{hi}^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}_{i-1/2}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n) \right] + \mathbf{H}(\mathbf{U}_i^n) \Delta(\bar{\alpha})_x. \quad (10)$$

Численный поток $\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$ рассчитывается с помощью схемы ХЛЛК:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \begin{bmatrix} \Phi_{i+1/2}^+ \\ \Phi_{i+1/2}^- \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_i^n = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i^n \\ \bar{\mathbf{W}}_i^n \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{i+1/2} = \begin{cases} \Phi_i^n, & \text{если } S_{i+1/2}^- \geq 0, \\ \Phi_i^n + S_{i+1/2}^-(\mathbf{Q}_*^* - \mathbf{W}_i^n), & \text{если } S_{i+1/2}^- < 0 \text{ и } S_{i+1/2}^* \geq 0, \\ \Phi_{i+1}^n + S_{i+1/2}^+(\mathbf{Q}_*^* - \mathbf{W}_{i+1}^n), & \text{если } S_{i+1/2}^* < 0 \text{ и } S_{i+1/2}^+ \geq 0, \\ \Phi_{i+1}^n, & \text{если } S_{i+1/2}^+ \leq 0, \end{cases}$$

$$S_{i+1/2}^+ = \max(v_i^n + c_i^n, v_{i+1}^n + c_{i+1}^n), \quad S_{i+1/2}^- = \min(v_i^n - c_i^n, v_{i+1}^n - c_{i+1}^n),$$

$$S_{i+1/2}^* = \frac{p_{i+1}^n - p_i^n + \rho_i^n v_i^n (S_{i+1/2}^- - v_i^n) - \rho_{i+1}^n v_{i+1}^n (S_{i+1/2}^+ - v_{i+1}^n)}{\rho_i^n (S_{i+1/2}^- - v_i^n) - \rho_{i+1}^n (S_{i+1/2}^+ - v_{i+1}^n)},$$

$$\mathbf{Q}_*^* = \begin{bmatrix} C^- & C^- S_{i+1/2}^* & C^- \left[\frac{p_i^n}{\rho_i^n} + (S_{i+1/2}^* - v_i^n) \left(S_{i+1/2}^* + \frac{p_i^n}{\rho_i^n (S_{i+1/2}^- - v_i^n)} \right) \right] \end{bmatrix}^T,$$

$$C^- = \frac{\alpha_i^n \rho_i^n (S_{i+1/2}^- - v_i^n)}{S_{i+1/2}^- - S_{i+1/2}^*},$$

$$\mathbf{Q}_*^+ = \left[C^+ \quad C^+ S_{i+1/2}^* \quad C^+ \left[\frac{p_{i+1}^n}{\rho_{i+1}^n} + (S_{i+1/2}^* - v_{i+1}^n) \left(S_{i+1/2}^* + \frac{p_{i+1}^n}{\rho_{i+1}^n (S_{i+1/2}^* - v_{i+1}^n)} \right) \right] \right]^T,$$

$$C^+ = \frac{\alpha_{i+1}^n \rho_{i+1}^n (S_{i+1/2}^* - v_{i+1}^n)}{S_{i+1/2}^+ - S_{i+1/2}^*}.$$

Здесь c — скорость звука. Численные потоки для подсистемы жидкой фазы получаются непосредственно из приведенных формул путем замены параметров без черты сверху на параметры с чертой.

Аппроксимация $\Delta(\bar{\alpha})_x$ в (10) выполняется следующим образом:

$$\Delta(\bar{\alpha})_x = \frac{1}{\Delta x} (\delta_{i+1/2} - \delta_{i-1/2}),$$

$$\delta_{i+1/2} = \begin{cases} \bar{\alpha}_i^n, & \text{если } \bar{S}_{i+1/2}^* \geq 0, \\ \bar{\alpha}_{i+1}^n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наконец, разностная аппроксимация (8) выглядит следующим образом:

$$\bar{\alpha}_{h,i}^{n+1} = \bar{\alpha}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\bar{S}_{i+1/2}^* \delta_{i+1/2} - \bar{S}_{i-1/2}^* \delta_{i-1/2}].$$

В условиях задачи с движущимися явными межфазными границами после расчета гиперболического шага в ячейке может возникнуть случай отсутствия жидкой фазы. Если после гиперболического этапа возникает одна из двух ситуаций:

$$\bar{\alpha}_{h,i}^{n+1} < \varepsilon \quad \text{или} \quad \bar{p}_{h,i}^{n+1} < 0,$$

то для повышения устойчивости решения применяется поправка

$$\bar{v}_{h,i}^{n+1} = 0, \quad \bar{p}_{h,i}^{n+1} = p_{h,i}^{n+1}.$$

Значение малого параметра ε в рассмотренных задачах взято равным 10^{-6} .

Для повышения порядка точности численного метода на гиперболическом шаге использовалось восполнение сеточных функций — компонент векторов консервативных переменных в расчетных ячейках с использованием ограничителя minmod.

Релаксация скоростей фаз. На этапе релаксации скоростей в каждой расчетной ячейке формально решается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} d\bar{\alpha}/dt = 0, \\ d(\bar{\alpha}\bar{\rho})/dt = 0, \\ d(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v})/dt = -\lambda(\bar{v} - v), \\ d(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E})/dt = -\lambda\tilde{v}(\bar{v} - v), \\ d(\alpha\rho)/dt = 0, \\ d(\alpha\rho v)/dt = \lambda(\bar{v} - v), \\ d(\alpha\rho E)/dt = \lambda\tilde{v}(\bar{v} - v). \end{cases} \quad (11)$$

Предполагается, что для достижения условия равновесия (6) релаксационный коэффициент λ стремится к бесконечности. Данное предположение приводит к следующей равновесной скорости фаз в каждой расчетной ячейке [14]:

$$v_{rv,i}^{n+1} = \frac{\alpha_{h,i}^{n+1} \rho_{h,i}^{n+1} v_{h,i}^{n+1} + \bar{\alpha}_{h,i}^{n+1} \bar{\rho}_{h,i}^{n+1} \bar{v}_{h,i}^{n+1}}{\alpha_{h,i}^{n+1} \rho_{h,i}^{n+1} + \bar{\alpha}_{h,i}^{n+1} \bar{\rho}_{h,i}^{n+1}}.$$

После определения новой скорости требуется провести корректировку внутренней энергии для каждой фазы:

$$e_{rv,i}^{n+1} = e_{h,i}^{n+1} + \frac{1}{2} (v_{rv,i}^{n+1} - v_{h,i}^{n+1})^2,$$

$$\bar{e}_{rv,i}^{n+1} = \bar{e}_{h,i}^{n+1} + \frac{1}{2} (v_{rv,i}^{n+1} - \bar{v}_{h,i}^{n+1})^2.$$

Поскольку, как видно из первого, второго и пятого уравнений системы (11), истинная плотность каждой из фаз, как и их объемные доли, на этапе релаксации скоростей не меняются, корректировка внутренней энергии приводит к корректировке давлений фаз до значений $p_{rv,i}^{n+1}$ и $\bar{p}_{rv,i}^{n+1}$:

$$p_{rv,i}^{n+1} = p_{h,i}^{n+1} + \frac{\rho_{h,i}^{n+1} (\gamma - 1)}{2} (v_{rv,i}^{n+1} - v_{h,i}^{n+1})^2,$$

$$\bar{p}_{rv,i}^{n+1} = \bar{p}_{h,i}^{n+1} - \bar{\gamma} \bar{p}_0 + \frac{\bar{\rho}_{h,i}^{n+1} (\bar{\gamma} - 1)}{2} (v_{rv,i}^{n+1} - \bar{v}_{h,i}^{n+1})^2.$$

Релаксация давлений фаз. На этапе релаксации давлений в каждой расчетной ячейке формально решается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений [14]:

$$\begin{cases} d\bar{\alpha}/dt = \mu(\bar{p} - p), \\ d(\bar{\alpha}\bar{\rho})/dt = 0, \\ d(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v})/dt = 0, \\ d(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E})/dt = \mu\tilde{p}(p - \bar{p}), \\ d(\alpha\rho)/dt = 0, \\ d(\alpha\rho v)/dt = 0, \\ d(\alpha\rho E)/dt = -\mu\tilde{p}(p - \bar{p}). \end{cases} \quad (12)$$

Процедура релаксации давлений следует той же идее, что и процедура релаксации скоростей. При стремлении параметра релаксации μ в системе уравнений (12) к бесконечности давления фаз после процедуры релаксации должны выравниваться и стать равными p_i^{n+1} . В качестве следствия уравнений системы (12) можно выписать следующие уравнения для внутренней энергии каждой из фаз:

$$\frac{de}{dt} = -\tilde{p} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad \frac{d\bar{e}}{dt} = -\tilde{p} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right). \quad (13)$$

Разностная аппроксимация уравнений (13) по формуле трапеций приводит к

$$\begin{aligned} e_i^{n+1} - e_{rv,i}^{n+1} &= -\frac{1}{2} (p_i^{n+1} + \tilde{p}_{rv,i}^{n+1}) \left(\frac{1}{\rho_i^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{h,i}^{n+1}} \right), \\ \bar{e}_i^{n+1} - \bar{e}_{rv,i}^{n+1} &= -\frac{1}{2} (p_i^{n+1} + \tilde{p}_{rv,i}^{n+1}) \left(\frac{1}{\bar{\rho}_i^{n+1}} - \frac{1}{\bar{\rho}_{h,i}^{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя УРС для каждой из фаз, условие (2) и формулы (14), получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений для поиска неизвестных величин p_i^{n+1} , ρ_i^{n+1} и $\bar{p}_i^{n+1}$:

$$\begin{cases} \frac{p_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}(\gamma-1)} - \frac{p_{rv,i}^{n+1}}{\rho_{h,i}^{n+1}(\gamma-1)} = \\ = -\frac{1}{2} (p_i^{n+1} + \tilde{p}_{rv,i}^{n+1}) \left(\frac{1}{\rho_i^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{h,i}^{n+1}} \right), \\ \frac{p_i^{n+1} + \bar{\gamma}\bar{P}_0}{\bar{\rho}_i^{n+1}(\bar{\gamma}-1)} - \frac{\bar{p}_{rv,i}^{n+1} + \bar{\gamma}\bar{P}_0}{\bar{\rho}_{h,i}^{n+1}(\bar{\gamma}-1)} = \\ = -\frac{1}{2} (p_i^{n+1} + \tilde{p}_{rv,i}^{n+1}) \left(\frac{1}{\bar{\rho}_i^{n+1}} - \frac{1}{\bar{\rho}_{h,i}^{n+1}} \right), \\ \frac{\alpha_{h,i}^{n+1} \rho_{h,i}^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} + \frac{\bar{\alpha}_{h,i}^{n+1} \bar{\rho}_{h,i}^{n+1}}{\bar{\rho}_i^{n+1}} = 1. \end{cases} \quad (15)$$

В [21] показано, что система уравнений (15) сводится к квадратному уравнению относительно, например, ρ_i^{n+1} , приводятся решения этого уравнения, а также обсуждаются критерии отбора физически корректного решения.

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Определение скорости звука в двухфазной среде.

Рассмотрим сначала для целей верификации предложенной вычислительной технологии задачу об определении скорости звука в двухфазной среде. Пусть слабая УВ с числом Маха 1.1 падает из воздуха на границу раздела воздух–пена. Пена находится при нормальных условиях: $\rho_0 = 1.2 \text{ кг/м}^3$, $\bar{\rho}_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $p_0 = \bar{p}_0 = 10^5 \text{ Па}$. Координата границы раздела в начальный момент времени $x_0 = 2.5 \text{ мм}$. Начальная объемная доля воды в пене $\bar{\alpha}_0 = 0.1$. Скорость газа за падающей волной – 55 м/с, давление – 1.26 атм. Газ считается идеальным: $\gamma = 1.4$. Жидкость описывается двучленным уравнением состояния (3) с параметрами $\bar{\gamma} = 1.5$, $\bar{P}_0 = 10^9 \text{ Па}$.

Рис. 1 иллюстрирует рассчитанные распределения объемной доли жидкости и давления в три последовательные момента времени после начала взаимодействия УВ с пеной. Профили давления – плавные кривые, которые спадают от значения давления за волной, отраженной от границы пены, до начального давления в пене. Профили объемной доли жидкости демонстрируют нестационарность, по меньшей мере на начальной стадии процесса взаимодействия УВ с пеной. С течением времени происходит уплотнение структуры пены, объемная доля жидкости за фронтом распространяющейся звуковой волны непрерывно возрастает. Обратим внимание, если бы в модели присутствовал адекватный рассматриваемой за-

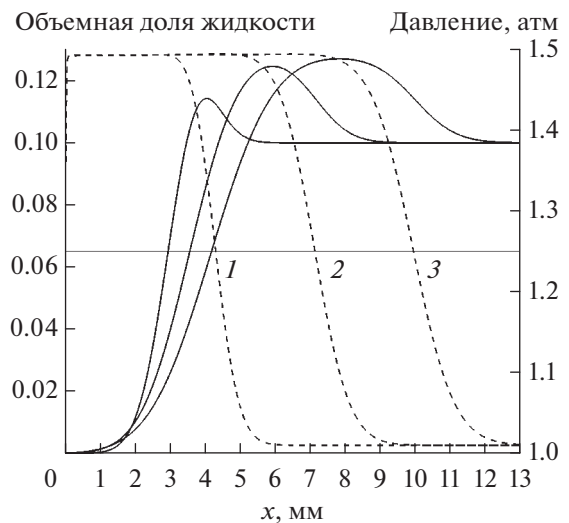


Рис. 1. Пространственные распределения объемной доли жидкости (сплошные линии) и давления (штриховые линии) в задаче об определении скорости звука в пене в моменты времени 40 (1), 100 (2) и 160 мкс (3).

даче член β (см. раздел Математическая модель), эффекта постоянного роста объемной доли удалось бы избежать за счет обратной реакции двухфазной среды на ее уплотнение. Тем не менее эффект нестационарного увеличения объемной доли практически не сказывается на динамике распространения звуковой волны в терминах давления.

В отличие от задачи о взаимодействии УВ со слоем пены у непроницаемой стенки, решение задачи об определении скорости звука в пене осуществлялось по схеме ХЛЛ [14], а не по схеме ХЛЛК. Данный факт хорошо заметен на профилях объемной доли на рис. 1. В силу значительной схемной вязкости метода ХЛЛ граница воздух–пена претерпевает численное “размазывание”, из-за которого объемная доля воды левее точки с координатой $x_0 = 2.5$ мм (где пены в принципе быть не должно) также значительна.

Скорость звука в пене оценивалась по кривым давления, представленным на рис. 1. В моменты времени 40, 100, 160 мкс определялись координаты точек P_1 , P_2 и P_3 внутри профиля, приблизительно соответствующих середине размазанного (как численно, так и физически) фронта (выбрано значение 1.25 атм – прямая на рис. 1). Скорость распространения возмущения в пене получилась равной (в м/с):

$$c_{\text{calc}} = \frac{x_{P_2} - x_{P_1}}{60 \text{ мкс}} \approx \frac{x_{P_3} - x_{P_2}}{60 \text{ мкс}} \approx 47.$$

Для теоретической оценки равновесной скорости звука в пене используется формула Вуда [22]

$$\frac{1}{c_{\text{th}}^2 ([1 - \bar{\alpha}_0] \rho_0 + \bar{\alpha}_0 \bar{\rho}_0)} = \frac{1 - \bar{\alpha}_0}{\rho_0 c_0^2} + \frac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0^2}, \quad (16)$$

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \approx 341, \quad \bar{c}_0 = \sqrt{\gamma \frac{\bar{p}_0 + \bar{P}_0}{\bar{\rho}_0}} \approx 1221.$$

Теоретическая оценка скорости звука по формуле (16) дает значение

$$c_{\text{th}} \approx 39.$$

Можно ожидать улучшения соответствия между расчетом и теорией при уменьшении интенсивности падающей УВ, т.е. при дальнейшем ее приближении к звуку, и при использовании численного метода более высокого порядка точности для уменьшения численного размазывания профиля давления.

Взаимодействие ударной волны со слоем у непроницаемой стенки. Рассмотрим теперь задачу о взаимодействии УВ со слоем пены, расположенным у нижнего торца вертикальной ударной трубы. Постановка задачи соответствует экспериментам [23], которые также рассматривались в расчетной работе [7]. Длина камеры низкого давления ударной трубы составляет 1.44 м, длина камеры высокого давления – 0.8 м. Толщина слоя



Рис. 2. Схематичная постановка задачи о взаимодействии УВ со слоем пены у стенки.

пены – 0.19 м. Датчики давления A , B , C располагаются на расстояниях 1.87, 2.10, 2.24 м соответственно от верхнего торца камеры высокого давления, который принимается за начало координат. На рис. 2 схематично проиллюстрирована постановка рассматриваемой задачи.

В начальный момент времени давление в камере низкого давления равно 0.1 МПа, в камере высокого давления – 0.48 МПа. Показатель адиабаты воздуха принимался равным 1.4. Начальная объемная доля воды в области, заполненной пеной, равна 0.03. Расчетная сетка равномерная с шагом 1 мм. В расчете не учитывается действие силы тяжести. Это вносит определенную погрешность в результаты моделирования по сравнению с экспериментальными данными, поскольку в эксперименте начальное распределение объемной доли в пене из-за действия силы тяжести было неоднородным. Данный эффект учитывался в расчетах [7].

Поясним механику процесса взаимодействия УВ со слоем пены у стенки в рамках используемой математической модели. Для этого проведем совместный анализ кривых давления с датчиков A , B , C (рис. 3) и пространственных распределений объемной доли воды и давления в несколько последовательных моментов времени (рис. 4). Распределения давления и объемной доли строятся в фиксированной области в окрестности нижнего торца канала. Первый скачок давления A_1A_2 на датчике A (рис. 3а) связан с приходом падающей УВ, которая на рис. 4а также обозначена как A_1A_2 . Второй скачок давления A_3A_4 соответству-

ет приходу на датчик давления A волны, отраженной от границы раздела воздух–пена (рис. 4б). При этом внутри пены идет волна сжатия B_1B_2 с более плавным профилем по сравнению с отраженной волной в газе. Фактически поведение этой волны изучалось выше для случая более слабой падающей волны. На распределении объемной доли воды видны одновременно движение границы пенного слоя вправо и локальное уплотнение пены, повышение объемной доли воды. На датчике давления B , который расположен внутри пены, волне сжатия соответствует участок B_1B_2 . Далее волна сжатия движется по направлению к стенке (рис. 4в). Пик давления C_1C_2 на датчике давления C – результат отражения волны сжатия от стенки (рис. 4в). Величина пика определяется не только интенсивностью падающей на пену волны, но и эффектом уплотнения пены. К моменту отражения волны сжатия от стенки пена значительно прижимается к стенке, у стенки наблюдается локальный максимум объемной доли воды (рис. 4г). Участки A_5A_6 (рис. 3а) и B_3B_4 (рис. 3б) с датчиков давления A и B обусловлены обратным прохождением волны сжатия, отраженной от стенки трубы.

Наконец, остается проанализировать колебательный характер кривых давления на датчиках на поздних временах. Колебания особенно заметны на датчиках B и C , см. участки B_4B_5 и C_3C_4 . Данный вопрос применительно к задаче о взаимодействии УВ со слоем частиц подробно рассматривался в [12]. Корректное качественное и количественное воспроизведение данного эффекта требует использования более сложной модели пенной среды (7) с точки зрения релаксации давлений фаз.

Рис. 3 содержит также экспериментальные данные. Исходные данные в [23], скорее всего, подвергались обработке, поскольку кривые давления содержат характерный высокочастотный шум, но его амплитуда очень низкая. Кроме того, экспериментальные кривые не синхронизованы по времени с моментом образования исходной УВ, поэтому также потребовалось вручную синхронизировать расчетные и экспериментальные данные по моменту прихода УВ на датчик A . Дополнительную погрешность внесла бы оцифровка экспериментальных данных. Принимая во внимание, что данная работа уже была проделана в [7], в качестве экспериментальных данных использовались соответствующие кривые из [7]. Это же упростит в дальнейшем проведение прямого сопоставления полученных расчетных данных с расчетными данными по модели [7]. Подобное направление исследований представляется важным, поскольку позволяет выявить существенные особенности того или иного подхода к описанию столь сложной задачи, как распространение удар-

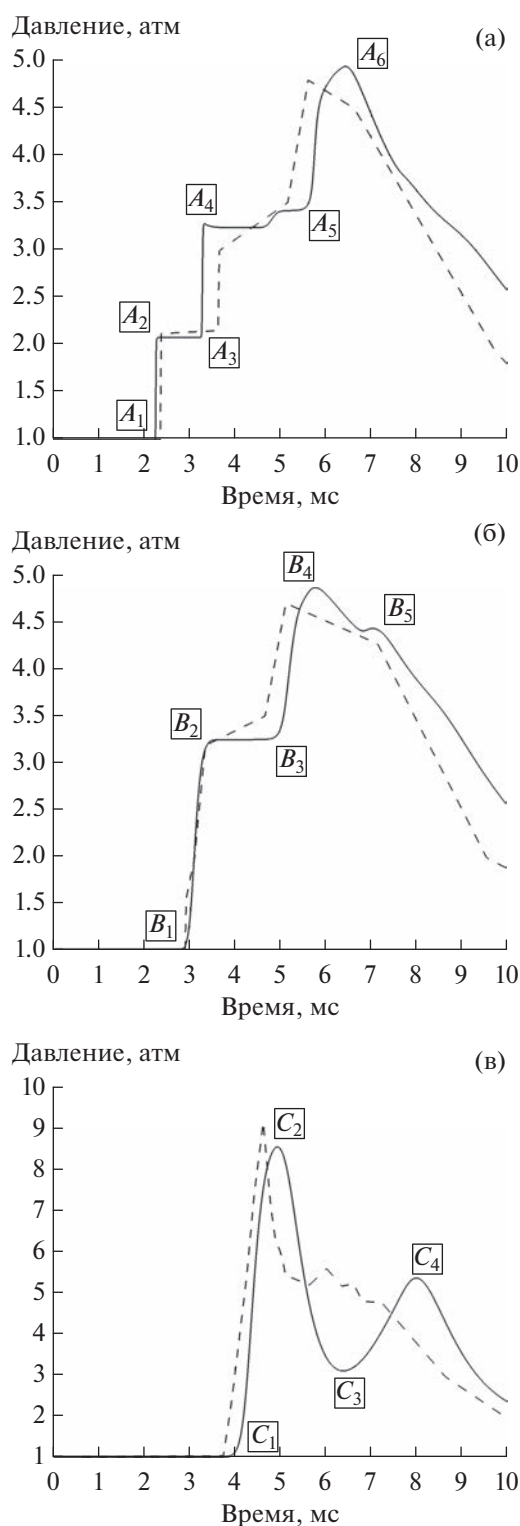


Рис. 3. Кривые давления, зарегистрированные датчиками A (а), B (б), C (в) в задаче о взаимодействии УВ со слоем пены у торца ударной трубы; сплошные линии – результаты расчета данной работы, штриховые – экспериментальные данные [23].

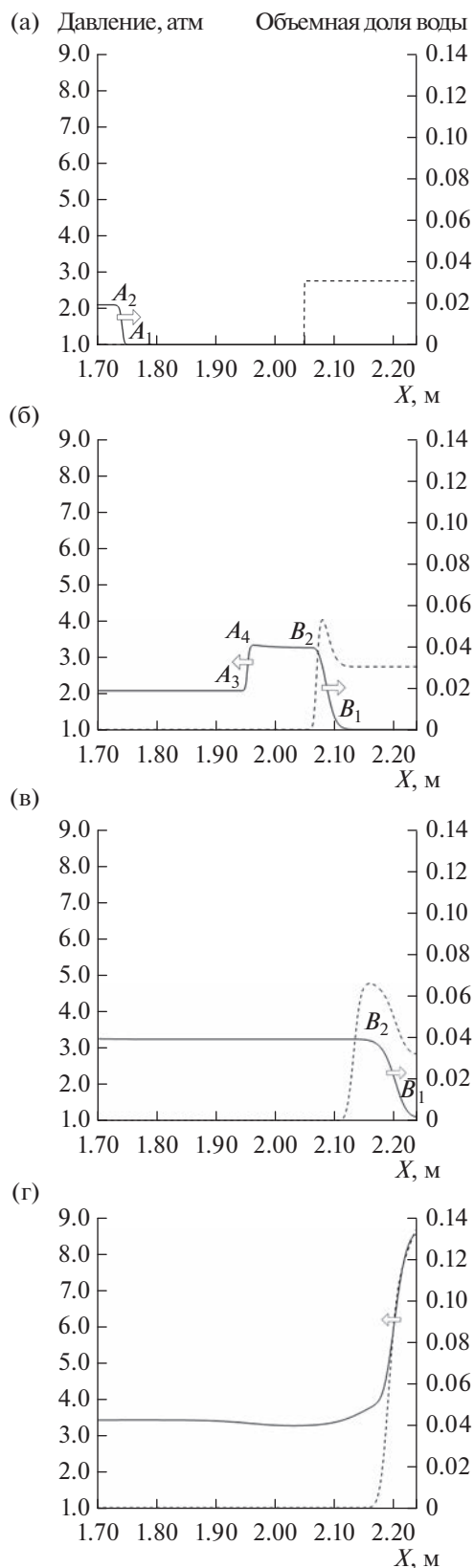


Рис. 4. Рассчитанные пространственные распределения давления (сплошные линии) и объемной доли воды (пунктирные линии) в последовательные моменты времени: (а) – 2 мс, (б) – 3, (в) – 4, (г) – 5; стрелки – направления движения волн.

но-волновых процессов в двухфазных средах. Так, в [12] расчет по модели БН задачи о взаимодействии УВ со слоем частиц у стенки сравнивался с данными, которые были получены в [24] по модели Р.И. Нигматулина [25].

Сравнивая полученные в данной работе результаты и экспериментальные данные, можно отметить, что амплитуды и скорости волн, которые описаны выше, воспроизводятся корректно. Наибольшая разница наблюдается на участке A_4A_5 на датчике A и, соответственно, на участке B_2B_3 на датчике B . Представляется, что данные отличия связаны с тем, что в рассматриваемой постановке не учитывается стратификация пены по высоте слоя из-за действия силы тяжести. Учет данного эффекта также является предметом дальнейшей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена газодинамическая модель процесса взаимодействия ударной волны с пеной с учетом уплотнения структуры пены согласно определяющей системе уравнений Баера–Нунциато. Вычислительный алгоритм основан на варианте схемы Хартена–Лакса–Ван Лира с разрешением контактного разрыва, которая ранее применялась для моделирования распространения ударной волны над плотным слоем частиц. С одной стороны, может показаться, что модель Баера–Нунциато является избыточной для рассматриваемой задачи, поскольку в модели учитывается сжимаемость обеих фаз: и газа, и воды. Вода же в рассматриваемом диапазоне давлений является фактически несжимаемой. С другой стороны, система уравнений Баера–Нунциато за счет этого является гиперболической. Это позволяет без дополнительных регулирующих коррекций на этапе вычислительного алгоритма, свойственных многим негиперболическим двухфазным моделям, описывать широкий спектр режимов течения, включая задачи с явными межфазными границами. Иллюстрацией данного утверждения является выполненное в статье решение задачи об определении скорости звука в двухфазной среде. При отсутствии каких-либо подгоночных коэффициентов или констант в подмоделях межфазного взаимодействия, основываясь только на уравнении состояния каждой из фаз, автоматически получается корректная скорость распространения слабых возмущений в двухфазной среде. Это также достигается за счет релаксационных механизмов для скоростей и давлений фаз, которые можно рассматривать как своего рода регулирующие процедуры с точки зрения вычислительного алгоритма, но при этом они имеют понятный физический смысл и являются универсальными для моделей типа Баера–Нунциато.

Компьютерная реализация предложенной математической модели апробирована на расчете динамических процессов в слое пены конечной толщины при воздействии ударной волны, падающей на поверхность пены из окружающего воздуха. Полученные численные результаты указывают, с одной стороны, на работоспособность предложенной модели, а с другой, на важную роль эффекта уплотнения пены при динамическом воздействии и необходимость его учета при математическом моделировании и описании нестационарных процессов, включая горение пены.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение с ОИВТ РАН № 075-15-2020-785 от 23 сентября 2020 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Британ А.Б., Зиновик И.Н., Левин В.А. Разрушение пены ударными волнами // ФГВ. 1992. № 5. С. 108.
2. Sembian S., Liverts M., Apazidis N. Attenuation of Strong External Blast by Foam Barriers // Phys. Fluids. 2016. V. 28. № 9. 096105.
3. Kichatov B., Korshunov A., Kiverin A., Son E. Foamed Emulsion – Fuel on the Base of Water-saturated Oils // Fuel. 2017. V. 203. P. 261.
4. Kichatov B., Korshunov A., Gubernov V., Kiverin A., Yakovenko I. Combustion of Heptane-in-Water Emulsion Foamed with Hydrogen–Oxygen Mixture // Fuel Proc. Technol. 2020. V. 198. 106230.
5. Kichatov B., Korshunov A., Kiverin A., Medvetskaya N. Combustion of Foamed Emulsion Prepared via Bubbling of Oxygen–Nitrogen Gaseous Mixture through the Oil-in-Water Emulsion // Fuel Proc. Technol. 2019. V. 186. P. 25.
6. Яковенко И.С., Киверин А.Д. Развитие нестационарных процессов горения во вспененных эмульсиях // ТВТ. 2022. Т. 60. № 6. С. 928.
7. Суров В.С. Об отражении воздушной ударной волны от слоя пены // ТВТ. 2000. Т. 38. № 1. С. 101.
8. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р. Влияние фазовых переходов на распространение акустических волн в многофракционных газозвесах с полидисперсными включениями // ТВТ. 2021. Т. 59. № 1. С. 133.
9. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с газовыми включениями, имеющими жидкую прослойку и вязкоупругую оболочку // ТВТ. 2021. Т. 59. № 4. С. 533.
10. Kiverin A., Yakovenko I., Kichatov B., Korshunov A. Ignition and Non-stationary Combustion of the Foamed Heptane-in-Water Emulsion: Experimental and Numerical Analysis // Fuel. 2022. V. 320. 123824.
11. Kiverin A., Yakovenko I. Numerical Modeling of Combustion and Detonation in Aqueous Foams // Energies. 2021. V. 14. № 19. 6233.
12. Poroshyna Y.E., Utkin P.S. Numerical Simulation of a Normally Incident Shock Wave – Dense Particles Layer Interaction Using the Godunov Solver for the Baer–Nunziato Equations // Int. J. Multiphase Flow. 2021. V. 142. 103718.
13. Baer M.R., Nunziato J.W. A Two-phase Mixture Theory for the Deflagration-to-detonation Transition in Reactive Granular Materials // Int. J. Multiphase Flow. 1986. V. 12. № 6. P. 861.
14. Saurel R., Abrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comput. Phys. 1999. V. 150. P. 425.
15. Уткин П.С., Фортובה С.В. Математическое моделирование высокоскоростного взаимодействия металлических пластин в рамках двухжидкостного эйлера-ва подхода // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58. № 8. С. 90.
16. Chuprov P., Utkin P., Fortova S. Numerical Simulation of a High-Speed Impact of Metal Plates Using a Three-Fluid Model // Metals. 2021. V. 11. № 8. 1233.
17. Baer M.R. A Numerical Study of Shock Wave Reflections on Low Density Foam // Shock Waves. 1992. V. 2. P. 121.
18. Warren W.E., Kraynik A.M. The Nonlinear Elastic Behavior of Open-cell Foams // J. Appl. Mech. 1991. V. 58. P. 376.
19. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Shock Waves. 1994. V. 4. P. 25.
20. Чупров П.А., Порошина Я.Э., Уткин П.С. Численное моделирование прохождения ударной волны над плотным слоем частиц в рамках уравнений Баера–Нунциато // Горение и взрыв. 2022. Т. 15. № 2. С. 67.
21. Уткин П.С. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода // Хим. физика. 2017. Т. 36. № 11. С. 61.
22. Wood A. A Textbook of Sound. London: G. Bell, 1941.
23. Британ А.Б., Зиновик И.Н., Левин В.А., Митичкин С.Ю., Тестов В.Г., Хайбо Ху. Особенности распространения газодинамических возмущений при взаимодействии ударных волн с двухфазными средами пенистой структуры // ЖТФ. 1995. Т. 65. № 7. С. 19.
24. Кутушев А.Г., Рудаков Д.А. Численное исследование воздействия ударной волны на преграду, экранную слоем пористой порошкообразной среды // ПМТФ. 1993. № 5. С. 25.
25. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.